Université Paris IX - Dauphine

UFR Mathématiques de la Décision

SYSTEMES DIFFERENTIELS EXTERIEURS ET APPLICATIONS AUX PROBLEMES INVERSES

THÈSE

pour l'obtention du titre de

Docteur en Sciences
Spécialité Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue par

Ngalla DJITTE

le 12 Juillet 2004

JURY

Directeurs de Thèse : **Ivar EKELAND**
Professeur émérite à l'Université Paris IX-Dauphine, France.

Mary Teuw NIANE
Professeur à l'Université Gaston Berger de Saint-Louis, Sénégal.

Rapporteurs : **Tewfik SARI**
Professeur à l'Université de Haute-Alsace, Mulhouse, France.

Pierre André CHIAPPORI
Professeur à l'Université de Chicago, Etats-Unis.

Examinateurs : **Eric SERE**
Professeur à l'Université de Paris IX-Dauphine, France.

Gane Samb LO
Professeur à l'Université Gaston Berger de Saint Louis, Sénégal.

A la mémoire de mon père
et de mon frére Diadie
A toute ma famille
A ma femme
A Mareme
A Amy.

Table des matières

Remerciements

Cette thèse a été dirigée par *Ivar Ekeland*. Je le remercie avant tout pour avoir guidé mes premiers pas dans la recherche avec générosité et patience. Je tiens également à lui exprimer ma gratitude pour le soutien constant qu'il m'a porté pendant cette période.

Je tiens à remercier et à exprimer ma profonde reconnaissance à *Mary Teuw Niane* qui a co-encadré cette thèse avec beaucoup de disponibilité. Son talent scientifique m'a été la source d'un grand enrichissement.

Pierre André Chiappori et *Tewfik Sari* ont eu la gentillesse de rapporter cette thèse. Je tiens à les remercier pour l'attention qu'ils lui ont portée.

Merci beaucoup à *Eric Séré* pour ses encouragements, ses questions et ses suggestions lors de la présoutenance et pour avoir accepté de participer à mon jury de soutenance.

Gane Samb LO m'a fait l'honneur de participer à mon jury. Je le remercie très sincèrement.

Merci à *Rabah Tahraoui* pour les nombreuses discussions que nous avons eues à Paris durant toutes ses dernières années.

Un grand merci à *Seydina Omar Dia* et à *Hycham Basta* pour les discussions fructueueses qu'on a eues à entretenir durant ses années.

Je tiens à remercier mes parents pour leur patience, leurs encouragements et leur fidélité.

Je remercie infiniment ma femme *Awa Ba* d'avoir supporté mes sauts d'humeur ainsi

que toutes les circonstances désagréables et imprévisibles qui ont accompagné ces quatres années de recherche.

Que *Aly Wane Diene*, *Yakham Ndiaye* et *Ibrahima Niang* trouvent ici les remerciements les plus sincères pour tout leur soutien et leurs encouragements.

Ce travail a été réalisé au **C**entre de **R**echerches de **M**athématiques de la **D**écision à l'Université Paris-IX Dauphine et au **L**aboratoire d'**A**nalyse **N**umérique et d'**I**nformatique à l'Université Gaston Berger de Saint Louis. J'ai eu le plaisir de cotoyer les membres de ces laboratoires et je souhaiterais tous les remercier.

Durant cette thèse, j'ai eu à bénéficier d'un séjour de deux mois à UBC (**U**niversity of **B**ritish Columbia) à **V**ancouver. Je tiens très sincèrement à remercier tout le personnel du département de mathématiques et du PIMS (**P**acific **I**nstitut for **M**athematical **S**ciences).

Cette thèse a été financée par le gouvernement français dans le cadre de sa coopération avec le Sénégal. Je remercie tous les responsables de ce programme, pour le temps et l'effort qu'ils ont consacrés pour l'amélioration de la qualité de cette bourse.

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse portent d'une part sur l'utilisation du calcul différentiel extérieur dans des problèmes d'optimisation, et notamment dans des problèmes inverses dans lesquels on cherche des conditions pour que des fonctions données soient solutions de problèmes d'optimisation, et d'autre part à quelques problèmes inverses issus du calcul des variations. La première partie est occupée part une introduction au calcul différentiel extérieur, dont une grande partie est consacrée au théorème de *Cartan-Kähler*, qui, aujourd'hui est devenu un outil puissant dans la résolution de beaucoup de problèmes d'identification qui apparaissent en économie. Dans la deuxième partie, on présente une approche différentielle du problème de Sonnenschein (voir, H.Sonnenschein, The utility hypothesis and market demand theory, Western Economic Journal 11 (1973), p. 404-410), problème classique en sciences économiques, où sa motivation consiste à voir dans quelles conditions une fonction de demande collective résulte t-elle du fonctionnement d'un marché organisé ? Des conditions nécessaires non triviales ont été connues depuis les années 70 mais leur suffisance n'avait jamais été établie. Avec l'aide du calcul différentiel extérieur, une réponse positive est donnée dans ce travail. La troisième partie est une étude du problème de Douglas (J. Douglas, Solution of the Inverse Problem of the Calculus of Variations, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), 71-128), qui consiste à classifier les courbes extrémales à un problème de calcul des variations. Dans ce travail, nous avons donné une approche différentielle du problème de Douglas. Des résultats connus (existence en dimension un et non existence en dimension deux) ont été retrouvés. L'approche utilisée nous a aussi permis de mieux comprendre, qu'en dimension deux, la non existence peut s'expliquer à travers certaines conditions supplémentaires. Dans la quatrième et dernière partie, on étudie un problème inverse en calcul des variations. Il s'agit de la reconstitution de certains opérateurs, définis entre espaces fonctionnels, à travers des problèmes de calcul des variations. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été établies grâce à des méthodes outres issues de l'optimisation et de l'analyse fonctionnelle. Les résultats obtenus fournissent un point de départ prometteur vers une extension de certains résultats d'intégration (voir, E.Slutsky, *Sulla teoria del bilancio del consomatore*, Giornale degli Economisti et Rivista di Statistica, 3, 51, p.1-26, 1915) dans la théorie du consommateur en dimension infinie.

Mots-clés : *problème inverse, système différentiel extérieur, variété intégrale, fonction d'utilité, fonction de demande agrégée, calcul des variations, solution extémale.*

Abstract

The work presented in this thesis deals, on one hand with some applications of *exterior differential calculus* to *inverse problems* which arise in *economic theory*, and on the other hand with some inverse problems from *calculus of variation*. In the first part, we provide an introduction to exterior differential calculus. In particular, we describe in some details the *Cartan-Kähler* theorem, theorem with many applications in economic and in other areas of mathematics. In the second part, we present a differential approach to *Sonnenschein*'s problem (*see*, H.Sonnenschein, The utility hypothesis and market demand theory, Western Economic Journal 11 (1973), p. 404-410), a classical problem in economic where its motivation consits of finding conditions on which an aggregate demand function can be recovered from a well organised market. Non trivial necessary conditions are known since 1970, but their sufficient is still an open problem. This will be investigated in this work with the help of tools from exterier differential calculus. The third part is devoted to the study of *Douglas*'s problem which consits to determine whether or not solutions of certain second order differential equations are extremal to some problems of *calculus of variation*. In the forth part, we study somes inverse problems from calculus of variations. We give necessary and sufficient conditions for some operators to be recovered from problems of calculus of variations. This work gives a first step for the extension of some kwon integrability results (see, E. Slutsky, *Sulla teoria del bilancio del consomatore*, Giornale degli Economisti et Rivista di Statistica, 3, 51, p.1-26, 1915) from consumer theory in economic and in finite dimensional.
Keywords : *inverse problem, exterior differential system, integral manifold, utility function, aggregate demand function, variational calculus, extremal solution.*

Introduction

L'objectif de cette thèse est l'étude de quelques problèmes inverses en utilisant la théorie du *Calcul Différentiel Extérieur* et particulièrement le théorème de *Cartan-Kähler* sur l'intégration des systèmes différentiels extérieurs.

Dans le premier chapitre, on introduira les notions de base et on énoncera les théorèmes fondamentaux du *Calcul Différentiel Extérieur*. En particulier, on énoncera de manière explicite le théorème d'intégration des systèmes différentiels extérieurs de Cartan-Kähler, qui est devenu un outil très puissant pour la résolution de beaucoup de problèmes d'identification qui apparaissent en économie, comme le montrent les séries d'articles de *P.A.Chiappori* et *I.Ekeland* sur la caractérisation et la désagrégation des fonctions de demande, voir [10],[11],[12] .

Dans le deuxième chapitre, on donnera une caractérisation de la fonction de demande agregée. La fonction de demande agrégée résulte de la sommation d'une multitude de fonctions de demandes individuelles. Plus concrètement, considérons une économie de K consommateurs. Chaque consommateur k est caractérisé par sa fonction d'utilité U^k et son budget normalisé à 1. Quand le prix du marché p est annoncé, le consommateur k fait sa demande $x^k(p)$ suivant le programme décisionnel suivant :

$$\begin{cases} \max U^k(x^k), \\ \\ p.x^k = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Notons par $X(p)$ la demande agrégée au prix p, alors elle est donnée par :

$$X(p) = x^1(p) + \ldots + x^k(p) \tag{2}$$

où $x^k(p)$ est la solution du problème d'optimisation (1).

Supposons qu'on puisse observer la demande agrégée d'une société de K individus, une question intèressante due à *Sonnenschein*(1972) (*voir* [33]) est la suivante : peut-on en déduire les demandes individuelles, et dans le cas affirmatif, peut-on retrouver les préférences individuelles ? Cette question économique nous conduit au problème mathématique suivant : étant donnée une fonction $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ ; existe-t-il K fonctions $x^1, \ldots x^K$, de classe C^∞ telles que :

$$X(p) = x^1(p) + \ldots + x^K(p) \tag{3}$$

où chaque x^k est solution d'un problème d'optimisation du type (1) ?

Dans [12], grâce à la théorie de *Cartan-Kähler*, *I.Ekeland* et *P.A. Chiappori* on résolu le problème dans le cas où $K = n$ et X analytique .

Dans ce présent travail, on présentera une approche différentielle du problème de *Sonnenschein* et on montrera que les conditions de *Browning-Chiappori* (*voir* [5]) sont nécessaires et suffisantes pour que X se décompose sous la forme (3).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème de *Douglas*. De manière plus précise : étant donnée une famille de courbes C^∞ dans l'espace de dimension $n+1$ $(t, x(t))$, avec $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, vérifiant le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}), \tag{4}$$

on cherche à déterminer toutes les fonctions scalaires $L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ telles que toute solution de (4) est une solution extrémale du problème de calcul des variations :

$$\inf_y \int L(y(t), \frac{dy}{dt}(t))\, dt. \tag{5}$$

En d'autres termes, on cherche à déterminer $L(x, y)$ de sorte que toute solution de (4) est solution des équations d'*Euler-Lagrange* :

$$\frac{d}{dt} L_y(x, \frac{dx}{dt}) = L_x(x, \frac{dx}{dt}). \tag{6}$$

Cela se ramène à résoudre en $L(x, y)$ le système d'équations aux dérivées partielles surdéterminé :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial y_i} y_k + \sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial y_h \partial y_i} F_h = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Les cas $n = 1$ et $n = 2$ ont été traités respectivement par *O.Bolza* et *J.Douglas* en utilisant des méthodes directes (*voir* [4], [17]). Ici nous cherchons à voir ce que l'utilisation du théorème de *Cartan-Kähler* peut apporter.

Fondamentalement, notre approche consiste à mettre (7) sous forme d'un système différentiel extérieur et ensuite appliquer la théorie de *Cartan* développée dans le premier chapitre. Dans le cas où $n = 1$, on montrera que le problème posé admet toujours une solution, pourvu que les données soient analytiques. Et dans le cas $n \geq 2$, en général le problème n'admet pas de solution, par exemple pour la courbe :

$$\begin{array}{rcl} y'' & = & y^2 + z^2, \\ z'' & = & y. \end{array} \tag{8}$$

il n'existe pas de langrangien L tel que (y, z) soit solution des équations d'*Euler-Lagrange* associées (*voir* [17]).

Dans le quatrième et dernier chapitre, on parlera d'un problème inverse en calcul des variations. Plus concrètement, il sagit de reconnaître si une application $f \to u_f$ entre espaces fonctionnels provient ou non d'un problème de minimisation, c'est-à dire si u_f est la solution d'un problème de minimisation dépendant du paramètre f. L'exemple choisi ici est le problème de *Dirichlet*, c'est-à-dire que l'on se demande s'il existe une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et strictement convexe telle que pour tout $f \in L^2(0, T)$, la fonction u_f soit solution du problème de calcul des variations suivant :

$$(P_f) \begin{cases} \inf_u \int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt, \\ u(0) = u_0,\, u(T) = u_1. \end{cases} \tag{9}$$

En d'autres termes, on cherche une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et strictement convexe telle que pour tout f, la fonction u_f soit l'unique solution de l'équation d'*Euler Lagrange* suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[L'(\dot{u}_f(t)) \right] = f(t), \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{10}$$

Dans ce travail, on résout complètement le problème, et on montre que la connaissance de l'application $f \to u_f$ permet de reconstituer L. Les méthodes utilisées ne ressortent plus du calcul différentiel extérieur, mais de l'analyse fonctionnelle. On peut y voir le premier pas vers une extention à la dimension infinie des résultats d'identification classiques en microéconomie (condition de Slutsky).

CHAPITRE 1

Systèmes différentiels extérieurs

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions de base et énoncer les théorèmes fondamentaux du Calcul Différentiel Extérieur (CDE). Nous tâcherons d'énoncer de manière explicite le théorème d'intégration des systèmes différentiels extérieurs de Cartan-Kähler, qui, de manière spéctaculaire est devenu aujourd'hui un outil très puissant pour la résolution de beaucoup de problèmes d'identification qui apparaissent en économie, comme le montrent les séries d'articles de *P.A.Chiappori* et *I.Ekeland* sur la caractérisation et la désagrégation des fonctions de demande, voir [10],[11],[12] .
Dans ce présent travail, nous tenterons aussi de faire un lien entre ce théorème et le problème de Douglas.

1.1 Préliminaires

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $T_x\mathbb{R}^n$ l'espace tangent à $\mathbb{R}^n$ en x. Un élément de $T_x\mathbb{R}^n$ est appelé vecteur tangent, et on pose :

$$T\mathbb{R}^n = \{(x, v) : x \in \mathbb{R}^n, v \in T_x\mathbb{R}^n\}.$$

Une section de $T\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ est appelée champ de vecteurs. En d'autres termes un champ de vecteurs X est une application définie sur $\mathbb{R}^n$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ X(x) \in T_x\mathbb{R}^n$.
Pour plus de détails sur les champs de vecteurs nous vous renvoyons par exemple à [2].
On note par $T^*_x\mathbb{R}^n$, l'espace cotangent à x, c'est à dire le dual de $T_x\mathbb{R}^n$ et par $T^*\mathbb{R}^n$ le fibré cotangent défini par :

$$T^*\mathbb{R}^n = \{(x, \eta) : x \in \mathbb{R}^n, \eta \in T^*_x\mathbb{R}^n\}.$$

Le sytème de coordonnées canoniques induit une base naturelle de l'espace tangent $T_x\mathbb{R}^n$ qu'on note par :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Enfin on note par $dx_1, \dots, dx_n$ la base duale de l'espace cotangent $T_x^*\mathbb{R}^n$.

1.2 Formes différentielles

Définition 1.2.1 Une forme différentielle de degré un (1-forme différentielle) est une section régulière de $T^*\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes une 1-forme différentielle est une application ω de $\mathbb{R}^n$ dans $T^*\mathbb{R}^n$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \omega(x) \in T_x^*\mathbb{R}^n$.

En coordonnées canoniques, ω peut s'écrire sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i.$$

Dans ce cas, si si $\eta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est un champ de vecteur alors on a :

$$\omega(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \eta_i.$$

Nous allons maintenant définir le concept général de k-formes et introduire deux opérations fondamentales sur les formes différentielles : le produit extérieur et la différentielle extérieure.

1.2.1 K-formes et produit extérieur

Les k- formes s'obtiennent à partir des $1-$formes par une opération algébrique simple appelée produit extérieur.

Définition 1.2.2 Soient $\omega_1, \dots, \omega_k$ des formes de degré un. Le produit extérieur $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ est la k- forme définie par :

$$\omega_1 \omega \wedge \dots \omega \wedge \omega_k(\pi_1, \dots, \pi_k) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega_1(\pi_{\sigma(1)}) \dots \omega_k(\pi_{\sigma(k)}),$$

où σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, k\}$.

Par exemple si $k = 2$, alors on a

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta(\pi, X) &= \alpha(\pi)\beta(X) - \alpha(X)\beta(\pi) \\ &= \sum_{i<j} (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)(\pi_i X_j - \pi_j X_i). \end{aligned}$$

On note que $\alpha \wedge \beta$ est une 2-forme, elle est bilinéairee et antisymétrique.
Si M est une variété différentielle de dimension n et $(p_1, \ldots, p_n)$ un système de coordonnées locales sur M, alors $(dp_1, \ldots, dp_n)$ est une base de l'espace des formes différentielles de degré un et toute forme différentielle α de degré k sur M peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha(p) = \sum \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dp_{i_1} \wedge \ldots \wedge dp_{i_k},$$

où $i_1 < \ldots < i_k$ parcourt l'ensemble des parties ordonnées de $\{1, \ldots, n\}$. Par conséquent le produit extérieur peut être étendu aux k-formes.

Proposition 1.2.1 *Soient α une $k-$*forme *et β une $l-$*forme, *alors $\alpha \wedge \beta$ est une $(k+l)-$forme telle que* :

$$\alpha \wedge \beta(p_1, \ldots, p_{k+l}) = \sum_{\sigma} \frac{1}{k!l!} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} . \alpha(p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(k)}) . \beta(p_{\sigma(k+1)}, \ldots, p_{\sigma(k+l)})$$

où σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, k+l\}$.

Nous terminons cette section par quelques propriétés utiles du produit extérieur.
• Le produit extérieur est associatif.
• Si α est une forme de degré impaire, alors $\alpha \wedge \alpha = 0$.
• Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sont des formes de degré un, linéairement dépendantes, alors

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_s = 0.$$

• Pour toute forme α de degré k, $(\alpha)^s = \alpha \wedge \alpha \ldots \wedge \alpha$ est une forme de degré $k.s$ et $(\alpha)^s = 0$ si $k.s > n$.

1.2.2 Image réciproque d'une forme différentielle

Soit φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans un espace quelconque, on définit l'image réciproque de f par φ comme suit :

$$\varphi^* f = f o \varphi. \tag{1.1}$$

Plus généralement, nous allons définir l'image réciproque de toute forme différentielle ω de degré p sur $\mathbb{R}^m$ qu'on note par $\varphi^*\omega$ [1].

1. Pour pouvoir calculer l'image réciproque d'une forme différentielle de degré > 0, φ doit être différentiable

Définition 1.2.3 On appelle image réciproque de la forme différentielle ω de degré p sur $\mathbb{R}^m$, la forme différentielle de degré p sur $\mathbb{R}^n$ qu'on note par $\varphi^*\omega$ et qui est définie par :

$$(\varphi^*\omega)(x).(v_1, \ldots, v_p) = \omega(\varphi(x)).(d\varphi(x)v_1, \ldots, d\varphi(x)v_p), \tag{1.2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, \ldots, v_p) \in (T_x\mathbb{R}^n)^p$. Par convention, si $p = 0$, alors la formule (1.2) se réduit à

$$\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)). \tag{1.3}$$

Proposition 1.2.2 *L'application $\varphi^* : \omega \mapsto \varphi^* w$ est linéaire et de plus elle vérifie*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta). \tag{1.4}$$

En outre si f est une application différentiable sur $\mathbb{R}^m$, de differentielle df, la forme différentielle associée de degré un, alors on a

$$\varphi^* df = d\varphi^* f. \tag{1.5}$$

Enfin, si ψ est une application différentiable sur $\mathbb{R}^m$, alors on a :

$$(\psi o \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega). \tag{1.6}$$

1.2.3 Différentielle extérieure

Nous allons maintenant introduire la notion de différentielle extérieure. Nous commencǫns par définir la différentielle extérieure des $0-$formes c'est à, dire les fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$, ensuite nous étendons cette définition aux $k-$formes.

Définition 1.2.4 Soit $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors dU est la forme différentielle de degré un définie par :

$$dU(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) dx_i. \tag{1.7}$$

De manière plus générale si

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

est une $k-$forme, alors $d\omega$ est la $(k + 1)-$forme, définie par :

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \tag{1.8}$$

Il faut noter que les coéfficients $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$ de ω sont des fonctions différentiables de sorte que $d\omega_{i_1, \ldots, i_k}$ est une 1-forme différentielle definie comme dans (1.7).

Proposition 1.2.3 *la différentielle extérieure notée d satisfait les propriétés suivantes* :

1. *d est une opération linéaire.*
2. *$d^2 = 0$, c'est à dire $d(d\omega) = 0$ pour toute forme différentielle.*
3. *$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ pour toute p-*forme *différentielle α.*

1.2.4 Idéaux différentiels

Définition 1.2.5 Soit I un ensemble de formes différentielles. On dit que I est un idéal algébrique s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) I est un sous espace vectoriel ;

(ii) si $\alpha \in I$ et β sont des formes différentielles, alors $\alpha \wedge \beta \in I$.

On dit que I est engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, et on note $I = [\alpha_1, \ldots, \alpha_p]$, si toute forme différentielle $\alpha \in I$ est de la forme :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \wedge \beta_i,$$

où les β_i sont des formes différentielles.

Proposition 1.2.4 *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des formes différentielles de degré un linéairement indépendantes, et I l'idéal qu'elles engendrent. Enfin soit ω une $k-$*forme. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

1. $\omega \in I = [\alpha_1, \ldots, \alpha_p]$;
2. $\omega \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p = 0$;
3. *si $\eta_1, \ldots, \eta_k$ sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ tels que* :

$$\alpha_i(\eta_j) = 0, \ \ \forall \ i = 1 \ldots, p, \ j = 1 \ldots, k \tag{1.9}$$

alors

$$\omega(\eta_1, \ldots, \eta_k) = 0. \tag{1.10}$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Si $\omega \in I$ alors $\omega = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \wedge \beta_i$, donc

$$\omega \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \wedge \alpha_i \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p = 0$$

(1) $\Rightarrow$ (2) On complète $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ en une base $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de $T^*\mathbb{R}^n$. Donc on peut écrire ω sous la forme

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k} \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}. \tag{1.11}$$

Si (2) est vérifiée, alors chaque monôme de (1.11) contient au moins un α_i pour $i \leq p$. Ce qui implique donc que $\omega \in I$

(1) $\Rightarrow$ (3) évident.

(3) $\Rightarrow$ (1) On choisit un système de coordonnée locales $x_1, \ldots, x_n$ tel que : $\eta_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et on en déduit (1)

Définition 1.2.6 Soit I un idéal. On dit que I est un idéal différentiel si

$$\omega \in I \ \Rightarrow \ d\omega \in I. \tag{1.12}$$

Il est facile de voir que $I = [\alpha_1, \ldots, \alpha_p]$ est un idéal différentiel si et seulement s'il existe des formes différentielles β_{ij} $(1 \leq i, j \leq p)$ telles que

$$d\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} \wedge \alpha_j, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, p \tag{1.13}$$

Exemple 1 Soit M une sous variété de $\mathbb{R}^n$, soient $i_M : M \to \mathbb{R}^n$ l'injection canonique et i_M^* son image réciproque. On pose :

$$I_M = \{\alpha : i_M^* \alpha = 0\}.$$

I_M est un idéal différentiel.

Nous allons maintenant clore cette section par quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Théorème 1.2.1 (Poincaré) *Soit ω une forme différentielle de degré k sur un ouvert convexe non vide U telle que $d\omega = 0$. Alors il existe une forme différentielle* Ω de degré $k-1$ *telle que :*

$$\omega = d\Omega. \tag{1.14}$$

Preuve. voir [6] *Bryant et al.* (1991).

Une conséquence immédiate du théorème de *Poincaré* est la suivante : on se donne des fonctions $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et on se demande s'il existe une fonction V de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$X_i(p) = \frac{\partial V}{\partial p_i}(p)? \tag{1.15}$$

La réponse est simple. On introduit la forme différentielle ω définie par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) dp_i.$$

Alors une condition nécessaire et suffisante est donnée par

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} dp_i \wedge dp_j = \sum_{i<j} (\frac{\partial X_i}{\partial p_j} - \frac{\partial X_j}{\partial p_i}) dp_i \wedge dp_j = 0 \tag{1.16}$$

ou encore

$$\frac{\partial X_i}{\partial p_j} = \frac{\partial X_j}{\partial p_i}, \ \forall \ i, j. \tag{1.17}$$

Théorème 1.2.2 (Frobenius) *Soit ω une forme différentielle de degré un satisfaisant la condition suivante dite de* Frobenius :

$$\omega \wedge d\omega = 0. \tag{1.18}$$

Alors il existe deux fonctions λ et V telles :

$$\omega = \lambda dV. \tag{1.19}$$

Preuve. *voir* [6].

Le théorème de Frobenius donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ soit proportionel à un gradient. Une généralisation du théorème de Frobénius est donnée par *Darboux* et ici, il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de K gradients.

Théorème 1.2.3 (Darboux) *Soit ω une forme différentielle de degré un sur un ouvert U, convexe et non vide. Soit $\bar{p} \in U$ et $K \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\omega \wedge (d\omega)^{K-1} = \omega \wedge d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega \neq 0; \tag{1.20}$$

$$\omega \wedge (d\omega)^{K} = \omega \wedge d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega = 0. \tag{1.21}$$

sur un voisinage de $\bar{p}$. Alors il existe un voisinage $\bar{U}$ de $\bar{p}$ et $2K$ *fonctions V^i, λ^i $i = 1, \ldots, K$ toutes définies sur $\bar{U}$ telles que :*

1. Les dV^i *sont linéairement indépendantes,*
2. λ^i *ne s'annule pas sur $\bar{U}$, $\forall \, i$,*
3. $$\omega(p) = \sum_{i=1}^{K} \lambda^i(p) dV^i, \ \forall \ p \in \bar{U} \tag{1.22}$$

Preuve. *voir* [6], *Bryant et al.* (1991).

1.3 Systèmes différentiels extérieur

1.3.1 Le théorème de Cartan-K$\ddot{a}$hler

Dans cette section, on présente en détail le théorème de *Cartan-Kähler* qui est la clé de l'intégration des systèmes différentiels extérieurs. Il résout le problème typique suivant :

Etant donnée une famille de formes différentielles ω_k (non nécessairement de même degré) sur une variété différentielle M, un point $\bar{x} \in M$, un entier $m \geq 1$, existe-t-il une une sous variété N de M, de dimension m, contenant $\bar{x}$ telle que

$$\forall k, \ \forall (v_1, \ldots, v_{d_k}) \in (T_{\bar{x}}N)^{d_k} \quad \omega_k(\bar{x})(v_1, \ldots, v_{d_k}) = 0$$

où d_k est le degré de ω_k et $T_{\bar{x}}N$ est l'espace tangent à N en $\bar{x}$?

1.3.1.1 Exemples introductifs

Exemple1 : Théroème de Cauchy Lipschitz
Etant donné un point $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ et une fonction f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant $\bar{x}$, il existe $\epsilon > 0$ et une fonction C^1, $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t)), \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon), \\ \\ \varphi(0) = \bar{x}. \end{cases} \tag{1.23}$$

On suppose que $f(\bar{x}) \neq 0$. Ce théorème peut être reformuler géométriquement comme suit. On désigne par M le graphe de la fonction φ, i.e.,

$$M = \{(t, \varphi(t)) \ ; t \in (-\epsilon, \epsilon)\}.$$

M est une sous variété de $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ de dimension un. Sur M on introduit les formes différentielles ω_i $(i = 1, \ldots, n)$ de degré un définies par :

$$\omega_i = f^i(x)dt - dx^i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.24}$$

Alors φ est solution de (1.23) si et seulement si pour tout $(t, x) \in M$ les ω^i sont toutes nulles sur $T_{(t,x)}M$, l'espace tangent de M au point (t, x). Il est équivalent de dire que

$$\varphi^*\omega_i := \left[f^i(\varphi(t)) - \frac{d\varphi^i}{dt}(t) \right] dt$$

est nulle si et seulement si φ est solution de (1.23). Le problème de *Cauchy-Lipschitz* peut être interprété donc comme un problème de recherche d'une variété de dimension *un* sur laquelle certaines formes différentielles s'annulent.

Exemple2 : Equations aux dérivées partielles du premier ordre.
Nous allons voir comment s'appliquent les notions de la théorie des systèmes différentiels extérieurs au cas d'une seule équation aux dérivées partielles d'ordre un par rapport à une seule fonction inconnue u de n variables $x_1, \ldots, x_n$:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{1.25}$$

où F est de classe C^∞ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et telle que l'équation (1.25) définisse une sous-variété M_0 de U. On associe à l'équation (1.25), le système différentiel extérieur correspondant à l'idéal différentiel engendré par la 0-forme F, les 1-formes

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial u} du + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i, \tag{1.26}$$

$$\omega = du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i, \tag{1.27}$$

$$\tag{1.28}$$

et la 2-forme

$$d\omega = -\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i. \tag{1.29}$$

On cherche une sous-variété M de $\mathbb{R}^{2n+1}$ de dimension n sur laquelle toutes ces formes s'annulent.

1.3.1.2 Cas Général : Formulation

Définition 1.3.1 Soit ω_k $1 \leq k \leq K$, des formes différentielles de degré d_k sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $M \subset R^n$ une sous variété. On dit que M est une variété intégrale du système

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_K = 0. \tag{1.30}$$

si pour tout $x \in M$, toutes les $\varphi^* \omega^i(x)$ sont identiquement nulles sur $T_x M$.

Etant donné un point $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier $m \geq 1$, le théoreme de Cartan-Kähler donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une sous variété intégrale de dimension m contenant $\bar{x}$.
Les conditions nécessaires sont faciles à trouver. En effet supposons qu'il existe une variété intégrale M, alors l'espace tangent $T_{\bar{x}} M$ est un sous espace vectoriel de dimension m et pour tout k on $\omega_k(\bar{x}) = 0$ sur $T_{\bar{x}} M$. Tout sous espace $E \subset T_{\bar{x}} M$ vérifiant cette propriété est ce qu'on appelle un élément intégral du système (1.30) au point $\bar{x}$. On note par $G^m_{\bar{x}}$ l'ensemble des éléments intégraux de (1.30) en $\bar{x}$,

$$G^m_{\bar{x}} = \left\{ E \mid \begin{array}{l} E \subset T_{\bar{x}} M \text{ et } \mathbf{dim} E = m \\ \omega_1, \ldots, \omega_K \text{ nulles sur E} \end{array} \right\}.$$

Ainsi une première condition nécessaire est :

$$G_{\bar{x}}^m \neq \emptyset. \tag{1.31}$$

Pour obtenir une deuxième condition nécessaire, on fait la remarque suivante : Soit $\phi_M : M \to \mathbb{R}^n$, l'injection canonique : $\phi_M(x) = x$ pour tout $x \in M$. Alors M est une variété intégrale de (1.30) si

$$\phi_M^* \omega_1 = 0, \ldots, \phi_M^* \omega_K = 0. \tag{1.32}$$

Mais on sait que la différentielle extérieure commute avec l'*image réciproque*, donc (1.32) entraine

$$\phi_M^*(d\omega_1) = 0, \ldots, \phi_M^*(d\omega_K) = 0. \tag{1.33}$$

D'où M est aussi une variété intégrale du grand sytème

$$\begin{cases} \omega_1 = 0, \ldots, \omega_K = 0, \\ d\omega_1 = 0, \ldots, d\omega_K = 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

qui est manifestement différent de (1.30), donc (1.30) et (1.34) n'auront pas forcément les mêmes éléments intégraux. Pour pallier à cela on suppose que (1.30) et (1.34) ont les mêmes éléments intégraux, en d'autres termes on suppose que la deuxième ligne de (1.34) est une conséquence algébrique de la première. La deuxième condition nécéssaire est donc : les ω_k engendrent un idéal différentiel : c'est à dire

$$\forall k, \quad d\omega_k = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j^k \wedge \omega_j. \tag{1.35}$$

On note que si la famille $\{\omega_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ ne satisfait pas la condition (1.35) alors la grande famille $\{\omega_k, d\omega_k\ 1 \leq k \leq K\}$ va la satisfaire parce que $(dd\omega_k = 0)$.

Contre-exemple. Ici on montre que les conditions (1.31) et (1.35) ne sont pas suffisantes. En effet soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ telles que $f(0) = g(0) = v \neq 0$. Soient $\alpha^i(x,t)$ et $\beta^i(x,t)$, $1 \leq i \leq n-1$ les formes différentielles définies par :

$$\alpha^i(x,t) = f^i(x)dt - dx^i, \tag{1.36}$$
$$\beta^i(x,t) = g^i(x)dt - dx^i. \tag{1.37}$$

On considère le système différentiel extérieur suivant :

$$\alpha^i(x,t) \;=\; 0,\ \ 1 \leq i \leq n-1, \tag{1.38}$$
$$\beta^i(x,t) \;=\; 0,\ \ 1 \leq i \leq n-1. \tag{1.39}$$

On peut facilement vérifier que les α^i et les β^i engendrent un idéal différentiel et que la droite engendrée par le vecteur $(1,v)$ est un élément intégral en $(0,0)$ donc G_0^1 est non vide. Cependant chercher une variété intégrale du système différentiel contenant $(0,0)$ revient à chercher une solution commune aux deux problèmes de *Cauchy* :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = 0, \tag{1.40}$$

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad x(0) = 0, \tag{1.41}$$

ce qui n'existe pas en général. D'où le système n'est pas intégrable.

L'interprétation en termes de calcul différentiel extérieur est la suivante :
Considérons l'espace $E(x,t)$ engendré par les formes $\alpha^i(x,t), \beta^i(x,t)$. En tout point différent de $(0,0)$, la dimension de $E(x,t)$ est égale à deux et en $(0,0)$ la dimension est ègale à un. En d'autre termes en $(0,0)$ on a un saut de discontinuité de la dimension de $E(x,t)$. Et on dit que $(0,0)$ n'est pas un point ordinaire au sens de *Cartan*.

Pour éviter ce genre de situation, nous aurons besoin d'une condition de régularité plus forte que (1.31) qui sera l'objectif du prochain paragraphe.

1.3.1.3 Condition de régularité et points ordinaires

Si toutes les formes ω_k sont de degré un, la condition de régularité s'exprime comme suit : la dimension du sous espace engendré par les formes linéaires $\omega_k(x)$ est constante sur un voisinage de $\bar{x}$ (ce qui n'est pas le cas dans le contre-exemple ci-dessus).

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit $V = T_{\bar{x}}\mathbb{R}^n$. Soit $E \subset V$ un élément intégral de dimension m en $\bar{x}$. On prend une base $\bar{\alpha}_i, \ldots, \bar{\alpha}_n$ de V^* telle que :

$$E = \{\zeta \in V \mid \; < \zeta, \bar{\alpha}_i >= 0 \;\; \forall \; i \geq m+1\}.$$

Pour $n' \leq n$, on note par $I(n', d)$ l'ensemble des parties ordonnées de $\{1, \ldots, n'\}$ à d éléments. Pour tout k, $1 \leq k \leq K$ on a :

$$\omega_k(\bar{x}) = \sum_{I \in I(n, d_k)} C_I^k \bar{\alpha}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\alpha}_{i_{d_k}}. \tag{1.42}$$

Dans cette sommation il est sous entendu que $I = \{i_1 \ldots, i_{d_k}\}$. Comme $\omega_k(\bar{x})$ est identiquement nulle sur E, alors chaque monôme dans (1.42) contient $\bar{\alpha}_i$ pour un certain $i \geq m+1$. On s'intéresse maintenant aux monômes qui contiennent exactement un seul des $\bar{\alpha}_i$ pour $i \geq m+1$ et dans ce cas on peut donc réécrire $\omega_k(\bar{x})$ sous la forme :

$$\omega_k(\bar{x}) = \sum_{J \in I(m, d_k - 1)} \bar{\beta}_J^k \wedge \bar{\alpha}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\alpha}_{j_{d_k - 1}} + R \tag{1.43}$$

où $\bar{\beta}^k_J$ est une combinaison linéaire de α_i, pour $i \geq m+1$ et dans R tous les monômes contiennent au moins un terme de la forme $\bar{\alpha}_i \wedge \bar{\alpha}_j$, avec $i, j \geq m+1$. On définit une suite croissante de sous espaces de V^*, $H^*_0 \subset H^*_1 \subset ... \subset H^*_m \subset V^*$ par :

$$\begin{aligned} H^*_m = &\ \mathrm{Vect}\{ \ \bar{\beta}^k_J \ |1 \leq k \leq K, \ J \in \mathcal{I}(m, d_k - 1)\}, \\ H^*_{m-1} = &\ \mathrm{Vect}\{ \ \bar{\beta}^k_J \ |1 \leq k \leq K, \ J \in \mathcal{I}(m-1, d_k - 1)\}, \\ H^*_0 = &\ \mathrm{Vect}\{ \ \bar{\beta}^k_J \ |1 \leq k \leq K, \ J \in \mathcal{I}(0, d_k - 1)\}. \end{aligned}$$

H_0 est simplement le sous espace engendré par les $\omega_k(\bar{x})$ de degré un. On définit une suite croissante d'entiers $0 \leq c_0(\bar{x}, E) \leq \ldots \leq c_m(\bar{x}, E) \leq n$ définie par :

$$c_i(\bar{x}, E) = \mathbf{dim} H^*_i, \ \ \forall\, i = 1, \ldots, m.$$

Nous somme maintenant en mesure de formuler la condition de régularité. On note par $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des $m-$plans de $\mathbb{R}^n$. C'est une variété de dimension $m(n-m)$. On note par G^m l'ensemble des couples (x, E) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^m(\mathbb{R}^n)$ tels que E est un élément intégral de dimension m en x.

Définition. *Soit $(\bar{x}, \bar{E}) \in G^m$. On dit que $(\bar{x}, \bar{E})$ est ordinaire au sens de Cartan, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $(\bar{x}, \bar{E})$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $G^m \cap \mathcal{U}$ est une sous variété de codimension*

$$c_0(\bar{x}, \bar{E}) + \ldots + c_{m-1}(\bar{x}, \bar{E}).$$

Remarque 1 Si toutes les formes ω_k sont de degré un, on note par $d(x)$ la dimension du sous espace engendré par $(\omega_k(x),\ 1 \leq k \leq K)$, alors $c_i(x, E) = d(x)$ pour tout i, et $(\bar{x}, \bar{E})$ est ordinaire si $G^m \cap \mathcal{U}$ est une sous variété de codimension $md(\bar{x})$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^m(\mathbb{R}^n)$, ce qui entraine que pour tout x dans un voisinage de $\bar{x}$, l'ensemble des $E \in G^m_x$ est de codimension $md(\bar{x})$ dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}^n)$. Or on voit directement qu'il est de codimension $md(x)$, d'où $d(x) = d(\bar{x})$ dans un voisinage de $\bar{x}$: ce qui est exactement la condition de régularité dans le cas où il y a que des formes de degré un.

Dans le cas général, si $(\bar{x}, \bar{E})$ est ordinaire, les c_i sont constants sur un voisinage de $(\bar{x}, \bar{E})$: sont appelés les caractères de *Cartan*.

Théorème 1.3.1 (Cartan-K$\breve{a}$hler.) *Soit le système différentiel extérieur suivant :*

$$\omega_k = 0 \ \ 1 \leq k \leq K.$$

On suppose que les ω_k sont réelles et analytiques sur la variété différentielle analytique M et qu'elles engendrent un idéal différentiel. Soient $\bar{x} \in M$, $m \geq 1$ et $\bar{E}$ un élément intégral en $\bar{x}$ de dimension m tels que $(\bar{x}, \bar{E})$ *soit ordinaire au sens de* Cartan. *Alors il existe une variété intégrale analytique $N \subset M$ de dimension m, contenant $\bar{x}$ telle que*

$$T_{\bar{x}} N = \bar{E}.$$

Ce résultat est établi par *Elie Cartan* dans le cas où les ω_k sont de degré un ou deux et il a été généralisé par Kähler. Pour plus de détails vous pouver consulter le livre de *Elie Cartan* (1945) sur les systèmes différentiels extérieurs celui de *Bryant et al.*(1991) [6].

Il n'ya pas unicté dans le théorème de *Cartan-Kähler* : il peut exister une infinité de variétés intégrales analytiques contenant $\bar{x}$ et ayant toutes $\bar{E}$ comme espace tangent en $\bar{x}$. Par ailleurs le théorème décrit de manière précise l'ensemble

$$\mathcal{M}_{\mathcal{U}} = \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{est une variété intégrale} \\ \text{et il existe} \, (x, E) \in \mathcal{U} \\ \text{tels que } \; x \in M \, \text{et } T_x M = E \end{array} \right\}$$

où $\mathcal{U}$ est un voisinage approprié de $(\bar{x}, \bar{E})$. Chaque $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{U}}$ est complétement déterminé par un choix arbitraire de s_m fonctions de m variables.

On termine ce chapitre par un exemple simple mais très intuitif de l'application du théorème de *Cartan-Kähler*.

Exemple : On se donne une fonction $f(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$; peut-on trouver deux fonctions d'une seule variable u et v telles que :

$$f(x, y) = u(x) + v(y)? \tag{1.44}$$

On sait qu'une condition nécessaire pour qu'une telle décomposition soit possible est :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0. \tag{1.45}$$

Nous allons donné une approche différentielle du problème. Soit M la variété différentielle de dimension trois définie par :

$$M = \{(x, y, u, v) \, \mathbb{R}^4 \mid \; u + v = f(x, y)\}. \tag{1.46}$$

Sur M on pose le système différentiel extérieur suivant :

$$\begin{array}{rcl} \omega_1 & = & du \wedge dx = 0, \\ \omega_2 & = & dv \wedge dy = 0, \\ & & dx \wedge dy \neq 0. \end{array} \tag{1.47}$$

Si le système différentiel extérieur (1.47) admet une variété intégrale de dimension *deux*, alors il existe deux fonctions u et v, d'une seule variable telles que

$$f(x, y) = u(x) + v(y).$$

Les formes différentielles ω_1 et ω_2 engendrent un idéal différentiel puisque

$$d\omega_1 = d\omega_2 = 0.$$

Soit (x, y, u, v) un point de M. Pour chercher des éléments intégraux en (x, y, u, v), on linéarise u et v comme fonctions de (x, y) en posant :

$$\begin{aligned} du &= U^1 dx + U^2 dy, \\ dv &= V^1 dx + V^2 dy. \end{aligned}$$

Substituannt du et dv dans les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$, on obtient

$$U^2 = 0, \tag{1.48}$$

$$V^1 = 0. \tag{1.49}$$

En différentiant l'équation qui définit la variété M, on obtient U^1 et V^2 comme suit :

$$U^1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \tag{1.50}$$

$$V^2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \tag{1.51}$$

On peut remarquer que si la condition (1.45) n'est pas vérifiée alors il n'existe pas d'éléments intégraux du système (1.47). Si elle est satisfaite, alors l'ensemble des éléments est une variété de codimension *deux* dans la grasmannienne $P^2(M)$. Donc pour appliquer *Cartan-Kähler*, il suffit de montrer que les éléments intégraux sont ordinaires, ce qui nécessite le calcul des caractères de *Cartan*.■

CHAPITRE 2

Désagrégation d'une fonction demande

2.1 Introduction

En économie, on rencontre souvent des problèmes dont la formulation mathématique prend l'une des formes suivantes :

Soit $n \geq 1$ un entier naturel, $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $K \geq 1$, un entier naturel.

<u>Question 1</u> : Existe - il $2K$ fonctions $\lambda_1, ..., \lambda_K$, $V_1, ..., V_K$ telles que :

$$x(p) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i(p) \nabla V_i(p)? \tag{2.1}$$

<u>Question 2</u> : Peut on choisir les fonctions λ_i et V_i dans la décomposition (2.1) de sorte que les λ_i soient positives et les V_i (quasi) convexes ?

<u>Question 3</u> : Peut-on demander aux λ_i et V_i de satisfaire certaines équations du type :

$$\Phi_j(p, \lambda(p), \nabla V(p)) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, ..., p$$

où les fonctions Φ_j sont données ?

Réponses :

- Dans le cas particulier où $K = 1$ et $\lambda_i =$ constante (sans condition de convexité et de positivité) c'est un théorème classique de *Poincaré* et la condition sur x est :

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n.$$

- Dans le cas où $K = 1$, λ_i non constante c'est la condition de *Frobenius* et elle s'exprime sous la forme :

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

où ω est la forme différentielle définie par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i(p)\, dp_i$$

- Dans le cas général si l'une des fonctions V_i rate la convexité, la réponse est donnée par le théorème de *Darboux* et la condition sur x est donnée par :

$$\omega \wedge (d\omega)^K = 0,$$

pourvu que

$$\omega \wedge (d\omega)^{K-1} \neq 0.$$

- *Ekeland* et *Chiappori* ont donné une réponse positive à la *Question 2* dans le cas analytique. Peu de temps aprés, une réponse positive au cas C^∞ a été apportée par *Ekeland* et *Nirenberg* .

- Le cas analytique de la *question3* dans le cas où $K = n$ a été étudié et résolu par *Ekeland* et *Chiappori.*

Dans ce présent chapitre on fait d'abord un bref exposé sur l'origine de toutes ces questions et ensuite, grâce à l'introduction du *calcul différentiel extérieur* et particulièrement du théorème de *Cartan-Kähler*, on donnera une réponse positive à la *question3* dans le cas où $K < n$. En d'autres termes, on donnera des conditions nécessaires et suffisantes sur x garantissant l'existence de K fonctions strictement convexes $V_1, \ldots, V_K$ et de K fonctions strictement positives $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ telles que :

$$x(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(p) \nabla V_i(p) \tag{2.2}$$

$$p.D_p V(p) = \frac{1}{\lambda(p)}. \tag{2.3}$$

2.2 Théorie du consommateur

2.2.1 Modèle individuel

Le consommateur se borne à choisir un assortiment $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ de n biens disponibles sur le marché (le nombre x_i représente la quantité choisie de bien i), qui peuvent être des produits matériels (alimentations, ménagers) ou non (loisirs). Il sait que le choix de l'assortiment x lui apportera une satisfaction de $U(x)$ mais lui coûtera

$$p.x = p_1x_1 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i,$$

où $p = (p_1, ..., p_n)$ est le système de prix du marché, ($p_i > 0$, est le prix unitaire du bien i).
Si son budget est $w > 0$ est normalisé à 1, alors son programme de décision s'ecrit comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{Max} U(x) \\ p.x \leq 1, \\ x_i \geq 0 \ \forall i. \end{cases} \tag{2.4}$$

U est la fonction d'utilité du consommateur, elle représente ses préférences, c'est à dire, si le consommateur préfère le bien x au bien x' alors on a $U(x) \geq U(x')$. Pour des raisons de cohérence logique nous allons faire quelques hypothèses sur la fonction U, qui pourront garantir l'existence et l'unicité de la solution de (2.4). Il sagit en effet d'une théorie de la décision, qui doit indiquer quel choix fait le consommateur dans telles circonstances. Si elle laisse subsister une ambiguité (deux solutions possibles) elle n'aura pas rempli son but.

Faisons les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} U \textit{ est de classe } C^{\infty} \textit{ sur } \mathbb{R}^n, \\ U \textit{ est strictement croissante par rapport à toutes ses variables}, \\ D^2U \textit{ est définie négative sur le sous espace orthogonale à } \nabla U. \end{cases} \tag{2.5}$$

Le fait que la fonction U soit strictement croissante implique que la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum. On suppose que tous les biens sont désirés ce qui nous permet donc d'oublier les contraintes de positivité à l'optimum. Ainsi le problème de maximisation (2.4) se réduit alors à :

$$\begin{cases} \operatorname{Max} U(x) \\ \\ p.x = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Si l'hypothèse (2.5) est vérifiée, alors le problème (2.6) admet une unique solution $\bar{x}$ caractérisée par :

$$\nabla U(\bar{x}) = \bar{\lambda} p, \quad \text{où } \bar{\lambda} > 0 \text{ et } p.\bar{x} = 1. \tag{2.7}$$

Cette caractérisation est standard en analyse convexe ou en optimisation. Le nombre réel $\bar{\lambda}$ est appelé multiplicateur de *Lagrange.* Il faut noter ici que $\bar{x}$ et λ dépendent tous de p. Dans cette situation, on a un problème d'optimisation dépendant du paramètre $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et l'application $p \to x(p)$, qui à p fait correspondre l'unique solution $x(p)$ est appelée la *fonction de demande individuelle.*

Proposition 2.2.1 *Si* (2.5) *est vérifiée, alors la fonction de demande x est C^∞.*

Preuve. Soit $\bar{p} >> 0$. Soit $\bar{x}$ et $\bar{\lambda}$, la solution et le multiplicateur associés, c'est à dire $x(\bar{p}) = \bar{x}$. Alors on :

$$\nabla U(\bar{x}) - \bar{\lambda} p = 0 \tag{2.8}$$
$$p.\bar{x} - 1 = 0 \tag{2.9}$$

Soit F l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x, \lambda, p) = (\nabla U(x) - \lambda p, p \cdot x - 1). \tag{2.10}$$

Alors $F(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{p}) = (0, 0)$ et si on note par $F_{x,\lambda}$ la matrice jacobienne de F par rapport aux variables x et λ alors on a :

$$F_{x,\lambda}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{p}) = \begin{bmatrix} D^2U(\bar{x}) & -\bar{p} \\ \bar{p}' & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} D^2U(\bar{x}) & -\bar{p} \\ \bar{p}' & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

alors on a :

$$D^2U(\bar{x}).y - \mu \bar{p} = 0, \tag{2.13}$$
$$\bar{p}' y = 0. \tag{2.14}$$

D'aprés (2.7) et (2.14), y est dans le sous espace orthogonal à $\nabla U(\bar{x})$. En multipliant (2.13) par y', on obtient :

$$y' D^2U(\bar{x}) y - \mu y' p = 0$$

En utilisant l'hypothèse (2.5) et (2.14), on en déduit que $y = 0$ et par conséquent $\mu = 0$. Ce qui prouve donc que la matrice $F_{x,\lambda}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{p})$ est inversible. D'aprés le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_1$ de $\bar{p}$, un voisinage ouvert $\mathcal{V}_2$ de $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et une fonction unique $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, C^∞ sur $\mathcal{V}_1$ à valeurs dans $\mathcal{V}_2$ vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1(\bar{p}) & = & \bar{x}, \\ \varphi_2(\bar{p}) & = & \bar{\lambda}, \\ F(\varphi_1(p), \varphi_2(p), p) & = & 0, \ \forall\, p \in \mathcal{V}_1. \end{array} \tag{2.15}$$

Or les fonctions $p \to x(p)$ et $p \to \lambda(p)$ vérifient (2.15) sur $\mathcal{V}_1$, donc de l'unicité on en déduit que $x(p) = \varphi_1(p)$ et $\lambda(p) = \varphi_2(p)$ pour tout $p \in \mathcal{V}_1$. Par conésquent les fonctions $p \to x(p)$ et $p \to \lambda(p)$ sont de classe C^∞ au voisinage de $\bar{p}$. ■

Définition 2.2.1 On appelle matrice de *Slutsky* associée à la fonction de demande x, la matrice S définie par $S = (s_{ij}),\ i, j = 1, ..., n$ avec

$$s_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} x_j. \tag{2.16}$$

Proposition 2.2.2 *Soit U une fonction d'utilité satisfaisant* (2.5), *alors la matrice de Slutsky associée à la fonction de demande x vérifie* :
- $Sp = 0$ *pour tout* $p >> 0$,
- S *est symétrique*,
- S *est semi définie négative.*

Preuve. *voir* [30].

2.2.2 Le problème inverse

On se donne une fonction de classe C^∞ définie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Est-elle une fonction de demande ? En d'autres termes, peut-on trouver une fonction U (quasi) concave telle que pour tout $p >> 0$, $x(p)$ soit l'unique solution optimale du problème d'optimisation (2.6) ?

On pésente deux approches pour ce type de problème :

• La première, appelée *approche directe*, consiste à supposer que la fonction de demande $x(p)$ est inversible. Soit $p(x)$ son inverse. Ainsi, d'aprés les conditions d'optimialié du premier ordre, on a :

$$\nabla U(x(p)) = \lambda(p)x(p), \tag{2.17}$$

où $\lambda(p)$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la solution $x(p)$. Donc,

$$p(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \nabla U(x). \tag{2.18}$$

D'où l'application $x \to p(x)$ est proportionnelle au gradient de la fonction U.

• La deuxième, appelée *approche indirecte*, consiste à utiliser *la fonction d'utilité indirecte* V définie par

$$V(p) := \max\{U(x) \mid p \cdot x = 1\}. \tag{2.19}$$

L'application $p \to x(p)$ est différentiable d'aprés la proposition (2.2.1). Donc la fonction V l'est auss. En utilisant le théorème de l'enveloppe on a

$$x(p) = \frac{1}{\lambda(p)} \nabla V(p). \tag{2.20}$$

ce qui exprime que l'application $p \to x(p)$ est aussi proportionnelle au gradient de la fonction V. Ainsi, si on trouve les fonctions V et λ satisfaisant (2.20), alors la fonction U est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.2.3 *On suppose que l'hypothèse* (2.5) *est vérifiée. Alors on a* :

1. $U(x) = \min\{V(p) \mid p.x \geq 1\}$;
2. *U est quasi-concave si et seulement si V est quasi-convexe.*

Preuve. *voir* [30].

Théorème 2.2.1 *Une application $x : (\mathbb{R}_+^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ de classe satisfaisant la loi de Walras : $p.x(p) = 1, \ \forall\, p >> 0$ est une fonction de demande si et seulement si la matrice de Slutsky associée* à *x est symétrique et définie négative.*

Preuve. On introduit la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) dp_i. \tag{2.21}$$

D'aprés le théorème de *Frobenius*, l'application $p \to x(p)$ est proportionnelle à un gradient si et seulement si la condition de Frobenius

$$\omega \wedge d\omega = 0 \tag{2.22}$$

est vérifiée. Ou encore si

$$\forall \ i, j, k \quad x_i(\frac{\partial x_j}{\partial p_k} - \frac{\partial x_k}{\partial p_j}) + x_k(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i}) + x_j(\frac{\partial x_k}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i}{\partial p_k}) = 0. \tag{2.23}$$

On montrer que (2.23) n'est rien d'autre que la symétrie de la matrice de *Slustky* S donnée par :

$$S(p) = D_p x \cdot (I - p \cdot x'),$$

où $D_p x$ est la matrice jacobienne de l'application $p \to x(p)$. Soit $\bar{p}$ fixé. Alors la matrice de *Slutsky* $S(\bar{p})$ est symétrique si et seulement si la restriction de $D_p x(\bar{p})$ sur l'hyperplan orthogonal à $x(\bar{p}) = \bar{x}$ est symétrique. Ce qui est équivalent de dire :

$$\forall\ y, z \perp \bar{x},\ y'(D_p x)z = z'(D_p x)y \Leftrightarrow y'(D_p x - (D_p x)')z = 0. \tag{2.24}$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, soit $\{y_k,\ k \neq i\}$ une base de $\{x(\bar{p})\}^{\perp}$ définie par :

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 \\ x_k(\bar{p}) \\ 0 \\ x_i(\bar{p}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

où $x_k(\bar{p})$ (respectivement $x_i(\bar{p})$) occupe la $i-$ème (respectivement la k-ème) ligne de y_k. Donc la symétrie de $D_p x$ sur $\{(x(\bar{p})\}^{\perp}$ est équivalente à :

$$\forall\ j, k \quad y_j'(D_p x)z_k = z_k'(D_p x)y_j \Leftrightarrow y_j'(D_p x - (D_p x)')z_k = 0, \tag{2.26}$$

ce qui est exactement (2.23). Donc d'aprés *Frobenius* il existe des fonctions λ et V telles

$$-\omega = \lambda(p)dV.$$

D'aprés *Ekeland-Nirenberg* (*voir* [19]), on peut choisir λ négatif et V strictement convexe. En effet sur l'espace des formes différentielles, on introduit le sous espace E défini par :

$$E = \{\alpha \mid \alpha \wedge \omega = 0\}.$$

C'est un sous espace de dimension *un* engendré par ω. Soit $F := [\omega(\bar{p})]$. Sur $N = F^{\perp}$, la matrice $-D_p x$ est définie positive, ce qui est exactement la condition de *Ekeland* et *Nirenberg*, d'où il existe $\lambda > 0$ et V strictement convexe tels :

$$x(p) = -\lambda \nabla V(p).$$

Connaissant V et λ, la fonction U est donnée par la *proposition* 2.2.3. ■

2.2.3 La désagrégation d'une fonction de demande

La fonction de demande agrégée résulte de la sommation des fonctions de demandes individuelles. Plus concrétement, considérons une économie de K consommateurs. Chaque consommateur k est caractérisé par sa fonction d'utilité U^k et son budget normalisé à 1. Quand le prix du marché p est annoncé, le consommateur k fait sa demande $x^k(p)$ suivant le programme décisionnel suivant :

$$\begin{cases} \max U^k(x^k) \\ \\ P.x^k = 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

On note par $x(p)$ la demande agrégée. Alors elle est donnée par :

$$x(p) = x^1(p) + \ldots + x^k(p), \tag{2.28}$$

où $x^k(p)$ est la solution du problème d'optimisation (2.27).

Maintenant, supposons qu'on puisse observer la demande agrégée d'une société de K individus, *Sonnenschein*(1972) (*voir* [33]) posait les questions suivantes : peut-on en déduire les demandes individuelles ? Dans le cas affirmatif, peut-on retrouver les préférences individuelles ? Ces questions économiques nous conduisent au problème mathématique suivant : Etant donné une fonction $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ ; existe-t-il K fonctions $x^1, \ldots x^K$, de classe C^∞ telles que :

$$x(p) = x^1(p) + \ldots + x^K(p)? \tag{2.29}$$

où pour chaque k, $x^k(p)$ est solution d'un problème d'optimisation du type (2.27). L'approche indirecte consiste à introduire les fonctions d'utilité indirect V^k associées aux problèmes (2.27), c'est à dire :

$$V^k(p) = \max\{U^k(x^k),\ \ p.x^k = 1\}. \tag{2.30}$$

D'aprés les propositions (2.2.1) et (2.2.3), V^k est quasi-convexe et différentiable. Alors, D'aprés le théorème de l'enveloppe, pour chaque k, les fonctions V^k et x^k sont liées par la relation suivante :

$$\nabla V(p) = -\alpha_k(p).x^k(p), \tag{2.31}$$

où $\alpha_k(p)$ est le multiplicateur de *Lagrange* associé au problème (2.27). Donc la demande agrégée prend la forme :

$$x(p) = -\frac{1}{\alpha_1(p)}\nabla V^1(p) - \ldots - \frac{1}{\alpha_K(p)}\nabla V^K(p), \tag{2.32}$$

ou encore

$$x(p) = \lambda_1 \nabla V^1(p) + \cdots + \lambda_K(p)\nabla V^K(p). \tag{2.33}$$

D'où la fonction de demande agégée $p \to x(p)x$ est une combinaison linéaire de K gradients et elle v'erifie $p.x(p) = K$. De plus

1. les V^k sont (quasi) convexes,
2. les λ_k sont strictement négatives,
3. la contrainte bugetaire $p.x^k(p) = 1$ peut s'écrire sous la forme

$$p.\nabla V^k(p) = \frac{1}{\lambda_k(p)}. \tag{2.34}$$

Ce qui nous ramène au problème du type posé à la *question3* et dont son étude est l'objectif fondamental de ce chapitre.

2.3 Caractérisation de la demande agrégée

Dans cette section, grâce à la théorie de *Cartan-Kähler* exposée au premier chapitre, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une fonction $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ analytique sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ puisse se décomposer sous la forme :

$$X(p) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k(p) \nabla u_k, \tag{2.35}$$

où les fonctions λ_k sont strictement positifs, les fonctions u_k sont strictement convexes et de plus, les λ_k et u_k vérifient :

$$p.\nabla u_k = \frac{1}{\lambda_k}, \;\; k = 1, \ldots, K. \tag{2.36}$$

Bien entendu, on suppose que X vérifie la condition suivante dite Loi de *Walras* :

$$p \cdot X(p) = K, \;\; \forall p \in \mathcal{U}. \tag{2.37}$$

Chiappori et *Ekeland* ont étudié ce problème dans cas où $K = n$ et grâce à la théorie de *Cartan-Kähler*, ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 (Chiappori-Ekeland) *Soit $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, analytique telle que : $p.X(p) = n$. Alors pour tout $\bar{p} \in \mathcal{U}$ et tout $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n) \in \mathbb{R}$ satisfaisant :*

$$\begin{array}{rcl} \bar{x}_1 + ... + \bar{x}_n & = & X(\bar{p}), \\ \forall i, \quad \bar{\lambda}_i & > & 0, \end{array}$$

il existe n fonctions $U^1, \ldots, U^n$, où chaque U^i est définie et analytique sur un voisinage convexe $\mathcal{U}_i$ de $\bar{x}_i$, n fonctions $(x_1, \ldots, x_n)$ et n fonctions $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ définies et analytiques sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $\bar{p}$ telles que :

$$\begin{array}{rcl} p.x_i(p) & = & 1, \;\; i = 1, ..., n, \\ U_i\left(x_i(p)\right) & = & \max\left\{U_i(x) \mid x \in U_i, \, p.x \leq 1\right\}, \;\; i = 1, ..., n, \\ \dfrac{\partial U_i}{\partial x^j}\left(x_i(p)\right) & = & \lambda_i(p)\, p_j, \;\; i = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., n, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(p) & = & X(p), \\ x_i(\bar{p}) & = & \bar{x}_i\,, \;\; i = 1, ..., n, \\ \lambda_i(\bar{p}) & = & \bar{\lambda}_i, \;\; i = 1, ..., n. \end{array}$$

Preuve. *Voir en annexe.* On a aussi le résultat suivant :

2.3.1 Conditions nécessaires

Proposition 2.3.1 (Browning-Chiappori) *Supposons que X se décompose sous la forme* (2.35) *au voisinage de l'origine. Alors, la matrice Ω définie par*

$$\Omega := D_p X(0) \tag{2.38}$$

vérifie :

$$\Omega = \Sigma + R_K, \tag{2.39}$$

où Σ est une matrice symétrique, définie positive et R_K une est matrice de rang au plus K.

Preuve. Supposons que la décomposition (2.35) est vérifiée sur un voisinage de l'origine. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$. Alors on a

$$X_i = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial p_i},$$

ce qui entraine

$$\frac{\partial X_i}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \lambda_k}{\partial p_j} \frac{\partial u_k}{\partial p_i}.$$

Posons

$$S = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k D^2 u_k \text{ et } R_K = \sum_{k=1}^{K} D\lambda_k (Du_k)',$$

où $D^2 u_k$ désigne la matrice hessienne de u_k. Alors la matrice S est symétrique et définie positive puisse les λ_k sont strictement positifs et les u_k strictement convexes. La matrice R_K est de rang au plus K et de plus

$$\Omega = S + R_K.$$

Si les vecteurs $\nabla u_1, \dots, \nabla u_K$ sont linéairement indépendants alors la matrice R_K est de rang K.

2.3.2 Conditions suffisantes

Soit X un champs de vecteurs défini de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de composantes $\omega_1, \dots, \omega_n$. On associe à X la forme différentielle ω de degré un définie par :

$$w(p) = \sum_{i=1}^{n} w_i(p) dp_i.$$

Théorème 2.3.2 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, analytique réelle satisfaisant la loi de Walars : $p.X(p) = K \; \forall p \in \mathcal{U}$. Soit $\bar{p} \in \mathcal{U}$. On suppose que sur un voisinage de $\bar{p}$*

$$\omega \wedge (d\omega)^{K-1} \neq 0, \tag{2.40}$$

$$\omega \wedge (d\omega)^{K} = 0 \tag{2.41}$$

et *la matrice* Ω définie par

$$\Omega := D_p X(\bar{p}) = \left(\frac{\partial \, \omega_i}{\partial p_j}(\bar{p}) \right) \tag{2.42}$$

vérifie

$$\Omega = S + R_K, \tag{2.43}$$

avec S une matrice symétrique et définie positive et R_K une matrice de rang K. Alors, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\bar{p}$, des fonctions strictement convexes $u_1, \ldots, u_K$, des fonctions strictement positives $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ toutes définies et analytiques sur $\mathcal{V}$ telles :

$$X(p) \;=\; \lambda_1 \nabla u_1 + \ldots + \lambda_K \nabla u_K, \;\; \forall p \in \mathcal{V}, \tag{2.44}$$

$$p \cdot \nabla u_k(p) \;=\; \frac{1}{\lambda_k}, \;\; \forall k \text{ et } \forall p \in \mathcal{V}. \tag{2.45}$$

Preuve. On démontre le théorème dans le cas $K = 2$ et dans le cas général les mêmes arguments vont tenir.

Stratégie. Fondamentalement, la stratégie consiste à mettre le problème sous forme d'un système différentiel extérieur et ensuite appliquer le théorème de Cartan Kähler.

Introduisons dans l'espace des 1- formes le sous ensemble E_3 défini par :

$$E_3 = \{\alpha \mid \alpha \wedge \omega \wedge d\omega = 0\}. \tag{2.46}$$

Alors E_3 est un sous espace vectoriel de dimension 3 (*voir* [19]). Donc d'aprés (2.40) et (2.41), il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\omega(p) = x_1(p) dx_2 + x_3(p) dx_4$$

sur un voisinage ouvert de $\bar{p}$ (*voir Bryant* [6], *Th.* 3.4 p.40). Ce qui entraine

$$d\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

et

$$\omega \wedge d\omega = (x_3 dx_1 - x_1 dx_3) \wedge dx_2 \wedge dx_4. \tag{2.47}$$

Soit h la fonction définie par :

$$h(p) = -\frac{x_3}{x_1}(p).$$

Alors

$$dh = \frac{1}{x_1^2}(x_3 dx_1 - x_1 dx_3).$$

De (2.47), on en déduit que les formes dx_2, dx_4 et dh appartiennent à E_3 et elles sont linéairement indépendantes. Donc $\{dx_2, dx4, dh\}$ forme une base de E_3. En outre on sait que si les fonctions u, v, λ et μ ω sont telles que :

$$\omega = \lambda du + \mu dv$$

alors $du, dv \in E_3$. Ceci nous conduit donc à chercher u et v de sorte que :

$$du, dv \in E_3 = [dx_2, dx_4, dh].$$

Ce qui revient à chercher des fonctions $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, \lambda$ et μ telles que :

$$\omega = \lambda(u_1 dx_1 + \ldots + u_n dx_n) + \mu(v_1 dx_1 + \ldots + v_n dx_n), \tag{2.48}$$

$$< u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4, p >= \frac{1}{\lambda}, \tag{2.49}$$

$$< v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 + v_4 dx_4, p >= \frac{1}{\mu}, \tag{2.50}$$

$$u_1 x_1 + u_3 x_3 = 0, \tag{2.51}$$

$$v_1 x_1 + v_3 x_3 = 0, \tag{2.52}$$

$$\lambda u_i + \mu v_i = 0, \;\; i = 5, \ldots, n, \tag{2.53}$$

et

$$\omega_1 := du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + du_3 \wedge dx_3 + du_4 \wedge dx_4 = 0, \tag{2.54}$$

$$\omega_2 := dv_1 \wedge dx_1 + dv_2 \wedge dx_2 + dv_3 \wedge dx_3 + dv_4 \wedge dx_4 = 0. \tag{2.55}$$

Par changement de coordonnées locales de $(p_1, \ldots, p_n)$ à $(x_1, \ldots, x_n)$, on se ramène à chercher des fonctions $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, \lambda$ et μ, toutes de la variable $(x_1, \ldots, x_n)$ et telles que :

$$\omega = \lambda(u_1 dx_1 + \ldots + u_n dx_n) + \mu(v_1 dx_1 + \ldots + v_n dx_n), \tag{2.56}$$

$$u_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + u_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + u_3\varphi_3(x_1, \ldots, x_n) + u_4\varphi_4(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\lambda}, \tag{2.57}$$

$$v_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + v_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + v_3\varphi_3(x_1, \ldots, x_n) + v_4\varphi_4(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\mu}, \tag{2.58}$$

$$u_1 x_1 + u_3 x_3 = 0, \tag{2.59}$$

$$v_1x_1 + v_3x_3 = 0, \tag{2.60}$$

$$\lambda u_i + \mu v_i = 0, \;\; i = 5, \ldots, n, \tag{2.61}$$

$$\omega_1 \;=\; du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + du_3 \wedge dx_3 + du_4 \wedge dx_4 = 0, \tag{2.62}$$

$$\omega_2 \;=\; dv_1 \wedge dx_1 + dv_2 \wedge dx_2 + dv_3 \wedge dx_3 + dv_4 \wedge dx_4 = 0. \tag{2.63}$$

Les équations (2.57) et (2.58) ne sont rien d'autre que (2.49) et (2.50) dans le système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ où les fonctions φ_i sont connues.

L'équation (2.56) est équivalente aux relations suivantes :

$$\lambda u_1 + \mu v_1 = 0, \tag{2.64}$$

$$\lambda u_2 + \mu v_2 = x_1, \tag{2.65}$$

$$\lambda u_3 + \mu v_3 = 0, \tag{2.66}$$

$$\lambda u_4 + \mu v_4 = x_3. \tag{2.67}$$

D'une part, en utilisant la condition $p \cdot X(p) = 2$, on montre que l'équation (2.58) est une conséquence de (2.57) et d'autre part en utilisant les équations (2.59) et (2.60), on voit aussi que (2.64) et (2.66) définissent la même équation.

Remarque 2 De (2.64) et (2.65), on obtient :

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{v_1}{u_1} \text{ et } \lambda(u_2 - v_2\frac{u_1}{v_1}) = x_1.$$

D'où l'equation (2.57) devient

$$u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 + u_4\varphi_4 = \frac{u_2v_1 - v_2u_1}{x_1v_1}. \tag{2.68}$$

Comme

$$du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + du_3 \wedge dx_3 + du_4 \wedge dx_4 = 0$$

le long d'une variété intégrale, on a alors

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \;\; 1 \leq i \leq 4, \;\; j \geq 5.$$

En les reportant dans (2.68), on obtient l'identité :

$$u_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + u_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + u_3\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_j} + u_4\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_j} = 0 \;\; \forall j \geq 5. \tag{2.69}$$

On peut maintenant donner la formulation différentielle du problème.

Soit M l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n, \lambda, \mu)$ de $\mathbb{R}^{3n+2}$ vérifiant les relations (2.57), (2.59), (2.60), (2.61), (2.64), (2.65) et (2.67). Donc M est défini par $(n+2)$ relations linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{3n+2}$. C'est donc une sous variété de $\mathbb{R}^{3n+2}$ de dimension $2n$. Sur M on pose le système différentiel extérieur suivant :

$$\omega_1 = 0, \tag{2.70}$$

$$\omega_2 = 0, \tag{2.71}$$

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \neq 0. \tag{2.72}$$

Soit $\bar{m} = (\bar{p}, \bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in M$, nous allons montrer en utilisant le théorème de *Cartan-Kähler* qu'il existe une sous varité intégrale $N \subset M$ du système differentiel extérieur (2.70)- (2.72), de dimension n contenant $\bar{m}$. Pour cela nous allons montrer que le système est fermé, qu'il admet un élément intégral $\bar{E}$ au point $\bar{m}$ et que $(\bar{E}, \bar{m})$ est ordinaire au sens de *Cartan*.

• Les formes ω_1 et ω_2 engendrent un idéal différentiel puisque $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$.

• Système linéarisé. Soit $\bar{m} = (\bar{p}, \bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ un point de M. On linéarise u_i, v_i, λ, μ comme fonctions de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
du_i &= \sum_{j=1}^{n} U_j^i dx_j, \quad 1 \leq i \leq n, \\
dv_i &= \sum_{j=1}^{n} V_j^i dx_j, \quad 1 \leq i \leq n, \\
d\lambda_i &= \sum_{j=1}^{n} L_j dx_j, \quad 1 \leq i \leq n, \\
d\mu_i &= \sum_{j=1}^{n} M_j dx_j, \quad 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

On cherche les paramètres U_j^i, V_j^i, N_j, M_j de sorte que (2.70) et (2.71) soient vérifiées. En fait, en substituant

$$du_i = \sum_{j=1}^{n} U_j^i dx_j$$

$$dv_i = \sum_{j=1}^{n} V_j^i dx_j$$

dans les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_2^1 - U_1^2 = 0, \\ U_3^1 - U_1^3 = 0, \\ U_4^1 - U_1^4 = 0, \\ U_3^2 - U_2^3 = 0, \\ U_4^2 - U_2^4 = 0, \\ U_4^3 - U_3^4 = 0, \\ U_j^i = 0, \;\; 1 \leq i \leq 4; j \geq 5, \end{cases} \tag{2.73}$$

et

$$\begin{cases} V_2^1 - V_1^2 = 0, \\ V_3^1 - V_1^3 = 0, \\ V_4^1 - V_1^4 = 0, \\ V_3^2 - V_2^3 = 0, \\ V_4^2 - V_2^4 = 0, \\ V_4^3 - V_3^4 = 0, \\ V_j^i = 0, \;\; 1 \leq i \leq 4; j \geq 5. \end{cases} \tag{2.74}$$

En différentiant les équations qui définissent la variété M, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
AL_j+\lambda(\varphi_1U_j^1+\varphi_2U_j^2+\varphi_3U_j^3+\varphi_4U_j^4) & = & -\lambda\left(u_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}+u_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}+u_3\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x_j}+u_4\dfrac{\partial\varphi_4}{\partial x_j}\right),\\
x_1U_1^1+x_3U_1^3 & = & -u_1,\\
x_1U_3^1+x_3U_3^3 & = & -u_3,\\
x_1U_j^1+x_3U_j^3 & = & 0,\quad \forall\, j\neq 1,3,\\
x_1V_1^1+x_3V_1^3 & = & -v_1,\\
x_1V_3^1+x_3V_3^3 & = & -v_3,\\
x_1V_j^1+x_3V_j^3 & = & 0,\quad \forall\, j\neq 1,3,\\
u_1L_j+\lambda U_j^1+v_1M_j+\mu V_j^1 & = & 0,\\
u_2L_1+\lambda U_1^2+v_2M_1+\mu V_1^2 & = & 1,\\
u_2L_j+\lambda U_j^2+v_2M_j+\mu V_j^2 & = & 0,\quad j=2,\dots n,\\
u_4L_3+\lambda U_3^4+v_4M_4+\mu V_3^4 & = & 1,\\
u_4L_j+\lambda U_j^4+v_4M_j+\mu V_j^4 & = & 0,\quad j\neq 3,\dots n,\\
u_iL_j+\lambda U_j^i+v_iM_j+\mu V_j^i & = & 0,\ \forall\, 5\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n.
\end{array}\right. \tag{2.75}$$

avec

$$A=\sum_{i=1}^{4}u_i\varphi_i(x_1,\dots,x_n).$$

Un élément intégral est défini par les $8n-20$ relations linéairement indépendantes definies par (2.73) et (2.74). En d'autres termes l'ensemble des éléments intégraux du système différentiel extérieur (2.70)-(2.72) est une sous variété différentielle de codimension $c=8n-20$ dans la grasmannienne.

• Calcul des caractères de Cartan. On cherche une variété intégrale de dimension n du système differentiel extérieur :

$$\left\{\begin{array}{l}
\omega_1=du_1\wedge dx_1+du_2\wedge dx_2+du_3\wedge dx_3+du_4\wedge dx_4=0,\\
\omega_2=dv_1\wedge dx_1+dv_2\wedge dx_2+dv_3\wedge dx_3+dv_4\wedge dx_4=0.
\end{array}\right. \tag{2.76}$$

satisfaisant

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \neq 0 \tag{2.77}$$

dans la variété différentielle M de dimension $2n$.
Pour cela, soient $\bar{m} = (\bar{p}, \bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in M$ et $(\bar{U}^i_j, \bar{V}^i_j, \bar{\lambda}_j, \bar{\mu}_j)$ tels que les relations (2.73), (2.74) et (2.75) sont vérifiées. Soit $\bar{E}$ l'élément intégral correspondant. On montre que $(\bar{m}, \bar{E})$ est ordinaire au sens de *Cartan*. Pour cet effet, considérons les formes différentielles suivantes :

$$\alpha_i = du_i - \sum_{j=1}^{4} U^i_j dx_j, \quad 1 \leq i \leq 4,$$

$$\beta_i = dv_j - \sum_{j=1}^{4} V^i_j dx_j, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

En substituant du_i et dv_i dans ω_1 et ω_2 et en utilisant les relations (2.73) et (2.74) on obtient :

$$\omega_1 = \alpha_1 \wedge dx_1 + \alpha_2 \wedge dx_2 + \alpha_3 \wedge dx_3 + \alpha_4 \wedge dx_4 = 0,$$

$$\omega_2 = \beta_1 \wedge dx_1 + \beta_2 \wedge dx_2 + \beta_3 \wedge dx_3 + \beta_4 \wedge dx_4 = 0.$$

En applicant la procédure décrite dans le chapitre préliminaire on a :

$$\begin{array}{rcl} H_1^* & = & \text{Vect}\{\alpha_1, \beta_1\}, \\ H_2^* & = & \text{Vect}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\}, \\ H_3^* & = & \text{Vect}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3\}, \\ H_4^* & = & \text{Vect}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3\, \alpha_4, \beta_4\}, \\ H_i^* & = & \text{Vect}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4\}, i = 5, \ldots, n-1. \end{array}$$

Donc

$$c_0 = 0;\ c_1 = 2;\ c_2 = 4;\ c_3 = 6;\ c_i = 8,\ i = 4, \ldots, n-1.$$

D'où $c_0 + \ldots + c_{n-1} = 0 + 2 + 4 + 6 + \sum_{i=4}^{n-1} 8 = 8n - 20$. Ce qui correspond exactement à la codimension de G^n. Donc le point $(\bar{m}, \bar{E})$ est ordinaire au sens de *Cartan*. Par conséquent le théorème de *Cartan-Kähler* s'applique.

Soit N une sous variété intégrale de M de dimension n contenant $\bar{m}$. Alors la relation (2.72) entraine que N est localememt le graphe d'une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n+2}$. En effet comme N est de dimension n, il existe un voisinage ouvert Θ de $\bar{m}$ dans $\mathbb{R}^{3n+2}$, un ouvert I de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}^{3n+2}$ tels que :

$$\Theta \cap N = \mathbf{Im}(\psi) \tag{2.78}$$

On note par $(t_1, \ldots, t_n)$ les points de I. Donc si $(x_1, \ldots, x_n, u_i, v_i, \lambda, \mu) \in \Theta \cap N$, alors x_i, u_i, v_i, λ et μ peuvent être considérés comme fonctions de $t_1, \ldots, t_n$. Dans ce cas la condition (2.72) devient

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \mathbf{Det}\, \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} dt_1 \wedge \ldots \wedge t_n \neq 0, \tag{2.79}$$

où

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$$

est la matrice jacobienne de $(x_1, \ldots, x_n)$. De (2.79), on en déduit que la matrice

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$$

est inversible. Donc d'aprés le théorème des fonctions implicites, on peut exprimer $(t_1, \ldots, t_n)$ en fonction de $(x_1, \ldots, x_n)$ et par conséquent u_i, v_i, λ et μ en fonction de $(x_1, \ldots, x_n)$. Ce qui entraine que $\Theta \cap N$ est le graphe d'une fonction de R^n dans $\mathbb{R}^{2n+2}$.
Donc les équations (2.70) et (2.71) entrainent d'aprés le lemme de *Poincaré* qu'il existe des fonctions u *et* v telles que :

$$\begin{aligned} du &= u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 + u_4 dx_4, \\ dv &= v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 + v_4 dx_4. \end{aligned}$$

Et enfin comme pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $(x, u_i(x), v_i(x), \lambda(x), \mu(x)) \in N \subset M$, alors les relations (2.57), (2.59), (2.60), (2.64), (2.65), (2.67) et (2.57) sont vérifiées. Ce qui prouve qu'il existe des fonctions u, v, λ et μ telles

$$\begin{aligned} \omega = \lambda du + \mu dv, \\ p.Du = \frac{1}{\lambda}, \\ p.Dv = \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, on montre qu'on peut choisir un élément intégral U, V, L, M de sorte que les fonctions u et v associées sont convexes, λ et μ strictement positifs. On sait que si u, v, λ, μ est une solution, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \lambda Du \cdot p &= 1, \\ \mu Dv \cdot p &= 1. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(Du \cdot p)\, D\lambda + \lambda D^2 u \cdot p + \lambda Du = 0,$$

$$(Dv \cdot p)\, D\mu + \mu D^2 v \cdot p + \mu Dv = 0.$$

Un élément intégral (U, V, L, M) au point $(p, Du, Dv, \lambda, \mu)$ est donc défini par les relations

$$(Du \cdot p)\, L + \lambda U p + \lambda Du = 0, \tag{2.80}$$
$$(Dv \cdot p)\, M + \mu V p + \mu Dv = 0. \tag{2.81}$$

On revient maintenant dans les coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)$ au lieu des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $p = (p_1, \ldots, p_n), u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n), \lambda, \mu$ tels que :

$$u \cdot p > 0,\ v \cdot p > 0,\ \lambda > 0,\ \mu > 0. \tag{2.82}$$

D'aprés *Browning-Chiappori*, on peut écrire

$$\Omega = Q + R_2, \tag{2.83}$$

où Q est symétrique et définie positive et R_2 une matrice de rang *deux* de la forme :

$$R_2 = L_0 u' + M_0 v'. \tag{2.84}$$

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\Omega = Q + (L_0 - \gamma M_0)u' + M_0(\gamma u + v)', \tag{2.85}$$

où γ sera choisi convenablement. Posons :

$$\begin{array}{lcl} L_1 & = & L_0 - \gamma M_0, \\ M_1 & = & M_0, \\ u_1 & = & u, \\ v_1 & = & \gamma u + v. \end{array} \tag{2.86}$$

Soient α et β strictement positifs. On pose :

$$\begin{array}{lcl} L_2 & = & L_1 - \alpha u_1, \\ M_2 & = & M_1 - \beta v_1, \\ u_2 & = & u_1, \\ v_2 & = & v_1. \end{array} \tag{2.87}$$

On cherche des matrices U et V symétriques définies positives telles que :

$$\lambda U + \mu V = Q_{\alpha\beta} := Q + \alpha u_2 u_2' + \beta v_2 v_2', \tag{2.88}$$
$$\lambda U p = x_1 := -(u_2 \cdot p) L_2 - \lambda u_2, \tag{2.89}$$
$$\mu V p = x_2 := -(v_2 \cdot p) M_2 - \mu v_2. \tag{2.90}$$

De telles matrices existent d'aprés le lemme d'*Inchtchakov*. Or U et V sont les matrices hessiennes des fonctions u et v. Ce qui prouve donc que u et v sont strictement convexes.

Lemme 2.3.1 (Inchtchakov) *Soient $x_1, \ldots, x_n, y$, $n+1$ points de $\mathbb{R}^k$. Soit Q une $(k \times k)$-matrice symétrique et définie positive. On suppose que $(x_i, y) \neq 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Alors il existe n matrices $M_1, \ldots, M_n$ symétriques et définies positives telles*

$$\begin{aligned} M_i y &= x_i, \ \forall i = 1, \cdots, n, & (2.91) \\ \sum_{k=1}^{n} M_i &= Q, & (2.92) \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_i &= Qy, & (2.93) \\ (x_i, y) &> 0, \ \forall i = 1, \cdots, n, & (2.94) \\ (Cz, z) &< 0, & (2.95) \end{aligned}$$

pour tout z non colinéaire à y, où *(Cz, z) est la forme quadratique définie par*

$$(Cz, z) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k, z)^2}{(x_k, y)} - (Qz, z) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0\ . \end{cases} \tag{2.96}$$

Remarque 3 La condition $(Cz, z) < 0 \ \forall z$ peut se restreindre seulement pour les z tels que $\|z\| = 1$.

Avant de donner une preuve de ce *lemme*, on va l'appliquer d'abord à notre problème. Pour cet effet, on va montrer qu'on peut choisir α et β strictement positifs de sorte que :

$$(x_1, p) > 0,$$
$$(x_2, p) > 0,$$

et

$$(Cz, z) < 0$$

pour tout z non colinéaire à p. On a :

$$(x_1, p) = \alpha(u_2 \cdot p)^2 - (u_2 \cdot p)(L_2 \cdot p) - \lambda(u_2 \cdot p), \tag{2.97}$$
$$(x_2, p) = \beta(v_2 \cdot p)^2 - (v_2 \cdot p)(M_2 \cdot p) - \lambda(v_2 \cdot p). \tag{2.98}$$

Donc pour α et β assez grands on a : $(x_1, p) > 0$ et $(x_2, p) > 0$. Maintenant désignons par E, le sous espace engendré par u_2 et v_2 et par $E^{\perp}$ son orthogonal. On choisit une base de

$e_3, \dots, e_n$ de $E^{\perp}$. Ainsi donc, en écrivant la matrice $Q_{\alpha\beta}$ dans la base $\{u_2, v_2, e_3, \dots, e_n\}$, on obtient :

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} q_{11}+\alpha & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22}+\beta & q_{23} & \dots & q_{2n} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & q_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

En iversant la matrice $Q_{\alpha\beta}$ (voir en annexe), on montre que :

$$\lim_{\alpha,\beta\to+\infty} Q_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & \dots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & s_{n3} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

où la matrice $(s_{ij}),\ 3 \leq i, j \leq n$ est la restriction de Q^{-1} sur $E^{\perp}$. Ce qui entraine donc :

$$\lim_{\alpha,\beta\to+\infty} (x_1, Q_{\alpha\beta}^{-1} x_2) = (u_2 \cdot p)(v_2 \cdot p)(L_1, Q^{-1} M_1). \tag{2.99}$$

Désignons par F, le sous espace engendré par $\{p, x_1, x_2\}$. Alors Sur F, la condition d'*Inchtchakov*

$$(Cz, z) < 0$$

est équivalente à :

$$\frac{(x_1, Q_{\alpha\beta}^{-1} x_1)^2}{(x_1, p)} + \frac{(x_2, Q_{\alpha\beta}^{-1} x_2)^2}{(x_2, p)} + (Q_{\alpha\beta}^{-1} x_1, x_2) - (Q_{\alpha\beta}^{-1} x_1, x_1) - (Q_{\alpha\beta}^{-1} x_2, x_2) \ < \ 0.$$

Or

$$\lim_{\alpha,\beta\to+\infty} \left[\frac{(x_1, Q_{\alpha\beta}^{-1} x_1)^2}{(x_1, p)} + \frac{(x_2, Q_{\alpha\beta}^{-1} x_2)^2}{(x_2, p)} + (Q_{\alpha\beta}^{-1} x_1, x_2) - (Q_{\alpha\beta}^{-1} x_1, x_1) - (Q_{\alpha\beta}^{-1} x_2, x_2) \right]$$
$$= (u_2 \cdot p)(v_2 \cdot p)(L_1, Q^{-1} M_1) - (u_2 \cdot p)^2 (L_1, Q^{-1} L_1) - (v_2 \cdot p)^2 (M_1, Q^{-1} M_1).$$

On peut choisir γ de sorte que

$$(u_2 \cdot p)(v_2 \cdot p)(L_1, Q^{-1} M_1) - (u_2 \cdot p)^2 (L_1, Q^{-1} L_1) - (v_2 \cdot p)^2 (M_1, Q^{-1} M_1) \ < \ 0. \tag{2.100}$$

En effet on a :

$$(u_2 \cdot p)(v_2 \cdot p)(L_1, Q^{-1} M_1) - (u_2 \cdot p)^2 (L_1, Q^{-1} L_1) - (v_2 \cdot p)^2 (M_1, Q^{-1} M_1) =$$

$$-3\gamma^2 (u \cdot p)^2 (M_0, Q^{-1} M_0) \ + \ 3\gamma \left[(u \cdot p)^2 (L_0, Q^{-1} M_0) - (u \cdot p)(v \cdot p)(M_0, Q^{-1} M_0) \right]$$

$$-(u \cdot p)^2 (L_0, Q^{-1} L_0) - (v \cdot p)^2 (M_0, Q^{-1} M_0) + (u \cdot p)(v \cdot p)(L_0, Q^{-1} M_0).$$

Alors, on obtient (2.100) pour γ assez grand.

Preuve du lemme. Commençons par les conditions nécessaires. On considère la forme quadratique :

$$(C_k z, z) = \frac{(M_k y, z)^2}{(M_k y, y)} = \frac{(x_k, z)^2}{(x_k, y)}.$$

Comme M_k est symétrique et définie positive, alors, d'aprés l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*, on a $(C_k z, z) < (M_k z, z)$ pour tout z non colinéaire à y. En les additionant, on obtient :

$$(Cz, z) = \sum_{k=1}^{n} (C_k z, z) < \sum_{k=1}^{n} (M_k z, z) = (Qz, z).$$

D'où l'inégalité souhaitée.

Inversement, supposons que $\sum_{k=1}^{n} x_k = Qy$, $(x_k, y) > 0$ pour tout k et $(Qz, z) < 0$ pour tout z non colinéaire à y. On définit pour tout $k = 1, \ldots, n$ les matrices B_k par :

$$\begin{aligned} B_k z &= \frac{(x_k, z)}{(x_k, y)} x_k, \quad 1 \leq k \leq n, \\ B_0 &= Q - \sum_{k=1}^{n} B_k. \end{aligned}$$

Alors on a :

$$B_k y = x_k, \quad \text{et} \quad B_0 y = Qy - \sum_{k=1}^{n} B_k y = Qy - Qy = 0.$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned} (C_k z, z) &= \frac{(x_k, z)^2}{(x_k, y)} = (B_k z, z) \geq 0, \\ (Cz, z) &= \sum_{k=1}^{n} (B_k z, z) - (Qz, z) = -(B_0 z, z). \end{aligned}$$

Posons $M_k = B_k + \frac{1}{k} B_0$. Alors on a :

$$M_k y = B_k y + \frac{1}{k} B_0 y = x_k, \tag{2.101}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} B_k + B_0 = Q, \tag{2.102}$$

$$(M_k z, z) = (B_k z, z) + \frac{1}{k} (B_0 z, z). \tag{2.103}$$

Dans la dernière équation (2.103), les deux termes de droite sont positifs et le deuxième est strictement positif pour tout z non colinéaires à y. Donc les matrices M_k vérifient toutes les conditions du lemme. ■

CHAPITRE 3

Problème de Douglas

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un problème inverse en calcul des variations. De manière plus précise, étant donnée une famille de courbes de classe C^∞ dans l'espace de dimension $n+1$, $\mathbb{R}^{n+1} = (t, x_j), (j = 1, ..., n)$, vérifiant le système d'équations différentielles

$$x_i'' = F_i(x_j, x_j') \quad (i = 1, ..., n), \tag{3.1}$$

on cherche à déterminer toutes les fonctions scalaires $L = L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ telles que toute solution de (3.1) est une solution extrémale du problème de calcul des variations :

$$\inf \int L(x_j(t), x_j'(t))\, dt; \tag{3.2}$$

En d'autres termes, on cherche à déterminer les Lagrangians L de sorte que toute solution de (3.1) est aussi solutions des équations d'*Euler-Lagrange* :

$$\frac{d}{dt} L_y = L_x, \tag{3.3}$$

et L_{yy} définie positive le long des solutions de (3.1).

Ou encore, on cherche à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial y_i} y_k + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial y_h \partial y_i} F_h = \frac{\partial L}{\partial x_i} \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Ce travail a été initié par *J.Douglas*. Pour plus de détails, *voir* [1], [17].

Fondamentalement, notre approche consiste à mettre le système d'équations aux dérivées partielles (3.4) sous forme d'un système différentiel extérieur et ensuite appliquer la théorie de *Cartan* developpée dans le premier chapitre. Dans le cas où $n = 1$, on montrera que le problème posé admet toujours une solution. Dans le cas $n \geq 2$, en général le problème n'admet pas de solution. Ici, on cherchera à voir ce que l'utilisation directe de *Cartan-Kähler* peut apporter.

3.2 Cas de la dimension un (n = 1)

Il faut noter que dans le cas de la dimension un, il existe une approche directe qui donne le même résultat si la fonction F est C^∞ et non analytique. *Voir* [4].

On cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y)y + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y)F(x,y) - \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 0. \tag{3.5}$$

3.2.1 Approche différentielle

On travaille dans $\mathbb{R}^5$ avec les variables (x, y, v, q, r) où les variables v, q, r seront interprétées comme suit :

$$v = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \quad r = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}.$$

On pose $u = ry + qF(x,y)$ et on considère sur $\mathbb{R}^5$ le système différentiel extérieur suivant :

$$\begin{cases} du \wedge dx + dv \wedge dy = 0, \\ dv - rdx - qdy = 0, \\ dr \wedge dx + dq \wedge dy = 0, \\ dx \wedge dy \neq 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le lien qui existe entre (3.5) et (3.6) est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 *Soit $\bar{m} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{q}, \bar{r}) \in \mathbb{R}^5$. S'il existe une variété intégrale analytique N de* (3.6) *de dimension deux contenant $\bar{m}$, alors il existe un voisinage ouvert U* de *$(\bar{x}, \bar{y})$ et une fonction L définie et anlytique sur U solution de* (3.5).

Preuve. Soient $\bar{m} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{q}, \bar{r}) \in \mathbb{R}^5$ et N une variété intégrale analytique de dimension deux du système (3.6) contenant $\bar{m}$. La condition

$$dx \wedge dy \neq 0 \tag{3.7}$$

et le théorème des fonctions implicites entrainent que N est localement le graphe d'une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$(x, y) \to (v(x, y), q(x, y), r(x, y)).$$

D'aprés le lemme de *Poincaré*, l'équation

$$du \wedge dx + dv \wedge dy = 0$$

entraine qu'il existe une fonction L définie sur un voisinage U de $(\bar{x}, \bar{y})$ telle que :

$$dL = udx + vdy. \tag{3.8}$$

Alors d'une part, l'équation (3.8) donne

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = u(\bar{x}, \bar{y}), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y}), \tag{3.10}$$

où

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = r(\bar{x}, \bar{y})\bar{y} + q(\bar{x}, \bar{y}).F(\bar{x}, \bar{y}) \tag{3.11}$$

D'autre part, de l'équation

$$dv - rdx - qdy = 0,$$

on en déduit que

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = r(\bar{x}, \bar{y}), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y}). \tag{3.13}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial v}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = r(\bar{x}, \bar{y}), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial v}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = q(\bar{x}, \bar{y}). \tag{3.15}$$

Enfin (3.11), (3.14), (3.15) entrainent (3.4) ■

3.2.2 Intégration du système (3.6)

Soit $\bar{m} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{q}, \bar{r})$ un point de $\mathbb{R}^5$. On cherche une variété intégrale N de dimension deux du système différentiel extérieur

$$(3.6)\begin{cases} \omega_1 = du \wedge dx + dv \wedge dy = 0, \\ \omega_2 = dv - rdx - qdy = 0 \\ \omega_3 = dr \wedge dx + dq \wedge dy = 0. \\ dx \wedge dy \neq 0 \end{cases}$$

Nous allons utiliser le théorème de *Cartan-Kähler*. Les formes ω_1, ω_2 et ω_3 engendrent un idéal différentiel car $d\omega_1 = d\omega_3 = 0$ et $d\omega_2 = d\omega_3$.

Etape1 : *Existence d'éléments intégraux.* Pour chercher des éléments intégraux, on linéarise v, q et r comme fonctions de (x, y) comme :

$$\begin{aligned} dv &= V_1 dx + V_2 dy, \\ dq &= Q_1 dx + Q_2 dy, \\ dr &= R_1 dx + R_2 dy. \end{aligned}$$

En substituant dv, dq et dr dans le système (3.6), on obtient :

$$\begin{aligned} V_1 &= \bar{r}, \\ V_2 &= \bar{q}, \\ R_2 - Q_1 &= 0, \\ \bar{y}R_2 + FQ_2 &= -\bar{q}\frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned}$$

Un élément intégral de dimension *deux* est défini par le choix de *six* paramètres $V_1, V_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ vérifiant $(3.16) - (3.16)$. Donc l'ensemble des éléments intégraux est une sous variété de $P^2(\mathbb{R}^5)$ de codimension 4.

Etape2 : *Calcul des caractères de Cartan.* Soient $\bar{m} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{q}, \bar{r})$ un point de $\mathbb{R}^5$ et $(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2)$ tels que les relations $(3.16) - (3.16)$ sont vérifiées. Soit $\bar{E}$, l'élément intégral correspondant. Alors, on montre que $(\bar{m}, \bar{E})$ est *ordinaire* au sens de *Cartan*. On considère les formes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ définies par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= dx, \\ \alpha_2 &= dy, \\ \alpha_3 &= dv - \bar{r}dx - \bar{q}dy, \\ \alpha_4 &= dr - R_1 dx - R_2 dy, \\ \alpha_5 &= dq - R_2 dx + \frac{1}{F}(\bar{y}R_2 + \bar{q}\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}))dy. \end{aligned}$$

Ainsi on définit une base de $T^*_{\bar{m}}\mathbb{R}^5$ telle que :

$$\bar{E} = \{\zeta \in \mathbb{R}^5 \mid <\alpha_i, \zeta>= 0,\ i \geq 3\}.$$

En substituant dv, dr, dq dans le système (3.6) on obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \omega_2 & = & \alpha_3, \\ \omega_1 & = & \bar{\beta}^1_1 \wedge \alpha_1 + \bar{\beta}^1_2 \wedge \alpha_2, \\ \omega_3 & = & \bar{\beta}^3_1 \wedge \alpha_1 + \bar{\beta}^3_2 \wedge \alpha_2, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \bar{\beta}^1_1 & = & \bar{y}\alpha_4 + F(\bar{x}, \bar{y})\alpha_5, \\ \bar{\beta}^1_2 & = & \alpha_3, \\ \bar{\beta}^3_1 & = & \alpha_4, \\ \bar{\beta}^3_2 & = & \alpha_5. \end{array}$$

On définit les sous espaces $H^*_0 \subset H^*_1$ de $T^*_{\bar{m}}\mathbb{R}^5$ par :

$$\begin{array}{rcl} H^*_0 & = & \mathbf{vect}(\alpha_3), \\ H^*_1 & = & \mathbf{vect}(\alpha_3, \bar{\beta}^1_1, \bar{\beta}^3_1). \end{array}$$

Soient $c_0(\bar{m}, \bar{E})$ et $c_1(\bar{m}, \bar{E})$ les entiers naturels définis par :

$$\begin{array}{rcl} c_0(\bar{m}, \bar{E}) & = & \mathbf{dim}\, H^*_0 = 1, \\ c_1(\bar{m}, \bar{E}) & = & \mathbf{dim}\, H^*_1 = 3. \end{array}$$

Donc on a :

$$c_0(\bar{m}, \bar{E}) + c_1(\bar{m}, \bar{E}) = 1 + 3 = 4,$$

ce qui coincide avec la codimension de l'ensemble des éléments intégraux de (3.6). D'où $(\bar{m}, \bar{E})$ est *ordinaire* au sens de *Cartan*. Donc le théorème de *Cartan-Kähler* s'applique.

3.3 Cas de la dimension deux (n=2)

3.3.1 Formulation

On cherche des conditions suffisantes sur les fonctions $F_1, F_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de sorte que toute solution dsystème d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} x''_1 = F_1(x_1, x_2, x'_1, x'_2), \\ \\ x''_2 = F_2(x_1, x_2, x'_1, x'_2), \end{cases} \tag{3.16}$$

soit extrémale au problème de calcul des varaiations

$$\inf \int L(x_1, x_2, x_1^{'}, x_2^{'})\, dt. \tag{3.17}$$

En d'autres termes on cherche toutes les fonctions scalaires $L = L(x_1, x_2, y_1, y_2)$ solutions du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_1} y_1 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_1} y_2 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y_1^2} F_1 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y_2 \partial y_1} F_2 - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_2} y_1 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_2} y_2 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_2} F_1 + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y_2^2} F_2 - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Proposition 3.3.1 Si L est une solution de (3.18), alors elle vérifie :

$$2\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial y_1^2}\frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} = 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y_2^2}\frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}. \tag{3.19}$$

Preuve. L'équation (3.19) s'obtient à partir des deux équations de (3.18) en écrivant :

$$\frac{\partial}{\partial y_2}(1) - \frac{\partial}{\partial y_1}(2) = 0.$$

On intégre l'équation (3.19) dans (3.18) et on cherche une solution L du système donné par (3.18) et (3.19).

3.3.2 Système différentiel extérieur associé

On travaille dans $\mathbb{R}^{12}$ et on prend comme variables canoniques $(x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, q_1, q_2, r_1, r_2, s, u)$ qui seront interprétées comme suit :
$v_i = \dfrac{\partial L}{\partial y_i}$, $q_i = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_i}$, $s = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_2}$, $q_i = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_i}$, $u = \dfrac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_2}$, $r_i = \dfrac{\partial^2 L}{\partial y_i^2}$, (i=1,2).

On pose :

$$\begin{aligned} v &= q_2 + \frac{1}{2}\left[uF_{1y_1} + r_2 F_{2y_1} - r_1 F_{1y_2} - uF_{2y_2}\right], \\ u_1 &= q_1 y_1 + v y_2 + r_1 F_1 + u F_2, \\ u_2 &= q_2 y_1 + s y_2 + u F_1 + r_2 F_2. \end{aligned}$$

On considère le système différentiel extérieur suivant :

$$\begin{cases} \omega_1 = du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + dv_1 \wedge dy_1 + dv_2 \wedge dy_2 & = & 0, \\ \omega_2 = dv_1 - q_1 dx_1 - v dx_2 - r_1 dy_1 - u dy_2 & = & 0, \\ \omega_3 = dv_2 - q_2 dx_1 - s dx_2 - u dy_1 - r_2 dy_2 & = & 0, \\ \omega_4 = dq_1 \wedge dx_1 + dv \wedge dx_2 + dr_1 \wedge dy_1 + du \wedge dy_2 & = & 0, \\ \omega_5 = dq_2 \wedge dx_1 + ds \wedge dx_2 + du \wedge dy_1 + dr_2 \wedge dy_2 & = & 0, \\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Le lien entre les systèmes (3.18) - (3.19) et (3.20) est donné par :

Proposition 3.3.2 *Soit* $\bar{m} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{v}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i, \bar{s}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{12}$. *On suppose qu'il existe une variété intégrale analytique* N *du système* (3.20) *de dimension* 4 *contenant* $\bar{m}$. *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ *et une fonction* L *définie et analytique sur* U *solution de* (3.18)-(3.19).

Preuve. Soient $\bar{m} \in \mathbb{R}^{12}$ et N une variété intégrale de (3.20) de dimension quatre contenant $\bar{m}$. Alors la condition

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge y_2 \neq 0$$

entraine que N est localement le graphe d'une fonction analytique de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^8$. L'équation $\omega_1 = 0$ entraine, d'aprés le lemme de *Poincaré*, qu'il existe une fonction $L : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage U de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ telle que :

$$dL = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + v_1 dy_1 + v_2 dy_2. \tag{3.21}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \bar{u}_1, && (3.22)\\
\frac{\partial L}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \bar{u}_2, && (3.23)\\
\frac{\partial L}{\partial y_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \bar{v}_1, && (3.24)\\
\frac{\partial L}{\partial y_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \bar{v}_2. && (3.25)
\end{aligned}$$

En vertu des équations $\omega_2 = 0$ et $\omega_3 = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{q}_1, && (3.26)\\
\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{v}, && (3.27)\\
\frac{\partial v_1}{\partial y_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial y_1^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{r}_1, && (3.28)\\
\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial y_2 \partial y_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{u} && (3.29)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{q}_2, && (3.30)\\
\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{s}, && (3.31)\\
\frac{\partial v_2}{\partial y_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{u}, && (3.32)\\
\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) &= \frac{\partial^2 L}{\partial y_2^2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = \bar{r}_2. && (3.33)
\end{aligned}$$

Et enfin en remplaçant dans les expressions de v,u_1 et u_2 les fonctions q_i, r_i, u et s par leurs valeurs, on prouve que L est solution du système (3.18)-(3.19). ■

3.3.3 Etude du système (3.20)

Dans cette section, nous allons étudier l'existence de variétés intégrales de dimension quatre du système différentiel extérieur (3.20).

Les formes différentielles $\omega_1, \ldots, \omega_5 dots$ egendrent un idéal différentiel car $d\omega_1 = 0$, $d\omega_2 = \omega_4$, $d\omega_3 = \omega_5$ et $d\omega_4 = d\omega_5 = 0$.

3.3.3.1 Existence d'éléments intégraux

Un élément intégral de dimension quatre sera un $4-$plan dans $\mathbb{R}^{12}$.
Soit $\bar{m} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{y_1}, \bar{y_2}, \bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{q_1}, \bar{q_2}, \bar{r_1}, \bar{r_2}, \bar{s}, \bar{u})$ un point de $\mathbb{R}^{12}$ tel que

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0.$$

On linéarise v_i, q_i, r_i, s, u comme fonction de x_1, x_2, y_1, y_2 comme suit :

$$\begin{aligned}
dv_i &= V_1^i dx_1 + V_2^i dx_2 + V_3^i dy_1 + V_4^i dy_2,\\
dq_i &= Q_1^i dx_1 + Q_2^i dx_2 + Q_3^i dy_1 + Q_4^i dy_2,\\
dr_i &= R_1^i dx_1 + R_2^i dx_2 + R_3^i dy_1 + R_4^i dy_2,\\
ds &= S_1 dx_1 + S_2 dx_2 + S_3 dy_1 + S_4 dy_2,\\
du &= U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dy_1 + U_4 dy_2.
\end{aligned}$$

En substituant dv_i, dq_i, dr_i, ds, du dans le système (3.20), on obtient des équations $\omega_2 = 0$ et $\omega_3 = 0$ de (3.20), les relations suivantes :

<u>*RL1*</u>

$$V_1^1 = \bar{q}_1,\ V_2^1 = \bar{v},\ V_3^1 = \bar{r}_1,\ V_4^1 = \bar{u},$$

$$V_1^2 = \bar{q}_2,\ V_2^2 = \bar{s},\ V_3^2 = \bar{u},\ V_4^2 = \bar{r}_2.$$

Les équations $\omega_4 = 0$ et $\omega_5 = 0$ entrainent :

<u>*RL2*</u>

$$\begin{gathered}
2Q_1^2 - 2Q_2^1 + (F_{1y_1} - F_{2y_2})U_1 + F_{2y_1}R_1^2 - F_{1y_2}R_1^1 = A_1,\\
2Q_3^2 - 2R_2^1 + (F_{1y_1} - F_{2y_2})U_3 + F_{2y_1}R_3^2 - F_{1y_2}R_3^1 = B_1,\\
2Q_4^2 - 2U_2 + (F_{1y_1} - F_{2y_2})U_4 + F_{2y_1}R_4^2 - F_{1y_2}R_4^1 = C_1,\\
Q_3^1 = R_1^1, \quad Q_4^1 = U_1, \quad R_4^1 = U_3,\\
Q_2^2 = S_1, \quad Q_3^2 = U_1, \quad Q_4^2 = R_1^2,\\
S_3 = U_2, \quad S_4 = R_2^2, \quad R_3^2 = U_4,
\end{gathered}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A_1 &= r_1F_{1y_2x_1} + uF_{2y_2x_1} - r_2F_{2y_1x_1} - uF_{1y_1x_1},\\
B_1 &= r_1F_{1y_2y_1} + uF_{2y_2y_1} - r_2F_{2y_1y_1} - uF_{1y_1y_1},\\
C_1 &= r_1F_{1y_2y_2} + uF_{2y_2y_2} - r_2F_{2y_1y_2} - uF_{1y_1y_2}.
\end{aligned}$$

L'équation $\omega_1 = 0$ donne :

<u>*RL3*</u>

$$\left\{\begin{array}{lcl}
y_1Q_2^1 + (F_1 - \frac{1}{2}y_2F_{1y_2})R_2^1 + (F_2 + \frac{1}{2}y_2(F_{1y_1} - y_2F_{2y_2}))U_2 & & \\
+\ y_2Q_2^2 + \frac{1}{2}y_2F_{2y_1}R_2^2 - y_1Q_1^2 - y_2S_1 - F_1U_1 + F_2R_1^2 & = & A_2\\
y_1Q_3^1 + (F_1 - \frac{1}{2}y_2F_{1y_2})R_3^1 + (F_2 + \frac{1}{2}y_2(F_{1y_1} - y_2F_{2y_2}))U_3 & & \\
+\ y_2Q_3^2 + \frac{1}{2}y_2F_{2y_1}R_3^2 & = & B_2\\
y_1Q_3^2 + y_2S_3 + F_1U_3 + F_2R_3^2 & = & C_2,\\
y_1Q_4^2 + y_2S_4 + F_1U_4 + F_2R_4^2 & = & D_2,
\end{array}\right.$$

avec :

$$\begin{aligned}
A_2 &= uF_{1x_1} + r_2F_{2x_1} - r_1F_{1x_2} - uF_{2x_2} - \frac{1}{2}y_2u(F_{1y_1x_2} - F_{2y_2x_2}) - \frac{1}{2}y_2r_2F_{2y_1x_2} + \\
&\quad \frac{1}{2}y_2r_1F_{1y_2x_2}, \\
B_2 &= -r_1F_{1y_1} - uF_{2y_1} - \frac{1}{2}y_2u(F_{1y_1y_1} - F_{2y_2y_1}) - \frac{1}{2}y_2r_2F_{2y_1y_1} + \frac{1}{2}y_2r_1F_{1y_2y_1}, \\
C_2 &= v - uF_{1y_1} - r_2F_{2y_1} - q_2, \\
D_2 &= s - uF_{1y_2} - r_2F_{2y_2}.
\end{aligned}$$

Alors un élément intégral est donc obtenu en choissant 32 paramètres $(V_j^i, Q_j^i, R_j^i, S_j, U_j)$ $(j = 1, ..., 4; i = 1, ..., 2)$ vérifiant les 24 relations données par *RL1, RL2, RL3*. Le rang de ce système est la codimension de l'ensemble des éléments intégraux de dimension quatre dans la grasmanienne de $P^4(\mathbb{R}^{12})$.

3.3.3.2 Calcul des caractères de Cartan

Soit $\bar{m} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{y_1}, \bar{y_2}, \bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{q_1}, \bar{q_2}, \bar{r_1}, \bar{r_2}, \bar{s}, \bar{u})$ un point fixé dans $\mathbb{R}^{12}$ tel que

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0.$$

Soientt $V_j^i, Q_j^i, R_j^i, S_j, U_j$ tels que les relations *RL1,RL2* et *RL3* sont vérifiées. Soit $\bar{E}$ l'élément intégral correpondant. Nous allons calculer les caractéristiques de cartan $c_i(\bar{m}, \bar{E})$, $(i = 1, 2, 3)$. On pose $V = T_{\bar{m}}\mathbb{R}^{12}$ et on désigne par V^* son dual. On définit les formes différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_5 &= dv_1 - V_1^1dx_1 - V_2^1dx_2 - V_3^1dy_1 - V_4^1dy_2, \\
\bar{\alpha}_6 &= dv_2 - V_1^2dx_1 - V_2^2dx_2 - V_3^2dy_1 - V_4^2dy_2, \\
\bar{\alpha}_7 &= dq_1 - Q_1^1dx_1 - Q_2^1dx_2 - Q_3^1dy_1 - Q_4^1dy_2, \\
\bar{\alpha}_8 &= dq_2 - Q_1^2dx_1 - Q_2^2dx_2 - Q_3^2dy_1 - Q_4^2dy_2, \\
\bar{\alpha}_9 &= dr_1 - R_1^1dx_1 - R_2^1dx_2 - R_3^1dy_1 - R_4^1dy_2, \\
\bar{\alpha}_{10} &= dr_2 - R_1^2dx_1 - R_2^2dx_2 - R_3^2dy_1 - R_4^2dy_2, \\
\bar{\alpha}_{11} &= ds - S_1dx_1 - S_2dx_2 - S_3dy_1 - S_4dy_2, \\
\bar{\alpha}_{12} &= du - U_1dx_1 - U_2dx_2 - U_3dy_1 - U_4dy_2,
\end{aligned}$$

de sorte :

$$\bar{E} = \{\zeta \in V, \ ; \ < \alpha_i, \zeta >= 0, \ \forall i \geq 5\}.$$

On compléte les $\bar{\alpha}_i$ $(i = 5, ..., 13)$ par $\bar{\alpha}_1 = dx_1$, $\bar{\alpha}_2 = dx_2$, $\bar{\alpha}_3 = dy_1$, $\bar{\alpha}_4 = dy_2$ pour obtenir une base de V^*. Pour être en meseure de calculer les caractéristiques de *Cartan*, nous allons exprimer les formes différentielles ω_i en fonction des $\bar{\alpha}_j$ $(j = 1, \ldots, 12)$. On remarque que :

$$\omega_2(\bar{m}) = \bar{\alpha}_5,$$

$$\omega_3(\bar{m}) = \bar{\alpha}_6.$$

En substituant dq_i, dr_i, ds_i $(i = 1, 2)$ dans (3.20) et en se servant des relations *RL1,RL2,RL3* on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \omega_1(\bar{m}) &=& B_1^1(\bar{m}) \wedge \alpha_1 + B_2^1(\bar{m}) \wedge \alpha_2 + \bar{\alpha}_5 \wedge \alpha_3 + \bar{\alpha}_6 \wedge \alpha_4, \\ \omega_4(\bar{m}) &=& \bar{\alpha}_7 \wedge \alpha_1 + \bar{B}_4(\bar{m}) \wedge \alpha_2 + \bar{\alpha}_9 \wedge \alpha_3 + \bar{\alpha}_{12}\alpha_4, \\ \omega_5(\bar{m}) &=& \bar{\alpha}_8 \wedge \alpha_1 + \bar{\alpha}_{11} \wedge \alpha_2 + \bar{\alpha}_{12} \wedge \alpha_3 + \bar{\alpha}_{10}\alpha_4, \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \bar{B}_1^1(\bar{m}) &=& \bar{y}_1\bar{\alpha}_7 + \bar{y}_2\bar{\alpha}_8 + \frac{1}{2}\bar{y}_2(F_{1y_1} - F_{2y_2})\bar{\alpha}_{12} + \frac{1}{2}\bar{y}_2 F_{2y_1}\bar{\alpha}_{10} \\ && -\frac{1}{2}\bar{y}_2 F_{1y_2}\bar{\alpha}_9 + F_1\bar{\alpha}_9 + F_2\bar{\alpha}_{12}, \\ \bar{B}_2^1(\bar{m}) &=& \bar{y}_1\bar{\alpha}_8 + \bar{y}_2\bar{\alpha}_{11} + F_1\bar{\alpha}_{12} + F_2\bar{\alpha}_{10}, \\ \bar{B}_4(\bar{m}) &=& \bar{\alpha}_8 + \frac{1}{2}(F_{1y_1} - F_{2y_2})\bar{\alpha}_{12} + \frac{1}{2}F_{2y_1}\bar{\alpha}_{10} - \frac{1}{2}F_{1y_2}\bar{\alpha}_9. \end{array}$$

On définit les sous espaces vectoriels $H_3^*, H_2^*, H_1^*, H_0^*$ de V^* comme suit :

$$\begin{array}{rcl} H_3^* &=& \mathit{Vect}\ \{B_1^1(\bar{m}), B_2^1(\bar{m}), \bar{B}_4(\bar{m}), \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6, \bar{\alpha}_7, \bar{\alpha}_8, \bar{\alpha}_9, \bar{\alpha}_{11}, \bar{\alpha}_{12}\}, \\ H_2^* &=& \mathit{Vect}\ \{B_1^1(\bar{m}), B_2^1(m), \bar{B}_4(\bar{m}), \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6, \bar{\alpha}_7, \bar{\alpha}_8, \bar{\alpha}_{11}\}, \\ H_1^* &=& \mathit{Vect}\ \{B_1^1(\bar{m}), \bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6, \bar{\alpha}_7, \bar{\alpha}_8\}, \\ H_0^* &=& \mathit{Vect}\ \{\bar{\alpha}_5, \bar{\alpha}_6\}. \end{array}$$

Les caractères de *Cartan* $c_i(\bar{m}, \bar{E})$ $(i = 0, ..., 3)$ sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} c_0(\bar{m}, \bar{E}) &=& dim H_3^*, \\ c_1(\bar{m}, \bar{E}) &=& dim H_1^*, \\ c_2(\bar{m}, \bar{E}) &=& dim H_2^*, \\ c_3(\bar{m}, \bar{E}) &=& dim H_3^*. \end{array}$$

On voit que le rang du système (REL1,REL2,REL3) ne coincide pas avec

$$c_0(\bar{m}, \bar{E}) + c_1(\bar{m}, \bar{E}) + c_2(\bar{m}, \bar{E}) + c_3(\bar{m}, \bar{E}).$$

Donc le théorème de *Cartan-Khaler* ne s'applique pas.

3.3.4 Variété intégrale de dimension deux

Dans cette section, on reprend le système différentiel extérieur (3.20) de la section précédente, mais cette fois ci, on cherche des variétés intégrales de dimension deux. En d'autres termes on cherche à résoud le système suivant :

$$\begin{cases} \omega_1 = du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + dv_1 \wedge dy_1 + dv_2 \wedge dy_2 & = & 0, \\ \omega_2 = dv_1 - q_1 dx_1 - v dx_2 - r_1 dy_1 - u dy_2 & = & 0, \\ \omega_3 = dv_2 - q_2 dx_1 - s dx_2 - u dy_1 - r_2 dy_2 & = & 0, \\ \omega_4 = dq_1 \wedge dx_1 + dv \wedge dx_2 + dr_1 \wedge dy_1 + du \wedge dy_2 & = & 0, \\ \omega_5 = dq_2 \wedge dx_1 + ds \wedge dx_2 + du \wedge dy_1 + dr_2 \wedge dy_2 & = & 0, \\ dx_1 \wedge dy_1 \neq 0, \end{cases} \tag{3.34}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} v & = & q_2 + \frac{1}{2}\left[uF_{1y_1} + r_2 F_{2y_1} - r_1 F_{1y_2} - uF_{2y_2}\right], \\ u_1 & = & q_1 y_1 + v y_2 + r_1 F_1 + u F_2, \\ u_2 & = & q_2 y_1 + s y_2 + u F_1 + r_2 F_2. \end{array}$$

Proposition 3.3.3 (Existence de variété intégrale de diemension deux.) *Si les fonctions F_i sont analytiques sur $\mathbb{R}^4$ alors il existe une variété intégrale du système* différentiel extérieur (3.34).

Preuve.

Etape1 : Système linéarisé. On pose :

$$\begin{array}{rcl} dy_2 & = & Y_1^2 dx_1 + Y_3^2 dy_1, \\ dx_2 & = & X_1^2 dx_1 + X_3^2 dy_1, \\ ds & = & S_1 dx_1 + S_3 dy_1, \\ du & = & U_1 dx_1 + U_3 dy_1, \\ dv_i & = & V_1^i dx_1 + V_3^i dy_1, \\ dq_i & = & Q_1^i dx_1 + Q_3^i dy_1, \\ dr_i & = & R_1^i dx_1 + R_3^i dy_1. \end{array}$$

En les substituant dans (3.34) dans les équations $\omega_2 = 0$ et $\omega_3 = 0$, on obtient les relations suivantes :

$$V_1^1 - vX_1^2 - uY_1^2 = q_1, \tag{3.35}$$

$$V_3^1 - vX_3^2 - uY_3^2 = r_1, \tag{3.36}$$

$$V_1^2 - sX_1^2 - r_2 Y_1^2 = s, \tag{3.37}$$

$$V_3^2 - sX_3^2 - r_2 Y_3^2 = u. \tag{3.38}$$

On va maintenant évaluer ω_4. On a

$$dv = (A_1 + A_2)dx_1 + (B_1 + B_2)dy_1,$$

avec

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}(2Q_1^2 + F_{1y_1}U_1 + F_{2y_1}R_1^2 - F_{1y_2}R_1^1 \\
&\quad - F_{2y_2}U_1 + uF_{1x_2y_1}X_1^2 + uF_{1y_1y_2}Y_1^2 + r_2F_{2x_2y_1}X_1^2 \\
&\quad + r_2F_{2y_1y_2}Y_1^2 - r_1F_{1x_2y_2}X_1^2 - r_1F_{1y_2y_2}Y_1^2 \\
&\quad - uF_{2x_2y_2}X_1^2 - uF_{2y_2y_2}Y_1^2), \\
A_2 &= \frac{1}{2}uF_{1x_1y_1} + r_2F_{x_1y_1} - r_1F_{1x_1y_2} - uF_{2x_1y_2}, \\
B_1 &= \frac{1}{2}(2Q_3^2 + F_{1y_1}U_3 + F_{2y_1}R_3^2 - F_{1y_2}R_3^1 \\
&\quad - F_{2y_2}U_3 + uF_{1x_2y_1}X_3^2 + uF_{1y_1y_2}Y_3^2 + r_2F_{2x_2y_1}X_3^2 \\
&\quad + r_2F_{2y_1y_2}Y_3^2 - r_1F_{1x_2y_2}X_3^2 - r_1F_{1y_2y_2}Y_3^2 \\
&\quad - uF_{2x_2y_2}X_3^2 - uF_{2y_2y_2}Y_3^2), \\
B_2 &= \frac{1}{2}uF_{1y_1y_1} + r_2F_{2y_1y_1} - r_1F_{1y_1y_2} - uF_{2y_1y_2}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\omega_4 = (R_1^1 - Q_3^1 + X_3^2A_1 + X_2^2A_2 + U_1Y_3^2 - X_1^2B_1 - X_1^2B_2 - Y_1^2U_3)dx_1 \wedge dy_1.$$

D'où $\omega_4 = 0$ entraine

$$R_1^1 + X_3^2A_1 + X_2^2A_2 + U_1Y_3^2 - Q_3^1 - X_1^2B_1 - X_1^2B_2 - Y_1^2U_3 = 0. \tag{3.39}$$

$$\omega_5 = (U_1 + S_1X_3^2 + R_1^2Y_3^2 - Q_3^2 - S_3X_1^2 - R_3^2Y_1^2)dx_1 \wedge dy_1,$$

donc l'équation $\omega_5 = 0$ entraine :

$$U_1 + S_1X_3^2 + R_1^2Y_3^2 - Q_3^2 - S_3X_1^2 - R_3^2Y_1^2 = 0.$$

Et enfin évaluons ω_1.

On a :

$$du_1 \wedge dx_1 = (C_1 + C_2)dy_1 \wedge dx_1,$$

avec

$$\begin{aligned}
C_1 &= y_1Q_3^1 + y_2(B_1 + B_2) + vY_3^2 + F_1R_3^1 + F_2U_3 \\
&\quad + r_1F_{2x_2}X_3^2 + r_1F_{2y_2}Y_3^2 + uF_{2x_2}X_3^2 + uF_{2y_2}Y_3^2, \\
C_2 &= q_1 + r_1F_{2y_1} + uF_{2y_1},
\end{aligned}$$

et

$$du_2 \wedge dx_2 = Ddx_1 \wedge dy_1,$$

avec :

$$\begin{aligned} D &= y_1Q_1^2X_3^2 - y_1Q_3^2X_1^2 - q_2X_1^2 + sY_1^2X_3^2 - sY_3^2X_1^2 + y_2S_1X_3^2 \\ &\quad -y_2S_3X_1^2 + F_1U_1X_3^2 - F_1U_3X_1^2 + F_2R_1^2X_3^2 - F_2R_3^2X_1^2 + uF_{1x_1}X_3^2 \\ &\quad -uF_{1y_1}X_1^2 + uF_{1y_2}Y_1^2X_3^2 - uF_{1y_2}Y_3^2X_1^2 + r_2F_{2x_1}X_3^2 \\ &\quad -r_2F_{2y_1}X_1^2 + r_2F_{2y_2}Y_1^2X_3^2 - r_2F_{2y_2}Y_3^2X_1^2. \end{aligned}$$

D'ou

$$\omega_1 = (D - C_1 - C_2 + V_1^1 + V_1^2Y_3^2 - V_3^2Y_1^2)dx_1 \wedge dy_1.$$

Donc l'équation $\omega_1 = 0$ entraine :

$$D - C_1 - C_2 + V_1^1 + V_1^2Y_3^2 - V_3^2Y_1^2 = 0. \tag{3.40}$$

Un élément intégral du système différentiel extérieur est donc défini par le choix de 20 paramètres $(X_1^2, X_3^2, Y_1^2, Y_3^2, V_1^i, V_3^i, Q_1^i, Q_3^i, R_1^i, R_3^i, S_1, S_3, U_1, U_3)$ vérifiant les sept relations suivantes :

$$\begin{aligned} V_1^1 - vX_1^2 - uY_1^2 &= q_1, \\ V_3^1 - vX_3^2 - uY_3^2 &= r_1, \\ V_1^2 - sX_1^2 - r_2Y_1^2 &= s, \\ V_3^2 - sX_3^2 - r_2Y_3^2 &= u, \\ R_1^1 + X_3^2A_1 + X_2^2A_2 + U_1Y_3^2 - Q_3^1 - X_1^2B_1 - X_1^2B_2 - Y_1^2U_3 &= 0, \\ U_1 + S_1X_3^2 + R_1^2Y_3^2 - Q_3^2 - S_3X_1^2 - R_3^2Y_1^2 &= 0, \\ D - C_1 - C_2 + V_1^1 + V_1^2Y_3^2 - V_3^2Y_1^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

L'ensemble des éléments intégraux de dimension deux est une sous variété de codimension sept de la grassmanienne.

Etape2 : Calcul des caractères de Cartan. Soit $\bar{m} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{v}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i, \bar{s}, \bar{u})$ un point de $\mathbb{R}^{12}$ et soit $(X_1^2, X_3^2, Y_1^2, Y_3^2, V_1^i, V_3^i, Q_1^i, Q_3^i, R_1^i, R_3^i, S_1, S_3, U_1, U_3)$ tels les relations (3.41) sont vérifiées. Soit E l'élément intégral correspondant. Posons :

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_3 &=& dx_2 - X_1^2 dx_1 - X_3^2 dy_1, \\
\alpha_4 &=& dy_2 - Y_1^2 dx_1 - Y_3^2 dy_1, \\
\alpha_5 &=& dv_1 - V_1^1 dx_1 - V_3^1 dy_1, \\
\alpha_6 &=& dv_2 - V_1^2 dx_1 - V_3^2 dy_1, \\
\alpha_7 &=& dq_1 - Q1^1 dx_1 - Q_3^1 dy_1, \\
\alpha_8 &=& dq_2 - Q_1^2 dx_1 - Q_3^2 dy_1, \\
\alpha_9 &=& dr_1 - R_1^1 dx_1 - R_3^1 dy_1, \\
\alpha_{10} &=& dr_2 - R_1^2 dx_1 - R_3^2 dy_1, \\
\alpha_{11} &=& ds - S_1 dx_1 - S_3 dy_1, \\
\alpha_{12} &=& du_U_1 dx_1 - U_3 dy_1.
\end{array}$$

On complète par $\alpha_1 = dx_1$ et $\alpha_2 = dy_1$ pour obtenir une base de l'espace tangent à $\mathbb{R}^{12}$ en $\bar{m}$. Dans cette base, on exprime *les* ω_i en fonction des α_i et on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\omega_2 &=& \alpha_3, \\
\omega_3 &=& \alpha_4, \\
\omega_5 &=& (\alpha_8 + X_1^2\alpha_{11} - S_1\alpha_3 + Y_1^2\alpha_{10} - R_1^2\alpha_4) \wedge \alpha_1 \\
&& +(X_3^2\alpha_{11} - S_3\alpha_3 + \alpha_{12} + Y_3^2\alpha_{10} - R_3^2\alpha_4) \wedge \alpha_2 \\
&& +\alpha_{11} \wedge \alpha_3 + \alpha_{10} \wedge \alpha_4.
\end{array}$$

Evaluation de $\omega_4 = dq_1 \wedge dx_1 + dv \wedge dx_2 + dr_1 \wedge dy_1 + du \wedge dy_2$.
On a :

$$\begin{array}{rcl}
2dv &=& 2dq_2 + (F_{1y_1} - F_2 y_2)du + F_{2y_1} dr_2 - F_{1y_1} dr_1 \\
&& +E_1 dx_1 + E_2 dy_1 + E_3 dx_2 + E_4 dy_2,
\end{array}$$

où les coéfficients E_i, $(i = 1 \ldots, 4)$ sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl}
E_1 &=& (uF_{1x_1y_1} + r_2F_{2x_1y_1} - r_1F_{1x_1y_2} - uF_{2x_1y_2}), \\
E_2 &=& (uF_{1y_1y_1} + r_2F_{2y_1y_1} - r_1F_{1y_1y_2} - uF_{2y_1y_2}), \\
E_3 &=& (uF_{1x_2y_1} + r_2F_{2x_2y_1} - r_1F_{1x_2y_2} - uF_{2x_2y_2}), \\
E_4 &=& (uF_{1y_2y_1} + r_2F_{2y_2y_1} - r_1F_{1y_2y_2} - uF_{2y_2y_2}).
\end{array}$$

Donc :

$$dv \wedge dx_2 = G_1 \wedge dx_1 + G_2 \wedge dy_1 + G_3,$$

où

$$
\begin{aligned}
G_1 &= X_1^2\alpha_8 + \frac{1}{2}(F_{1y_1} - F_{2y_2})X_1^2\alpha_{12} + \frac{1}{2}F_{2y_1}X_1^2\alpha_{10} \\
&\quad + \frac{1}{2}F_{1y_1}X_1^2\alpha_9 + \frac{1}{2}E_4X_1^2\alpha_4 - (Q_1^2 + \frac{1}{2}(F_{1y_1} - F_{2y_2})U_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}F_{2y_1}R_1^2 + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_4Y_1^2) \wedge \alpha_3, \\
G_2 &= X_3^2\alpha_8 + \frac{1}{2}(F_{1y_1} - F_{2y_2})X_3^2\alpha_{12} + \frac{1}{2}F_{2y_1}X_3^2\alpha_{10} \\
&\quad + \frac{1}{2}F_{1y_1}X_3^2\alpha_9 + \frac{1}{2}E_4X_3^2\alpha_4 - (Q_3^2 + \frac{1}{2}(F_{1y_1} - F_{2y_2})U_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}F_{2y_1}R_1^2 + \frac{1}{2}E_2 + \frac{1}{2}E_4Y_3^2) \wedge \alpha_3, \\
G_3 &= \alpha_8 \wedge \alpha_3 + \frac{1}{2}(F_{1y_1} - F_{2y_2})\alpha_{12} \wedge \alpha_3 + \frac{1}{2}F_{2y_1}\alpha_{10} \wedge \alpha_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}F_{1y_1}\alpha_9 \wedge \alpha_3 + \frac{1}{2}\alpha_4 \wedge \alpha_3.
\end{aligned}
$$

D'où l'expression de ω_4 en fonction des α_i, $(i \geq 3)$ est donnée par

$$\omega_4 = (\alpha_7 + Y_1^2\alpha_{12} - U_1\alpha_4 + G_1) \wedge \alpha_1 + (\alpha_9 + Y_3^2\alpha_{12} - U_3\alpha_4 + G_2) \wedge \alpha_2 + G_3 + \alpha_4 \wedge \alpha_{12}.$$

Enfin nous exprimons ω_1 en fonction des α_i, $(i = 1, \ldots, 4)$.
En remplaçant u_1 et u_2 par leurs valeurs dans l'expression de ω_1, on obtient :

$$\omega_1 = B_1^1 \wedge \alpha_1 + B_2^1 \wedge \alpha_2 + B_3^1,$$

où B_1^1 et B_2^1 sont des combinaisons linéaires de α_i avec $i \geq 3$ et B_3^1 est une combinaison linéaire de monômes de la forme $\alpha_i \wedge \alpha_j$ avec $i, j \geq 3$ (voir en annexe pour le détail des calculs). Faisons les notations suivantes :

$$
\begin{aligned}
B_1^4 &= \alpha_7 + Y_1^2\alpha_{12} - U_1\alpha_4 + G_1, \\
B_2^4 &= \alpha_9 + Y_3^2\alpha_{12} - U_3\alpha_4 + G_2, \\
B_1^5 &= \alpha_8 + X_1^2\alpha_{11} - S_1\alpha_3 + Y_1^2\alpha_{10} - R_1^2\alpha_4, \\
B_2^5 &= \alpha_{12} + X_3^2\alpha_{11} - S_3\alpha_3 + Y_3^2\alpha_{10} - R_3^2\alpha_4.
\end{aligned}
$$

Avec les notations précédentes, on a

$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= \alpha_2, \\
\omega_3 &= \alpha_4, \\
\omega_1 &= B_1^1 \wedge \alpha_1 + B_2^1 \wedge \alpha_2 + B_3^1, \\
\omega_4 &= B_1^4 \wedge \alpha_1 + B_2^4 \wedge \alpha_2 + \alpha_4 \wedge \alpha_{12} + G_3, \\
\omega_5 &= B_1^5 \wedge \alpha_1 + B_2^5 \wedge \alpha_2 + \alpha_{11} + \alpha_{10} \wedge \alpha_4.
\end{aligned}
$$

Soit H_0 et H_1^* les sous espaces de $(T_{\bar{m}}\mathbb{R}^{11})^*$ défnis par :

$$\begin{aligned} H_0^* &= vect(\alpha_3, \alpha_4), \\ H_1^* &= vect(\alpha_3, \alpha_4, B_1^1, B_1^4, B_1^5). \end{aligned}$$

Alors on a :

$$dim\, H_0^* = 2.$$
$$dim\, H_1^* = 5.$$

D'où

$$dim\, H_0^* + dim\, H_1^* = 2 + 5 = 7.$$

Ce qui correspond à la codimension de l'ensemble des éléments intégraux de dimension deux. Donc le théorème de *Cartan-Kähler* s'applique. Ce qui prouve l'existence de variétés intégrales de dimension deux.

3.3.4.1 Interprétation

Nous essayons maintenant de donner une interprétation de l'existence de variétés intégrales de dimension deux. On considère le système (3.41) et on remplace la condition $dx_1 \wedge dy_1 \neq 0$ par la condition $dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$. Avec les mêmes arguments on montre l'existence d'une variété intégrale N de dimension deux. N est localement le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$. Donc y_i, v_i, q_i, r_i, s, u sont des fonctions de (x_1, x_2) qui vérifient le système d'EDP suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - q_1 - r_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - u\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0, \\
&\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - v - r_1\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - u\frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= 0, \\
&\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - q_2 - s\frac{\partial y_1}{\partial x_1} - r_2\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0, \\
&\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - s - u\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - r_2\frac{\partial y_2}{\partial x_2} &= 0, \\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0, \\
&\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial r_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial r_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0, \\
&\frac{\partial s}{\partial x_1} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial r_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial r_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.3.5 Etude d'une EDP

Dans ce paragraphe, on résout par le théorème de *Cartan-Kähler* l'équation aux dŕivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_1} y_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_1} y_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y_1^2} F_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial y_2 \partial y_1} F_2 - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \tag{3.43}$$

où les foncts F_1 et F_2 sont définies et analytiques sur $\mathbb{R}^4$.

Théorème 3.3.1 (Existence de solutions.) *Soit* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbb{R}^4$. *Alors il exsite un voisinage ouvert* U de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ *dans* dans $\mathbb{R}^4$ *et une fonction* L *définie et analytique sur* U solution de (3.43).

Preuve. La preuve se fera en trois étapes :

Etape1 : Système différentiel extérieur associé. Cette étape consiste à mettre l'équation (3.43) sous forme d'un système différentiel extérieur. Sur $\mathbb{R}^{11}$ on prend comme variables canoniques $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v_1, v_2, q_1, q_2, r_1, r_2)$ où ces variables seront interprétée comme suit :

$$u_2 = \frac{\partial L}{\partial x_2}, \quad v_i = \frac{\partial L}{\partial y_i}, \quad q_i = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial y_1}, \quad r_i = \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_1}.$$

On pose :

$$u_1 = q_1 y_1 + q_2 y_2 + r_1 F_1 + r_2 F_2$$

et on considère le système différentiel extérieur suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \omega_1 & = & du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + dv_1 \wedge dy_1 + dv_2 \wedge dy_2 = 0, \\ \omega_2 & = & dv_1 - q_1 dx_1 - q_2 dx_2 - r_1 dy_1 - r_2 dy_2 = 0, \\ \omega_3 & = & dq_1 \wedge dx_1 + dq_2 \wedge dx_2 + dr_1 \wedge dy_1 + dr_2 \wedge dy_2 = 0, \\ & & dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0. \end{array} \right. \tag{3.44}$$

Etape2 : Lien entre (3.44) et (3.43).

Lemme 3.3.1 *Soit* $\bar{m} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{u}_2, \bar{v}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i) \in R^{11}$. *S'il existe une variété intégrale analytique* $N \subset \mathbb{R}^{11}$ *de* (3.44) *de dimension quatre contenant* $\bar{m}$, *alors il existe une solution locale analytique* L *de* (3.43) *définie sur un voisinage de* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$.

Preuve. Soit $\bar{m} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{u}_2, \bar{v}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i)$ un point de $\mathbb{R}^{11}$ tel que en ce point

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \neq 0$$

Soit N une variété intégrale de (3.44), de dimension quatre contenant $\bar{m}$. Alors M est localement le graphe d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^7$. C'est à dire il existe un voisinage W de $\bar{m}$ dans $\mathbb{R}^{11}$, un voisinage U de $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ tels que

$$W \cap M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)) \ \ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in U\}.$$

En d'autres termes u_2, v_i, q_i, r_i sont toutes des fonctions de (x_1, x_2, y_1, y_2). D'une part l'equation $\omega_1 = 0$ entraine, d'aprés le théoreme de *Poincaré* qu'il existe un voisinage U de (x_1, x_2, y_1, y_2) et une fonction scalaire $L : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$dL = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + v_1 dy_1 + v_2 dy_2 \;\text{ sur }\; U. \tag{3.45}$$

Ce qui entraine :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1, \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2, \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = v_1, \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = v_2. \tag{3.49}$$

D'autre part l'équation $\omega_2 = 0$ et les équations $(3.46) - (3.49)$ entrainent :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_1} = q_1, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_1} = q_2, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial y_1^2} = r_1, \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y_2 \partial y_1} = r_2, \tag{3.53}$$

Finalement, en utilisant les équations $(3.50) - (3.53)$ et (3.46), on obtient :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_1} y_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial y_1} y_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y_1^2} F_1 + \frac{\partial^2 L}{\partial y_2 \partial y_1} F_2 - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.$$

Ce qui prouve que L est solution de (3.43) ■

Etape3 : Existence de variétés intégrales. Dans cette dernière étape on montre que le système différentiel extérieur (3.44) est intégrable.

Les formes différentielles ω_1, ω_2 et ω_3 engendrent un idéal différentiel car $d\omega_1 = 0$, $d\omega_2 = \omega_3$ et $d\omega_3 = 0$. On linéarise u_2, v_i, d_i, r_i comme fonctions de x_1, x_2, y_1, y_2 comme suit :

$$\begin{aligned}
du_2 &= U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dy_1 + U_4 dy_2, \\
dv_i &= V_1^i dx_1 + V_2^i dx_2 + V_3^i dy_1 + V_4^i dy_2, \\
dq_i &= Q_1^i dx_1 + V Q_2^i dx_2 + Q_3^i dy_1 + Q_4^i dy_2, \\
dr_i &= R_1^i dx_1 + R_2^i dx_2 + R_3^i dy_1 + R_4^i dy_2.
\end{aligned}$$

En substituant du_2, dv_i, dq_i et dr_i dans le système (3.44), il s'en suit :
l'équation $\omega_2 = 0$ entraine :

$$V_1^1 = q_1,\;\; V_2^1 = q_2,\;\; V_3^1 = r_1,\;\; V_4^1 = r_2. \tag{3.54}$$

Des équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_3 = 0$ on en déduit les relations suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
y_1Q_2^1 + y_2Q_2^2 + F_1R_2^1 + F_2R_2^2 - U_1 & = & -r_1F_{1x_2} - r_2F_{2x_2} \\
y_1Q_3^1 + y_2Q_3^2 + F_1R_3^1 + F_2R_3^2 - V_1^1 & = & -q_1 - r_1F_{1y_1} - r_2F_{2y_1}, \\
y_1Q_4^1 + y_2Q_4^2 + F_1R_4^1 + F_2R_4^2 - V_1^2 & = & -q_2 - br_1F_{1y_2} - r_2F_{2y_2}, \\
U_3 - V_2^1 & = & 0, \\
U_4 - V_2^2 & = & 0, \\
V_4^1 - V_3^2 & = & 0, \\
Q_1^2 - Q_2^1 & = & 0, \\
R_1^1 - Q_3^1 & = & 0, \\
R_1^2 - Q_4^1 & = & 0, \\
R_2^1 - Q_3^2 & = & 0, \\
R_2^2 - Q_4^2 & = & 0, \\
R_3^2 - R_4^1 & = & 0.
\end{array} \tag{3.55}$$

Un élément intégral est donc défini par le choix de 28 paramètres $(U_i, V_i^1, V_i^2, Q_i^1, Q_i^2, R_i^1, R_i^2)$ vérifiant les 16 relations linéairement indépendantes définies par (3.54) et (3.55). Donc l'ensemble des éléments intégraux du système (3.44) est une sous variété dans la gramsmanienne de *codimension 16*.

Soit $\bar{m} = (\bar{x}_1, x_2, y_1, y_2, u_2, v_i, q_i, r_i) \in \mathbb{R}^{11}$ et soit $(U_i, V_i^1, V_i^2, Q_i^1, Q_i^2, R_i^1, R_i^2)$ tels que les relations (3.54) et (3.55) sont vérifiées. Soit $\bar{E}$ l'élément intégral correspondant. On va montrer que $(\bar{m}, \bar{E})$ est ordinaire au sens de *Cartan*. Pour cela on définit les formes différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_5 &= dv_1 - V_1^1dx_1 - V_2^1dx_2 - V_3^1dy_1 - V_4^1dy_2,\\
\alpha_6 &= dv_2 - V_1^2dx_1 - V_2^2dx_2 - V_3^2dy_1 - V_4^2dy_2,\\
\alpha_7 &= dq_1 - Q_1^1dx_1 - Q_2^1dx_2 - Q_3^1dy_1 - Q_4^1dy_2,\\
\alpha_8 &= dq_2 - Q_1^2dx_1 - Q_2^2dx_2 - Q_3^2dy_1 - Q_4^2dy_2,\\
\alpha_9 &= dr_1 - R_1^1dx_1 - R_2^1dx_2 - R_3^1dy_1 - R_4^1dy_2,\\
\alpha_{10} &= dr_2 - R_1^2dx_1 - R_2^2dx_2 - R_3^2dy_1 - R_4^2dy_2\\
\alpha_{11} &= du_2 - U_1dx_1 - U_2dx_2 - U_3dy_1 - U_4dy_2.
\end{aligned}$$

Ensuite, on les complète par $\alpha_1 = dx_1, \alpha_2 = dx_2, \alpha_3 = dy_1$ et $\alpha_4 = dy_2$ pour obtenir une base de l'espace tangent à $\mathbb{R}^{11}$ en $\bar{m}$. En substituant du_2, dv_i, dq_i, dr_i dans ω_i, on obtient :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= A \wedge dx_1 + \alpha_{11} \wedge dx_2 + \alpha_5 \wedge dy_1 + \alpha_6 \wedge dy_2,\\
\omega_2 &= \alpha_5,\\
\omega_3 &= \alpha_7 \wedge dx_1 + \alpha_8 \wedge dx_2 + \alpha_9 \wedge dy_1 + \alpha_{10} \wedge dy_2,
\end{aligned}$$

où

$$A = y_1\alpha_7 + y_2\alpha_8 + F_1\alpha_9 + F_2\alpha_{10}.$$

On définit les sous espaces $H_0^*, H_1^*, H_2^*, H_3^*$ de $T_m^*\mathbb{R}^{11}$ par :

$$\begin{aligned}
H_0^* &= Vect(\alpha_5),\\
H_1^* &= Vect(\alpha_5, \alpha_7, A),\\
H_2^* &= Vect(\alpha_5, \alpha_7, A, \alpha_{11}, \alpha_8),\\
H_3^* &= Vect(\alpha_5, \alpha_7, A, \alpha_{11}, \alpha_8, \alpha_6, \alpha_{10})
\end{aligned}$$

On définit :

$$\begin{aligned}
c_0 &= \dim H_0^* = 1,\\
c_1 &= \dim H_1^* = 3,\\
c_2 &= \dim H_2^* = 5,\\
c_3 &= \dim H_3^* = 7.
\end{aligned}$$

D'óu on a :

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 16.$$

Ce qui correspond exactement à la codimension de l'ensemble des éléments intégaux. Donc d'aprés le théorème de *Cartan-Kähler*, il existe une variètè intégrale N de dimension quatre contenant m telle que

$$T_mN = E.$$

CHAPITRE 4

Problème inverse en calcul des variations

4.1 Introduction

Pour $T > 0$, soit $I = [0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in L^2(I)$. On considère le problème de calcul des variations suivant :

$$(P_f) \begin{cases} \inf \;\; J_f(u), \\ u \in H^1(I,) \\ u(0) = u_0,\, u(T) = u_1, \end{cases} \tag{4.1}$$

où

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I)\,,\, u' \in L^2(I)\}, \tag{4.2}$$

et

$$J_f(u) = \int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt. \tag{4.3}$$

Moyennant certaines hypothèses sur le Lagragian L, le problème (P_f) admet une unique solution notée $u_f \in H^1(I)$. Soit G l'opérateur défini de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par :

$$G(f) = \dot{u}_f, \;\; \forall \;\, f \in L^2(I), \tag{4.4}$$

où $\dot{u}_f$ désigne la dérivée de u_f par rapport à t.

Dans ce chapitre, on montre que si la foncton L est régulière (par exemple de classe C^2 sur $\mathbb{R}$) et si elle vérifie certaines conditions de croissance, alors l'opérateur G défini de

$L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par (4.4) est différentiable au sens de *Frechet*. Inversement, étant donné un opérateur

$$G : L^2(I) \to L^2(I)$$

différentiable, on donnera des conditions nécessaires et suffisantes sur G garantissant l'existence d'un Lagragian $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2 telle :

$$\int_0^T \left[L(\frac{du_f}{dt}) - f(t)u_f(t) \right] dt = \inf_u \left\{ \int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt \right\} \quad \forall\ f \in L^2(I),$$

où

$$u_f(t) = u_0 + \int_0^t G(f)(s)\, ds, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

En d'autres termes, on cherche une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et strictement convexe telle pour tout f dans $L^2(I)$, la fonction u_f donnée par (4.5) soit l'unique solution de l'équation d'*Euler Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left[L'(\dot{u}_f(t))\right] = f(t), \quad \text{p.p } t \in [0,T].$$

4.2 Un résultat de régularité

On considère le problème (P_f) et on fait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \text{est } C^2 \ \text{sur } \ \mathbb{R}; \\ \exists\ a, b \in \mathbb{R}_+ \ \mid \ |L'(w)| \ \leq a + b|w|, \ \forall\, w \in \mathbb{R}; \\ \exists\ k_0, k_, > 0, \ \mid \ k_0 \ \leq \ L''(w) \leq k_1 \ \forall\, w \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses* (4.6), *pour tout* $f \in L^2(I)$, *le problème* (P_f) *admet une unique solution notée* $u_f \in H^1(I)$ *et de plus l'application* G *définie de* $L^2(I)$ *dans* $L^2(I)$ *par* (4.4) *est différentiable au sens de Frechet sur* $L^2(I)$.

Pour la preuve de l'existence, vous pouvez consulter *Ekeland-Turnbull*, [22].
Avant de prouver la régularité de l'opérateur G, nous commençons d'abord par reformuler le problème (P_f) et ensuite énoncer quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans la suite.

4.2.1 Préliminaires

Soit E, le sous-ensemble de $L^2(I)$ défini par :

$$E = \{v \in L^2(I) \ \mid \ \int_0^T v(s)\, ds = u_1 - u_0\} \tag{4.7}$$

Soit $v \in L^2(I)$ on pose :

$$x_v(t) := u_0 + \int_0^t v(s)\,ds$$

Alors pour tout $v \in E$, on $x_v(0) = u_0$, $x_v(T) = u_1$ et de plus :

$$\dot{x}_v(t) = v(t) \;\; \text{p.p} \;\; t \in [0, T].$$

On introduit les fonctions ϕ et Ψ définies sur $L^2(I)$ par :

$$\Psi(v) = \int_0^T L(v(t))\,dt, \;\; \forall\, v \in L^2(I),$$

$$\phi(v) = \int_0^T f(t)x_v(t)\,dt, \;\; \forall\, v \in L^2(I).$$

Ainsi le problème (P_f) prend la forme suivante :

$$\inf_{v \in E} \; J(v), \tag{4.8}$$

où $J(v)$ est la fonctionnelle définie de $L^2(I)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$J(v) = \Psi(v) + \phi(v). \tag{4.9}$$

Proposition 4.2.1 (Krasnoselskii) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant* :

$$\begin{gathered} \forall \eta \in \mathbb{R}^k, \;\; x \to g(x, \eta) \;\; \text{est mesurable}, \\ \text{pour } \textit{presque tout } x \in \Omega, \;\; \eta \to g(x, \eta) \;\; \text{est continue.} \end{gathered}$$

Pour toute fonction mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$, soit $G(u)$ la fonction mesurable définie par :

$$G(u)(x) = g(x, u(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

S'il existe $p, r \in [1, +\infty[$ tels que *$G(u) \in L^r(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$, alors G est continue de $L^p(\Omega)$ dans $L^r(\Omega)$.*

Preuve.
Soit u_n une suite de $L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$ telle que $\|u_n - u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)} \to 0$. On montre qu'il existe une suite extraite (u_{n_k}) de (u_n) telle que $\|G(u_{n_k}) - G(u)\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, ce qui prouve la proposition. On définit $h : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ par :

$$h(x, \eta) = |g(x, \eta + u(x)) - g(x, u(x))|^r.$$

Soit (u_{n_k}) une suite extraite de (u_n) telle que $\|u_{n_k} - u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)} \leq \dfrac{1}{2^k}$ et soit $v_k = u_{n_k} - u$. Donc on peut supposer que $v_k(x) \to 0$ presque partout sur Ω (quitte à prendre une suite extraite) et par continuité de g par rapport à son deuxième argument, $h(x, v_k(x)) \to 0$. Comme $h(x) \geq 0$ presque partout sur Ω, il existe une suite d'entier $k(x)$ telle que :

$$\sup_k h(x, v_k(x)) = h(x, v_{k(x)}(x)).$$

Soit $v(x) = v_{k(x)}$. Alors la fonction $x \to v(x)$ est mesurable et de plus

$$\int_\Omega \|v(x)\|^p_{\mathbb{R}^k}\, dx \leq \int_\Omega \sup_k \|v_k(x)\|^p_{\mathbb{R}^k}\, dx \leq \sum_k \|v_k\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)} < +\infty.$$

Donc $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$. En utilisant l'hypothèse sur G et le fait que $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$, on en déduit que la fonction $x \to h(x, v(x))$ appartient à $L^1(\Omega)$. Le théorème de convergence dominée de *Lebesgue* et l'inégalité :

$$h(x, v_k(x))\, dx \ \leq h(x, v(x))$$

entrainent

$$\int_\Omega h(x, v_k(x))\, dx \ \to 0.$$

Ce qui prouve que $G(u_{n_k}) \to G(u)$ dans $L^r(\Omega)$ ■

Lemme 4.2.1 *On suppose que les hypothèses du théorème* 4.2.1 *sont vérifiées. Alors il existe des constantes* $a_1 \in \mathbb{R}_+,\ b_1 > 0$ *telles que :*

$$|L(w)| \leq a_1 + b_1|w|^2, \quad \forall w \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Preuve. *Voir* [22].

Lemme 4.2.2 *Soit* $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *différentiable telle que :*

$$\exists\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ p > 1 \ \mid\ \|w'(x)\| \leq a + b\|x\|^{p-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.11}$$

Soit Ω *une partie mesurable de* $\mathbb{R}^k$ *de mesure finie. Alors l'application*

$$\phi_w : L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$\phi_w(x) = \int_\Omega w(x(t))\, dt, \quad \forall x \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

est dérivable au sens de Gâteau et de plus on a :

$$\phi'_w(x) = w'(x), \ \ \forall x \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Preuve. Soient $k, z \in \mathbb{R}^n$. Comme w est différentiable on a :

$$\lim_{s\to 0} \frac{w(z+sk)-w(z)}{s} = w'(z)\cdot k$$

D'aprés le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$w(z+sk)-w(z) = w'(z+s\theta k)\cdot (sk)$$

Soit $|s| \leq c$ pour une constante c positive, alors on a :

$$\left|\frac{w(z+sk)-w(z)}{s}\right| \leq c|w'(z+\theta sk)\cdot k|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.11) entrainent , qu'il existe une constante réelle positive notée C_p telle :

$$\left|\frac{w(z+sk)-w(z)}{s}\right| \leq C_p\left(\|k\| + \|k\|.\|z\|^{p-1} + \|k\|^p\right), \quad \forall\, k, z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

De (4.12) on en déduit : $\forall\ |s|\ \leq c,\ \forall\, t \in \Omega$ et $\forall\ x, y \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$$\left|\frac{w(x(t)+sy(t))-w(x(t))}{s}\right| \leq C(p)\left(\|y(t)\| + \|y(t)\|.\|x(t)\|^{p-1} + \|y(t)\|^p\right).$$

En utilisant l'inégalité de *Cauchy-Schwarz* on montre que l 'application :

$$t \in \Omega \quad \longrightarrow \|y(t)\| + \|y(t)\|.\|x(t)\|^{p-1} + \|y(t)\|^p$$

est intégrable sur Ω. Donc le théorème de convergence dominée de *Lebesgue* :

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\frac{\phi_w(x+sy)-\phi_w(x)}{s} &= \lim_{s\to 0}\int_\Omega \frac{w(x(t)+sy(t))-w(x(t))}{s}\,dt \\
&= \int_\Omega y(t).w'(x(t))\,dt
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.11) implique que $w'(x) \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^n), \quad \forall x \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ où q est le conjugué de p. Par conséquent l'application définie de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$y \longrightarrow \int_\Omega y(t)w'(x(t))\,dt$$

est linéaire et continue. Et enfin le théorème de Riesz entraine que :

$$\phi'_w(x) = w'(x), \quad \forall x \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n).\blacksquare$$

Lemme 4.2.3 *Sous les hypothèses* (4.6), Ψ *est de classe* C^2 *sur* $L^2(I)$ *et de plus on a :*

$$\Psi^{"}(v)(k,h) = \int_0^T L^{''}(v(t))k(t)h(t)\,dt, \quad \forall\, v,k,h \,\in\, L^2(I)$$

En outre, pour $\bar{v} \in L2(I)$, *l'application* $T_{\bar{v}}$ *définie de* $L^2(I)$ dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$ par :

$$T_{\bar{v}}(h) = \;\Psi^{"}(\bar{v}) \cdot h, \;\; \forall\, h \,\in\, L^2(I) \tag{4.13}$$

est non dégénéré.

Preuve. D'aprés (4.6) , L est C^2 et L' vérifie :

$$|L'(w)| \leq a + b|w|, \;\; \forall w \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

donc le lemme 4.2.2 entraine que Ψ est Gâteau différentiable avec :

$$\Psi'(v) = L'(v), \;\; \forall v \in L^2(I).$$

L'inégalité (4.14) implique que $L'(v) \in L^2(I) \;\; \forall\, v \in L^2(I)$ et donc la proposition (4.2.1) entraine que l'application définie de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par :

$$v \longrightarrow L'(v)$$

est continue sur $L^2(I)$. Ce qui montre que Ψ est C^1 sur $L^2(I)$.
Soient maintenant v,k et h dans $L^2(I)$. En utilisant le fait que :

$$|L^{''}(w)| \leq k_1, \quad \forall\;\, w \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

et le théorème de la convergence dominée, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\Psi'(v+tw) - \;\Psi'(v)}{t}.h \;\; &= \;\; \lim_{t\to 0} \int_0^T \frac{L'(v(s)+tw(s)) - L'(v(s))}{t} h(s)\,ds \\ &= \;\; \int_0^T L^{''}(v(s))k(s)h(s)\,ds. \end{aligned}$$

D'une part l'inégalité (4.15) entraine que :

$$L''(v) \in L^{\infty}(I), \;\; \forall v \in L^2(I),$$

d'autre part

$$k.h \in L^1(I), \;\; \forall\, k,h \in L^2(I)$$

Donc

$$L''(v).k.h \in L^1(I), \;\; \forall\; v,k,h \in L^2(I)$$

D' où l'application :

$$(k,h) \longrightarrow \int_0^T L''(v(s))k(s)h(s)\,ds$$

définit une forme bilinéaire continue de $L^2(I) \times L^2(I)$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui prouve donc que Ψ' est dérivable et de plus on a :

$$\Psi^{"}(v)k.h = \int_0^T L''(v(s))k(s)h(s)\,ds, \quad \forall v,k,h \in L^2(I)$$

Par les mêmes arguments on montre l'application $v \to \Psi''(v)$ est continue d'où $v \longrightarrow \Psi(v)$ est de classe C^2 sur $L^2(I)$.

Pour terminer nous allons montrer que pour tout $\bar{v} \in L^2(I)$, l'application $T_{\bar{v}}$ est non dégénéré. Soit $h \in L^2(I)$ tel que

$$T_{\bar{v}}(h) = \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot h = 0$$

Donc on a :

$$c_0\|h\|^2_{L^2(I)} \leq \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot h \cdot h = 0$$

d'où $h = 0$ et par conséquent $T_{\bar{v}}$ est injective.

Pour la surjection, on montre que $T_{\bar{v}}$ est à image fermée et dense dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$. En effet soit (v_n) une suite $L^2(I)$ telle que $T_{\bar{v}}(v_n) \to \varphi$ dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$. Soit $n,m \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$c_0\|u_n - u_m\|^2_{L^2(I)} \leq T_{\bar{v}}(u_n - u_m) \cdot (u_n - u_m) \leq \|T_{\bar{v}}(u_n - u_m)\|_{\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})}\,\|u_n - u_m\|_{L^2(I)}$$

ce qui entraine que (u_n) est de *Cauchy* dans ${}^2(I)$ et donc elle converge dans $L^2(I)$ vers v. D'où par continuité de $T_{\bar{v}}$ on obtient $\varphi = T_{\bar{v}}(v)$ ce qui entraine que $\mathbf{Im}T_{\bar{v}}$ est fermé dans $\mathcal{L}(L^2(I),\mathbb{R})$.

Soit $v \in (\mathrm{Im}(T_{\bar{v}}))^{\perp}$, donc $\forall\, u \in L^2 I$ on a $T_{\bar{v}}(u) \cdot v = 0$. En particulier $T_{\bar{v}}(v) \cdot v = 0$ ce qui implique que $v = 0$ et par conséquent on a :

$$(\mathbf{Im}(T_{\bar{v}}))^{\perp} = \{0\}$$

Comme $\mathbf{Im}(T_{\bar{v}})$ est fermé, on en déduit que l'application $T_{\bar{v}}$ est surjective et donc elle est bijective.■

4.2.2 Preuve du théorème 4.2.1

On interpréte d' abord le problème (4.8) comme un problème d'optimisation avec contraines d'égalité et ensuite écrire les conditions d'optimalité du premier ordre. Pour ce faire on introduit l'application F définie de $L^2(I)$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(v) = \int_0^T v(s)\,ds$$

de sorte que l'ensemble E des contraintes devient :

$$E = \{v \in L^2(I) \mid F(v) = u_1 - u_0\}$$

Ainsi le problème (4.8) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \inf \ J(v) := [\ \Psi(v) + \ \phi(v)] \\ v \in L^2(I) \\ F(v) = u_1 - u_0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Pour $f \in L^2(I)$, on fait la notation suivante :

$$Pf(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

En faisant une intégration par parties, on peut réécrire $J(v)$ sous la forme :

$$J(v) = \ \Psi(v) + Pf(0)u_0 - Pf(T)u_1 + \int_0^T Pf(s)v(s)\,ds, \quad \forall\ v \in L^2(I)$$

donc

$$J'(v).u = \int_0^T L'(v(s))u(s)\,ds + \int_0^T Pf(s)u(s)\ ds, \ \ \forall\ v, u \in L^2(I).$$

L'application F est linéaire donc *Frechet*-différentiable et de plus on a :

$$F'(v) = \ F \neq 0 \ \ \forall v \in L^2(I)$$

Maintenant on peut écrire les conditions d'optimalité du premier ordre de *Lagrange* du problème (4.16) : si v est solution de (4.16), alors il existe un multiplicateur de *Lagrange* noté $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} J'(v) + \lambda\ F = 0 \\ \\ F(v) = u_1 - u_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Soit $\bar{f} \in L^2(I)$ fixé. Soit $\bar{v}$ et $\bar{\lambda}$ la solution et le multiplicateur de *Lagrange* associés à $\bar{f}$. On a donc $G(\bar{f}) = \bar{v}$ et

$$\begin{cases} J'(\bar{v}) + \bar{\lambda}\ F = 0 \\ \\ F(\bar{v}) = u_1 - u_0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Soit $\mathcal{H}$ l'application définie de $L^2(I) \times \mathbb{R} \times L^2(I)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(I), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{H}(v, \lambda, f) = \begin{pmatrix} J'(v) + \lambda\ F \\ \\ F(v) + u_0 - u_1 \end{pmatrix},\ \forall\,(v, \lambda, f) \in\ L^2(I) \times \mathbb{R} \times L^2(I). \tag{4.19}$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}(\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{f}) = 0 \tag{4.20}$$

On note par $\mathcal{H}_{v,\lambda}$ la dérivée de $\mathcal{H}$ par rapport à v et λ. Donc on peut écrire $\mathcal{H}_{v,\lambda}(\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{f})$ sous la forme :

$$\mathcal{H}_{v,\lambda}(\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{f}) = \begin{pmatrix} \Psi^{"}(\bar{v}) & F \\ F & 0 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

On va montrer que l'opérateur $\mathcal{H}_{v,\lambda}(\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{f})$ définie sur $L^2(I) \times \mathbb{R}$ est non dégénérée. En effet soit $(v, \lambda) \in L^2(I) \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\Psi^{"}(\bar{v}) \cdot v + \lambda\ F \;=\; 0 \tag{4.22}$$

$$F(v) \;=\; 0 \tag{4.23}$$

En multipliant par v dans (4.22) et en utilisant (4.23) on obtient :

$$c_0 \|v\|^2_{L^2(I)} \;\leq\; \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot v \cdot v = 0.$$

ce qui entraine que $v = 0$. En le repportant dans (4.22) on déduit que $\lambda = 0$. Ce qui prouve l'injectivité.

On se donne maintenant $(\varphi, \beta), \in \mathcal{L}(L^2(I), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ et on cherche $(v, \lambda) \in L^2(I) \times R$ tel que :

$$\Psi^{"}(\bar{v}) \cdot v + \lambda\ F \;=\; \varphi \tag{4.24}$$

$$F(v) \;=\; \beta \tag{4.25}$$

Puisque $\Psi^{"}(\bar{v})$ est non dégénérée (*voir* le *lemme* 4.2.3), on peut exprimer v en fonction λ à partir (4.24) et on le repporte dans (4.25). Ce qui donne

$$v =\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\varphi) - \lambda\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F) \tag{4.26}$$

$$F\left(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\varphi)\right) - \lambda\ F\left(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F)\right) = \beta \tag{4.27}$$

L'équation (4.27) donne λ si

$$F\left(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F)\right) \neq 0 \tag{4.28}$$

et c 'est exactement le cas. Pour cet effet posons :

$$w = \ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F) \tag{4.29}$$

alors w est non nul car F est non nul et $\Psi^{"}(\bar{v})$ est bijective. De (4.29) on en déduit :

$$F = \ \Psi^{"}(\bar{v})(w) \tag{4.30}$$

En l'utilisant dans (4.28), on obtient :

$$F\left(\ \Psi^{"}(\bar{v})^{-1}(\ F)\right) = \Psi^{"}(\bar{v}) \cdot w \cdot w\ \geq c_0\|w\|^2_{L^2(I)}\ >\ 0 \tag{4.31}$$

ce qui prouve la surjectivité. Donc le *théorème des fonctions implicites* s'applique au point $(\bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{f})$. D'où il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\bar{f}$ dans $L^2(I)$ et une unique fonction $\Theta = (\ \Theta_1,\ \Theta_2)$ définie et différentiable sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans $L^2(I) \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} \Theta(\bar{f}) \ &= \ (\bar{v}, \bar{\lambda}) && (4.32)\\ \mathcal{H}(\ \Theta(f), f) \ &= \ 0,\ \forall\, f\ \in \mathcal{U} && (4.33) \end{aligned}$$

De l'unicité de Θ, on en déduit que $G = \ \Theta_1$ sur $\mathcal{U}$ car la fonction $(\ G,\ \Theta_2)$ vérifie (4.33) sur $\mathcal{U}$ où G est la fonction définie par (4.4). Ce qui prouve la différentiabilité de G.$\blacksquare$

4.3 Conditions nécessaires et suffisantes

4.3.1 Conditions nécessaires

Théorème 4.3.1 *Sous l'hypothèse* (4.6), *il existe une fonction* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continue et positive, une fonction* $\varphi : L^2(I) \to \mathbb{R}$ *différentiable vérifiant :*

$$D_f\,[\,G(f)(t)] \;=\; A\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right)\left[\mathcal{X}_{[0,t]} + \varphi'(f)\right] \qquad (4.34)$$

$$\forall\, f \in L^2(I),\ \forall\, t \in\, I.$$

$$\int_0^T\ G(f)\,ds = u_1 - u_0,\ \forall\ f\ \in\ L^2(I). \qquad (4.35)$$

En outre on a :

$$G(0)(t) = u_0,\ \text{ pour presque tout } t\ \in\ I. \qquad (4.36)$$

Où pour tout $t\ \in\ I$, $D_f\,[\,G(f)(t)]$ *désigne la dérivée par rapport à* f *de l'application :*

$$f\ \in\ L^2(I) \to\ G(f)(t)$$

Preuve. Soit $G : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ telle : $\forall f \in L^2(I)$

$$u_f(t) := u_0 + \int_0^t\ G(f)(s)\,ds,\quad \forall t \in [0,T]$$

soit l'unique solution de (P_f). Donc pour tout $f \in L^2(I)$, u_f satisfait l'équation d'*Euler-Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\,[L'(\ G(f)(t))] = f(t),\quad \forall t \in [0,T] \qquad (4.37)$$

ou encore, il existe une fonction $\varphi : L^2(I) \to \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$L'(\ G(f)(t)) = \varphi(f) + \int_0^t f(s)\,ds, \forall\, f \in L^2(I),\ \forall\, t \in\ I, \qquad (4.38)$$

$$\varphi(f) = L'(\ G(f)(0)),\ \ \forall\, f \in L^2(I). \qquad (4.39)$$

D'aprés l'hypothèse (4.6), L est C^2 et strictement convexe sur I, donc sa dérivée L' est inversible et de plus grâce à l'identité de *Fenchel* on a :

$$(L')^{-1} = (L^*)' \qquad (4.40)$$

où L^* est la transformé de *Fenchel* de L. En le repportant dans (4.38) on obtient :

$$G(f)(t) = (L^*)'\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right),\ \forall\, f\ \in\ L^2(I)\ \forall\, t\ \in\ [0,T] \qquad (4.41)$$

Pour t fixé dans $[0,1]$, en différentiant (4.41) par rapport à f, on obtient :

$$D_f\,[\,G(f)(t)]\cdot h \;=\; (L^*)''\left(\int_0^t f(s)\,ds+\varphi(f)\right)\left[\int_0^t h(s)\,ds+<\varphi'(f),h>\right]$$

$$\forall\; f,h\,\in\,L^2(I),\;\;\forall\, t\in\, I.$$

On pose : $A=(L^*)^{"}$. Alors A est continue et positive puisse que L est C^2 et strictement convexe et on a :

$$D_f\,[\,G(f)(t)] = A\left(\int_0^t f(s)\,ds+\varphi(f)\right)\left(\mathcal{X}_{[0,t]}+\varphi'(f)\right),\;\;\forall\, t\in[0,T],\;\forall\; f\in L^2(I).$$

où $\mathcal{X}_{[0,t]}$ est la fonction caractéristique de $[0,t]$.

Soit u la solution associée à $f=0$, elle vérifie donc :

$$\frac{d}{dt}L'(\dot{u})=0 \tag{4.42}$$

ce qui implique que l'application $t\rightarrow L'(\dot{u}(t))$ est constante sur I. Comme L' est inversible, on en déduit que $\dot{u}$ est constante presque partout sur I. Il existe donc une constante $c_0\,\in\,\mathbb{R}$ telle que $\dot{u}(t)=c_0$ pour presque tout $t\,\in\, I$. En utilisant le fait que $u(0)=u_0$ et $u(T)=u_1$, on retrouve (4.36). Pour terminer, on remarque que (4.35) est juste une conséquence de la définition de l'opérateur G.■

4.3.2 Conditions suffisantes

Théorème 4.3.2 *Soitent $u_0,u_1\,\in\,\mathbb{R}$ et $T>0$ un nombre réel strictement positif. On pose $I=[0,T]$. Soit G un opérateur défini et différentiable de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ vérifiant :*

$$\int_0^T G(f)(t)\,dt=u_1-u_0,\;\forall\; f\,\in\; L^2(I) \tag{4.43}$$

et il existe une constante $G_0\,\in\,\mathbb{R}$ telle que :

$$G(0)(t)=\;G_0,\;\text{pour presque tout}\;t\,\in\, I. \tag{4.44}$$

On suppose qu'il existe une fonction $A:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ continue et strictement positive, une fonction $\varphi:L^2(I)\rightarrow\mathbb{R}$ Fréchet-différentiable telles que :

$$D_f\,[\,G(f)(t)] = A\left(\int_0^t f(s)\,ds+\varphi(f)\right)\left(\mathcal{X}_{[0,t]}+\varphi'(f)\right),\;\;\forall\, f\in\,L^2(I),\;\forall\, t. \tag{4.45}$$

Alors il existe une fonction L définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2 et convexe telle que : pour $f \in L^2(I)$, la fonction de $H^1(I)$, u_f définie par :

$$u_f(t) = u_0 + \int_0^t G(f)(s)\,ds \tag{4.46}$$

est solution du problème de calcul des variations :

$$\begin{cases} \inf\limits_{u} \displaystyle\int_0^T \left[L(\frac{du}{dt}) - f(t)u(t) \right] dt \\ u(0) = u_0,\; u(T) = u_1 \end{cases} \tag{4.47}$$

Preuve. Soit K une solution de :

$$\begin{cases} K''(t) = A(t) \;\text{ sur } \mathbb{R} \\ \\ K'(\varphi(0)) = G_0. \end{cases} \tag{4.48}$$

Donc K est C^2 et strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent (4.45) devient :

$$D_f\,[\,G(f)(t)] = K''\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right)\left(\mathcal{X}_{[0,t]} + \varphi'(f)\right),\;\; \forall\, f \in L^2(I),\; \forall\, t. \tag{4.49}$$

Donc il existe $c(t) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$G(f)(t) = K'\left(\int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f)\right) + c(t)\;\; \forall\, f \in L^2(I),\; \forall\, t \in I. \tag{4.50}$$

En utilisant (4.48) et (4.44), on en déduit que $c(t) = 0$. Pour cet effet prenons $f = 0$ dans (4.50), on obtient alors

$$c(t) = G(0)(t) - K'(\varphi(0)) = 0,\; \forall\, t \in I. \tag{4.51}$$

K étant convexe donc il existe une fonction L au moins de classe C^2 telle que $L^* = K$, où L^* est la transformée de *Fenchel* de L. De plus K' est inversible et on a :

$$(K')^{-1} = L'. \tag{4.52}$$

En repportant (4.52) dans (4.50), on aboutit à :

$$L'(\,G(f)(t)) = \int_0^t f(s)\,ds + \varphi(f),\;\; \forall\, f \in L^2(I), \forall\, t \in I \tag{4.53}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\,[L'(\,G(f)(t))] = f(t),\;\; \text{pour presque tout } t \in I. \tag{4.54}$$

Donc pour tout $f \in L^2(I)$, la fonction u_f définie par (4.46) vérifie l'équation d'*Euler-Lagrange* associée au problème (4.47). Comme la fonction L est convexe donc u_f est solution de (4.47). Ce qui prouve le théorème. ■

Conclusion

Dans cette thŝe, nous avons abordé trois types de *problèmes inverses* qui apparaissent en *économie* et en *calcul des variations*.

Dans le premier chapitre, nous avons fait un bréf rappel des résultats de base du *calcul différentiel extérieur* qui, aujourd 'hui est devenu un outil puissant dans la résolution de beaucoup problèmes d'économie mathématique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié le problème de *Sonnenschein* dans une économie où il y a moins d'agents que de biens dans le marché. Dans le cas analytique, grâce à la théorie de *Cartan*, nous avons obtenu un résultat local, c'est-à-dire, étant donné un champs de vecteurs X, défini et analytique sur un voisinage d'un point $\bar{p} >> 0$ de $\mathbb{R}^n$ et un entier naturel $K < n$ (représentant le nombre d'agents), nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes sur X pour pour qu'il existe K fonctions de demandes individuelles $x^1, \ldots, x^K$ telles que sur un voisinage de $\bar{p}$ on a :

$$X(p) = x^1(p) + \ldots + x^K(p) \tag{4.55}$$

Les arguments développés ici ne sont pas transposables dans le cas où X est C^∞ et non analytique. Cela résulte du fait que l'application du théorème de *Cartan-Kähler* nécessite des données analyiques. Nous espérons pouvoir résoudre le cas non analytique dans des travaux ultérieurs.

Le troisième chapitre a éte consacré à l'étude du problème de *Douglas*. L'idée a été d'abord d'interpréter le système d'équations aux dérivées partielles (3.4) comme un système différentiel extérieur et en suite d'appliquer le théorème de *Cartan-Kähler*. Dans le cas de la dimension *un*, on retrouve le résultat de *Bolza* (*voir* [4]). Dans le cas de la dimension *deux*, nous n'avons pas obtenu les résultats atendus, mais l'utilisation de *Cartan-Kähler* nous a révélé que l'introduction de l'equation (3.19) dans le système (3.18) était nécessaire pour trouver à (3.18) un système differentiel extérieur qui lui est équivalent. De cette étude, on peut en déduire que la classification des courbes extrémales vérifiant (3.16) repose essentiellement sur l'étude du rang du système linéaire formé par les équations de *RL1,RL2* et *RL2* et de la dimension des sous espaces H_0^*, H_1^*, H_2^* et H_3^* en fonction de F_1 et de F_2.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons étudié dans un cas simple, un problème inverse en *calcul des variations*. Nous avons donné une caractérisation de l'opérateur qui, au second membre d'une équation aux dérivées partielles non linéaire, associe la solution.

Annexe

4.4 Preuve des relations RL3

Elles proviennent de l'equation $\omega_1 = 0$ où

$$\omega_1 = du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + dv_1 \wedge dy_1 + dv_2 \wedge dy_2$$

4.4.1 Etape1 : Evaluation de $du_1 \wedge dx_1$

$$u_1 = q_1 y_1 + v y_2 + r_1 F_1 + u F_2$$

donc

$$du_1 = y_1 dq_1 + y_2 dv + F_1 dr_1 + F_2 du + q_1 dy_1 + v dy_2 + r_1 dF_1 + u dF_2$$

$du_1 \wedge dx_1 = y_1 dq_1 \wedge dx_1 + y_2 dv \wedge dx_1 + F_1 dr_1 \wedge dx_1 + F_2 du \wedge dx_1 + q_1 dy_1 \wedge dx_1$
$v dy_2 \wedge dx_1 + r_1 dF_1 \wedge dx_1 + u dF_2 \wedge dx_1$

En développant l'expression de $dv \wedge dx_1$ on obtient alors :

$$2dv \wedge dx_1 = A_0 dx_2 \wedge dx_1 + B_0 y_1 \wedge dx_1 + C_0 dy_2 \wedge dx_1$$

où A_0, B_0 et C_0 sont donnés par :

$$A_0 = 2Q_2^2 + (F_{1y_1} - F_{2y_2})U_2 + F_{2y_1} R_2^2 - F_{1y_2} R_2^1 + u(F_{1y_1x_2 - F_{2y_2x_2}}) + r_2 F_{2y_1x_2} - r_1 F_{1y_2x_2}$$

$$B_0 = 2Q_3^2 + (F_{1y_1} - F_{2y_2})U_3 + F_{2y_1} R_3^2 - F_{1y_2} R_3^1 + u(F_{1y_1y_1 - F_{2y_2y_1}}) + r_2 F_{2y_1y_1} - r_1 F_{1y_2y_1}$$

$$C_0 = 2Q_4^2 + (F_{1y_1} - F_{2y_2})U_4 + F_{2y_1} R_4^2 - F_{1y_2} R_4^1 + u(F_{1y_1y_2 - F_{2y_2y_2}}) + r_2 F_{2y_1y_2} - r_1 F_{1y_2y_2}$$

On en déduit donc l'expression de $du_1 \wedge dx_1$.

$$du_1 \wedge dx_1 = A_1 dx_2 \wedge dx_1 + B_1 dy_1 \wedge dx_1 + C_1 dy_2 \wedge dx_1$$

avec :

$$A_1 = y_1 Q_2^1 + \frac{1}{2}(y_2 A_0) + F_1 R_2^1 + F_2 U_2 + r_1 F_{1x_2} + u F_{2x_2}$$

$$B_1 = y_1 Q_3^1 + \frac{1}{2}(y_2 B_0) + F_1 R_3^1 + F_2 U_3 + r_1 F_{1y_1} + u F_{2y_1} + q_1$$

$$C_1 = y_1 Q_2^1 + \frac{1}{2}(y_2 C_0) + F_1 R_4^1 + F_2 U_4 + r_1 F_{1y_2} + u F_{2y2} + v$$

4.4.2 Etape1 : Evaluation de $du_2 \wedge dx_2$

$$u_2 = q_2 y_1 + s y_2 + u F_1 + r_2 F_2$$

On a :

$$du_2 \wedge dx_2 = A_2 dx_1 \wedge dx_2 + B_2 dy_1 \wedge dx_2 + C_2 dy_2 \wedge dx_2$$

où les coeficients A_2, B_2 et C_2 sont données par :

$$A_2 = y_1 Q_1^2 + y_2 S_2 + F_1 U_1 + F_2 R_1^2 + u F_{1x_1} + r_2 F_{2x_1}$$

$$B_2 = y_1 Q_3^2 + y_2 S_3 + F_1 U_3 + F_2 R_3^2 + u F_{1y_1} + r_2 F_{2y_1} + q_2$$

$$C_2 = y_1 Q_4^2 + y_2 S_4 + F_1 U_4 + F_2 R_4^2 + u F_{1y_2} + r_2 F_{2y_2}$$

On a :

$$dv_1 \wedge dy_1 = V_1^1 dx_1 \wedge dy_1 + V_2^1 dx_2 \wedge dy_1 + V_4^1 dy_2 \wedge dy_1$$

$$dv_2 \wedge dy_2 = V_1^2 dx_1 \wedge dy_2 + V_2^2 dx_2 \wedge dy_2 + V_3^2 dy_1 \wedge dy_2$$

donc en remplaçant dans ω_1 chaque terme par sa valeur on obtient :

$$\omega_1 = (A_1 - A_2) dx_2 \wedge dx_1 + (B_1 - V_1^1) dy_1 \wedge dx_1 + (C_1 - V_1^2) dy_1 \wedge dx_2 + (B_2 - V_2^1) dy_1 \wedge dx_2 + (C_2 - V_2^2)$$

donc $\omega_1 = 0$ entraine :

$$\left[\begin{array}{l} A_1 - A_2 = 0 \\ B_1 - V_1^1 = 0 \\ C_1 - V_1^2 = 0 \\ B_2 - V_2^1 = 0 \\ C_2 - V_2^2 = 0 \end{array}\right.$$

4.5 Idées de la preuve du théorème 2.3.1

On se donne un champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on cherche des fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ strictement négatives, des fonctions $V^1, \ldots, V^n$ strictement convexes telles que :

$$X(p) = \lambda_1(p) D_p V^1(p) + \ldots + \lambda_n(p) D_p V^n(p) \tag{4.56}$$

$$p \cdot D_p V^i(p) = \frac{1}{\lambda_i}, \ \ \forall\, i. \tag{4.57}$$

Stratégie utilisée.

On considère l'espace $E = \{p, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \Delta^1, \ldots, \Delta^n\} = \mathbb{R}^{n+n+n^2}$. Les Δ^i seront interprétés plus tard comme étant les $D_p V^i(p)$.

S'il existe une solution de (4.56) − (4.57), alors les équations

$$\lambda_i = \lambda_i(p) \ \text{ et } \ \Delta^i = D_p V^i(p)$$

définissent une sous variété différentielle S de E de dimension n ; et S est contenue dans la sous variété M de dimension n^2 définie par :

$$\begin{aligned} X(p) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta^i \\ p.\Delta^i &= 1/\lambda_i \quad \forall i \end{aligned} \tag{4.58}$$

Inversement, supposons qu'il existe des fonctions $\lambda_i = \lambda_i(p)$ et $\Delta^i = \Delta^i(p)$ telles que :

- pour tout p, $(p, \lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p), \Delta^1(p), \ldots, \Delta^n(p)) \in M$
- Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\Delta^i(p)$ satisfait les équations :

$$d\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta^{ij} dp_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d\Delta^{ij} \wedge dp_j = \sum_{k<j} \left(\frac{\partial \Delta^{ij}}{\partial p_k} - \frac{\partial \Delta^{ik}}{\partial p_j}\right) dp_k \wedge dp_j = 0$$

Alors d'après *Poincaré*, $\Delta^i(p)$ est le gradient d'une fonction V^i et $(V^1, \ldots, V^n)$ constitue une solution du problème. Cela revient à chercher une variété intégrale de dimension n du système différentiel extérieur :

$$\sum_{j=1}^{n} d\Delta^{ij} \wedge dp_j = 0 \quad \forall i \tag{4.59}$$

$$dp_1 \wedge \ldots \wedge p_n \neq 0 \tag{4.60}$$

Ce système est fermé dans le sens de *Cartan*. Donc les formes différentielles engendrent un idéal différentiel.

L'idée consiste maintenant à considérer (4.59) et (4.60) comme un système différentiel extérieur sur la variété différentielle M. Suivant l'approche décrite dans le premier chapitre, la preuve se divise en deux étapes.

Etape1. On cherche une solution du problème linéarisé (à un point $\bar{p}$). Soit $\lambda_i < 0$, $\Delta^i << 0$ tels que $\Delta = (\Delta^1, \ldots, \Delta^n)$ soit inversible ; ce qui demeure vraie dans un voisinage de $\bar{p}$. On suppose de plus que $\bar{p}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \Delta^1, \ldots, \Delta^n$ vérifient :

$$\begin{aligned} X(\bar{p}) &= \sum_i \lambda_i \Delta^i \\ p.\Delta^i &= 1/\lambda_i \quad \forall i \end{aligned}$$

On linéarise λ_i et Δ^i comme fonctions de p autour de $\bar{p}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} &= N^i_j \\ \frac{\partial \Delta^i_k}{\partial p_j} &= M^i_{k\,j} \end{aligned}$$

Résoudre le probléme linéarisé revient é trouver des vecteurs N^i et des matrices M^i satisfaisant (4.59) et (4.60) plus les équations traduisant le fait que $(\bar{p}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \Delta^1, \ldots, \Delta^n) \in M$. En plus on veut que les V^i soient convexes. On a donc :

— Δ^i est le gradient d'une fonction convexe ; ce qui entraîne que

$$M^i \text{est semi-définie positive, } i = 1, ..., n$$

— $(\bar{p}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \Delta^1, \ldots, \Delta^n) \in M$; ce qui entraine :

$$D_p X(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta^i D_p \lambda_i' + \lambda_i D_p \Delta^i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta^i N_i' + \lambda_i M^i \right)$$

$$M^i p + \Delta^i = -\frac{1}{\lambda_i^2} N_i \Leftrightarrow N_i' = -\lambda_i^2 (p' M^i + \Delta^{i\prime})$$

et on montre que ce système admet une solution.

Etape2. Elle consiste à montrer que les éléments intégraux associés aux solutions du problème linéarisé sont ordinaires aux sens de *Cartan*.

Conclusion Une fois ces conditions vérifiées, le théorème de Cartan-K$\ddot{a}$hler s'applique.

Bibliographie

[1] I. Anderson and G.Thompson, *The Inverse Problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations*, Amer. Math. Soc. 98 (473).

[2] V Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Naouk, Moscow, 1965 French translation, Editions de Moscou, 1968 ; English translation, Springer, 1975)

[3] G. Antonelli *Sulla teoria matematica delle economia politica* , Pisa, 1886 ; translated in *Preferences, utility and demand* , edited by *J.Chipman, L. Hurwicz, and H. Sonnenschein, Harcourt Brace Jovanovich,* 1971

[4] O.Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, Dover Press, New York, N.K., 1960, pp.31-32.

[5] M.Browning and Chiappori, *Efficient intra-household allocations : a general characterization and empirical tests*, Econometrica, 66 (1981), pp.1241-1278.

[6] R. Bryant, S. Chern, R. Gardner, H.Goldschmidt, P. Griffiths, *Exterior differential systems*, MSRI Publications vol.18, 1991, Springer-Verlag

[7] G.Buttazzo, M. Giaquinta , S.Hildebrandt, *Calculs of Variation I*, Springer, 1994

[8] G.Buttazzo, M. Giaquinta , S.Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems , an Introduction*, Clarendon Press.Oxford, 1998

[9] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, 1945

[10] P.A. Chiappori and I. Ekeland, *Problèmes d'agrègation en théorie du consommateur et calcul différentiel extérieur*, CRAS Paris, 323 (1996), p.565-570

[11] P.A. Chiappori and I. Ekeland, *Restrictions on the equilibrium manifold : the differential approach*, to appear

[12] Chiappori, P.A., and I. Ekeland (1999) : *Aggregation and Market Demand : an Exterior Differential Calculus Viewpoint*, *Econometrica*, 67 (1999), 1435-1458

[13] Chiappori, P.A., and I. Ekeland, *Disaggregation of collective excess demand functions in incomplete markets,* mimeo 1997.

[14] CHIAPPORI, P.A., AND I. EKELAND, *A convex Darboux theorem*, Annali della Scuola Normale di Pisa, Cl. Sci (4), XXV (1997), pp.287-297.

[15] G. DEBREU, *Excess demand functions*, Journal of Mathematical Economics, 1 (1974), p. 15-23

[16] W.E. DIEWERT, *Generalized Slutsky conditions for aggregate consumer demand fuctions*, Journal of Economic Theory, 15 (1977), p. 353-362

[17] J.DOUGLAS, *Solution of the Inverse Problem of the Calculus of Variations*, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), 71-128.

[18] I.EKELAND, J.P.AUBIN, Applied Nonlinear Analysis, Wiley, 1984, 520p.

[19] I.EKELAND, L.NIRENBERG, A convex Darboux theorem, Methods and applications of Analysis.Vol.9, No 3, pp.329-344, Septembre 2002

[20] I.EKELAND AND R.TEMAM, *Convex analysis and Variational Problems*, SIAM Classics In Applied Mathematics, 1999

[21] I.EKELAND AND R.TEMAM, *Analyse convexe et Problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, 1974, 340p.

[22] I.EKELAND, T.TURNBULL, *Infinite-dimensional optimization and convexity* Chicago Press, 1983.

[23] J.D.GEANAKOPLOS, H.M.POLEMARCHAKIS *On the Disaggregation of Excess Demand Functions*, Econometrica, Vol.48, No.2(Mar., 1980), 315-332.

[24] P. GRIFFITHS AND G.JENSEN, *Differential systems and isometric embeddings*, Princeton University Press, 1987

[25] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, 1964

[26] A.V. INCHTCHAKOV, *, personal communication*

[27] KREPS, Microeconomic theory, Longman, 1993

[28] S. LANG, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer-Verlag, 191

[29] R. MANTEL, *On the characterization of aggregate excess demand*, Journal of Economic Theory 7 (1974), p.348-353

[30] A.MAS-COLELL, M. WHINSTON, J. GREEN, *Microeconomic theory*, Oxford University Press, 1995.

[31] D. MCFADDEN, ANDREU MAS-COLLEL, R. MANTEL ET M. RICHTER, "A characterization ofcommunity excess demand fuctions", Journal of Economic Theory 7 (1974), p. 361-374

[32] W. SHAFER AND H.SONNENSCHEIN, *Market demand and excess demand function* in Handbook of mathematical economics, *K. Arrow and M. Intriligator eds.*, chapter 14, vol 2, North Holland, 1982

[33] H.SONNENSCHEIN, *Market excess demand functions*, Econometrica 40 (1972), p.549-563

[34] H.SONNENSCHEIN, *Do Walras'identity and continuity characterize the class of community excess demand functions ?*, Journal of Economic Theory 6 (1973), p.345-354

[35] , H.SONNENSCHEIN, *The utility hypothesis and market demand theory*, Western Economic Journal 11 (1973), p. 404-410

[36] E.Slutsky, *'Sulla teoria del bilancio del consomatore'*, Giornale degli Economisti et Rivista di Statistica, 3, 51, p.1-26, 1915 ; English translation in '*Readings price theory*', G. Strigler and K. Boulding eds, Richard D.Irwin, 1952

[37] V.Zakalyukin, *Concave Darbou theorem*, CRAS Paris 327, série 1, (1998), pp.633-638.