Université de Montréal

Métriques généralisées et algèbres affinement complètes

Département de Mathématiques
et de Statistique
Faculté des Arts et des Sciences

Gérard Kientega

Faculté des études supérieures

Thèse de doctorat

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES ET ALGÈBRES AFFINEMENT COMPLÈTES

PAR

GÉRARD KIENTEGA

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES

THÈSE PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)

EN MATHÉMATIQUES

(JUILLET, 1992)

UNIVERSITE DE MONTREAL
FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES

Cette thèse intitulée :

Métriques généralisées et algèbres affinement complètes

Présentée par

GERARD KIENTEGA

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Khalid Benabdallah Président de jury
Ivo Rosenberg Directeur de thèse
Gert Sabidussi membre
Jean Turgeon membre
Jean Le Tourneur représentant du doyen de la F.E.S.

Table des matières

Remerciements

Monsieur Ivo Rosenberg a dirigé mes recherches et n'a pas ménagé sa peine pour que ce travail aboutisse. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie le Directeur du département, Monsieur Pierre Berthiaume ainsi que Monsieur Khalid Benabdallah qui m'ont toujours soutenu.

Messieurs Roland Fraïssé et Maurice Pouzet ont manifesté de l'intérêt pour cette étude, qu'ils en soient remerciés.

Messieurs Jean Duteix et Toni Bourama m'ont aidé pour le traitement de texte, je voudrais leur dire que leur effort a été apprécié.

Je remercie le programme canadien de bourses de la francophonie pour l'aide financière.

Je dédie ce travail à mon épouse Assata Caroline Ganou pour les sacrifices qu'elle a consenti s au cours de toutes ces longues années.

Sommaire

Le but de cette thèse est l'étude des métriques généralisées et de leurs liens avec l'algèbre universelle. Le chapitre 0 rappelle les notions essentielles sur les métriques et les algèbres. Au chapitre 1, on démontre le théorème d'extension finie puis on étudie les espaces ultramétriques. Le chapitre 2 est consacré aux algèbres. On prouve plusieurs théorèmes sur les algèbres affinement complètes et localement affinement complètes. Leurs analogues pour les algèbres complètes et localement complètes pour les tolérances sont aussi obtenus. Le chapitre 3 est consacré d'une part, à faire le lien entre les relations homogènes et l'algèbre universelle et , d'autre part, à dégager plusieurs propriétés du clone des fonctions non expansives sur un ensemble E muni d'une métrique d.

Introduction

Une métrique généralisée est une application d: $E^2 \rightarrow V$ où V est muni d'une structure de monoïde ordonné $\underset{\sim}{V} = \langle V; +, 0, \bar{\ }, \leq \rangle$ ayant une involution $\bar{\ }$. Cette notion a été dégagée par Jawhari, Misane et Pouzet [15] à la suite des travaux de Quilliot [28,29]. Dans ces premiers travaux, on supposait que l'élément neutre de $\underset{\sim}{V}$, qui est 0, en était le plus petit élément. Puis Pouzet et Rosenberg [26] ont étudié le cas où 0 n'était plus nécessairement le plus petit élément de $\underset{\sim}{V}$,. Nous adoptons ici lepoint de vue de [15].

Le chapitre 0 de ce travail est consacré à un rappel de résultats. Dans le chapitre 1, nous démontrons le théorème 1.23, que nous appelons théorème d'extension finie. Nous étudions plusieurs conséquences de la propriété d'extension finie; notamment les rapports entre espaces ultramétriques ayant la propriété d'extension finie et les a-fonctions. Avec les travaux de Chajda on sait que le théorème des restes chinois n'est pas nécessairement vrai pour les treillis des tolérances des algèbres d'une variété V. Un critère pour que cela soit possible est donné dans [3] (thm. 9.2) en utilisant les fonctions prsqu'unanimité. Le même problème, pour le cas d'une seule algèbre, s'interprète particulièrement bien dans notre contexte. Cela nous conduit à la construction d'un contre-exemple au théorème des restes chinois pour les tolérances. Le paragraphe 1.2 est consacré à cette construction. Nous prouvons également un théorème de caractérisation des espaces métriques hyperconvexes (théorème 1.26).

Dans le chapitre 2, les résultats du chapitre 1 sont utilisés pour l'étude de plusieurs notions d'algèbre universelle. C'est ainsi qu'on obtient le théorème 2.21. Par ce résultat on sait que pour qu'une algèbre $\underline{A}$ sur l'ensemble E soit localement affinement complète, il faut et il suffit que pour toute partie finie X de E, elle possède un polynôme p_X dont la restriction à X^3 soit une a-fonction. On obtient comme corollaires, des théorèmes de Kaarli [9] (corollaire 3.8) et Pixley [21] (thm. 2.6). Ce théorème permet aussi de montrer que si une algèbre $\underline{A}$ est localement affinement complète, alors ses quotients ainsi que ses puissances finies le sont également (crollaire 2.38). Grâce à un théorème de Rosenberg et Schweigert [30] (thm. 2.6 (ii)), on obtient comme autre conséquence du théorème 2.21, que les algèbres localement affinement complètes ont la propriété B_2 de Bergmann. Un analogue du théorème 2.21 est donné pour les algèbres localement complètes pour les tolérances (thm. 2.39).

Au chapitre 3, on réinterprète en termes d'algèbre universelle, la théorie des relations homogènes selon Fraïssé. Le théorème 3.9 donne une réponse partielle à une question de Fraïssé. On introduit la notion de relation préhomogène qui généralise celle de relation homogène. Dans la seconde partie de ce chapitre, on étudie le clone des fonctions non expansives. Le clone C_d des fonctions non expansives sur l'ensemble E permet de definir une algèbre non indexée $\underline{A} = \langle E;\ C_d \rangle$. Nous prouvons que si (E,d) est hyperconvexe, alors $\underline{A}$ est arithmétique. Aussi on voit que si les fonctions finitaires sur E sont non expansives, alors la métrique d ne prend que deux valeurs. Cela est dû au fait que le discriminateur appartient à C_d. Ce résultat permet de retrouver le fait qu'une algèbre primale est simple.

Chapitre 0

Préliminaires

C'est à la suite des travaux de A. Quilliot [28,29], que Jawhari, Misane et Pouzet [15] ont introduit et étudié les notions de métriques généralisées. Puis Pouzet et Rosenberg [26] ont poursuivi le travail en proposant une plus grande généralisation. Dans ce chapitre nous nous inspirons largement de ces travaux. Dans [15], Jawhari, Misane et Pouzet avaient suggéré d'appliquer les résultats qu'ils ont obtenus en algèbre universelle. C'est dans [26] que ce programme a commencé à être appliqué (cf chap. 1, paragraphe 3). Ce travail s'inscrit dans la même direction.

I) Métriques généralisées

Soit $\underset{\sim}{V} = \langle V, +, 0, \bar{\ }, \leq \rangle$ un monoïde ordonné par $\leq$, non nécessairement commutatif d'élément neutre 0 . On suppose en outre que 0 est le plus petit élément de V. On suppose que l'opération unaire $\bar{\ }$ est une involution vérifiant :

$$\overline{p+q} = \bar{q} + \bar{p}$$

$$p \leq q \Rightarrow \bar{p} \leq \bar{q}$$

pour tous p, q $\in$ V. On note que $p \to \bar{p}$ est une permutation de V d'ordre au plus 2.

Définition

Soit $\underset{\sim}{V} = \langle V, +, 0, \bar{\ }, \leq \rangle$ et E un ensemble. Une distance sur E à valeurs dans $\underset{\sim}{V}$ est une application d: E × E $\to$ V vérifiant les propriétés suivantes:

(d_1) $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(d_2) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(d_3) $d(x,y) = \overline{d(y,x)}$

pour tous x, y, z $\in$ E. Le couple (E,d) est appelé un **espace métrique** sur $\underline{V}$ ou $\underline{V}$**-espace métrique.** Soit (E,d) un espace métrique sur $\underline{V}$. Pour tous x $\in$ E et r $\in$ V **la boule à droite (resp. à gauche) de centre x et de rayon r** est l'ensemble

$$B_E(x,r) := \{ y \in E \mid d(x,y) \leq r\}$$

(resp.

$$B'_E(x,r) := \{ y \in E \mid d(y,x) \leq r\}).$$

Remarque

En réalité, comme l'ont remarqué Jawhari, Misane et Pouzet ([15], II-1)), toute boule est en même temps une boule à droite et à gauche parce que d'après la propriété (d_3) on a $B_E(x,r) = B'_E(x,\bar{r})$. On peut donc se restreindre à l'utilisation des boules à droite.

Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques sur $\underline{V}$; une application f de E vers E' est dite **non expansive** si pour tous x, y $\in$ E on a

(1) $d'(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$

ou de manière équivalente;si pour tout x dans E et tout r dans V

(2) $f(B_E(x,r)) \subseteq B(f(x),r)$.

Si l'égalité a lieu dans la relation (1) on dit que f est une **isométrie.** Si E $\subseteq$ E' et si l'application identité (i.e $id_E : E \to E'$ telle que $id_E(x) = x$ pour tout x $\in$ E) est non expansive, on dit que (E,d) est un **sous-espace** de (E',d') ou que (E',d') est **une extension** de (E,d). Si de plus l'identité est une isométrie (i.e. d est une restriction de d' à E×E) alors on dit que (E,d) est un **sous-espace isométrique** de (E',d') et que (E',d') est une **extension isométrique** de (E,d).

On peut parler de la catégorie $M_{\underset{\sim}{V}}$ des espaces métriques sur $\underset{\sim}{V}$ dont les objets sont les espaces métriques sur $\underset{\sim}{V}$ et les morphismes les applications non expansives. Si on suppose que les supremums existent dans V, alors les produits existent dans $M_{\underset{\sim}{V}}$. En effet soit $\{(E_i,d_i)\}_{i\in I}$ une famille de $\underset{\sim}{V}$ - espaces métriques. On définit le produit:

$$\prod_{i \in I} (E_i, d_i)$$

comme l'espace métrique (E,d) où

$$E = \prod_{i \in I} E_i$$

est le produit cartésien des E_i et pour tous $x, y \in E$ avec $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$ on définit

$$d_I(x,y) := \sup \{ d(x_i,y_i) \mid i \in I \}$$

Il est clair que d_I définit une métrique sur E à valeurs dans $\underset{\sim}{V}$. Nous appellerons cette métrique la **métrique produit** sur E. Le cas où $I = \{1,\ldots,n\}$ et $E_1 = \ldots = E_n = F$ est particulièrement important. On note alors par F^n le produit cartésien des E_i et par d_n la métrique produit sur F^n. Si $n \geq 1$; on note par D_n le sous-ensemble de F^n formé des élements $(x_1,\ldots,x_n) \in F^n$ qui ont au moins n-1 composantes égales. Donc $(x_1,\ldots,x_n) \in D_n$ si et seulement si il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $x \in F$ tels que la propriété suivante est vraie :

$$\{x_1,\ldots,x_n\} \setminus \{x_i\} = \{x\}.$$

Note

A partir de maintenant on supposera que $\langle V, \leq \rangle$ est un treillis i.e. que pour chaque paire d'élements x,y dans V le supremum , noté $x \vee y$, et l'infimum , noté $x \wedge y$, existent.

Exemples

Ces exemples sont tirés de [15] (II-2).

1) Espaces métriques usuels.

Soit $V := \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On étend l'addition de $\mathbb{R}$ à V de façon évidente et on définit $a + \infty = \infty$ puis $a \leq +\infty$ pour tout $a \in V$. De cette façon les espaces métriques usuels deviennent des $\underset{\sim}{V}$-espaces métriques.

2) Ensembles ordonnés.

Soit $\underset{\sim}{V}$ le treillis $\langle V; \vee, \wedge \rangle$ où $V = \{0,a,b,1\}$; de sorte que 0 et 1 sont respectivement le plus petit et le plus grand element de V tandis que a et b sont incomparables. L'opération de monoïde + est le supremum dans $\underset{\sim}{V}$

$$x + y := x \vee y$$

pour tous $x, y \in \{0,a,b,1\}$. On définit en outre

$$\overline{a} := b \text{ et } \overline{0} := 1$$

ce qui entraine $\overline{b} = a$ et $\overline{1} = 0$. Si E est un ensemble ordonné, on définit $d: E \times E \to V$ par $d(x,y) := 0$ si $x = y$, $d(x,y) := a$ si $x < y$, $d(x,y) := b$ si $y < x$ et $d(x,y) := 1$ si x et y sont incomparables. Alors (E,d) est un espace métrique sur $\underset{\sim}{V}$ et vice-versa; tout espace métrique (E,d) sur $\underset{\sim}{V}$ définit un ordre sur E par $x < y$ si et seulement si $d(x,y) = a$ (cf.[15] II-2). Les fonctions non expansives sont celles qui préservent l'ordre de E.

3) Graphes réflexifs non orientés.

On prend $V = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et on étend l'addition et la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ à V comme dans 1). Pour involution on prend l'identité. Si G est un graphe réflexif non orienté sur E on définit $d(x,y) := +\infty$ s'il n'y a pas de chemin de x à y. S'il existe un chemin de x à y, on définit d(x,y) comme la longueur (i.e. la cardinalité) du plus court chemin de x à y. Alors d est une distance sur E à valeurs dans $\underset{\sim}{V} := \langle V; +, 0, id_V, \leq \rangle$ Les applications non expansives de E dans E sont celles qui préservent les arêtes (i.e. les homorphismes de graphes). Les isométries sont les plongements de graphes.

4) Relations binaires.

Soit h un entier positif. Une **relation h-aire** ρ sur l'ensemble E est un sous-ensemble non vide de E^h. Si $h = 2$ on dit que ρ est **binaire**. Soient n et m deux entiers positifs. Soit V un ensemble de relations m-aires sur E et $\rho \in V$. On dit qu'une fonction n-aire $f: E^n \to E$ est **compatible** avec ρ (ou **préserve** ρ) si la propriété suivante est vérifiée: étant donnée une matrice d'éléments de E, M = (x_{ij}) où $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ dont toutes les colonnes sont dans ρ, le m-uplet formé par les images des lignes de M est dans ρ i.e. $((f(x_{11}, \ , x_{1n}), \ldots, f(x_{m1}, \ , x_{mn})) \in \rho$. La fonction f est **compatible** avec V si elle est compatible avec toute relation ρ appartenant à V.

a) Relations d'équivalence

On prend pour $\underset{\sim}{V}$ un sous-treillis du treillis Eq(E) des équivalences de E, dont tout sous-ensemble non vide possède un infimum dans V (donc un $\wedge$ - sous-demi-treillis complet de $\langle$ Eq(E); $\cap$ $\rangle$) qui contient $\Delta = \{ (x,x) \mid x \in E \}$ la **diagonale** de E. On définit la loi + par $r + s := r \vee s$ pour tous r, s $\in$ V. Pour involution on prend $\overline{r} = r^{-1}$ pour tout $r \in V$. Alors $\overline{r} = r$ car r est symétrique. Soit $d_V : E \times E \to V$ défini pour tous x, y $\in$V par la formule

$$d_V(x,y) := \bigcap\{ \theta \in V \mid (x,y) \in \theta\}.$$

Alors d_V est une distance à valeurs dans $\underset{\sim}{V} = \langle V; \vee, \Delta, id_V, \subseteq \rangle$ où Δ est la diagonale de E . Les applications f: $E^n \to E$ qui sont non expansives sont celles qui préservent V.

b) Cas général

Soit V un ensemble de relations binaires sur l'ensemble E dont le plus petit élément est Δ et contenant E^2. On suppose que V est clos pour l'intersection des familles non vides et pour l'inversion. Alors on définit l'addition (notée +) de deux relations ρ et ρ' comme étant le plus petit élément de V contenant le produit $\rho \circ \rho'$ et l'involution de ρ comme la relation inverse ρ^{-1}. Alors $\underset{\sim}{V} = \langle V, +, \Delta, {}^{-1}, \subseteq \rangle$ est un monoïde ordonné d'élément neutre Δ muni de l'involution $\rho \to \rho^{-1}$. On définit:

$$d(x,y) := \bigcap \{\theta \in V \mid (x,y) \in \theta \}$$

Alors (E, d) est un espace métrique sur $\underset{\sim}{V}$. Les fonctions f: $E^n \to E$ qui sont non expansives sont celles qui préservent les relations de V.

II) Algèbres universelles

Toutes les notions d'algèbres universelles que nous utilisons se trouvent dans [6, 17, 18]. Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre non indexée sur l'ensemble E. Un **terme** de $\underline{A}$ est un élément du clone sur E engendré par F. Un **polynôme** de $\underline{A}$ est un élément du clone sur E engendré par F et les fonctions constantes. Comme dans [17], on note par Pol $\underline{A}$ l'ensemble des polynômes de $\underline{A}$. Nous utiliserons régulièrement un certain nombre de résultats. Nous les rappelons.

Définition

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre. Une sous-algèbre Y de $\underline{A}^n$ où $n \geq 1$ est dite **diagonale** si pour tout $a \in E$, $(a, ..., a) \in Y$.

Théorème 0.1

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre et Y une sous-algèbre de A^n où $n \geq 1$. Alors Y est préservée par les polynômes de $\underline{A}$ si et seulement si Y est diagonale.

La preuve de ce théorème est faite dans [17] (thm. (4.69).).■

Théorème 0.2

Soit C un clone sur E et $\underline{B} = \langle E, C \rangle$ l'algèbre dont les opérations de base sont les éléments de C.. Soit $f: X \to E$ une fonction partielle définie sur un sous ensemble X de E^n de cardinal $r \geq 1$. Alors il existe une fonction $g \in C$ prolongeant f sur E^n si et seulement si f préserve les sous algèbres de $\underline{B}^r$.

La preuve se trouve dans [18].(thm. 7.5.). ■

a) Métrique associée aux congruences.

Si $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ est une algèbre sur E, l'ensemble des congruences de $\underline{A}$, Con$\underline{A}$ est muni d'une structure de treillis complet dont le plus petit élément est Δ . Comme en 4 a) on peut définir une distance sur E à valeurs dans $\underset{\sim}{\underline{V}} = \langle \mathrm{Con}\underline{A}; \vee, \Delta, \mathrm{id}_V, \subseteq \rangle$ car Con$\underline{A} \subseteq$ Eq(E). Nous noterons cette distance $d_{\underline{A}}$. Les fonctions non expansives $f: E^n \to E$ sont celles qui préservent les congruences de $\underline{A}$. En particulier, les opérations de base, les termes et les polynômes de $\underline{A}$ sont des fonctions non expansives.

b) Métrique associée aux tolérances.

Définition

On appelle **tolérance** de l'algèbre $\underline{A} = \langle E,F \rangle$ toute sous algèbre diagonale de $\underline{A}^2$ qui est symétrique.

On note Tol$\underline{A}$ l'ensemble des tolérances de $\underline{A}$. Alors Tol$\underline{A}$ est un $\wedge$-sous-demi-treillis complet du $\cap$-demi-treillis des relations binaires sur E [7] (chap. I, lemme 1.4); son plus petit élément est Δ . Comme dans 4 b) on peut définir une distance sur E à valeurs dans Tol$\underline{A}$. Nous notons par d_T cette distance. Dans ce cas précis la loi $\vee$ définie sur Tol$\underline{A}$ ne coïncide pas nécessairement avec la loi +.

Dans les deux cas précédents, l'involution dans $\underset{\sim}{V}$ est l'identité. La métrique d possède la propriété que $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. Nous nommons spécialement ces espaces métriques.

Définition

Un espace métrique (E, d) sur $\underset{\sim}{V}$ est dit **symétrique** si pour tous $x, y \in E$ on a la relation $d(x, y) = d(y, x)$.

La notion d'algèbre de Heyting au sens de Pouzet [15] (cf II-1) se révèle particulièrement utile. Nous en rappellons la définition.

Définitions

1) On dit qu'un ensemble ordonné $\langle V, \leq \rangle$ est un $\wedge$ **- demi -treillis complet** ou qu'il est **inf-complet** si tout sous ensemble non vide X de V possède une borne inférieure, noté $\wedge X$. Un monoïde ordonné $\underset{\sim}{V} = \langle V, +, 0, \bar{\ }, \leq \rangle$ tel que $\langle V, \leq \rangle$ est un $\wedge$ - demi - treillis complet est appelé une **algèbre de Heyting** si pour toutes familles d'éléments $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ de V on a:

$$\wedge \{ x_i + y_j \mid i \in I, j \in J \} = \wedge\{x_i \mid i \in I \} + \wedge\{ y_j \mid j \in J \}.$$

Chapitre I

Espaces métriques, théorème d'extension finie et espaces métriques hyperconvexes.

1) Métriques et relations.

Soit d une $\underset{\sim}{V}$-métrique sur E; pour tout $v \in V$ on définit l'ensemble

$$(\mathbf{d})_v = \{(x,y) \in E^2 \mid d(x,y) \leq v\}.$$

Alors pour tout $v \in V$, $(d)_v$ est une relation binaire sur E. Soit C un clone sur E. Un résultat de Pouzet -Rosenberg donne un critère pour que les fonctions de C soient non expansives.

Théorème 1.1 (Pouzet-Rosenberg[26], lemme I-3.1.)
Pour une algèbre $\underset{\sim}{A} = \langle E; C \rangle$ et une $\underset{\sim}{V}$-métrique (E,d), les propositions suivantes sont équivalentes:
1) Pour tout $v \in V$, la relation $(d)_v$ est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{A}^2$.
2) Chaque $f \in C$ est non expansive.

Preuve
Supposons que $(d)_v$ est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{A}^2$. Soit $f \in C$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f : E^n \to E$. Soit $(x_1,\dots, x_n) \in E^n$, $(y_1,\dots, y_n) \in E^n$. On doit prouver que

$$d(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)) \leq \vee \{d(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Posons $v_i := d(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$ et $v := v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_n$. Alors $(x_i, y_i) \in (d)_v$ pour $i = 1, \dots, n$. Comme f est un terme de $\underset{\sim}{A}$ et que $(d)_v$ est une sous-algèbre de $\underset{\sim}{A}^2$, il vient que $(f(x_1, \ \ , x_n), f(y_1, \ \ ,y_n)) \in (d)_v$ c'est à dire

$$d(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots,y_n)) \leq v.$$

Supposons maintenant que chaque $f \in C$ est non expansive. Soit $f: E^n \to E$ et $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, $(y_1, ...,y_n) \in E^n$ tels que $(x_i, y_i) \in (d)_v$ pour tous $i = 1, ..., n$. On a

$$d(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ...,y_n) \leq \vee d(x_i, y_i) \leq v$$

car $d(x_i, y_i) \leq v$ pour tous $i = 1, ...,n$. Donc $(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ...,y_n)) \in (d)_v$ et alors $(d)_v$ est une sous-algèbre de $\mathbf{A}^2$. □

Corollaire 1.2

Soit (E,d) un espace métrique. Une fonction $f: X \to E$ où $X \subseteq E^n$ est non expansive si et seulement si pour tout $v \in V$, f préserve la relation $(d)_v$.

Preuve

Selon la preuve du théorème précédent f est non expansive si et seulement si elle préserve les relations $(d)_v$. □

Soit (E,d) un espace métrique sur $\underline{V}$ et C un ensemble de fonctions non expansives pour d. On note W l'ensemble des sous-algèbres de $\langle E,C\rangle^2$. On munit W de sa structure naturelle de treillis. W est clos pour la composition des relations [15] (I-3). Donc d'après 4 b) du chapitre 0, on peut définir $\rho + \rho'$: $= \rho \circ \rho' \in W$ pour tous $\rho, \rho' \in W$. Enfin $\overline{\rho} := \rho^{-1}$ est la relation réciproque de ρ. On définit d_W par

$$d_W\ (x,y): = (d)_v \quad \text{où } v = d(x,y).$$

Finalement soit $\varphi_W : V \to W$ telle que $\phi_W (v): = (d)_v$.

Proposition 1.3

L'application ϕ_w est un morphisme de demi-treillis de $\langle V; \wedge \rangle$ dans $\langle W, \wedge \rangle$ et $\phi_w(\overline{v}) = \phi_w(v)^{-1}$ pour tout $v \in V$.

Preuve

Soient $v, v' \in V$ et . Comme $v \wedge v' \leq v$ et $v \wedge v' \leq v'$, on a

$$(d)_{v\wedge v'} \subseteq (d)_v \wedge (d)_{v'}.$$

Si $(x,y) \in (d)_v \cap (d)_{v'}$ alors $(x,y) \in (d)_v$ et $(x,y) \in (d)_{v'}$. D'où $d(x,y) \leq v$ et $d(x,y) \leq v'$ donc $d(x,y) \leq v \wedge v'$. On en déduit $(x,y) \in (d)_{v \wedge v'}$. Ainsi on a prouvé que $(d)_{v \wedge v'} = (d)_v \wedge (d)_{v'}$; c'est à dire que

$$\phi_W(v \wedge v') = \phi_W(v) \wedge \phi_W(v').$$

D'autre part

$$\phi_w(\overline{v}) = (d)_{\overline{v}} = \{ (x,y) \mid d(x,y) \leq \overline{v} \} = \{ (x,y) \mid d(y,x) \leq v \}$$

$$= \{(x,y) \mid (y,x) \in (d)_v \} = (d)_v^{-1}. \qquad \square$$

En général il se peut que Δ ne soit pas le plus petit élément de W. Définissons $W' := \{\rho \in W \mid \Delta \leq \rho\}$ de sorte que W' est l'ensemble des relations reflexives de W. Alors W' est un intervalle de W et donc un sous-treillis complet de W. Il est en outre clos par rapport à la loi +.

Proposition 1.4
La fonction d_w est à valeurs dans W' et (E,d_w) est une $\mathcal{W}'$ - métrique.

Preuve
Soit $x,y \in E$ et $v := d(x,y)$. Nous montrons que

$$d_W(x,y) = \Delta \Leftrightarrow (d)_v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Si $v = 0$, alors $d_W(x,y) = (d)_0 = \Delta$. Soit $d_W(x,y) = \Delta$. Comme $(x,y) \in (d)_v = \Delta = d_W(x,y)$ alors par la propriétée (d_1), $x = y$ et $v = d(x,y) = 0$. $\square$

Proposition 1.5
Si $d: E^2 \to V$ est une fonction surjective, alors ϕ_w est injective.

Preuve
Supposons d surjective et soient $v, v' \in V$ tels que $\phi_W(v) = \phi_W(v')$.
Il existe $(x,y) \in E^2$, $(x',y') \in E^2$ tels que $d(x,y) = v$ et $d(x',y') = v'$.
Comme $(d)_v = \phi_W(v) = \phi_W(v') = (d)_{v'}$, on a $v = d(x,y) \leq v'$. De même $v' \leq v$; donc $v = v'$. $\square$

Corollaire 1.6

φ_w restreinte à Imd est injective.

Preuve

C'est une application immédiate de la proposition précédente. □

Proposition 1.7

Pour toute métrique (E,d) sur $\underset{\sim}{V}$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}^2 \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "d_{\mathcal{W}}"'] & \mathcal{V} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{W}}"] \\ & \mathcal{W} \end{tikzcd}$$

Preuve

C'est clair . □

Définitions

Soit (E,d) un espace métrique sur $\underset{\sim}{V}$.

1) On dit que (E,d) est **convexe** si et seulement si pour tous x, y ∈ E et r, s ∈ V tels que d(x,y) ≤ r + s, il existe z ∈ E tel que d(x,z) ≤ r et d(z,y) ≤ s.

2) (E, d) possède la **propriété de 2-Helly** si pour toute famille B = $\{B_i\}$ i ∈ *I*, de boules deux à deux non disjointes, l'intersection de B, soit ∩ $\{B_i \mid i \in I\}$, est non vide. (E,d) possède la **propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules** de E si pour toute famille finie B = $\{B_i\}$ *i* ∈ *I*, de boules deux à deux non disjointes, l'intersection de B est non vide.

3) On dit que (E,d) est **quasi-compact** si toute famille de boules de E dont l'intersection est vide possède une sous-famille finie d'intersection vide.

4) On dit que (E,d) est **hyperconvexe** s'il est convexe et possède la propriété de 2 - Helly.

Les définitions 1), 2) et 4) sont bien connues (cf.[15] II-2)

Théorème 1.8

Un espace métrique (E,d) qui est hyperconvexe est convexe et quasi-compact.

Preuve

Le fait que (E,d) est convexe fait partie de la définition. Pour prouver que (E,d) est quasi-compact, prenons une famille de boules $B = \{ B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$, telle que pour tout $I' \subseteq I$, I' fini on ait:

$$\bigcap \{B(x_i, r_i) \mid i \in I'\} \neq \emptyset$$

Il faut prouver que

$$\bigcap \{B(x_i, r_i) \mid i \in I\} \neq \emptyset.$$

Si les intersections de sous familles finies de boules de B sont non vides, alors les intersections deux à deux de boules de B sont non vides. Par la propriété de 2 - Helly, alors

$$\bigcap \{ B(x_i, r_i) \mid i \in I'\} \neq \emptyset.$$

□

Remarques

1) Tout espace métrique fini est quasi-compact.

2) $\mathbb{Z}$ muni de la distance définie au chapitre 0 paragraphe 4 a) n'est pas quasi-compact. En effet soit $P = \{ p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, l'ensemble des nombres premiers. On a une famille $\{r_n\}$ de congruences arithmétiques de $\mathbb{Z}$ ainsi définie:

$$(x,y) \in r_n \Leftrightarrow x - y \in (p_n) := p_n\mathbb{Z}$$

où (p_n) est l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par p_n. Comme d'habitude on écrira $x \equiv y \pmod{p_n}$ pour $(x,y) \in r_n$. Soit $\underset{\sim}{V}$ le sous-treillis de Eq($\mathbb{Z}$) engendré par $\{ r_n ; n \in \mathbb{N} \}$.Soit

$$B = \{ B(p_{n+1}, r_n) \}_{n \in \mathbb{N}},$$

la famille de boules ainsi définie. Comme p_n et p_m sont premiers entre eux pour $n \neq m$, alors

$$(p_n) + (p_m) = \mathbb{Z} \quad \text{et } r_n \vee r_m = \mathbb{Z}^2.$$

Donc

$$(p_n, p_m) \in r_n \vee r_m$$

pour tous n,m $\in \mathbb{N}$. D'après le théorème classique des restes chinois , il existe pour tout entier $k \geq 1$, un $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x \equiv p_{i+1} \ (\bmod p_i) \text{ pour tout } i = 1, ..., k.$$

C'est à dire $(p_i,x) \in r_i$ pour tout $i = 1, ..., k$; soit que l'intersection des boules $B(p_{i+1}, r_i)$ est non vide. Ainsi toute intersection d'une sous -famille finie de boules de B est non vide. Supposons qu'il existe

$$y \in \cap \{ B(p_{n+1},r_n) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Soit q un diviseur premier de y. Alors $q = p_m$ pour un $m \in \mathbb{N}$. On a $(y, p_{m+1}) \in r_n$ donc $y \equiv p_{m+1} \ (\bmod p_m)$. Or comme p_m divise y on a

$$p_{m+1} \equiv 0 \ (\bmod p_m).$$

Mais p_m et p_{m+1} étant des nombres premiers distincts c'est impossible. Donc on a prouvé que

$$\cap \{B (x_n,r_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

□

Pour une métrique (E,d) on définit $\mathbf{V_d} := \{(d)_v \mid v \in V \}$.

Proposition 1.9

Si (E,d) est convexe alors $\underset{\sim}{V_d} = \langle V_d \ ; o , \Delta , ^{-1}, \subseteq \rangle$ *est un monoïde ordonné muni d'une involution et* $\varphi_W: V \rightarrow V_d$ *est un morphisme surjectif de monoïdes ordonnés et involutifs.*

Preuve

Soit v,w $\in$ V.Par la proposition 1.2, il suffit de montrer que

$$\varphi_W(v+w) = \varphi_W(v) o \varphi_W(w) \text{ i.e. que } (d)_{v+w} = (d)_v o (d)_w .$$

Soit donc $(x,y) \in (d)_{v+w}$; alors $d(x,y) \leq v+w$. Par convexité, il existe $z \in E$ tel que $d(x,z) \leq v$ et $d(z,y) \leq w$. On a

$$(x,z) \in (d)_v \text{ et } (x,y) \in (d)_w \Rightarrow (x,y) \in (d)_v \circ (d)_w.$$

Donc $(d)_{v+w} \subseteq (d)_v \circ (d)_w$. Si à présent $(x,y) \in (d)_v \circ (d)_w$; il existe $z \in E$ tel que $(x,z) \in (d)_v$ et $(z,y) \in (d)_w$ ce qui se traduit par $d(x,z) \leq v$ et $d(z,y) \leq w$. Par l'inégalité triangulaire

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq v+w ;$$

d'où $(x,y) \in (d)_{v+w}$, donc $(d)_v \circ (d)_w \subseteq (d)_{v+w}$. □

Ayant défini une structure de monoïde ordonné sur V_d on peut se demander s'il est possible de remplacer V par le monoide concret V_d tout en conservant les propriétés de la métrique d.

Proposition 1.10

Supposons que (E,d) est convexe. L'application $D: E^2 \to W$ telle que $D(x,y) := \varphi_W(d(x,y))$ est à valeurs dans V_d. (E,D) est un $\underset{\sim}{V}_d$-espace métrique. Il est hyperconvexe si et seulement si (E,d) l'est .

Preuve

On a $D(x,y) = d_W(x,y)$. Comme φ_W est à valeurs dans V_d et que V_d est clos pour la loi +, D est une métrique sur $\underset{\sim}{V}_d$. Supposons (E,d) hyperconvexe. Soit $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ une famille de boules de (E,D) où $D(x_i,x_j) \leq r_i + \overline{r_j}$ pour tous $i, j \in I$. On a pour tout $i \in I$, $r_i = (d)_{v_i}$ pour un certain $v_i \in V$. Ainsi

$$D(x_i,x_j) \leq (d)_{v_i} + (d)_{v_j}^{-1} = (d)_{v_i} \circ (d)_{v_j}^{-1} = (d)_{v_i + \overline{v_j}}$$

Alors $d(x_i,x_j) \leq v_i + \overline{v_j}$. Donc en considérant la famille de boules à droite $\{B(x_i,v_i)\}$ de (E,d), il existe $x \in E$ tel que $d(x_i,x) \leq v_i$ pour tout $i \in I$. Alors $D(x_i,x) \leq (d)_{v_i} = r_i$ pour tout $i \in I$. Réciproquement supposons (E,D) hyperconvexe et soit $\{B(x_i,w_i)\}_{i\in I}$ une famille de boules à droite de (E,d) telle que pour tous $i,j \in I$, $d(x_i,x_j) \leq w_i + \overline{w_j}$. Alors

$$(x_i,x_j) \in (d)_{w_i+\overline{w_j}} = (d)_{w_i} \circ (d)_{\overline{w_j}}$$

En posant $\{ B(x_i, (d)_{w_i}) \}, i \in I$ la famille de boules à droite de (E,D) on a

$$D(x_i,x_j) \leq (d)_{w_i} + (d)_{\overline{w_j}}$$

pour tous $i,j \in I$. Soit $x \in \cap\{B(x_i, (d)_{w_i}) \mid i \in I\}$. Alors $D(x_i,x) \subseteq (d)_{w_i}$ pour tout $i \in I$, ce qui se traduit par $d(x_i,x) \leq w_i$ pour tout $i \in I$ donc

$$x \in \cap \{B(x_i,w_i) \mid i \in I\}.$$

□

Définition

On dit que le $\underline{V}$-espace métrique (E,d) possède la propriété du point fixe si toute fonction non expansive $f : E \to E$ possède un point fixe.

Proposition 1.11

Supposons que (E, d) est convexe. Alors (E,d) possède la propriété du point fixe si et seulement si (E,D) la possède.

Preuve

Soit $f: E \to E$. Prouvons que f est non expansive pour d si et seulement si elle est non expansive pour D.

1) Supposons que $d(f(x), f(y)) \subseteq d(x,y)$ pour tous $x,y \in E$. Posons $v = d(x,y)$, alors $(f(x), f(y)) \in (d)_v$ donc $D(f(x), f(y)) \subseteq (d)_v$.

2) Supposons que $D(f(x), f(y)) \subseteq D(x,y)$ pour tous $x,y \in E$. Soit $v = d(x,y)$, on a

$$D(f(x), f(y)) \subseteq D(x,y) \subseteq (d)_v$$

donc $d(f(x), f(y)) \leq v$. Il est alors clair que (E,d) possède la propriété du point fixe si et seulement si (E,D) la possède. □

L'idée d'utiliser les relations binaires $(d)_v$, $v \in V$ pour étudier les propriétés de l'espace métrique (E,d) est déjà exploitée dans [25] et [26].

Proposition 1.12
Si (E,d) est symétrique et convexe alors pour tous u,v ∈ V, on a
$$(d)_v \circ (d)_u = (d)_u \circ (d)_v.$$

Preuve
Supposons que $(y,x) \in (d)_v \circ (d)_u$, alors il existe $z \in E$ tel que:

$$d(x,z') \leq v \text{ et } d(z,y) \leq u$$

Il vient que $d(y,x) = d(x,y) \leq u + v$. Par convexité on peut trouver $z' \in E$ tel que

$$d(x,z') \leq u \text{ et } d(z',y) \leq v$$

donc

$$(x,y) \in (d)_u \circ (d)_v \text{ et } (d)_v \circ (d)_u \subseteq (d)_u \circ (d)_v$$

De même on prouve que $(d)_u \circ (d)_v \subseteq (d)_v \circ (d)_u$. □

Pour certaines métriques, le résultat précédent devient une équivalence.

Corollaire 1.13
Soit $\underline{A}$ une algèbre sur E, Tol$\underline{A}$ le treillis des tolérances de $\underline{A}$ et $d_{\underline{T}}$ la distance associée (cf.ch.0,2b)). Alors $d_{\underline{T}}$ est convexe si et seule ment si les éléments de V commutent. Le même résultat est valable pour la distance $d_{\underline{A}}$.

Preuve
Pour x, y ∈ E, la distance $d_{\underline{T}}(x,y)$ est la plus petite tolérance μ de A telle que $(x,y) \in \mu$.Donc pour tout v ∈ Tol$\underline{A}$ on a que $(d_{\underline{T}})_v = \{ (x,y) \in E^2 \mid d_{\underline{T}}(x,y) \leq v\} = v$. Donc pour tous u, v ∈ V,

$$(d_{\underline{T}})_u \circ (d_{\underline{T}})_v = (d_{\underline{T}})_v \circ (d_{\underline{T}})_u$$

équivaut à $u \circ v = v \circ u$. D'autre part si les tolérances permutent, alors $\rho + \rho' = \rho \circ \rho'$, d'où le fait que $d_{\underline{T}}$ est convexe.

□

Définition

On dit qu'un espace métrique (E,d) sur V est **ultramétrique** si d est symétrique et si l'opération + est le sup du treillis V.

Définition

Soit E un ensemble et $X \subseteq E$. On appelle **fonction de Pixley ou a-fonction sur X**, toute fonction ternaire f_X: $X^3 \rightarrow E$, vérifiant la condition suivante:

$$f_X(x, y, y) = f_X(x,y,x) = f_X(y, y, x) = x.$$

pour tous x, $y \in X$.

Définition

Soit E un ensemble et soit L un sous-treillis du treillis des équivalences de E. On dit que L est **arithmétique** si et seulement si L est un treillis distributif dont les éléments commutent deux à deux pour le produit des relations.

Remarque

Deux équivalences θ et ϕ commutent si et seulement si on a $\theta \circ \phi = \theta \vee \phi$ [17] (corollaire du théorème 4.70).

Définition

On dit qu'un espace métrique (E, d) **possède la propriété (a)**, si pour tout sous-ensemble fini X de E, il existe une a-fonction non expansive sur X.

Lemme 1.14

Soit (E,d) un espace métrique sur $\underset{\sim}{V}$. *Si pour tout sous-ensemble* $X \subseteq E$ *tel que* $|X| = min(3, |E|)$ *il existe une a-fonction non expansive sur X alors (E,d) est ultramétrique. En particulier, (E,d) est ultramétrique s'il possède la propriété (a).*

Preuve

Si E ne possède qu'un élément il n'y a que la métrique triviale sur E. On peut donc supposer que $|E| \geq 2$. Prouvons d'abord la symétrie. Soit $x, y \in E$. Posons $X = \{x,y\}$ et soit $f_X : X^3 \to E$ une a-fonction non expansive sur X. On a

$$d(x,y) = d(f_X\ (y,y,x),\ f_X\ (y,x,x)) \leq d_3((y,y,x),(y,x,x))$$

$$= d(y,y) \vee d(y,x) \vee d(x,x)$$

$$= 0 \vee d(y,x) \vee 0 = d(y,x),$$

donc $d(x, y) \leq d(y, x)$. En utilisant un argument symétrique on obtient $d(y,x) \leq d(x,y)$. Soit à présent x,y,z dans E. On pose $X = \{x,y,z\}$ et on note encore $f_X : X^3 \to E$ une a-fonction non expansive. Alors

$$d(x,y) = d(f_X\ (z,z,x),\ f_X\ (y,x,x)) \leq d_3((z,z,x),(y,x,x))$$

$$= d(z,y) \vee d(z,x) \vee d(x,x)$$

d'où $d(x,y) \leq d(x,z) \vee d(z,y)$ compte tenu de la symétrie de d. □

Lemme 1.15 ([26], lemme III-6.4)
Si (E,d) est ultramétrique alors pour tout $v \in V$, la relation $(d)_v$ est une relation d'équivalence sur E.

Preuve

La reflexivité est triviale puisque pour tout $x \in E$, on a que $d(x,x) = 0 \leq v$.La symétrie de $(d)_v$ découle de la symétrie de d. Pour prouver la transitivité de $(d)_v$ soient $(x,y) \in (d)_v$ et $(y,z) \in (d)_v$, alors $d(x,y) \leq v$ et $d(y,z) \leq v$.Donc en utilisant l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leq d(x,y) \vee d(y,z) \leq v \vee v = v$. Ce qui prouve que $(x,z) \in (d)_v$ donc $(d)_v$ est transitive. □

Théorème 1.16

Soit (E,d) un espace hyperconvexe. Alors il existe une a-fonction non expansive sur E si et seulement si (E,d) est ultramétrique. Dans ces conditions les équivalences de la forme $(d)_v$, $v \in V$ *vérifient:*

a) $\forall\ v,w \in V$ $\quad (d)_v \circ (d)_w = (d)_w \circ (d)_v$

b) $\forall\ u, v, w \in V$ $\quad (d)_v \cap ((d)_w \circ (d)_u) = ((d)_v \cap (d)_w) \circ ((d)_v \cap (d)_u)$.

Lemme A

Soit (E,d) un espace métrique sur $\underset{\sim}{V}$. *Si pour tout* $X \subseteq E$ *avec* $|X|=\min(3,|E|)$ *il existe une a-fonction non expansive sur X, alors ,*

(i) (E,d) est ultramétrique et $V_d \subseteq Eq(E)$,

(ii) Les éléments de V_d *permutent deux à deux et*

(iii) $(d)_v \cap ((d)_w \circ (d)_u) = ((d)_v \cap (d)_w) \circ ((d)_v \cap (d)_u))$, *pour tous* $u,v,w \in V$

.

Preuve

(i) est dû aux lemmes 1.14 et 1.15. Pour (ii) soient $(d)_u$ et $(d)_v$ des éléments de V_d .Soit $(x,y) \in (d)_u \circ (d)_v$, alors il existe $z \in E$ tel que $(x,z) \in (d)_u$ et $(z,y) \in (d)_v$. Définissons $X = \{x,y,z\}$ et $f_X : X^3 \to E$ une a-fonction non expansive sur X.On a

$$d(f_X(x,z,z),f_X(x,z,y)) \leq d_3(x,z,z),(x,z,y))$$

$$= d(x,x) \vee d(z,z) \vee d(z,y) = 0 \vee 0 \vee d(z,y) = d(z,y) \leq v.$$

On a aussi par le même argument que $d(f_X(x,z,y), f_X(z,z,y)) \leq u$ d'où

$$f_X(x,z,z),f_X(z,z,y)) = (x,y) \in (d)_v \circ (d)_u.$$

La réciproque est identique.

Pour (iii) soient u, v, $w \in V$ et $(x,y) \in (d)_v \cap ((d)_w \circ (d)_u)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $(x,z) \in (d)_w$, $(z,y) \in (d)_u$. Donc $d(x,z) \leq w$ et $d(z,y) \leq u$. Soit $f_X : X^3 \to E$ une a-fonction non expansive sur $X = \{x,y,z\}$ et $b := f_X(x,z,y)$. On a

$$d(x,b) = d(f(x,y,y), f(x,z,y)) = d(x, f(x,z,y))$$

or

$$d(x,f(x,z,y)) \leq d(x,x) \vee d(y,z) \vee d(y,y) = d(y,z) \leq u$$

car $d(z,y) \leq u$ et d est symétrique, (E,d). En outre

$$d(x,b) = d(f_X(x,z,x),f_X(x,z,y)) \leq d(x,y) \leq v.$$

Donc $(x,b) \in (d)_u \cap (d)_v$. De même

$$d(b,y) = d(f_X(x,z,y), f_X(z,z,y)) \leq w$$

et

$$d(b,y) = d(f_X(x,z,y),f_X(y,z,y)) \leq d(x,y) \leq v .$$

D'où $(b,y) \in (d)_w \cap (d)_v$. Finalement on a prouvé que

$$(x,y) \in ((d)_u \cap (d)_v) \circ ((d)_w \cap (d)_v)$$

pour tous $x,y \in E$. Ce qui montre que

$$(d)_v \cap ((d)_w \circ (d)_u) \subseteq ((d)_v \cap (d)_w) \circ ((d)_v \cap (d)_u).$$

Comme $(d)_w \vee (d)_u = (d)_w \circ (d)_u$, l'inclusion $\supseteq$ est toujours vraie. □

Lemme B

Soit (E,d) un espace ultramétrique sur $\underset{\sim}{V}$. *La fonction définie sur* D_3 (ch. 0 I) *par*

$$f(x,x,y) = f(y,x,y) = f(y,x,x) = y \qquad (*)$$

pour tous $x,y \in E$ *est non expansive.*

Preuve

Soient $(x_1,x_2,x_3) \in D_3$ et $(y_1,y_2,y_3) \in D_3$. Plusieurs cas sont possibles. Nous en examinons trois, les autres étant semblables.

1) Soit $1 \leq i \leq 3$ et

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_i,\ f(y_1,y_2,y_3) = y_i .$$

Alors

$$d(f(x_1, x_2, x_3),f(y_1, y_2, y_3)) = d(x_i, y_i).$$

Or

$$d(x_i, y_i) \leq d(x_1, y_1) \vee d(x_2, y_2) \vee d(x_3, y_3);$$

donc

$$d(f(x_1, x_2, x_3),f(y_1, y_2, y_3)) \leq d_3((x_1, x_2, x_3),(y_1, y_2, y_3)).$$

2) $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_3$. Alors $f(x_1,x_2,x_3) = x_3$ et $f(y_1,y_2,y_3) = y_3$. Donc

$$d(f(x_1,x_2,x_3),f(y_1,y_2,y_3)) = d(x_3,y_3) \leq d(x_1,y_1)\vee d(x_2,y_2)\vee d(x_3,y_3).$$

3) $x_1 = x_2$ et $y_2 = y_3$. Dans ce cas on a $f(x_1,x_2,x_3) = x_3$ et $f(y_1,y_2,y_3) = y_1$.
D'où

$$d(f(x_1,x_2,x_3),f(y_1,y_2,y_3)) = d(x_3,y_1) \leq d(x_3,y_3)\vee d(y_3,y_1)$$

$$= d(x_3,y_3) \vee d(y_2,y_1).$$

Mais

$$d(x_3,y_3) \vee d(y_2,y_1) \leq d(x_3,y_3) \vee d(y_2,x_2) \vee d(x_2,y_1)$$

et

$$d(x_3,y_3)\vee d(y_2,x_2) \vee d(x_2,y_1) = d(x_1,y_1) \vee d(y_2,x_2) \vee d(x_3,y_3).$$

en utilisant le fait que (E,d) est ultramétrique ainsi que les égalités $x_1 = x_2$ et $y_2 = y_3$. □

Lemme C

Si (E,d) est hyperconvexe et ultramétrique alors (E,d) admet une a-fonction non expansive sur E .

Preuve

Par le lemme B il existe $f : D_3 \to E$ non expansive qui satisfait la propriété (*).
L'hyperconvexité de (E,d) nous permet d'étendre f à une fonction $\tilde{f} : E^3 \to E$ non expansive. De plus $\tilde{f}$ satisfait (*). C'est donc une a-fonction. □

Preuve du théorème 1.15:
On applique simplement les lemmes A,B et C.

Pour les lemmes B et C, nous nous inspirions d'une preuve de Jawhari, Misane et Pouzet [15] (thm.V-2,3).

Définition
On dit qu'un élément $r \in V$ est **idempotent** si $r + r = r$.

Pour les ultramétriques, on remarque que $r+r = r \vee r = r$ pour tout $r \in V$. Donc dans ce cas tout élément de V est idempotent. Cette propriété influence fortement la structure métrique. On peut exploiter cette analogie.

Théorème 1.17
Supposons que $\underline{V}$ satisfait $u \wedge (v + w) = (u \wedge v) + (u \wedge w)$ pour tous u, v et w dans $\underline{V}$. Si (E,d) est convexe et symétrique, alors il possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules dont les rayons sont idempotents.

Preuve
Pour tous $u,v,w \in V$ on a

$$u \wedge (v + w) = (u \wedge v) + (u \wedge w)$$

Soient $r_1,\ldots,r_n$ des éléments idempotents de V; soient $x_1, \ldots, x_n$ dans E et les boules $B(x_1,r_1), \ldots, B(x_n,r_n)$ tels que: $B(x_i,r_i) \cap B(x_j,r_j) \neq \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. On procède par récurrence sur n. Le résultat étant vrai pour 2, supposons le vrai pour $n-1 \geq 2$. Soit

$$t \in \bigcap_{i=1}^{n-1} B(x_i,r_i) \neq \emptyset$$

On a $d(x_n,t) \leq d(x_n,x_i) + d(x_i,t)$ pour tous $i = 1,\ldots, n-1$. Or $d(x_n,x_i) \leq r_n + r_i$ et $d(x_i,t) \leq r_i$ car $t \in B(x_i,r_i)$; donc $d(x_n,t) \leq r_n+r_i+r_i = r_n+r_i$ par idempotence de r_i. Soit $r := \wedge \{r_i \mid i = 1 ,\ldots, n-1 \}$; alors comme

$$d(x_n,t) \le \bigwedge_{i=1}^{n} (r_n + r_i) = r_n + \bigwedge r_i\ ,$$

on a $d(x_n,t) \le r_n + r$. Par convexité, il existe $x \in E$ tel que $d(x_n,x) \le r_n$ et $d(x,t) \le r$. On a alors pour tout $1 \le j \le n\text{-}1$

$$d(x_j,x) \le d(x_j,t) + d(t,x) = r_j + r \le r_j + r_j = r_j.$$

On a finalement prouvé que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} B(x_i,\ r_i)\ .$$

□

Remarque

Dans un tel V , si r' est idempotent alors pour tout $r \in V$, $r \wedge r'$ est idempotent.

En effet , $(r \wedge r') + (r \wedge r') = r \wedge (r'+ r') = r \wedge r'$. □

Corollaire 1.18

Soit L un sous-treillis fini du treillis des équivalences de E.
Alors (E, d_L) est hyperconvexe si et seulement si L est arithmétique.

Preuve

Si L est un sous-treillis de Eq(E) alors la loi + de L est le $\vee$ et tout élément de L est idempotent. Si (E, d_L) est hyperconvexe alors par le théorème 1.16, L est distributif.et ses éléments permutent. Réciproquement si L est arithmétique alors (E, d_L) est convexe par le corollaire 1.13. Soit à présent $\{B(x_i,r_i)\}_{i \in I}$ une famille de boules de E qui s'intersectent deux à deux. Il existe J un sous-ensemble fini de I tel que $\{r_i\}_{i \in I} = \{r_i\}_{i \in J}$. Par le théorème des restes chinois, on a $\bigcap\{B(x_i,r_i) \mid i \in J\} \neq \emptyset$. Soit à présent x un élément de cette intersection. Pour tout $i \in I$, il existe au moins un $j \in J$ tel que $r_i = r_j$. Donc quelque soit $i \in I$ on a

$$d(x_i,x) \le d(x_i,x_j) + d(x_j,x) \le d(x_i,x_j) + r_j,$$

si on choisit $j \in J$ tel que $r_i = r_j$. Mais comme les boules s'intersectent deux à deux, on a $d(x_i,x_j) \le r_i + r_j$. Il vient que

$$d(x_i,x) \le r_i + r_j + r_j = r_i + r_j = r_j$$

par l'idempotence et par le fait que $r_i = r_j$.

Remarque

Si les éléments v, w et $v \vee w$ de V sont tous idempotents, on a $v \vee w = v + w$. En effet $v = v + 0 \le v + w$ et de même $w \le v + w$ donc $v \vee w \le \; = v + w$; or $v \le v \vee w$ implique $v + w \le (v \vee w) + (v \vee w) = v \vee w$.

Corollaire 1.19

Soit (E,d) un $\mathcal{V}$-espace métrique ultramétrique . Si Im d est fini alors (E,d) est quasi-compact.

Preuve

La même que pour le corollaire 1.17.

2) Le théorème d'extension finie

Grâce au travail de Jawhari, Misane et Pouzet [15], il est possible de démontrer le théorème d'extension finie de Kaarli [9], (thm. 3) pour les espaces métriques généraux. Auparavant précisons ce que nous entendons par extension finie.

Définitions

Soit (E,d) un $\mathcal{V}$-espace métrique. On dit que (E,d) possède la propriété **d'extension finie** ou la propriété de **$\aleph_0$-extension** dans la classe des $\mathcal{V}$-espaces métriques si pour tout espace métrique (F,d') et toute fonction non expansive f: $X \to E$ définie sur un sous-ensemble fini X de F, il existe une extension de f en une fonction non expansive $\tilde{f}$: $X \cup \{x\} \to E$ quel que soit $x \in F \setminus X$.

Proposition 1.20

Soit (E,d) un $\mathcal{V}$-espace métrique. Alors (E,d) possède la propriété d'extension finie si et seulement si pour tout $\mathcal{V}$-espace métrique (F,d'), toute fonction non expansive $f:X \to E$ définie sur une partie finie X de F admet une extension en une fonction non expansive $f:Y \to E$ quelle que soit Y une partie finie de F contenant X.

Preuve

(=>) Soit $n = | Y \setminus X |$ le cardinal de la différence $Y \setminus X$. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $Y = X$ et il n'y a rien à prouver. Supposons le résultat vrai pour $n \geq 0$ et prouvons le pour $n + 1$. Soit $Y \setminus X = \{x_1, ..., x_{n+1}\}$. Posons $X_n = X \cup \{x_1, ..., x_n\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\tilde{g}: X_n \to E$ qui est non expansive et qui prolonge f. Par la propriété d'extension finie, il existe

$$\tilde{f}: X_n \cup \{x_{n+1}\} \to E$$

une fonction non expansive prolongeant $\tilde{g}$. Alors pour tout $x \in X$ on a $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) = f(x)$; et donc $\tilde{f}$ est l'extension cherchée.

($\Leftarrow$) Si $f:X \to E$ est non expansive et si $x \in F \setminus X$, on pose alors $Y = X \cup \{x\}$; d'après l'hypothèse il existe $\tilde{f} : Y \to E$ une fonction non expansive prolongeant f. □

Définition

Soit $X \subseteq E$ et soit $n \geq 3$ un entier. On appelle fonction n-aire **presqu'unanimité** sur X, toute fonction $m_X : X^n \to E$ vérifiant pour tous $x,y \in X$

$$m_X(x,...,x,y) = m_X(x,...,x,y,x) = ... = m_X(y,x,...,x) = x.$$

Pour n=3, on dira que m_X est une **fonction majorité sur X**.

Il est bien connu qu'à partir d'une fonction d'une arité donnée on peut construire une fonction d'une arité plus grande [7] (thm. 4.8). En utilisant la même méthode on peut prouver le résultat suivant déja observé par d'autres auteurs pour les fonctions définies sur E tout entier [1] (paragraphe 2).

Définition

On dit que l'espace métrique (E, d) possède **la propriété (m)**, si pour tout sous-ensemble fini X de E, il existe une fonction majorité sur X qui est non expansive.

Lemme 1.21

Soit (E,d) un $\mathcal{V}$-espace métrique et soit $X \subseteq E$. Pour tout entier $n \geq 3$,il existe une fonction n-aire presqu'unanimité non expansive sur X si et seulement si il existe une fonction ternaire majorité non expansive sur X.

Preuve

(=>) Il suffit de prendre n = 3.

($\Leftarrow$) Soit q: $X^3 \to E$ une fonction majorité sur X. On définit pour tout $n \geq 3$ $m_X : X^n \to E$ par $m_X(x_1, ..., x_n) := q(x_1,x_2,x_3)$ pour tous $x_1,...,x_n \in X$; donc m_X est essentiellement ternaire. Puisque q est non expansive, il en est de même pour m_X. Le fait que m_X est presqu'unanimité est aussi facile à voir. □

Lemme 1.22 (Jawhari, Misane, Pouzet [15], thm. IV-2.3.)
Soit (E,d) un $\mathcal{V}$- espace métrique possédant la propriété d'extension finie. Alors (E,d) possède la propriété (m).

Preuve

Soit donnés $X \subseteq E$ un sous ensemble fini et $n \geq 3$ un entier. Il faut prouver l'existence d'une fonction majorité sur X. Soit la fonction m_X: $D_3 \cap X^3 \to E$ telle que pour tous $x, y \in X$

$$m_X(x,x,y) = m_X(x,y,x) = m_X(y,x,x) = x.$$

Alors m_X est non expansive. En effet soient (x_1,x_2,x_3) et $(y_1,y_2,y_3) \in D_3 \cap X^3$. Il existe un $1 \leq i \leq 3$ tel que $m_X(x_1,x_2,x_3) = x_i$, et $m_X(y_1,y_2,y_3) = y_i$. Donc

$$d(m_X(x_1,x_2,x_3),m_X(y_1,y_2,y_3)) = d(x_i,y_i) \leq d(x_1,y_1) \vee d(x_2,y_2) \vee d(x_3, y_3).$$

Par la proposition 1.19, la fonction m_X possède une extension en une fonction non expansive de X^3 dans E car X^3 est fini. Cette extension est la fonction majorité cherchée. □

Nous allons à présent démontrer le théorème d'extension finie.

Considérons les énoncés suivants:

(i) (E,d) est convexe et possède la propriété (m).

(ii) (E,d) est convexe et possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules.
(iii) (E,d) possède la propriété d'extension finie.
(iv) (E,d) est convexe et possède la propriété (a).

Théorème 1.23 (Théorème d'extension finie)
Soit (E,d) un $\mathcal{V}$*-espace métrique. Alors*
1) Les propriétés (i) à (iii) sont équivalentes.
2) Si (E,d) est ultramétrique alors les propriétés (i) à (iv) sont équivalentes.

Preuve
1) (i) $\Rightarrow$ (ii) Il faut prouver la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules de E. Soit $\{B(x_i,r_i)\}_{1 \leq i \leq n}$, une famille de boules de E qui s'intersectent deux à deux. On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour n = 2 par hypothèse. Supposons le vrai pour $n \geq 2$ et prouvons le pour n+1. Soient $y_1, y_2, y_3 \in E$, tels que

$$y_j \in B(x_1,r_1) \cap \ldots \cap B(x_{i-1},r_{i-1}) \cap B(x_{i+1},r_{i+1}) \cap \ldots \cap B(x_n,r_n).$$

Définissons $X := \{x_1,\ldots,x_{n+1},y_1,y_2,y_3\}$. Par (i) il existe une fonction majorité non expansive m_X sur X. Prouvons que

$$u := m_X(y_1,y_2,y_3) \in \cap \{B(x_i,r_i) \mid 1 \leq i \leq n \}.$$

On a

$$d(x_1,u) = d(x_1, m_X(y_1,y_2,y_3)) = d(m_X(y_1,x_1,x_1), m_X(y_1,y_2,y_3))$$

et

$$d(m_X(y_1,x_1,x_1), m_X(y_1,y_2,y_3)) \leq d_3(((y_1,x_1,x_1), (y_1,y_2,y_3).$$

Mais

$$d_3(((y_1,x_1,x_1), (y_1,y_2,y_3) = d(y_1, y_1) \vee d(x_1, y_2) \vee d(x_1, y_3) \leq 0 \vee r_1 \vee r_1 = r_1$$

car y_2 et y_3 appartiennent à $B(x_1, r_1)$. Ainsi $d(x_1,u) \leq r_1$. Pour voir que $d(x_2, u) \leq r_2$ et $d(x_3, u) \leq r_3$ on utilise $x_2 = m_X(x_2,y_2,x_2)$ et $x_3 = m_X(x_3,x_3,y_3)$. Pour i = 4,...,n on a

$$d(x_i,u) \leq d(m_X(x_i, x_i, x_i), m_X(y_1,y_2,y_3)) \leq d_3((x_i,x_i,x_i),(y_1,y_2,y_3))$$

or

$$d_3((x_i,x_i,x_i),(y_1,y_2,y_3)) \leq d(x_i,y_1) \vee d(x_i, y_2) \vee d(x_i, y_3) \leq r_i \vee r_i \vee r_i = r_i.$$

Donc $d(x_i,u) \leq r_i$, ce qui achève de prouver la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules.

ii) $\Rightarrow$ (iii). On suppose à présent que le $\mathcal{V}$-espace (E,d) est convexe et possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules. Soit X un sous-ensemble fini d'un $\mathcal{V}$-espace métrique (F, d'). On procède par récurrence sur n $= |X|$. Pour $n = 1$ et $X = \{x_1\}$, toute fonction $f : X \to E$ peut être prolongée en posant $f(x) = f(x_1)$ quel que soit $x \in F$. Ce prolongement est non expansif. Supposons donc la propriété d'extension finie vraie pour tout sous-ensemble de F ayant n-1 éléments avec $n-1 \geq 1$. Soient donnés $X := \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq F$, f: $X \to E$ une fonction non expansive et $x \in F \setminus X$. D'après l'hypothèse de récurrence il existe une fonction non expansive $g: \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x\} \to E$ qui prolonge f sur $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Notons $r_i = d'(x_i,x)$, $i = 1, \ldots, n$ et considérons les boules $B(f(x_i), r_i)$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a

$$d(f(x_i), g(x)) = d(g(x_i), g(x)) \leq d'(x_i,x) = r_i$$

pour $i = 1,\ldots, n-1$. Donc $g(x) \in \bigcap\{B(f(x_i), r_i) \mid i=1,\ldots,n-1\}$. Ceci prouve que les intersections deux à deux des boules $\{B(f(x_i), r_i)\}$ pour $i = 1,\ldots,n-1$, sont non vides. Prouvons aussi que l'intersection de $B(f(x_n), r_n)$ avec chacune des autres boules est non vide. Pour cela, on a quel que soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$d(f(x_n), f(x_i)) \leq d'(x_n, x_i) \leq d'(x_n, x) + d'(x, x_i) = r_n + \bar{r}_i$$

(E,d) étant convexe, il existe $a \in E$ tel que $d(f(x_n), a) \leq r_n$ et $d(a, f(x_i)) \leq \bar{r}_i$. Or $d(a,f(x_i)) \leq \bar{r}_i$ équivaut à $d(f(x_i),a) \leq r_i$; ce qui prouve que $a \in B(f(x_i), r_i) \cap B(f(x_n), r_n)$, le raisonnement étant indépendant de i. Ainsi il est prouvé que pour tous $1 \leq i,j \leq n$

$$B(f(x_i), r_i) \cap B(f(x_j), r_j) \neq \emptyset.$$

Par la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules, il existe

$$b \in \bigcap\{B(f(x_i), r_i) \mid i = 1,\ldots,n\}.$$

Définissons $\tilde{f}: X \cup \{x\} \to E$ par $\tilde{f}(x) := b$ et $\tilde{f}(x_i) := f(x_i)$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Alors $\tilde{f}$ est une extension de f à $X \cup \{x\}$. Prouvons que $\tilde{f}$ est non expansive.

Soient u, v $\in X \cup \{x\}$. Si u,v $\in$ X c'est immédiat car alors $\tilde{f}(u) = f(u)$ et $\tilde{f}(v) = f(v)$. Supposons u $\in$ X et v = x, alors pour un certain i $\in \{1, ..., n\}$ on a $u = x_i$. Il vient que:

$$d(\tilde{f}(u), \tilde{f}(v)) = d(f(x_i),b) \leq r_i = d'(x_i, x) = d'(u, v).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Prouvons d'abord la convexité. Soient x, y $\in$ E et r, s $\in$ V tels que $d(x,y) \leq r + s$. Soit F := $\{1,2,3\}$; on définit une distance d' sur F à valeurs dans V de la façon suivante:

$$d'(1,2) = r + s,\ d'(1,3) = r,\ d'(2,3) = \bar{s} \text{ et } d'(a,a) = 0$$

pour tout a $\in$ F. Soit la fonction f: $\{1,2\} \rightarrow$ E telle que f(1) := x et f(2) := y. Alors comme $d(x,y) \leq r + s$ on a $d(f(1),f(2)) = d(x,y) \leq r + s = d'(1,2)$. Donc f est non expansive. Soit $\tilde{f} : F \rightarrow E$ une application non expansive qui prolonge la fonction f. On a

$$d(x, f(3)) = d(f(1), f(3)) \leq d'(1, 3) = r.$$

En prenant z = f (3), on obtient $d(x,z) \leq r$ et $d(z,y) \leq s$; prouvant ainsi la convexité. Pour l'existence d'une fonction majorité on applique le lemme 1.22.
(2) Il suffit de prouver que pour une ultramétrique (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons que (E,d) est ultramétrique et possède la propriété d'extension finie.Soit X $\subseteq$ E, un sous-ensemble fini. On définit la fonction $f: D_3 \cap X^3 \rightarrow E$ par

$$f(x,y,y) = f(x,y,x) = f(y,y,x) = x$$

pour tous x,y $\in$ X. D'après le lemme B f est non expansive. Puisque X^3 est fini, le domaine de f est aussi fini. Donc par (iii), il existe une fonction non expansive $f^*: X^3 \rightarrow E$ prolongeant f sur X^3. Alors f* est la fonction cherchée car elle vérifie les relations

$$f^*(x,y,y) = f^*(x,y,x) = f^*(y,y,x) = x$$

pour tous x, y $\in$ X.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Soit X un sous ensemble fini de E et f: $X^3 \rightarrow E$ une a-fonction sur X non expansive. Soit Y: = Imf; alors Y est fini car $|Y| \leq |X|^3$. Nous avons $X \subseteq Y$, donc par (iv) il existe une a-fonction non expansive g: $Y^3 \rightarrow E$. On définit m_X sur X^3 par $m_X(x,y,z) := g(x, f(x,y,z),z)$. Alors m_X est bien définie et pour tous $x, y \in X$ on a

$$m_X(x,x,y) = g(x,f(x,x,y),y) = g(x,y,x) = x;$$
$$m_X(x,y,x) = g(x,f(x,y,x),x) = g(x,x,x) = x;$$
$$m_X(y,x,x) = g(y,f(y,x,x),x) = g(y,y,x) = x.$$

Donc m_X est une fonction majorité sur X.

Corollaire 1.24

Soit (E,d) un espace hyperconvexe. Il existe une a-fonction sur E si et seulement si (E,d) est ultramétrique.

Preuve

On applique le lemme B et le fait que (E,d) est hyperconvexe. □

Remarques

Jawhari, Misane et Pouzet ont démontré que si (E,d) est hyperconvexe il existe une fonction majorité non expansive sur E [15] (thm.V-2.3). Un analogue de ce résultat est le corollaire 1.24. Dans notre cas, la restriction aux ultramétriques est essentielle. Par exemple si $\underline{E} = \langle E; \vee, \wedge \rangle$ est un treillis complet, non trivial, la métrique d définie au chapitre 0 2) à valeurs dans $\underline{V} = \langle \{0,a,b,1\}; \vee, \wedge \rangle$, fait de E un espace hyperconvexe [15] (thm. II-2.10). Il est bien connu qu'une fonction f: $E^n \rightarrow E$ est non expansive si et seulement si elle est compatible avec l'ordre du treillis. Supposons qu'il existe sur E une a-fonction non expansive f; soient x et y des éléments de E tels que $x < y$. On a $f(x,x,y) = y$ et $f(x,y,y) = x$ alors que $x \leq x$, $x \leq y$ et $y \leq y$. Donc $y = f(x,x,y) \leq f(x,y,y) = x$; ce qui est impossible car $x \neq y$. D'après un résultat classique de la théorie des treillis [7] (thm. 2.68 et exercice 2.7.12), le treillis des congruences d'un treillis complémenté est arithmétique. Si $\underline{T} = \langle T; \vee, \wedge \rangle$ est un tel treillis, l'ultramétrique d' associée à Con$\underline{T}$ (cf. chapitre 0 II) a)) fait de (T,d') un espace métrique possédant la propriété d'extension finie. Pour tout $X \subseteq T$ fini, il existe sur X une a-fonction partielle g qui est non expansive. Si T est fini , cette a-fonction est totale pour X = T. La fonction g n'est pas compatible avec l'ordre de T si Card(T) ≥ 2. En effet soit x, y [T tels que x < y . On a g(x,x,y) = y et g(x,y,y) = x alors que x ≤ x, x ≤ y et y ≤ y. Si g était compatible on devrait avoir y ≤ x; ce qui est impossible.

Une modification d'un résultat de Werner [32] nous sera très utile pour la suite.

Proposition 1.25

Soit $\underline{A}$ = ⟨E; F⟩ une algèbre telle que pour tout X ⊆ E avec |X| = min(3,|X|), il existe une a-fonction f_X sur X compatible avec toutes le sous-algèbres de $\underline{A}^2$. Alors toute sous-algèbre reflexive θ de $\underline{A}^2$ est une congruence de $\underline{A}$.

Preuve

Il faut prouver que θ est symétrique et transitive. Pour la symétrie, soit (x,y) ∈ θ et soit X = {x, y}. Alors (x,x) ∈ θ , (x,y) ∈ θ et (y,y) ∈ θ donc (y,x) = (f_X(x,x,y), f_X(x,y,y)) ∈ θ . Pour la transivité soit (x,y) ∈ θ et (y,z) ∈ θ et X = {x, y ,z }. Puisque (x,y) ∈ θ, (y,y) ∈ θ et (y,z) ∈ θ alors (x,z) = (f_X(x,y,y), f_X(y,y,z)) ∈ θ.

Grâce aux résultats précédents, nous obtenons une nouvelle caractérisation des hyperconvexes.

Théorème 1.26

Un $\mathcal{V}$-espace métrique (E,d) est hyperconvexe si et seulement si il est quasi-compact et possède la propriété d'extension finie.

Preuve

(⇐) Soit (E,d) un $\mathcal{V}$-espace quasi-compact et possédant la propriété d'extension finie. Soient (F,d') un $\mathcal{V}$-espace métrique, F' un sous-ensemble de F et f: F' → E une fonction non expansive. On veut prouver qu'il existe une fonction $\tilde{f}$: F → E non expansive qui prolonge f. On considère la famille $\mathfrak{F}$ formée des couples ⟨ X, g⟩, tels que F' ⊆ X, g : X→E est non expansive et prolonge f. L'ensemble f est ordonné par la relation

X $\mathcal{F}$

$$\langle X, g\rangle \leq \langle X', f'\rangle \text{ si } X \subseteq X' \text{ et } g'|_X = g.$$

Montrons que cet ordre est inductif; soit $(I , \leq)$ une chaîne et $\{\langle X_i,g_i\rangle \mid i \in I\} \subseteq \mathfrak{F}$ tel que pour tous $i, j \in I$, $i < j$, $\langle X_i,g_i\rangle \leq \langle X_j,g_j\rangle$. Soit $X := \cup\{X_i \mid i \in I\}$ et $g:X\rightarrow E$ la fonction définie par $g(x) := g_i(x)$ si $x \in X_i$ pour un $i \in I$. Alors g est bien définie et non expansive, donc $\langle X,g\rangle \in \mathfrak{F}$ et pour tout $i \in I$ on a $\langle X_i, g_i\rangle \leq \langle X, g\rangle$. Par le lemme de Zorn, il existe (Y,h) un élément maximal de $\mathfrak{F}$ où $Y := \{x_k \mid k \in \Lambda\}$. Prouvons que $Y = F$. Sinon soit $x \in F\setminus Y$ et soit la famille de boules $\{B(h(x_k), r_k) \mid k \in \Lambda\}$ où $r_k := d'(x_k,x)$. Soit $J := \{k_1,...,k_r\}$ un sous-ensemble fini de Λ et soit $Y_J := \{x_{k_1}, ..., x_{k_r}\}$. On note h_J la restriction de h à Y_J. D'après la propriété d'extension finie, il existe une extension non expansive $\tilde{h}_J$ de h_J à $Y_J \cup \{x\}$. Il vient que

$$d(f(x_{k_j}), \tilde{h}_J(x)) = d(\tilde{h}_J(x_{k_j}), \tilde{h}_J(x)) \leq d'(x_{k_j},x) = r_{k_j}$$

pour tout $j =1, ..., r$; donc $\tilde{h}_J(x) \in \cap\{B(f(x_{k_j}), r_{k_j}) \mid i=1,...,r\}$.Ce qui montre que toute intersection d'une famille finie de boules de $\{B(h(x_k), r_k) \mid k \in \Lambda\}$ est non vide. Par quasi-compacité l'intersection sur Λ est non vide c'est à dire

$$\cap\{B(h(x_k), r_k) \mid k \in \Lambda\} \neq \emptyset$$

Soit a un élément de E appartenant à cette intersection. On définit $\tilde{h} : Y \cup\{x\}\rightarrow E$ par $\tilde{h}(x) := a$ et $\tilde{h}(x_k) := h(x_k)$ pour tout $k \in \Lambda$. Vérifions que $\tilde{h}$ est non expansive. Soient $u, v \in Y \cup \{x\}$. Comme $\tilde{h}$ étend h, il n'ya rien à prouver si $u, v \in Y$. C'est aussi évident si $u = v = x$. Soit $u = x_k$ pour un $k \in \Lambda$ et $v = x$. En utilisant le fait que $a \in B(h(x_k), r_k)$ on a

$$d(\tilde{h}(u),\tilde{h}(v)) = d(h(x_k),a) \leq r_k = d'(x_k,x) = d'(u,v).$$

De même

$$d(\tilde{h}(v),\tilde{h}(u)) = d(a,h(x_k)) \leq \bar{r}_k = d'(v,u).$$

Donc h est non expansive et $\langle Y \cup\{x\}, \tilde{h}\rangle$ alors est un majorant strict de $\langle Y,h\rangle$ dans $\mathfrak{F}$.Ceci contredit la maximalité de $\langle Y, h\rangle$. Nécessairement on a $Y = F$. Par le théorème II.2.1 de Jawhari,Misane et Pouzet [15], l'espace métrique (E,d) est hyperconvexe.

($\Rightarrow$) Puisqu'un espace métrique est convexe et possède la propriété de 2-Helly, il possède la propriété d'extension finie. Par le théorème 1.8 il est aussi quasi-compact. □

Dans la proposition suivante, nous étendons aux métriques généralisées un résultat que Kaarli avait démontré pour les congruences d'une algèbre [9] (thm. 3). La preuve est la même; l'inégalité triangulaure remplaçant la transitivité. L'utilisation de la transitivité n'était donc pas essentielle dans [3].

Proposition 1.27

Soit (E,d) un $\underline{V}$-espace métrique et symétrique. Supposons que pour tout $\underline{V}$-espace métrique (F,d'), la condition suivante est vérifiée: soit $X \subseteq F$ tel que $|X| = min(3,|E|)$, et $f: X \to E$ non expansive; alors pour tout $x \in F \setminus X, f$ admet un prolongement non expansif à l'ensemble $X \cup \{x\}$. Dans ces conditions on a pour tous $u, v, w \in V$:

1) $(d)_u o (d)_v = (d)_v o (d)_u$
2) $(d)_u o ((d)_v \cap (d)_w) = ((d)_u o (d)_v) \cap ((d)_u o (d)_w)$

Preuve

1) Dans la preuve (iii) $\Rightarrow$ (i) du théorème 1.23, nous avons montré que (E, d) est convexe. Alors 1) découle de la proposition 1.12 . Pour 2) on a évidemment

$$(d)_u \circ ((d)_v \cap (d)_w) \subseteq ((d)_u \circ (d)_v) \cap ((d)_u \circ (d)_w)$$

Pour l'autre inclusion soit $(x,y) \in ((d)_u \circ (d)_v) \cap ((d)_u \circ (d)_w)$. Il existe p, q $\in$ E tels que

$$(x,p) \in (d)_u \text{ et } (p,y) \in (d)_v,\ (x,q) \in (d)_u,\ (q,y) \in (d)_w$$

Soit X: = $\{(x,x), (y,q), (p,y)\} \subseteq E^2$. On définit f: $X \to E$ par $f(x,x) = x$, $f(y,q) = f(p,y) = y$. Alors en utilisant la métrique produit d_2 sur E^2 on obtient

$$d(f(x,x), f(y,q)) = d(x,y) \leq d(x,y) \vee d(x,q) = d_2((x,x),(y,q))$$

$$d(f(x,x), f(p,y)) = d(x,y) \leq d(x,p) \vee d(x,y) = d_2((x,x),(p,y))$$

$$d(f(y,q), f(p,y)) = d(y,y) \leq d(y,p) \vee d(q,y) = d_2((y,q),(p,y)).$$

Donc f est non expansive. Alors il existe $\tilde{f}: X \cup \{(p,q)\} \rightarrow E$ une extension non expansive de f. Soit $h := \tilde{f}(p,q)$; alors

$$d(x,h) = d(\tilde{f}(x,x), \tilde{f}(p,q)) \leq d(x,p) \vee d(x,q) \leq u$$

$$d(h,y) = d(\tilde{f}(p,q), \tilde{f}(y,q)) \leq d(p,y) \vee d(q,q) \leq v$$

$$d(h,y) = d(\tilde{f}(p,q), \tilde{f}(p,y)) \leq d(p,p) \vee d(q,y) \leq w.$$

On en déduit $(h,y) \in (d)_v \cap (d)_w$ et alors $(x,y) \in (d)_u \circ ((d)_v \cap (d)_w)$. D'où la validité de 2). □

3) Un contre-exemple en théorie des tolérances.

Définition

Soit E un ensemble et soit W l'ensemble des relations binaires sur E et $\underset{\sim}{W}$ le treillis $\langle W, \subseteq \rangle$.Soit L une famille de relations binaires sur E. On dit que L **vérifie le théorème des restes chinois** s'il possède la propriété suivante: quels que soient $\rho_1, ..., \rho_n$ dans L, $x_1, ..., x_n$ des éléments de E tels que pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a que $(x_i,x_j) \in \rho_i \circ \rho_j$, il existe $x \in E$ tel que $(x_i,x) \in \rho$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Si $\mathcal{L} = \langle L; \vee, \cap \rangle$ est un sous-treillis distributif de $\underset{\sim}{W}$ qui est clos pour le produit des relations on dit que $\mathcal{L}$ est **arithmétique** si en plus $\langle L, \circ \rangle$ est commutatif.

Le théorème suivant est bien connu [21] (section 2. 6).

Théorème 1.28

Soit $\mathcal{L}$ un sous-treillis du treillis $\langle (Eq(E), \subseteq \rangle$ des équivalences d'un ensemble E. Alors $\mathcal{L}$ est arithmétique si et seulement s'il vérifie le théorème des restes chinois.

□

Le lemme suivant est également bien connu [17] (ex. 3.2.1)

Lemme 1.29

Soit $\underline{A}$ une algèbre dont toutes les opérations de base sont unaires. Alors pour tous sous-univers B et C de $\underline{A}$, l'ensemble $B \cup C$ est le plus petit sous-univers de $\underline{A}$ contenant B et C.

Preuve

Soient B et C des sous-univers de $\underline{A}$. Il suffit de montrer que alors $B \cup C$ est un sous-univers de $\underline{A}$. Soit $x \in B \cup C$ et soit $f: A \rightarrow A$ une opération de base de $\underline{A}$. Alors $f(B) \subseteq B$ et $f(C) \subseteq C$, puisque B et C sont des sous-univers de $\underline{A}$. Si $x \in B$ alors $f(x) \in f(B) \subseteq B$. Si $x \in C$, $f(x) \in f(C) \subseteq C$. On a prouvé donc que $f(B \cup C) \subseteq B \cup C$. Donc $B \cup C$ est un sous-univers de $\underline{A}$. Alors c'est le plus petit sous-univers de $\underline{A}$ contenant B et C. □

Soit $G = \langle E; \rho \rangle$ un graphe (i.e. que ρ est une relation réflexive et symétrique sur E). On munit E de la métrique usuelle d à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que définie au chapitre 0) (exemple 3). Soit F l'ensemble des applications non expansives de (E,d) dans (E,d). On considère l'algèbre $\underline{G} = \langle E; F \rangle$ et Tol$\underline{G}$ le treillis des tolérances de $\underline{G}$. On sait d'après le théorème 1.1 que pour tout $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $(d)_i$ est une tolérance de $\underline{G}$. On utilise l'ensemble V_d construit à la proposition 1.9.

Lemme 1.30

L'ensemble V_d est une chaîne pour la relation inclusion.

Preuve

Pour $i = \infty$ on a $(d)_\infty = E^2 \in$ Tol$\underline{G}$. Soient i et j des entiers tels que $i \leq j$ et soit (x,y) tel que $(x,y) \in (d)_i$. Alors $d(x,y) \leq i \leq j$ et $(x,y) \in (d)_j$. Donc $(d)_i \subseteq (d)_j$. □

Lemme 1.31

1) $\langle V_d; , o \rangle$ est un demi-groupe commutatif.

2) $\langle$ Tol$\underline{G}$; $\cup, \cap$ $\rangle$ est un treillis distributif.

Preuve

D'après la proposition 1.9, la structure $\langle V_d; o \rangle$ est un demi-groupe car d est convexe. Comme de plus d est symétrique, la proposition 1.12 entraîne que

$\langle V_d; \circ \rangle$ est un demi-groupe commutatif, ce qui prouve 1). Pour prouver 2), on remarque que d'après le lemme 1.29 le supremum dans Tol $\underset{\sim}{G}$ est l'union. En effet $\underset{\sim}{G}$ est unaire, donc $\underset{\sim}{G}^2$ qui est l'algèbre produit $\langle G,F \rangle^2$ est aussi unaire. La réunion de deux tolérances de $\underset{\sim}{G}$ est donc un sous-univers de $\underset{\sim}{G}^2$. Une telle réunion est réflexive et symétrique donc c'est bien une tolérance. L'infimum dans Tol$\underset{\sim}{G}$ étant l'intersection alors $\langle \mathrm{Tol}\underset{\sim}{G}; \cup, \cap \rangle$ est un treillis. Il est distributif car c'est un sous-treillis du treillis booléen des sous-ensembles de E^2. □

Lemme 1.32
L'algèbre $\underset{\sim}{V}_d = \langle V_d; \cup, \cap \rangle$ est un sous-treillis de Tol$\underset{\sim}{G}$. En particulier $\underset{\sim}{V}_d$ est arithmétique.

Preuve
On a $(d)_v \cup (d)_w = (d)_{v \vee w}$ où $v \vee w = \max(v,w)$. L'inclusion $(d)_v \cup (d)_w \subseteq (d)_{v \vee w}$ est évidente. Comme $v \vee w = \max(v,w)$, supposons sans perte de généralité que $\max(v,w) = w$. Alors $(d)_{v \vee w} = (d)_w \subseteq (d)_v \cup (d)_w$. □

Théorème 1.33
L'algèbre $\underset{\sim}{V}_d$ vérifie le théorème des restes chinois si et seulement si (E,d) possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules .

Preuve
(=>) Supposons que V_d vérifie le théorème des restes chinois. Soit $\{B(x_i,r_i)\}_{i=1,\dots,n}$ une famille finie de boules dont les intersections deux à deux sont non vides. A cause de la convexité on sait (c.f. aussi [15], II-2) que pour tous $1 \leq i, j \leq n$ on a

$$d(x_i,x_j) \leq r_i + r_j$$

Or $d(x_i,x_j) \leq r_i + r_j \Leftrightarrow (x_i,x_j) \in (d)_{r_i+r_j} = (d)_{r_i} \circ (d)_{r_j}$ en utilisant la proposition 1.9. Comme V_d vérifie le théorème des restes chinois, il existe $x \in G$ tel que $(x_i,x) \in (d)_{r_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc $d(x_i,x) \leq r_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, ce qui équivaut à $x \in \cap\{B(x_i,r_i) \mid i = 1,\dots,n\}$. C'est à dire que (E,d) possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules.

($\Leftarrow$) Supposons que (E,d) possède la propriété de 2-Helly les familles finies de boules. Soient $\rho_1, ..., \rho_n$ des relations dans V_d et $x_1, ..., x_n \in G$ tels que pout tous $1 \leq i, j \leq n$, on ait $(x_i,x_j) \in \rho_i \circ \rho_j$. Il existe $r_1, ..., r_n$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tels que $\rho_i = (d)r_i$ pour tout i=1, ..., n. Donc pour tous $1 \leq i, j \leq n$ on a $(x_i, x_j) \in (d)r_i \circ (d)r_j = (d)r_i+r_j$. Considérons les boules $\{B(x_i,r_i)\}_{i=1,...,n}$. On a, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $(x_i,x_j) \in (d)r_i \circ (d)r_j$. Donc il existe $z \in E$ tel que $(x_i,z) \in (d)r_i$ et $(z,x_j) \in (d)r_j$. Ce qui montre que $z \in B(x_i,r_i) \cap B(x,r_j)$. Par la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules, il existe $x \in \cap \{B(x_i,r_i) \mid i = 1,...,n\}$. Alors $d(x_i,x) \leq r_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, c'est à dire $(x_i, x) \in (d)r_i = \rho_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. □

Définition

On dit qu'une algèbre $\underline{A}$ est **libre pour les tolérances** si Tol$\underline{A}$ = Con$\underline{A}$.

Corollaire 1.34

Soit G un graphe tel que (E,d) n'est pas hyperconvexe. Alors Tol$\underline{G}$ ne vérifie pas le théorème des restes chinois. En particulier $\underline{G}$ n'est pas libre pour les tolérances.

Preuve

Comme G est convexe mais pas hyperconvexe il existe une famille $\{ B(x_i,r_i) \mid i \in I \}$ de boules de E qui s'intersectent deux à deux mais $\cap\{ B(x_i,r_i) \mid i \in I \}$ est vide. Si Tol$\underline{G}$ vérifiait le théorème des restes chinois alors $\underset{\sim}{V}_d$ le vérifierait également car $\underset{\sim}{V}_d$ est un sous-treillis de Tol$\underline{G}$. Par le théorème 1.33, (E,d) possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules donc aussi la propriété d'extension finie (cf. thm.1.23). Par le théorème 1.26, (E, d) n'est pas quasi-compact, c'est à dire qu'il existe une sous-famille finie de $\{B(x_i,r_i) \mid i \in I\}$ qui a une intersection vide. Cette sous-famille ne possède pas alors la propriété de 2-Helly. Ce qui est une contradiction au théorème 1.33 et qui prouve que Tol$\underline{G}$ ne vérifie pas le théorème des restes chinois. Puisque (E, d) ne possède pas la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules, alors $V_d \not\subset Eq(E)$ i.e. qu'il existe $(d)_i \in$ Tol$\underline{G} \setminus$ Con $\underline{G}$.

□

Remarque

Si $\langle L; \vee, \cap \rangle$ est un sous-treillis arithmétique de $\langle Eq(E), \subseteq \rangle$ le treillis des équivalences sur E, alors $\langle L; \vee, \cap \rangle = \langle L; \circ, \cap \rangle$. Ceci n'est pas vrai pour $\underline{V}_d$ arithmétique car si θ est une tolérance qui n'est pas une équivalence on a $\theta \circ \theta \neq \theta$. Cependant, lorsque (E,d) possède la propriété d,extension finie, on a, d'après la proposition 1.27, presque les mêmes propriétés dans $\langle V_d; \circ, \cap \rangle$ que dans $\langle L; \circ, \cap \rangle$ En effet les éléments de V_d commutent deux à deux et la loi o se distribue sur la loi $\cap$, car si $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}; +, \wedge, 0 \rangle$ est une algèbre de Heyting. On peut alors se poser la question suivante: si V_d vérifie le théorème des restes chinois ,est-ce que $\langle V_d; \circ, \cap \rangle$ est alors un treillis? En d'autres termes, les éléments de V_d sont-ils alors des équivalences? La réponse est également non comme le montre la proposition 1.35.

Proposition 1.35

Soit $G = \langle E; \rho \rangle$ un graphe non complet avec $|E| \geq 2$ et tel que (E,d) est hyperconvexe. Alors V_d vérifie le théorème des restes chinois mais il existe $\theta \in V_d$ qui n'est pas une équivalence.

Preuve

D'après le théorème 1.33, l'ensemble V_d vérifie le théorème des restes chinois. On montre que $\theta := (d)_1$ est une tolérance qui n'est pas une équivalence. On sait que G est un retracte d'un produit de chemins [15] (thm.IV-1.2.2.). Comme G est non complet, il possède au moins trois sommets x, y et z distincts deux à deux tels que (x,y) et (y,z) sont des arêtes de G mais pas (x,z). Alors $(x,y) \in \theta$, $(y,z) \in \theta$ mais $(x,z) \notin \theta$. Donc θ n'est pas une équivalence.

□

4) Généralisation d'un résultat de Pixley et Korec

Korec [12] (thm. 2) et Pixley [20] (lemme 1.1) ont démontré le résultat suivant.

Théorème 1.36

Soient E un ensemble et $\underline{L} = \langle L; \subseteq \rangle$ un sous-treillis inf-complet du treillis des équivalences de E. On suppose E dénombrable ou L fini. Alors $\underline{L}$

est arithmétique si et seulement si il existe une a-fonction sur E compatible avec L. □

Si $\underset{\sim}{L} = \langle L; \subseteq \rangle$ où $L \subseteq Eq(E)$, est inf-complet on définit $\underset{\sim}{V} := \langle L; \vee, \Delta, id_L, \subseteq \rangle$ puis pour tout $(x,y) \in E^2$, $d_{\underset{\sim}{L}}(x,y) = \cap\{ \theta \in L \mid (x,y) \in \theta \}$. Alors $d_{\underset{\sim}{L}}(x,y) \in L$ pour tout $(x,y) \in E^2$ et $(E,d_{\underset{\sim}{L}})$ est un $\underset{\sim}{V}$ -espace métrique de façon évidente.

Lemme 1.37

Si L est un sous-treillis inf-complet de $(Eq(E), \subseteq)$, l'espace métrique $(E,d_{\underset{\sim}{L}})$ est une $\underset{\sim}{V}$-ultramétrique.

Preuve : C'est la définition même. □

Pixley [20] (pbm 3.15) a posé la question à savoir s'il était possible de supprimer l'hypothèse que E est dénombrable ou que L est fini. Korec [11] (thm. 3.1) a donné un contre-exemple montrant que c'est impossible. Nous allons voir qu'à condition de considérer les fonctions partielles on a un théorème semblable au théorème 1.36.

Théorème 1.38

Soit E un ensemble et soit $\underset{\sim}{L}$ un sous-treillis inf-complet du treillis $(Eq(E), \subseteq)$ des équivalences de E tel que $\cup\{\theta . / \theta \in L\} = E^2$. Alors $\underset{\sim}{L}$ est arithmétique si et seulement si pour tout sous-ensemble fini X de E, il existe une a-fonction sur X compatible avec L.

Preuve

($\Rightarrow$) Pour tout $(x,y) \in E^2$ on note:

$$\delta(x,y) = \cap \{\theta \in L \mid (x,y) \in \theta\}$$

Alors $\delta(x,y) \in L$ car L est inf-complet et (E,δ) est une ultramétrique. Comme $\underset{\sim}{L}$ est arithmétique, $(E,\delta))$ est convexe et par le théorème 1.17, (E,δ) possède la propriété de 2-Helly pour les familles finies de boules. Donc (E,δ) possède la propriété d'extension finie d'après le théorème 1.23. Comme δ est une ultramétrique la deuxième partie du théorème 1.23 implique que pour tout X ultramétrique la deuxième partie du théorème 1.23 implique que pour tout X fini, $X \subsetneq E$, il existe une a-fonction f sur X qui est non expansive pour d. C'est à dire que f est compatible avec l'ensemble L.

(<=) S'il existe une a-fonction partielle sur toute partie finie X de E compatible avec L, alors d est une ultramétrique convexe (par la preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i) du théorème). et possédant la propriété 2-Helly pour les familles finies de boules selon le théorème 1.23. Ce qui veut dire que $\underset{\approx}{L}$ est arithmétique.

Le théorème de Korec et Pixley s'étend facilement aux espaces ultramétriques.

Théorème 1.39

Soit (E,d) un espace ultramétrique convexe à valeurs dans un treillis inf-complet et distributif V. Si Im d est fini ou E est dénombrable alors il existe une a-fonction non expansive sur E.

Preuve

Soit $V_d = \{(d)_v \mid v \in V\}$. On a une métrique D_v définie sur E à valeurs dans $V_d = \{(d)_v \mid v \in V\}$ par $D_v(x,y) := (d)_v$ où $v = d(x,y)$.(cf.proposition 1.10). De plus (E,d) est hyperconvexe si et seulement si (E,D_v) l'est. Puisque d est une ultramétrique les élements de V_d sont des équivalences sur E. Puisque d est symétrique et convexe, on sait par la proposition 1.12que les éléments de V_d permutent. Vérifions que $\langle V_d; o, \cap\rangle$ est distributif. Pour cela, on utilise les résultats des propositions 1.3 et 1.9. On a pour tous u,v,w dans V:

$$\begin{aligned}(d)_u \cap((d)_v \vee (d)_w) &= ((d)_u \cap ((d)_v \vee (d)_w) = (d)_u \cap((d)_{v\vee w})\\ &= (d)_u \cap d_{(v\vee w)} = (d)_{(u\wedge v)\vee(u\wedge w)}\\ &= (d)_{u\wedge v}\, o\, (d)_{u\wedge w} = ((d)_u \cap (d)_v) \vee ((d)_u \cap (d)_v).\end{aligned}$$

Ainsi $\langle V_d;o,\cap \rangle$ est distributif et les éléments de V_d permutent. Lorsque Imd est fini, V_d est aussi fini et d'après le corollaire 1.18, (E, D_v) est quasi-compact. Il est convexe car (E,d) l'est. Par le lemme C, il existe sur E une a-fonction non expansive. Si E est dénombrable le théorème de Korec (cf. 1.36) entraîne l'existence d'une a-fonction f: $E^3 \rightarrow E$ compatible avec les éléments de V_d. Par ce fait, f est non expansive.

Chapitre II

Algèbres affinement complètes et localement affinement complètes

1) Algèbres affinement complètes

Définitions

Soient $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre sur E.

1) $\underline{A}$ est dite **affinement complète** si pour tout entier naturel n, toute fonction n-aire sur E compatible avec les congruences de $\underline{A}$ est un polynôme de $\underline{A}$.

2) $\underline{A}$ est dite **localement affinement complète** si elle vérifie la propriété suivante: pour tout entier naturel n, toute partie finie $X \subsetneq E^n$ et toute fonction f : $X \rightarrow A$ compatible avec les congruences de $\underline{A}$, il existe un polynôme g de $\underline{A}$ qui prolonge f.

3) $\underline{A}$ est dite **a-polynômiale** si Pol$\underline{A}$ contient une a-fonction. On dira qu'une telle fonction est un a-polynôme.

4) $\underline{A}$ est dite m-polynômiale si Pol$\underline{A}$ contient une fonction majorité. On dira qu'une telle fonction est un m-polyôme.

Ces notions sont étroitement liées avec les clones interpolables (cf. [18] section 7.4)

Définition

Soient k un entier naturel, E un ensemble, C un clone sur E et f: $E^n \rightarrow E$. On dit qu'e f est **k-interpolable** par C si pour tout $X \subsetneq E^n$ tel que $|X| \leq k$, il existe g $\in$ C dont la restriction à X coïncide avec f. On dit que f est **interpolable** par C s'il est k-interpolable par C pour tout entier naturel k. On note locC l'ensemble des fonctions interpolables par C. On dit que le clone C est **local** et on note si toute fonction interpolable par C appartient à C.

Notation

Si R est un ensemble de relations sur E on note R^{Δ} l'ensemble des fonctions finitaires sur E, qui préservent tous les éléments de R dans le sens du chapitre 0 section I-4. Au lieu de R^{Δ}, le symbole PolR est souvent utilisé mais nous préférons R^{Δ} pour éviter la confusion avec l'ensemble Pol$\underline{A}$ des polynomes d'une algèbre $\underline{A}$.

Théorème 2.1 (cf.[18] cor. du thm. 7.4)
Un clone C sur un ensemble E est local si et seulement s'il existe un ensemble R de relations finitaires sur E tel que $C = R^{\Delta}$.

□

Nous pouvons à présent démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.2
(i) *Une algèbre* $\underline{A}$ *est affinement complète si et seulement si* $Pol(\underline{A}) = (Con\underline{A})^{\Delta}$.
(ii) *Si une algèbre* $\underline{A}$ *est affinement complète alors le clone des polynômes de* $\underline{A}$ *est local.*

Preuve
(i) Notons C le clone des polynômes de $\underline{A}$ et R = Con$\underline{A}$ l'ensemble des congruences de $\underline{A}$.
($\Rightarrow$) Prouvons que $C = R^{\Delta}$. Soit $f \in R^{\Delta}$, alors f est finitaire et préserve les congruences de $\underline{A}$. Puisque $\underline{A}$ est affinement complète, alors f est un polynôme. Ce qui prouve que $R^{\Delta} \subseteq C$. Si $g \in C$, alors g est un polynôme. D'après le théorème 0.1 un polynôme sur $\underline{A}$ préserve toute sous algèbre-réflexive de $\underline{A}^2$. Donc g préserve les congruences de $\underline{A}$ d'où $g \in R^{\Delta}$. Ce qui prouve l'inclusion $C \subseteq R^{\Delta}$.
($\Rightarrow$) C' est la définition.
(ii) Découle de (i).

□

Rappelons qu'on note par $d_{\underline{A}}$ la métrique sur E associée au treillis des congruences de l'algèbre $\underline{A}$. Pour tous $x, y \in E$, $d_{\underline{A}}(x,y)$ est en fait la plus petite congruence de $\underline{A}$ contenant le couple (x,y) (cf. chapitre 0, section IIa)). La notation usuelle pour $d_{\underline{A}}(x,y)$ est $Cg^{\underline{A}}\{(x,y)\}$ (cf.[17]).

Proposition 2.3

L'espace $(E, d_{\underline{A}})$ est ultramétrique.

Preuve

En effet on a:

$$d_{\underline{A}}(x,y) = \cap \{\theta \in \text{Con}\,(\underline{A}) \mid (x,y) \in \theta\}.$$

Si on note $L = \text{Con}\,\underline{A}$, alors il est bien connu que $\underset{\sim}{L} = \langle L;\vee,\cap \rangle$ est un sous-treillis complet du treillis des équivalences de E . La distance $d_{\underline{A}}$ n'est en fait que l'ultramétrique $d_{\underset{\sim}{L}}$ du lemme 1.37. □

La proposition 2.2 admet une réciproque partielle. Auparavant nous avons besoin de deux lemmes. Le premier lemme est une extension d'un résultat de Baker-Pixley [1] (c.f. [17],thm 7.3) nécessaire pour le théorème 2.21 (pour la partie (4) ⇒ (1)).

Lemme 2.4

Soit C un clone sur un ensemble E tel que pour tout $X \subseteq E$ fini, C contient une fonction ternaire m_X dont la restriction à X est une fonction majorité sur X. Alors toute fonction 2-interpolable par C est interpolable par C.

Preuve

Soit $f: E^n \to E$ une fonction 2-interpolable par C. Pour prouver que f est k-interpolable par C pour tout $k > 1$, on procède par récurrence sur k. Pour $k = 2$ c'est l'hypothèse. Soit $k \geq 2$ et supposons que f est k-interpolable par C. Prouvons alors que f est (k+1)-interpolable par C. Soit $X \subseteq E^n$ avec $|X| = k+1$. Notons $X = \{\underline{a}_1, ..., \underline{a}_{k+1}\}$ et $X_i = X \setminus \{\underline{a}_i\}$ pour $i = 1, 2, 3$. Soient f_1, f_2, f_3 les interpolations de f sur X_1, X_2 et X_3, respectivement. On définit $g: E^n \to E$ par

$$g(x_1,...,x_n) = m_X\,(f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n), f_3(x_1,...,x_n))$$

Comme $m_X, f_1, f_2, f_3 \in C$, alors $g \in C$. Vérifions que $g|X = f|X$. Soit $1 \leq k \leq n$; alors il existe $1 \leq i < j \leq 3$ tels que $\underline{a}_i \neq \underline{a}_k \neq \underline{a}_j$ i.e. $\underline{a}_k \in X_i \cap X_j$. Comme pour tout $1 \leq l \leq 3$ la fonction f_l est une extension de $f \mid X_l$, on a

$f_i(\underline{a}_k) = f(\underline{a}_k) = f_j(\underline{a}_k)$. La fonction m étant la fonction majorité sur X, on obtient $g(\underline{a}_k) = m(f_1(\underline{a}_k), f_2(\underline{a}_k), f_3(\underline{a}_k)) = f(\underline{a}_k)$. Ceci conclut la preuve par récurrence et démontre le lemme. □

Lemme 2.5

Si pour tout $X \subseteq E$ avec $|X| \leq \min(3, |E|)$ il existe un polynôme de $\underline{A}$ dont la restriction à X est une a-fonction sur X alors toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une congruence de $\underline{A}$.

Preuve

On applique la proposition 1.25. □

Théorème 2.6

Soit $\underline{A} = \langle E,F \rangle$ une algèbre. Alors:

(i) Si $(E,d_{\underline{A}})$ est hyperconvexe et $\underline{A}$ est affinement complète, alors $Pol\underline{A}$ est local et contient une a-fonction.

(ii) Si $Pol\underline{A}$ est local et pour tout $X \subseteq E$, X fini il existe un polynôme f_X de $\underline{A}$ dont la restriction à X est une a-fonction sur X alors $\underline{A}$ est affinement complète.

Preuve

Pour simplifier, notons $P = Pol\underline{A}$.

(i) Si $\underline{A}$ est affinement complète et $(E,d_{\underline{A}})$ hyperconvexe; alors $P = (Con\underline{A})^{\Delta}$ est local par la proposition 2.1. Comme $(E,d_{\underline{A}})$ est ultramétrique et hyperconvexe, il existe une a-fonction f non expansive sur E. Par la proposition 1.1 alors $f \in (Con\underline{A})^{\Delta} = P$.

(ii) Soit P local et X une partie finie de E. Par la preuve (iv) ⇒ (i) du théorème 1.23, le clone P contient une fonction m_X dont la restriction à X est une fonction majorité sur X. On achèvera la preuve par le lemme suivant.

Lemme 2.7

Soit $\underline{A}$ une algèbre sur E telle que pour tout $X \subseteq E$ fini, il existe un polynôme m_X de $\underline{A}$ dont la restriction à X est une fonction majorité sur X. Alors

$$(Con\underline{A})^{\Delta} = LocPol\underline{A}.$$

Preuve

On a toujours $P \subseteq (\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta}$ et donc $\mathrm{Loc}P \subseteq \mathrm{Loc}(\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta} = (\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta}$. Pour l'inclusion $\supseteq$, soit $h \in (\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta}$ une fonction n-aire. On montre que h est 2-interpolable sur P. Par le théorème 0.2 il suffit de montrer que h préserve chaque sous-univers θ de $\langle E; P \rangle^2$. Par le théorème 0.1 la relation θ est diagonale i.e. reflexive. Comme $f \in P$, le lemme 2.5 montre que θ est une équivalence i.e. $\theta \in (\mathrm{Con}\langle E;P \rangle) = \mathrm{Con}\underline{A}$. Maintenant $h \in (\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta}$, donc préserve $\theta \in \mathrm{Con}\underline{A}$. On a montré que h est 2-interpolable. Par le lemme 2.4 h est interpolable sur P. Alors $h \in \mathrm{Loc}P$ ce qui montre que $(\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta} \subseteq \mathrm{LocPol}\underline{A}$.

En appliquant ce lemme on a que $(\mathrm{Con}\underline{A})^{\Delta} = \mathrm{LocPol}\underline{A} = \mathrm{Pol}\underline{A}$. Ce qui achève la preuve du théorème 2.6.

Corollaire 2.8: (Pixley [22], thm. 3.6.)

Une algèbre arithmétique et finie $\underline{A}$ est affinement complète si et seulement si elle est a-polynômiale.

Preuve

($\Rightarrow$)L'espace métrique $(E, d_{\underline{A}})$ est hyperconvexe par le corollaire 1.18. Par le théorème 2.6 (i), $\underline{A}$ possède un a-polynôme.

($\Leftarrow$) Comme E est fini, $\mathrm{Pol}\underline{A}$ est local. On applique le théorème 2.6 (ii).

Lemme 2.9

Soit $\underline{A}$ une algèbre a-polynômiale. Alors toute puissance $\underline{A}^I$ est a-polynômiale.

Preuve

Soit $B := E^I$. On considère B comme l'ensemble des des applications de I dans E. Pour toute fonction $f : E^n \to E$, notons $\bar{f}: B^n \to B$ la fonction définie par $\bar{f}(X_1,\ldots,X_n)(i) = f(X_1(i),\ldots,X_n(i))$ pour tous $X_1\ldots,X_n \in B$ et $i \in I$. On a les faits suivants:

1) *Si f est une a-fonction alors $\bar{f}$ est une a-fonction.*

2) *Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ et $\underline{B} = \underline{A}^I$; si $f \in \mathrm{Pol}\underline{A}$ alors $\bar{f} \in \mathrm{Pol}\underline{B}$.*

Le fait 1) est immédiat. Pour le fait 2) supposons que f est un polynôme de $\underline{A}$. Alors il existe un terme (n+m) - aire t de $\underline{A}$ (où $m \geq 0$) et $a_0, ..., a_{m-1}$ des éléments de l'ensemble E tels que

$$t(x_1,...,x_n, a_0, ..., a_{m-1}) \approx f(x_1,...,x_n).$$

Sur B on a un terme (n+m) - aire $t^{\underline{A}^I}$ ainsi défini : pour tous $X_1, ..., X_{n+m} \in B$ et tout $i \in I$

$$t^{\underline{A}^I}(X_1, ..., X_{n+m})(i) := t(X_1(i), ..., X_{n+m}(i)).$$

On définit $\underline{a}_j \in B$ pour $j = n+1, ..., m+n$, par $\underline{a}_j(i) := a_{j-n-1}$ pour tout $i \in I$. On définit $\underline{a} \in B^m$ par $\underline{a} := (\underline{a}_{n+1}, ..., \underline{a}_{m+n})$. Alors pour tout $i \in I$

$$\bar{f}(X_1,...,X_n)(i) = f(X_1(i), ..., X_n(i)) := t(X_1(i),...,X_n(i), a_0, ..., a_{m-1})$$

$$= t(X_1(i),...,X_n(i), \underline{a}).$$

Ce qui prouve que $\bar{f}$ est bien un polynôme.

Corollaire 2.10

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre arithmétique finie et affinement complète. Alors pour tout ensemble I, l'algèbre $\underline{A}^I$ est arithmétique.

Preuve

D'après le théorème de Pixley (c.f. thm.2.8)), $\underline{A}$ est a-polynômiale. Par le lemme précédent $\underline{A}^I$ est aussi a-polynômiale. Alors par la proposition 1.27, $V_{d_{\underline{B}}} = \mathrm{Con}\underline{B}$ est arithmétique.

Corollaire 2.11

Soit $\underline{A}$ une algèbre arithmétique finie et affinement complète. On a les faits suivants:

(i) si pour un ensemble I le clone Pol$\underline{A}^I$ est local alors $\underline{A}^I$ est arithmétique et affinement complète.

(ii) pour tout entier $n > 0$, $\underline{A}^n$ est arithmétique et affinement complète.

Preuve

(i) $\underline{A}^I$ est arithmétique par le corollaire précédent. Par le lemme 2.9, $\underline{A}^I$ possède un a-polynôme car $\underline{A}$ en possède un. Par le théorème 2.6 (ii), $\underline{A}^I$ est affinement complète.

(ii) C'est une application immédiate de (i) car $\underline{A}^n$ est finie. □

Dans le théorème 2.6 (ii), l'hypothèse que Pol$\underline{A}$ est local est essentielle.

Théorème 2.12

Il existe une algèbre $\underline{A} = \langle E,F \rangle$ infinie arithmétique telle que $(E, d_{\underline{A}})$ est hyperconvexe, qui possède un a-polynôme mais qui n'est pas affinement complète.

Preuve

On prend $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre infinie, simple telle que F est fini. Con$\underline{A}$ n'a que deux éléments, donc est arithmétique. D'après le corollaire 1.18, on voit que (E,d_A) est hyperconvexe. Il possède une a-fonction par le corollaire 1.24. Si $\underline{A}$ était affinement complète alors toute fonction de E dans E serait un polynôme de $\underline{A}$. Or d'après [6] (cor 1, page 47) ou [21] (preuve du théorème 4.1),

$$2^{|E|} \leq |E^E| \leq |\mathrm{Pol}\underline{A}| \leq |E| + 1 + \aleph_0 .$$

Si E est infini et F fini ou dénombrable, cette inégalité est impossible puisqu'alors

$$|E| + 1 + |F| + \aleph_0 = |E|.$$

□

Définitions

Soit V une variété; on dit que :

1) V est **distributive par rapport à ses congruences** si le treillis des congruences chaque algèbre

$\underline{A} \in V$ est distributif.

2) V est **affinement complète** si chaque algèbre $\underline{A} \in V$ l'est.

3) V est **localement finie** si chaque $\underline{A} \in V$ finiment engendrée est fini.

4) V est **arithmétique** si chaque algèbre $\underline{A} \in V$ est arithmétique.

Se basant sur tous les cas connus Kaarli et Pixley [10] (thm. 2.5) ont posé la question suivante:

Question:
Toute variété affinément complète est-elle distributive par rapport à ses congruences?

Dans un travail non publié mais cité par Kaarli et Pixley [10], [21] (thm. 4.2), Mc Kenzie a démontré.

Théorème 2.13
Toute variété affinement complète et localement finie est distributive par rapport à ses congruences.

□

Rappelons un théorème fondamental.

Théorème 2.14 (Kaarli et Pixley [10], thm. 3.5)
Toute algèbre sous-directement irréductible $\underline{A}$ d'une variété affinement complète V est finie.

□

Grâce aux théorèmes 2.9 et 2.10 nous pouvons prouver les corollaires suivants.

Corollaire 2.15
Soient V une variété affinement complète et $\underline{A} \in V$ une algèbre finie. Alors Con$\underline{A}$ est distributif.

Preuve
La variété $V(\underline{A})$ engendrée par $\underline{A}$ est localement finie (c.f. [17], thm. 4.99) et affinement complète puisque $V(\underline{A}) \subseteq V$. D'après le théorème de Mc Kenzie, $V(\underline{A})$ est distributive par rapport à ses congruences. D'où Con $\underline{A}$ est distributif.

□

Corollaire 2.16

Soit V une variété affinement complète et $\underline{A} \in V$ *dont le treillis des congruences est finie. Alors Con* $\underline{A}$ *est distributif.*

Preuve

Comme Con$\underline{A}$ est fini, $\underline{A}$ est un produit sous-direct d'un nombre fini d'algèbres sous-directement irréductibles [17] (corollaire du théorème 4.44). Chacune de ces algèbres sous-directement irréductibles est finie par le théorème 2.11. Donc $\underline{A}$ est fini. Le résultat découle alors du théorème 2.14.

□

2) Algèbres localement affinement complètes.

Notations

On dira qu'une algèbre $\underline{A}$ est LAC si elle est localement affinement complète.

Proposition 2.17

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ *une algèbre localement affinement complète et soit X un sous-ensemble fini de E. Il existe un polynôme* p_X *de* $\underline{A}$ *telle que* p_X / X^3 *est une a-fonction sur X.*

Preuve

Considérons sur E, l'ultramétrique $d_{\underline{A}}$. Alors (E, $d_{\underline{A}}$) possède la propriété d'extension finie par l'hypothèse selon laquelle toute fonction partielle de domaine finie et non expansive se prolonge en un polynôme de $\underline{A}$. Par le théorème d'extension finie, il existe, pour toute partie finie X de E, une a-fonction sur X. Cette fonction se prolonge en un polynôme p_X de $\underline{A}$. Ce polynôme est clairement la fonction cherchée.

□

Corollaire 2.18 (Hagemann, Herrmann [8], thm. 3.4)

Toute algèbre localement affinement complète est arithmétique.

Preuve

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre LAC et soit $L = \text{Con } \underline{A}$, alors $\underset{\sim}{L} = \langle L; \vee, \cap \rangle$ est un sous-treillis complet de $(Eq(E), \subseteq)$ et on a $d_{\underset{\sim}{L}} = d_{\underline{A}}$. D'après le théorème 1.38, le treillis $\underset{\sim}{L}$ est arithmétique car par la proposition 2.17, il existe pour tout $X \subseteq E$, une a-fonction non expansive (i.e. compatible avec $\text{Con}\underline{A}$) sur X. □

Proposition 2.19

Soit $\underline{A}$ une algèbre localement affinement complète. Alors toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une congruence de $\underline{A}$.

Preuve

Par la proposition 2.17, il existe pour tout sous-ensemble fini X de E, un polynôme f telle que $g: = f \mid X$ est une a-fonction sur X. Alors toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une congruence par le lemme 2.5. □

Définition

Soient deux entiers positifs h et d tels que $h > d$ et soit $\underline{A}$ une algèbre sur E.

1) On appelle projection d-aire sur E toute fonction $pr^h_{i_1 \ldots i_d}$ définie pour $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq h$ par

$$pr^h_{i_1 \ldots i_d}(x_1,\ldots,x_h) = (x_{i_1},\ldots,x_{i_d})$$

2) On dit que $\underline{A}$ possède la propriété B_d de Bergman si pour tout entier $h > d$, les sous-algèbres de $\underline{A}^h$ sont uniquement déterminées par leurs projections d-aires.

Nous aurons besoin du théorème suivant dû à Rosenberg et Schweigert [30] (thm. 2.6 (ii)).

Théorème 2.20

Soit d un entier, $d \geq 2$ et $\underline{A}$ une algèbre sur E. Alors $\underline{A}$ possède la propriété B_d si et seulement si pour toute partie finie L de E, il existe un terme d'arité $d+1$ de $\underline{A}$ qui est une fonction majorité sur L.

□

On peut caractériser les algèbres localement affinement complètes de la façon suivante:

Théorème 2.21

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une une algèbre $\underline{A} = \langle E; F\rangle$.

(1) $\underline{A}$ *est localement affinement complète.*

(2) Pour toute partie finie X de E il existe un polynôme p_X *de* $\underline{A}$ *tel que* $p_X \mid X^3$ *est une a-fonction sur X.*

(3) Toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ *est une congruence de* $\underline{A}$ *et pour toute partie finie X de E il existe un polynôme* m_X *de* $\underline{A}$ *tel que* $m_X \mid X^3$ *est une fonction majorité sur X.*

(4) Toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ *est une congruence de A et l'algèbre* $\underline{A}^+ = \langle E; Pol\underline{A}\rangle$ *possède la propriété* B_2 *de Bergman.*

Preuve

1) ⇒ 2) Proposition 2.17.

2) ⇒ 3) Le fait que toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ soit une congruence résulte de la proposition 2.19. Soit X une partie finie de E et p: $E^3 \rightarrow E$ un polynôme tel que p | X soit une a-fonction. Comme dans la preuve du théorème 1.24, on définit m : $E^3 \rightarrow E$ par

$$m(x,y,z) \approx p(x,p(x,y,z),z).$$

Alors m est un polynôme de $\underline{A}$ tel que m | X est une majorité.

3) ⇒ 4) On applique le théorème de Rosenberg et Schweigert.

4) ⇒ 1) On applique le théorème 2.20 et la preuve du lemme 2.4. Ceci achève la preuve du théorème.

Proposition 2.22

Une algèbre $\underline{A} = \langle E; F\rangle$ *est localement affinement complète si et seulement si pour tout entier* $n \geq 2$, *les sous-algèbres diagonales de* $\underline{A}^n$ *sont arithmétiques et les sous-algèbres reflexives de* $\underline{A}^2$ *des congruences de* $\underline{A}$.

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que $\underline{A}$ est LAC. Alors par le théorème 2.21, ((2) implique (3)) les sous-algèbres réflexives de $\underline{A}^2$ sont des congruences de $\underline{A}$. Il reste à prouver que les sous-algèbres diagonales de $\underline{A}^n$ sont arithmétiques. Soit $n > o$ et $\underline{B} = \langle B; F \rangle$ une sous-algèbre diagonale de $\underline{A}^n$. Soit $X \subsetneq B$ fini. On note $X: = \{u_1,...,u_m\}$ où $u_i = (u_{i1},...,u_{in})$ pour $i = 1,...,m$. Définissons $Y: = \{ u_{ij} \mid i = 1,...,m, j = 1,...,n\}$. Par le théorème 2.21 (i) $\Rightarrow$ (ii), il existe un polynôme p_Y de $\underline{A}$ qui est une a-fonction sur Y. Alors le polynôme $\bar{p}_Y$ de $\underline{A}^n$ défini dans le lemme 2.9 est une a-fonction sur X. Comme $\underline{B}$ est diagonale, p préserve $\underline{B}$ (thm.0.1). Donc $\underline{B}$ est arithmétique d'après la proposition 1.38.

($\Leftarrow$) Par la partie (4) $\Rightarrow$ (1) du théorème 2.21, il suffit de montrer la propriété B_2 pour $\underline{A}^+ = \langle E; \mathrm{Pol}\underline{A} \rangle$. Soit $n > 2$ et soit $\underline{B} = \langle B; \mathrm{Pol}\underline{A} \rangle$, et $\underline{C} = \langle C; \mathrm{Pol}\underline{A} \rangle$ deux sous algèbres de $(\underline{A}^+)^n$ qui ont les mêmes projections binaires. En particulier $pr_i^n(B) = pr_i^n(C)$. Ici $\underline{B}$ et $\underline{C}$ sont diagonales, donc d'après l'hypothèse elles sont arithmétiques. Prouvons donc que B = C. Pour cela prouvons que $B \subsetneq C$. Soit $b = (b_1,...,b_n) \in B$; pour tout $i = 1, ..., n$, il existe $c_i = (c_{i1}, ... ,c_{in}) \in C$ tel que $pr_i^n(b) = pr_i^n(c_i)$ de sorte que $(b, c_i) \in \ker pr_i^n$ pour $i = 1, ..., n$. Soit $\theta_i = \ker pr_i^n \cap C^2$, $i = 1, ..., n$; alors on vient de voir que pour tout $i = 1,...,n$, il existe $c_i = (c_{i1}, ... ,c_{in})$ dans C tel que $(b, c_i) \in \theta_i$ i.e $b_i = c_{ii}$. Nous allons montrer que les boules $B(c_1,\theta_1),...,B(c_n,\theta_n)$ de l'espace ultramétrique (C,d_C), s'intersectent deux à deux. En effet soit $1 \leq i < j \leq n$. Du fait que $pr_{ij}^n(B) = pr_{ij}^n(C)$, il existe $d = (d_1, ...,d_n) \in C$ tel que $d_i = b_i$ et $d_j = b_j$. Comme $b_i = c_{ii}$ et $b_j = c_{jj}$, on voit que $d \in B(c_i,\theta_i) \cap B(c_j,\theta_j)$. Comme $\underline{C}$ est arithmétique, il existe $a \in B(c_1,\theta_1) \cap ... \cap B(c_n,\theta_n)$. D'où $b = a \in C$. □

La preuve que nous venons de faire est inspirée de Baker et Pixley [1] (thm 2.1).

Corollaire 2.23 (Pixley [21] (thm. 2.6)

Toute variété arithmétique est localement affinement complète.

Preuve

Il est bien connu que dans une variété arithmétique V, il existe un terme qui est une a-fonction pour toute algèbre $\underline{A} \in V$ [17].(thm.4.143). Il suffit d'appliquer le théorème 2.21 (2)⇒ (1). □

Corollaire 2.24 (Kaarli [9], corollaire 3.8)
Toute algèbre arithmétique et affinement complète qui est dénombrable ou dont le treillis des congruences est fini est localement affinement complète.

Preuve
Par le théorème 1.36 on sait que pour une telle algèbre $\underline{A}$, l'espace métrique $(E,d_{\underline{A}})$ possède une a-fonction non expansive f. Comme $\underline{A}$ est affinement complète, f est un polynôme. On applique alors la partie 2) ⇒ 1) du théorème 2.21. □

Corollaire 2.25
Soit $\underline{A}$ une algèbre et R une sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ qui n'est pas une équivalence. Alors $\underline{A}$ n'est pas localement affinement complète. En particulier, une algèbre munie d'un ordre non trivial n'est pas localement affinement complète.

Preuve
Théorème 2.21, partie 1) implique 3). □

Remarque
Un treillis $\underline{T}$ ayant plus d'un élément n'est jamais localement affinement complet. En effet l'ordre d'un tel treillis est une sous-algèbre de $\underline{T}^2$ qui est réflexive mais n'est pas une congruence de $\underline{T}$.

Nous allons examiner à présent les algèbres construites à partir des algèbres localement affinement complètes car il est tout à fait naturel de voir s'il est possible d'étendre à la variété engendrée par une algèbre, les propriétés de celle-ci.

Proposition 2.26

Toute puissance finie d'une algèbre localement affinement complète est localement affinement complète.

Preuve

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$, $n > 0$ un entier et $X \subseteq E^n$ un sous ensemble fini de cardinal m. Notons $X = \{u_1, ..., u_m\}$ où $u_i := (x_{i1}, ..., x_{in})$ pour i: =1, ..., m. Soit $Y := \{x_{ij} | i=1, ..., m, j=1, ..., n\}$. Par le théorème 2.21, (1) implique 2)) il existe un polynôme p de $\underline{A}$ dont la restriction à Y est une a-fonction. Soit $\overline{p}$ la fonction de E^n induite par p (cf. lemme 2.9). Par le lemme 2.9, $\overline{p}$ est un polynôme de $\underline{A}^n$. Evidemment $\overline{p}$ est une a-fonction sur Y^n ce qui entraîne que $\overline{p}$ est une a-fonction sur le sous-ensemble X de Y^n. Par le théorème 2.21, $\underline{A}^n$ est LAC. □

Proposition 2.27

Toute image homomorphe d'une algèbre localement affinement complète est localement affinement complète.

Preuve

Soit I un ensemble, $\delta: I \to \mathbb{N}$ et $\underline{A} = \langle E, \{ Q_i^{\underline{A}} \mid i \in I \} \rangle$ une algèbre où chaque $Q_i^{\underline{A}}$ est une fonction $\delta(i)$-aire sur E. Soit $\varphi : \underline{A} \to \underline{B}$ un épimorphsime d'algèbres où $\underline{B} = \langle E', \{Q_i^{\underline{B}} \mid i \in I\} \rangle$ et $X = \{u_1, ..., u_n\} \subseteq E'$ une partie finie; choisissons $v_1, ..., v_n$ dans E tels que $\varphi(v_i) = u_i$, pour i= 1, ..., n. Notons $Y := \{v_1, ..., v_n\}$; alors $Y \subseteq E$ et satisfait $|X| = |Y|$ et $\varphi(Y) = X$. Comme $\underline{A}$ est LAC, le théorème 2.21 (1) ⇒ 2)) montre qu'il existe un polynôme m de $\underline{A}$ qui est une a-fonction sur Y. Il existe un terme t d'arité r+3 de $\underline{A}$ et $a_0, ..., a_{r-1} \in E$ tels que

$$m(x,y,z) \approx t^{\underline{A}}(x,y,z,a_0,...,a_{r-1})$$

Considérons le polynôme p de $\underline{B}$ défini par

$$p(x,y,z)) \approx t^{\underline{B}}(x,y,z,\varphi(a_0), ..., \varphi(a_{r-1}))$$

Nous montrons que p est une a-fonction sur X. Soit $x,y \in X$. Soit x' et y' les uniques éléments de Y tels que $\varphi(x') = x$ et $\varphi(y') = y$. On a

$$p(x,y,y) = t^{\underline{B}}(x,y,y,\varphi(a_0), ..., \varphi(a_{r-1}))$$

$$= t^{\underline{B}}(\varphi(x'),\varphi(y'),\varphi(y'),\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{r-1}))$$

$$= \varphi(t^{\underline{A}}(x',y',y',a_0,\ldots,a_{r-1})) = \varphi(m(x',y',y'))$$
$$= \varphi(x') = x.$$

car φ est un homomorphisme. De même on prouve que $p(x,y,x) = x$ et $p(y,y,x) = x$. Donc d'après le théorème 2.21, $\underline{B}$ est LAC. □

Corolaire 2.28
Si $\underline{A}$ est localement affinement complète alors toute algèbre de $HP_{fin}(\underline{A})$ est localement affinement complète.

Preuve
Puisque toute algèbre de $HP_{fin}(\underline{A})$ est une image homomorphe d'un produit fini de $\underline{A}$ il suffit d'appliquer les deux lemmes précédents. □

Remarque
Il est important de remarquer qu'une sous-algèbre d'une algèbre localement affinement complète n'est pas nécessairement localement affinement complète. En effet, soit G un groupe fini simple d'ordre $n > 2$. Il est connu que G est affinement complet si et seulement si il est non commutatif [18] (thm. 7.14). Supposons donc $G = A_5$ le groupe alterné sur 5 éléments de sorte que $n = 60$. Alors G est affinement complet et aussi localement affinement complet car étant fini. Par un théorème classique, G admet, pour chaque diviseur premier p de n, un sous-groupe H d'ordre p. Pour $p = 5$, le sous-groupe H de G n'est pas affinement complet car commutatif. Donc H n'est pas LAC.

□

Une question implicite dans Kaarli [9] est la suivante:

Question
Toute algèbre affinement complète et arithmétique $\underline{A}$ est-elle localement affinement complète?

La corollaire 2.22 fournit un résultat partiel. Les deux théorèmes suivants fournissent d'autres résultats partiels.

Théorème 2.29: *Toute algèbre affinement complète de type dénombrable dont toutes les sous-algèbres dénombrables sont arithmétiques est localement affinement complète.*

Preuve

Soient $\underline{A} = \langle E,F \rangle$ l'algèbre et $X \subseteq E$ fini. Notons $\underline{B} = \langle E',F' \rangle$ la sous-algèbre de $\underline{A}$ engendrée par X. Alors $\underline{B}$ est dénombrable et donc arithmétique par hypothèse. D'après le théorème 1.36, il existe une a- fonction f sur E' compatible avec Con $\underline{B}$. Puisque $\underline{B}$ est affinement complète, f est un polynôme de $\underline{B}$. Alors il existe un terme t d'arité r+3 et $a_0, ..., a_{r-1} \in E$ tels que

$$f(x,y,z): \approx t^{\underline{B}}(x,y,z,a_0, ..., a_{r-1}).$$

Soit

$$g(x,y,z): \approx t^{\underline{A}}(x,y,z,a_0, ..., a_{r-1}).$$

Alors $g \in \mathrm{Pol}\underline{A}$, prolonge f et g est une a-fonction sur X.Donc $\underline{A}$ est LAC d'après le théorème 2.21. □

Théorème 2.30

Soient V une variété affinement complète, $\underline{A} = \langle E,F \rangle \in V$ une algèbre arithmétique. Alors il existe $\underline{B} \in V$, une extension de $\underline{A}$, qui est une réduite d'une algèbre localement affinement complète

Preuve

Par un théorème bien connu (cf[17] 4.44), l'algèbre $\underline{A}$ est isomorphe à un produit sous-direct

$$\underline{B} = \prod_{i \in I} \underline{A}_i$$

d'une famille $\{\underline{A}_i \mid i \in I\}$ d'algèbres sous-directement irréductibles de la variété V. De plus chaque $\underline{A}_i = \langle E_i; F_i \rangle$ est isomorphe à un quotient de $\underline{A}$. Donc il existe un homomorphisme injectif $f : \underline{A} \to \underline{B}$. Comme $\underline{A}$ est arithmétique, alors chaque $\underline{A}_i$ est arithmétique car elle est un quotient quotient de $\underline{A}$. Les $\underline{A}_i$ sont affinement complètes car elles appartiennent à V. De plus pour tout $i \in I$, l'algèbre $\underline{A}_i$ est finie d'après le théorème de Kaarli et Pixley (théorème 2.10). Soit m_i un a-polynôme sur $\underline{A}_i$ dont l'existence est prouvée dans le corollaire 2.8. Soit

$$m : \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i^3 \to \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i$$

ainsi définie: pour $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ et $z = (z_i)_{i \in I}$

$$m(x,y,z) := (m_i(x_i,y_i,z_i))_{i \in I}.$$

Alors m est une a- fonction sur $\underline{B}$. En effet

$$m(x,y,y) = (m_i(x_i,y_i,y_i))_{i \in I} = (x_i)_{i \in I} = x.$$

Les deux autres identités se vérifient de la même façon. L'algèbre $\underline{B}$ est une extension de $\underline{A}$. Soit $\underline{B}^+$ l'algèbre définie sur le même ensemble que $\underline{B}$ et dont les opérations de base sont celles de $\underline{B}$ auxquelles on a ajouté la fonction m. Alors $\underline{B}^+$ est LAC d'après le théorème 2.21. Ce qui achève la preuve. □

3) Algèbres complètes pour les tolérances et localement complètes pour les tolérances

Dans ce paragraphe nous allons étudier dans quelle mesure il est possible d'étendre les résultats précédents en remplaçant le treillis des congruences d'une algèbre $\underline{A}$ par son treillis des tolérances. Si $\underline{A}$ est une algèbre sur E rapellons qu'on note par d_T la distance sur E associée au treillis Tol($\underline{A}$) des tolérances de $\underline{A}$ (cf chap.0 II) b)). On a pour tous x, y ∈ E

$$d_T(x,y) = \cap\{\theta \in \mathrm{Tol}(\underline{A}) | (x,y) \in \theta\}.$$

Ici on prend $\underline{V} = \langle \mathrm{Tol}\underline{A} ; +, \Delta, id_E, \subseteq \rangle$ où $\theta+\tau$ est la plus petite tolérance de $\underline{A}$ contenant $(\theta \circ \tau)$ donc en fait contenant $(\theta \circ \tau) \cup (\tau \circ \theta)$.

Remarques

1) L'algèbre $\underline{A}$ est libre pour les tolérances si toute tolérance de $\underline{A}$ est une congruence.

2) Pour tout $\theta \in \mathrm{Tol}\underline{A}$, on a que $(d_T)_\theta = \{(x,y)\ E^2 | d_T(x,y) \leq \theta)\} = \theta$. Donc d_T est une ultramétrique si et seulement si $\underline{A}$ est libre pour les tolérances. Ce qui veut dire qu'en général d_T n'est pas une ultramétrique.

Définition

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre sur E. On dit que $\underline{A}$ est **complète pour les tolérances** si toute opération de E compatible avec les tolérances de $\underline{A}$ est un polynôme de $\underline{A}$. On dit que $\underline{A}$ est **localement complète pour les tolérances** si toute opération partielle définie sur sous-ensemble fini de E et compatible avec les tolérances de $\underline{A}$ se prolonge en un polynôme de $\underline{A}$.

Proposition 2.31

Toute algèbre affinement complète est complète pour les tolérances.

Preuve

Soit $\underline{A} = \langle E; F \rangle$ une algèbre affinement complète. Soit $f:E^n \to E$ une opération compatible avec les tolérances de $\underline{A}$. Puisque chaque congruence est une tolérance, alors f est compatible avec les congruences de $\underline{A}$; donc f est polynôme de $\underline{A}$.

□

On peut se demander si la réciproque est vraie. Il n'en est rien. Prouvons d'abord un lemme.

Lemme 2.32

Soit $\underline{A}$ une algèbre sur E. Alors
(i) Si (E,d_T) est convexe alors $(E,d_{\underline{A}})$ est convexe.
(ii) Si (E,d_T) possède la propriété de 2-Helly alors $(E,d_{\underline{A}})$ la possède.

Preuve

Notons par $\vee_T$ le sup dans $\mathrm{Tol}\underline{A}$.

(i) Par le corollaire 1.13, les tolérances permutent. Donc les congruences aussi permutent. Ce qui prouve que (E, dA) est convexe par le même corollaire.

(ii) Soit à présent une famille $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ de boules de $(E,d_{\underline{A}})$ dont les intersections deux à deux sont non vides. Soit $x \in E$, $r \in \mathrm{Con}\underline{A}$, B(x, r) et B'(x, r) les boules de $(E,d_{\underline{A}})$ et (E,d_T). Alors B(x, r) = B'(x, r) car B(x, r) est la classe d'équivalence de r contenant x. Ce qui montre que les boules $B(x_i,r_i)$

sont aussi des boules de (E,d_T). Elles ont donc une intersection non vide.

□

Théorème 2.33

Soit $\underline{A} = \langle E,F\rangle$ une algèbre affinement complète telle que (E,d_T) est hyperconvexe Alors toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une congruence de $\underline{A}$. En particulier $\underline{A}$ est libre pour les tolérances.

Preuve

Par le lemme 2.32, l'espace $(E,d_{\underline{A}})$ est aussi hyperconvexe. Par le théorème 2.6 (i), $\underline{A}$ est a-polynômiale. Alors par le lemme2.5, toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une congruence de $\underline{A}$.

Lemme 2.34

Soit $\underline{A}$ une algèbre sur E telle que (E, d_T) est hyperconvexe. Si $\underline{A}$ est complète pour les tolérances alors $\underline{A}$ est m-polynômiale.

Preuve

Puisque (E,d_T) est hyperconvexe, alors il existe une fonction majorité $f:E^3 \rightarrow E$ qui est non expansive (cf la remarque après 1.24). Ce qui veut dire que f est compatible avec les tolérances de $\underline{A}$, c'est donc un polynôme.

□

D'après le théorème de Pöschel et Kaluzhnin (Thm 2.1) si $\underline{A}$ est complète pour les tolérances alors Pol$\underline{A}$ est local. On peut alors prouver un analogue du théorème 2.21.

Théorème 2.35

Soit $\underline{A}$ une algèbre sur E telle que (E,d_T) est hyperconvexe. Alors $\underline{A}$ est complète pour les tolérances si et seulement si Pol$\underline{A}$ est local, toute sous algèbre diagonale de $\underline{A}^2$ est une tolérance et $\underline{A}$ est m-polynômiale.

Preuve

($\Rightarrow$) On sait déjà que Pol$\underline{A}$ est local et que $\underline{A}$ est m- polynômiale d'après le lemme 2.34. Pour voir que toute sous algèbre diagonale de $\underline{A}^2$ est une tolérance, soit θ une telle sous algèbre. Si $(a,b) \in \theta$, soit $X = \{a,b\}$ et soit g:

$X \to E$ définie par $f(a) := b$ et $f(b) := a$. Alors $d_T(f(a),f(b)) = d_T(b,a) = d_T(a,b)$. Donc f est non expansive. Puisque (E,d_T) est hyperconvexe, f se prolonge en une fonction $\tilde{f}: E \to E$ qui est non expansive donc compatible avec les tolérances de $\underline{A}$. Ainsi $\tilde{f}$ est un polynôme de $\underline{A}$, et il préserve les sous-algèbres réflexives du carré. On a alors $(\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)) = (f(a),f(b)) = (b,a) \in \theta$. Ce qui prouve que θ est symétrique.

($\Leftarrow$) Comme Pol$\underline{A}$ est local, on a Pol$\underline{A} = R^{\Delta}$ où R est une famille de relations finitaires sur E. $\underline{A}$ etant m-polynômiale on peut supposer que R consiste de toutes les sous-algèbres réflexives de $\underline{A}^2$ [1].(thm.2.1). Par notre hypothèse, R = Tol$\underline{A}$, donc Pol$\underline{A}$ est complet pour les tolérances.

□

Corollaire 2.36
Soit $\underline{A}$ une algèbre finie sur E telle que (E, d_T) est hyperconvexe. Alors $\underline{A}$ est complète pour les tolérances si et seulement si $\underline{A}$ est m-polynômiale et toute sous-algèbre diagonale de $\underline{A}^2$ est une tolérance.

Preuve: C'est une application directe du théorème précédent. □

Remarque
Ce résultat est exactement l'analogue du théorème de Pixley (Corollaire 2.5) pour les algèbres complètes pour les tolérances.

Exemple
Soit $\underline{G} = \langle G, \rho \rangle$ un graphe fini, $|G| \geq 2$, qui est hyperconvexe pour la distance usuelle d (cf chapitre 0 ex. 3 et lemme 1.30) mais qui n'est pas un graphe complet; par exemple un intervalle fini de l'ensemble $\mathbb{N}$, avec la relation d'incidence suivante : x et y sont incidents si et seulement si $|x-y| \leq 1$ (cf 15 thm. IV-1.2.2). Soit $\underline{A} = \langle G; F \rangle$ où F est l'ensemble des opérations finitaires non expansives pour la distance d. Alors $\underline{A}$ est complète pour les tolérances. En effet par l'hyperconvexité il existe une fonction majorité m sur G qui est non expansive pour d [15] (thm. IV-2.3). Donc $m \in F$, c'est donc un polynôme de $\underline{A}$. Par la preuve de la proposition 2.35, toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une tolérance de $\underline{A}$. D'après le corollaire précédent, $\underline{A}$ est complète pour les tolérances. D'autre part $\underline{G}$ n'étant pas complet il existe une tolérance θ de $\underline{A}$ qui

n'est par une congruence (cf. proposition 1.35). Alors d'après le théorème 2.33, l'algèbre $\underline{A}$ n'est pas affinement complète. □

Pour les algèbres localement complètes pour les tolérances on a le résultat suivant qui généralise le théorème de Hagemann et Herrmann (corollaire 2.18).

Lemme 2.37

Si l'algèbre $\underline{A} = \langle E;F \rangle$ est localement complète pour les tolérances alors l'espace métrique (E,d_T) possède la propriété d'extension finie.

Preuve

Il suffit de prouver les deux faits suivants d'après (1) du théorème 1.23 :

1) (E, d_T) est convexe.

2) Pour tout $X \subseteq E$ fini il existe une fonction $m:E^3 \to E$ non expansive et qui est une fonction majorité sur X.

Pour prouver 1) il suffit de prouver que les éléments de Tol$\underline{A}$ permutent (cf corollaire 1.13). On reprend l'idée utilisée dans la preuve du théorème 2.35. Soit $x, y \in E$ tels que $(x, y) \leq r \circ s$. On définit $f : \{x, y\} \to E$, par $f(x) = y$ et $f(y) = x$. Alors f est bien non expansive. Elle se prolonge en un polynôme unaire $g : E \to E$. Soit à présent $z \in E$ tel que $(x, z) \in r$ et $(z, y) \in s$. On a $(g(x), g(z)) = (y, g(z)) \in r$ et $(g(z), g(y)) = (g(z), x) \in s$. Ce qui prouve que $(x, g(z)) \in s$ et $(g(z), y) \in r$. Donc $(x, y) \in s \circ r$. Ce qui prouve que $r o s \subseteq s o r$. L'autre inclusion se démontre de la même façon.

Pour 2) on applique la preuve du lemme 1.22.

□

Proposition 2.38

Soit $\underline{A} = \langle E,F \rangle$ une algèbre localement complète pour les tolérances. Alors le demi-groupe (Tol$\underline{A}$, o) est commutatif et la loi o est distributive sur l'intersection dans Tol$\underline{A}$.

Preuve

Soit $\underline{A}$ est localement complète pour les tolérances. Alors d_T possède la propriété d'extension finie par le lemme précédent, donc est convexe. Par le corollaire de la proposition 1.27, (Tol$\underline{A}$, o) est commutatif et la loi o est distributive sur l'intersection. □

Au vu des résultats précédents, on peut prouver le théorème suivant qui est analogue au théorème 2.21.

Théorème 2.39

Soit $\underline{A} = \langle E,F \rangle$ une algèbre. Alors $\underline{A}$ est localement complète pour les tolérances si et seulement si toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une tolérance et si pour toute partie finie X de $\underline{A}$, il existe un polynôme m de $\underline{A}$ qui est une fonction majorité sur X.

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons $\underline{A}$ localement complète pour les tolérances et soit θ une sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$. Il faut prouver que θ est symétrique. Soit $(a,b) \in \theta$ et soit f: $\{a,b\} \rightarrow E$ telle que f(a) = b et f(b) = a. Alors f est non expansive (cf preuve du thm. 2.35). Donc f est compatible. Il existe un polynôme g de A qui prolonge f. Comme θ est réflexive, elle est préservée par g. Ainsi $(g(a),g(b)) = (b,a) \in \theta$. Par le lemme 2.37 il existe pour toute partie finie X de E une fonction ternaire m non expansive sur E qui est une majorité sur X. Alors m est un polynôme.

($\Leftarrow$) Soit $f : X \rightarrow E$ où $|X| \leq 2$ et $X \subseteq E^n$.une fonction compatible avec Tol$\underline{A}$. Puisque toute sous-algèbre réflexive de $\underline{A}^2$ est une tolérance de $\underline{A}$ alors f peut être interpolée par un polynôme (cf. thms. 0.1 et 0.2). Pour le cas où $|X| > 2$ on applique le lemme 2.4. □

Chapitre III

Relations homogènes et clone des fonctions non expansives.

1) Relations homogènes

La notion de relation homogène a été introduite et étudiée par Fraissé puis Pouzet [5]. Nous définissons la notion de relation préhomogène qui généralise celle de relation homogène et appliquons les idées développées dans les chapitres précédents à l'étude de ces relations.

Définitions

Soit $\rho \subseteq E^n$ une relation n-aire définie sur l'ensemble E.

1) Un **endomorphisme local** de ρ est une fonction unaire partielle f: $X \rightarrow E$ définie sur un sous-ensemble de E et qui préserve ρ; en d'autres termes si $(x_1, ..., x_n) \in \rho \cap X^n$ alors $(f(x_1), ..., f(x_n)) \in \rho$. Un **automorphisme local** de ρ est un endomorphisme local qui est injectif. Un **endomorphisme** (resp. un **automorphisme**) de ρ est un endomorphisme local (resp. un automorphisme local) défini sur E tout entier.

2) Soit p un entier positif. On dit que ρ est **p-préhomogène** (resp. **p-homogène**) si tout endomorphisme local (resp. tout automorphisme local) de ρ défini sur un sous-ensemble de E ayant au plus p éléments se prolonge en un endomorphisme (resp. automorphisme) de ρ. La relation ρ est **préhomogène** (resp. **homogène**) si elle est p-préhomogène (resp. p-homogène) pour tout entier positif.

Rappelons que ρ^{Δ} dénote l'ensemble des fonctions finitaires sur E qui préservent la relaton n-aire ρ. D'après le théorème de Pöschel et Kaluzhnin ([24] théorème 2.1), ρ^{Δ} est un clone local. Soit Endρ et Autρ l'ensemble des endomorphismes et des automorphismes de ρ, respectivement. Soit

$\underline{A}_e$: = $\langle$ E; Endρ $\rangle$ et $\underline{A}$ = $\langle$ E; Autρ $\rangle$. Le théorème suivant établit un lien entre les relations homogènes et les algèbres universelles unaires.

Théorème 3.1

Soit ρ une relation sur E et soit p un entier naturel. La relation ρ est p-homogène si et seulement si tout automorphisme local défini sur un sous-ensemble X de E ayant r éléments où $r \leq p$,préserve les sous-algèbres de $\underline{A}^r$.

Preuve

C'est une simple application du théorème 0.2. □

Le même résultat est valable en remplaçant homogène par préhomogène.

Théorème 3.2: *Soit ρ une relation sur E et soit p un entier positif. La relation ρ est p- préhomogène si et seulement si tout endomorphisme local défini sur un sous-ensemble X de E ayant p éléments préserve toute sous algèbre de $\underline{A}_e{}^p$.*

Preuve

Elle est identique à celle du théorème 3.1. □

Théorème 3.3: *Soit $n > 1$ et ρ une relation n-aire sur E. Toute application $f: E \rightarrow E$ n-interpolable sur $\underline{A}$ (i.e. coincidant avec un automorphisme de ρ sur toute partie X de E telle que $|X| \leq n$) est un endomorphisme injectif de ρ.*

Preuve

Soit $(x_1, ..., x_n) \in \rho$ et soit X: = $\{x_1, ..., x_n\}$. On a $|X| \leq n$ et il existe un automorphisme $g \in \rho$ tel que $g \mid X = f \mid X$. Donc $(f(x_1), ..., f(x_n)) \in \rho$ ce qui montre que $f \in \rho^{\Delta}$, Donc f est un endomorphisme de ρ. Soient à présent x, $y \in E$ avec $x \neq y$. Sur Y: = $\{x,y\}$, f coïncide avec un automorphisme h de ρ. Alors $f(x) = h(x) \neq h(y) = f(y)$. Donc f est injectif.□

Définition

Soit $n \geq 1$; pour $\underline{a} = (a_1, ..., a_n) \in E^n$, soit l'ensemble ker$\underline{a}$: $= \{(i,j) \in \{1,..., n\}^2 : a_i = a_j\}$.

Théorème 3.4

Soit $n > 1$ et ρ une relation n-aire sur E qui est 2-préhomogène. Si pour tout $\underline{a} = (a_1, ..., a_n) \in \rho$ avec $|\{a_1, ..., a_n\}| \leq 2$ la relation ρ contient tous les $\underline{b} \in E^n$ avec ker $\underline{a}$ =ker$\underline{b}$; alors $Tol(\underline{A}_e)$ est permutable.

Preuve

Soient θ, ϕ deux tolérances de $\underline{A}_e$ et $(a,b) \in \theta o \phi$ où $a \neq b$. Il existe $c \in E$ tel que $(a, c) \in \theta$ et $(c,b) \in \phi$. Soit $f: \{a,b\} \rightarrow E$ telle que $f(a) = b$ et $f(b) = a$. Soit $\underline{c}: = (c_1,...,c_n) \in \{a,b\}^n \cap \rho$ avec $\{c_1,...,c_n\} = \{a,b\}$. Alors $\underline{e}: = (f(c_1),...,f(c_n))$ satisfait ker$\underline{e}$ = ker$\underline{c}$ et $\underline{e} \in \rho$ car $|\{f(c_1),...,f(c_n)\}| \leq 2$. Par hypothèse ρ est 2-préhomogène, donc f se prolonge en une fonction $\tilde{f} \in$ Endρ. Posons h: = $\tilde{f}(c)$. De $(b,c) \in \phi$ on obtient $(a,h) = (\tilde{f}(b), \tilde{f}(c)) \in \phi$ et de même $(h,b) \in \theta$. Donc $(a,b) \in \phi \text{ o } \theta$, c'est à dire $\theta \text{ o } \phi \subseteq \phi \text{ o } \theta$. Par symétrie on a aussi $\phi \text{ o } \theta \subseteq \theta \text{ o } \phi$. □

Question (Fraïssé [5] chap.11 p.314)

Soit ρ une relation n-aire sur E. Existe-t'il un sous-ensemble fini s(n) de N tel que si ρ est p-homogène pour tout $p \in s(n)$, alors ρ est homogène?

Le théorème suivant apporte une réponse partielle On utilise pour la preuve, la méthode de Baker-Pixley [1] (thm. 2.1) déja utilisée pour la preuve du théorème 2.21.

Théorème 3.5: *Soit ρ une relation n- aire sur E et soit $\underline{A}_\rho = (E,\rho^\Delta)$. Si $\underline{A}_\rho$ possède la propriété B_d de Bergman, pour un $d \geq 2$, et si ρ est p-préhomogène pour tout $1 \leq p \leq d$, alors ρ est préhomogène.*

Preuve

L'ensemble ρ^Δ est le clone des termes de $\underline{A}_\rho$. D'après le théorème 2.20, la propriété B_d entraine que pour toute partie finie X de E, il existe une fonction terme m de $\underline{A}_\rho$ d'arité d+1 qui est une fonction presqu'unanimité sur X. Nous procédons par récurrence sur r pour prouver que ρ est (r+d)-préhomogène pour tout $r \geq 0$. Pour $r = 0$, c'est l'hypothèse. Supposons donc prouvé le résultat pour r, et soit $n = d+r+1$. Soit $F := \{u_1, ..., u_n\} \subseteq E$, $F_i := F \setminus \{u_i\}$ pour tout $i = 1,...,d+1$ et $f: F \to E$ un endomorphisme local. Par hypothèse, il existe $\tilde{f}_i \in \mathrm{End}\rho$ qui prolonge $f \mid F_i$ pour tout $i = 1,...,d+1$. L'opération unaire sur E

$$p(x) :\approx m(\tilde{f}_1(x),...,\tilde{f}_{d+1}(x))$$

est un endomorphisme de ρ. On a pour tout $i = 1, ..., d+1$

$$p(u_i) := m(\tilde{f}_1(u_i), ..., \tilde{f}_{d+1}(u_i)) = m(f(u_i), ..., \tilde{f}_i(u_i), ..., f(u_i)) = f(u_i)$$

par la presque d-unanimité de m; tandis que

$$p(u_i) = m(\tilde{f}_1(u_i), ..., \tilde{f}_{d+1}(u_i)) = m(f(u_i),...,f(u_i)) = f(u_i)$$

pour $d+1 < i \leq n$. Donc p est l'extension de f à E que nous voulons. □

On en déduit un corollaire pour les relations réflexives.

Corollaire 3.6
Supposons que $\underline{A}_\rho = \langle E; \rho^\Delta \rangle$ est localement affinement complète et ρ reflexive. Si ρ est 2-préhomogène alors ρ est préhomogène.

Preuve
Puisque ρ est réflexive, les fonctions constantes appartiennent à ρ^Δ. Donc ρ^Δ est le clone des polynômes sur $\underline{A}_\rho$. D'après le théorème 2.21, $\underline{A}_\rho$ possède la propriété B_2. Donc ρ est préhomogène par le théorème 3.5. □

Il s'avère évidemment interessant de voir si le théorème 3.5 admet une réciproque. Nous aurons besoin d'une autre version du théorème de Rosenberg et Schweigert [30] (c.f. thm 2.20).

Définition
Soient E un ensemble et $d \geq 1$ un entier. On appelle **d-restriction** d'une fonction partielle $f: X \to E$, $X \subseteq E^n$, toute restriction de f sur un sous-ensemble de X ayant d éléments.

Théorème 3.7

Soient ρ une relation n-aire où sur E où $n \geq 2$, $\underline{A}_\rho = \langle E;\rho^\Delta \rangle$ et $d \geq n$ un entier. Supposons que toute fonction partielle (d+1)-aire f de domaine fini, compatible avec ρ se prolonge en une fonction terme de $\underline{A}_\rho$ si toutes ses d-restrictions admettent un tel prolongement. Alors $\underline{A}_\rho$ possède la propriété B_d.

Preuve

Il suffit de prouver que pour tout L fini, $L \subseteq E$ il existe une fonction terme (d+1)-aire m de $\underline{A}_\rho$ qui est est une fonction presqu'unanimité sur L. Pour cela on utilise l'ensemble D_{d+1} introduit au chapitre 0. $D = D_{d+1} \cap L^{d+1}$ est formé de tous les éléments de L^{d+1} qui ont au moins d composantes égales. Soit m_L définie sur D par

$$m_L(x,y, \ldots, y) :\approx m_L(y,x,y,\ldots,y) :\approx \ldots :\approx m_L(y,\ldots,y,x) :\approx y$$

Vérifions que m_L préserve ρ. Soient $u_1,\ldots,u_n$ des éléments de D avec $u_i = (u_{i1},\ldots, u_{id+1})$ tels que les colonnes de la matrice de format $n\times(d+1)$, $U = (u_{ij})$ où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq d+1$ soient dans ρ. Pour chaque $u_i \in D$, $i = 1,\ldots,n$ soit y_i la composante de u_i se répétant au moins d fois. Comme $d+1 > n$, il y a au moins une des colonnes de U qui est égale à

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Donc $(y_1, \ldots, y_n) \in \rho$, et $(m_L(u_1), \ldots, m_L(u_n)) = (y_1, \ldots, y_n) \in \rho$.
Ainsi m_L préserve ρ. Restreignons m_L à un sous-ensemble de ayant d éléments $v_1,\ldots,v_d$. Les valeurs $m_L(v_1), \ldots, m_L(v_d)$ coincident avec les valeurs d'une des d+1-projections $L^{d+1} \to L$. En effet notons encore y_j la composante de v_j qui se répète au moins d fois. La matrice de format $d\times d+1$ dont les lignes sont les v_j pour $j = 1,\ldots,d$, possède une colonne qui est égale à

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}.$$

Si k est l'indice de cette colonne avec $1 \leq k \leq d+1$, alors $pr_k^{d+1}(v_j) = y_j$, pour tout $j = 1, ..., d$. La projection pr_k^{d+1} est le prolongement cherché. On a ainsi prouvé que les d-restrictions de m_L se prolongent par des projections donc en des fonctions qui sont des termes de $\underline{A}_\rho$. D'après l'hypothèse, m_L se prolonge en un terme m de $\underline{A}_\rho$. Par le théorème 2.23, l'algèbre $\underline{A}_\rho$ possède la propriété B_d. □

Les théorèmes 3.5 et 3.7 donnent immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.8

Soit ρ une relation n-aire sur E et $d \geq 1$ tel que ρ est p-préhomogène pour tout $1 \leq p \leq d$ sans être préhomogène. Alors il existe une fonction partielle (d+1)-aire sur E non prolongeable en un terme de l'algèbre $\underline{A}_\rho$ mais dont les d-restrictions se prolongent en des termes de $\underline{A}_\rho$.

□

Définition

Soit $n \geq 2$ et ρ une relation n-aire sur E. On dit que ρ est **2-totale** si pour tous $x,y \in E$, $x \neq y$, il existe $(x_1, ..., x_n) \in \rho$ tel que $x = x_i$ et $y = y_j$ pour certains $1 \leq i, j \leq n$. Elle est dite **totalement anti-reflexive** si pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \rho$ les composantes $x_1, ..., x_n$ sont distinctes deux à deux.

Théorème 3.9

Soit E un ensemble fini, $2 \leq n \leq |E|$ et ρ une relation n-aire sur E 2-totale et totalement anti-réflexive. Si $\underline{A}_\rho = \langle E;\rho^\Delta \rangle$ possède la propriété B_d pour un $d \geq 2$ alors ρ est homogène si elle est p-homogène pour tous $1 \leq p \leq d$.

Preuve

Soit $f : F \rightarrow E$ un automorphisme local ρ avec $|F| \geq d+1$. D'après le théorème 3.5, ρ est préhomogène; donc il existe un endomorphisme g de ρ prolongeant f. Prouvons que g est injectif. Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Il existe $(x_1, ..., x_n) \in \rho$ tel que $x = x_i$ et $y = x_j$ pour certains $1 \leq i, j \leq n$. On a $(g(x_i),...,g(x_n)) \in \rho$ et comme ρ est totalement anti- reflexive les $g(x_i)$ sont distincts deux à deux. Alors $g(x) \neq g(y)$; ce qui prouve que g est est une fonction injective . Puisque E est fini, g est une bijection. □

2) Clone des fonctions non expansives.

Soit (E,d) un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique. Soit n un entier positif. Comme au chapitre 0 II) b) on munit E^n de la distance

$$d_n: E^n \times E^n \rightarrow E$$

définie par

$$d_n((x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)) := \vee\{d(x_i,y_i) \mid i = 1,...,n\}$$

pour tous $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n) \in E^n$. On note C_{dn} l'ensemble des fonctions $f: E^n \rightarrow E$ qui sont non expansives. On définit

$$C_d = \cup\{C_{dn} \mid n \geq 1\}$$

Il est connu que C_d est un clone sur E [18] (section 7.1). Soit Clo(E) le clone de toutes les fonctions sur E.

Définitions

1) On appelle **discriminateur** sur E la fonction $t : E^3 \rightarrow E$ définie par

$$t(x,y,z) = \begin{cases} z \text{ si } x = y \\ x \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

quels que soient x,y et $z \in E$.

2) On dit que $C \subsetneq E$ est **primal** si C_d est le clone engendré par C. On dit que C est **quasi-primal** si le discriminateur est un terme de l'algèbre $\langle E; C \rangle$.

Remarque

On observe que t est une a-fonction.

Théorème 3.10

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un $\underline{V}$-espace métrique (E,d).
(i) $C_d = Clo(E)$

(ii) t est non expansive

(iii) $|Imd| = 2$.

Preuve

(i) ⇒ (2) Evident.

(ii) ⇒ (iii)Si t est non expansive, prouvons que d ne prend que deux valeurs. Soient alors $v,v' \in V \setminus \{0\}$ tels que $d(\alpha,\beta) = v$ et $d(\alpha', \beta') = v'$ pour certains $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in E$. Prouvons d'abord que

$$(d)_v = \{(x,y) \in E^2 \mid d(x,y) \leq v\}$$

est une congruence de l'algèbre $\langle E; C_d \rangle$. Comme t est une a-fonction non expansive on sait par le lemme 1.14 que (E,d) est une ultramétrique. Pour voir que $v = v'$, remarquons d'abord que $d(\alpha,\beta) = v$ entraîne que $\alpha \neq \beta$. Donc

$$t(\alpha,\beta,\alpha') = \alpha,\ t(\alpha,\alpha,\alpha') = \alpha'$$

et

$$d(\alpha,\alpha') = d(t(\alpha,\beta,\alpha'), t(\alpha,\alpha,\alpha')) \leq d(\beta,\alpha) = v.$$

D'autre part:

$$t(\alpha,\alpha,\beta') = \beta' \text{ et } t(\alpha,\beta,\beta') = \alpha$$

entraîne

$$d(\beta',\alpha) = d(t(\alpha,\alpha,\beta'), t(\alpha,\beta,\beta')) \leq d(\alpha,\beta) = v.$$

On a donc prouvé que $(\alpha',\alpha) \in (d)_v$ et $(\alpha,\beta') \in (d)_v$. Comme $(d)_v$ est une congruence, il vient que $(\alpha',\beta') \in (d)_v$, donc $v' = d(\alpha',\beta') \leq v$. Par symétrie $v \leq v'$. Ainsi l'image de d ne possède que 2 éléments.

(iii) ⇒ (i) Supposons à présent que les valeurs de d sont 0 et v. Soit $f:E^n \to E$. On veut prouver que $f \in C_d$. Soient $x = (x_1,\ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E^n$, $x \neq y$. Alors il existe $1 \leq j \leq n$ tel que $x_j \neq y_j$. Comme d prend les valeurs 0 et v et que $d(x_j, y_j) \neq 0$, on a $d(x_j,y_j) = v$. Il vient que $d_n(x,y) = v$. Alors on a $d(f(x),f(y)) \leq v = d_n(x,y)$. Si $x = y$, $d(f(x),f(y)) = 0 = d_n(x,y)$. Ainsi $f \in C_d$.

□

Rappelons la définition d'algèbre primale (cf. [18], section 7.5 et thm. 7.12)

Définition

Une algèbre $\underline{A} = \langle E; F\rangle$ est dite **primale** si toute fonction $f : E^n \to E$ est un terme de $\underline{A}$.

La proposition précédente entraîne le corollaire suivant qui est bien connu [18] (thm. 7.12).

Corollaire 3.11

Toute algèbre primale $\underline{A} = \langle E; F\rangle$ est simple.

Preuve

On considère l'ultramétrique $d_{\underline{A}}$ sur E. Alors $Clo(E) = C_{d_{\underline{A}}}$ par l'hypothèse; donc $d_{\underline{A}}$ prend deux valeurs soit Δ et E^2. □

Proposition 3.12

Soit (E,d) un $\underline{V}$-espace métrique. On suppose que d est symétrique et que (E,d) est hyperconvexe. Alors l'algèbre $\underline{A} = \langle E; C_d\rangle$ est arithmétique.

Preuve

Soit $n > 0$, $F \subseteq E$ et $f : F \to E$ une fonction compatible avec les tolérances de $\langle E; C_d.\rangle$ Chaque $(d)_v$ pour tout $v \in V$ est une tolérance de $\underline{A}$. D'après le corollaire 2.2, f est non expansive. Soit $\tilde{f}$ une extension de f qui est non expansive. Alors $\tilde{f} \in C_d$, donc c'est une fonction terme de $\underline{A}$ Elle préserve les tolérances de $\underline{A}$. Ainsi toute fonction partielle compatible avec les tolérances de $\underline{A}$ possède une extension compatible. Par la proposition 1.27, les tolérances de $\underline{A}$ commutent et pour trois tolérances θ, ϕ et ψ on a $\theta \circ (\phi \cap \psi) = (\theta \circ \phi) \cap (\theta \circ \psi)$. Pour les congruences cette égalité se traduit par $\theta \vee (\phi \cap \psi) = (\theta \vee \phi) \cap (\theta \vee \psi)$. Donc $\underline{A}$ est arithmétique. □

Lemme 3.13

Soit $\underline{V}$ une algèbre de Heyting, soit (E,d) un $\underline{V}$-espace métrique et soit $f: E \to F$ une surjection telle que pour tous $u, v \in F$ on a $d'(u,v) = \wedge \{d(x, y):$

$x \in f^{-1}(u)$,$y \in f^{-1}(v)\}$ $\neq 0$ pour $u \neq v$. Alors (F,d') est un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique et f une application non expansive de (E,d) sur (F,d').

Preuve

Soit u, v, w $\in$ F. On a d'(u, u) = 0 car d(x, x) = 0 pour tout x dans E et d'(u, v) = 0 entraîne u = v est dans l'hypothèse. L'égalité d'(u, v) = $\overline{\text{d'(v, u)}}$ se déduit immédiatement de la définition et du fait que l'involution est un automorphisme d'ordre. Soit U := $f^{-1}(u)$, V : = $f^{-1}(v)$ et W := $f^{-1}(w)$ et soit a : d'(u, v). Alors pour tout z $\in$ W,

$$a = \bigwedge_{x \in U} \bigwedge_{y \in V} d(x, y) \leq \bigwedge_{x \in U} \bigwedge_{y \in V} (d(x, z) + d(z, y))$$

et donc

$$a \leq \bigwedge_{z \in W} \bigwedge_{x \in U} \bigwedge_{y \in V} (d(x, z) + d(z, y))$$

Comme $\underset{\sim}{V}$ est Heyting, cette dernière inégalité donne

$$a \leq d'(u, w) + d'(w, y).$$

Vérifions que f est non expansive. Soit x, y $\in$ E et u : f(x), v : =f(y). Nous avons

$$d'(f(x),f(y)) = d'(u, v) = \bigwedge_{a \in f^{-1}(u)} \bigwedge_{b \in f^{-1}(v)} d(a, b) \leq d(x, y)$$

□

Soit (E,d) un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique ou $\underset{\sim}{V}$ est un treillis complet. On considère l'algèbre $\underline{E} = \langle E; C_d \rangle$. Soit Var($\underline{E}$) la variété engendrée par $\underline{E}$. Soit $C_d = \{c_i : i \in I\}$.

Lemme 3.14

Soit $\underset{\sim}{V}$ une algèbre de Heyting et $\underline{B} = \langle B;\{b_i : i\in I\}\rangle \in Var(\underline{E})$; supposons que $\wedge\{d(x, y)|x \neq y\} \neq 0$. Alors il existe un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique (B,d') tel que b_i est non expansive pour tout $i \in I$.

Preuve

D'après le théorème classique de Birkkoff, voir [17] (thm.4.95), Var($\underline{E}$) = HSP($\underline{E}$). Donc $\underline{B}$ est l'image homomorphe d'une sous-algèbre d'une puissance de $\underline{E}^I$. Toute opération de $\underline{E}^I$ est non expansive par rapport à la métrique produit d_I. Maintenant il suffit d'appliquer le lemme précédent. □

Remarque

Lorsque (E, d) est la métrique d'une algèbre sous-directement irréductible, l'hypothèse du lemme 3.14 est vérifiée. Dans ce cas le monolith de l'algèbre $\underline{E}$ est non nul et minore tous les éléments non nuls de Con$\underline{E}$.

Problème

La métrique pour B n'est pas unique (en principe). Une façon de procéder serait de demander que pour toute algèbre $\underline{B} = \langle B; \{b_i : i \in I\}\rangle$ dans la variété il existe un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique (B,d) tel que toute fonction finitaire sur B qui est non expansive pour d soit un polynîome de $\underline{B}$.

Définition

On dit que la variété Var($\underline{E}$) est **polynômialement $\underset{\sim}{V}$-complète** si pour toute algèbre $\underline{B} = \langle B; \{b_j : j \in J\}\rangle$ de Var($\underline{E}$) il existe un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique (B,d') tel que les fonctions finitaires sur B qui sont non expansives par rapport à d' sont les polynômes de $\underline{B}$

Théorème 3.15

Soit $\underset{\sim}{V}$ un treillis complet et soit (E,d) un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique hyperconvexe.et symétrique. Si $\underline{E} = \langle E; C_d\rangle$ est telle que Var($\underline{E}$) est polynômialement $\underset{\sim}{V}$-complète; alors Var($\underline{E}$) est arithmétique.

Preuve

Il suffit de considérer $\underline{B} \in$ SP($\underline{E}$) car l'image homomorphe d'une algèbre arithmétique est arithmétique. $\underline{B}$ est isomorphe à une sous-algèbre d'une puissance $\underline{E}^I$. Soit X une partie finie de B^n et $f : X \rightarrow B$ une fonction compatible avec les tolérances de B. Ce qui veut dire que f est non expansive par rapport à la métrique $d_{\underset{\sim}{T}}$ définie sur B par le treillis des tolérances de $\underline{B}$. On peut considérer que $f:X \to \underline{E}^I$. On utilise la distance produit d_I sur E^I définie par

$$d_I((x_i)_{i \in I},(y_i)_{i \in I}) := \vee\{d(x_i,y_i) \mid i \in I\}.$$

Pour tout $v \in \check{V}$, on a que $(d_I)_V$ est une tolérance de $\underline{E}$ car les opérations de base de $\underline{E}$ sont non expansives. D'autre part pour tout $v \in V$, on voit que $(d_I)_V \cap B^2$ est une tolérance de $\underline{B}$, donc f est non expansive pour la distance induite par d_I sur B. Comme (E,d) est hyperconvexe, E^I muni de la distance d_I est hyperconvexe d'après [15] (prop.II-2.2). Alors f se prolonge en une fonction n-aire non expansive $\tilde{f}$ sur E^I. Cette fonction est donc une fonction terme de $\underline{E}^I$. Comme $\underline{B}$ est une sous-algèbre de $\underline{E}^I$ on voit que $\tilde{f}(B^n) \subseteq B$. Alors $(B,d_{\underset{\sim}{T}})$ possède la propriété d'extension finie. Donc $\underline{B}$ est arithmétique (cf.la proposition 3.12). □

3) **Métriques projectives.**

Définitions

Une fonction $f: E^n \to E$ est **idempotente** si $f(x, ..., x) = x$ pour tout $x \in E$. La métrique (E,d) est dite **n-projective** si toute fonction $f:E^n \to E$ idempotente et non expansive est une projection. La métrique (E,d) est dite **projective** si elle est n-projective pour tout entier $n \geq 1$. Soit proj(E) l'ensemble des projections sur E. On note

$$P_{nd} := \{f \in C_d \setminus \mathrm{proj}(E) \mid f \text{ n-aire idempotente}\}$$

et

$$P_d = \cup \{P_{nd} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Une fonction de Mal'tsev sur l'ensemble E est une fonction ternaire f sur E,telle que $f(x,y,y) = f(y,y,x) = x$ pour tous x,y dans E.

Le résultat suivant est dû à Gumm [7] (thm. 2.2) (cf aussi [27], cor. 1.2) pour les congruences. Mais la démonstration se généralise aux métriques.

Théorème 3.16

Supposons que P_d est non vide. Si P_{2d} est vide alors il existe une fonction de Mal'tsev dans C_d.

Preuve

Supposons le contraire, c'est à dire que P_3 ne contient pas une fonction de Maltsev. Soit k le plus petit entier tel que $P_{kd} \neq \emptyset$. Alors $k \geq 3$. Soit $m \in P_{kd}$. On définit les fonctions m_i $1 \leq i \leq k$ par:

$$m_i(x,y) :\approx m(x,\ldots,x,y,x,\ldots,x)$$

où y est à la i-ième place. Evidemment $m_i \in C_d$. Comme $P_{2d} = \emptyset$, la fonction m_i est une projection. Soit $I := \{1 \leq i \leq k : m_i = pr_1^2\}$. Nous montrons que $|I| \geq k-1$. Sinon soit $1 \leq s < t \leq k$, tels que $s, t \notin I$. Alors $m_s = m_t = pr_2^2$, la deuxième projection. Définissons

$$p(x,y,z) \approx m(y, \ldots, y,x,y, \ldots, y,z,y, \ldots, y)$$

ou x est la s-ième place et z la t-ième place. Alors p est idempotente et pour tous $x, z \in E$ on a $p(x,x,z) = m_t(x,z) = z$, $p(z,x,x) = m_s(x,z) = z$. Donc p est une fonction de Mal'tsev. De plus p est non expansive car m l'est. Ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi on peut trouver $1 \leq j \leq k$ tel que $I \subseteq \{1,\ldots,k\} \setminus \{j\}$. Supposons sans perte de généralité que j=1. Il est évident que m n'est pas la première projection. Donc il existe $(a_1, \ldots, a_k) \in E^k$ tel que $m(a_1, \ldots, a_k) \neq a_1$. On fixe $b := a_k$ et on définit $m_b : E^{k-1} \rightarrow E$ par

$$m_b(x_1,\ldots,x_{k-1}) :\approx m(x_1,\ldots,x_{k-1},b).$$

Alors m_b est non expansive et $m_b(x,\ldots,x) = m(x,\ldots,x,b) = m_k(x,b) = x$ pour tout $x \in E$ car $k \in I$. Mais $m_b(a_1,\ldots,a_{k-1}) = m(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k) \neq a_1$ donc m_b n'est pas la première projection. Si $1 < i \leq k-1$, et $a \in E$ $a \neq b$ on a

$$m_b(b,\ldots,b,a,b,\ldots,b,) = m(b,b,\ldots b,a,b,\ldots,b) = m_i(b,a) = b$$

car $i \in I$. Il vient donc que m_b n'est pas une projection contredisant le choix de k. □

On a comme corollaires les deux résultats suivants dûs à Pouzet, Rosenberg et Stone **[27]**.

Corollaire3.17

Si (E,d) n'est pas une ultramétrique, alors la 2-projectivité est équivalente à la projectivité.

Preuve

($\Rightarrow$) Supposons que $P_{2d}(E) = \emptyset$ mais que $P_{nd}(E) \neq \emptyset$ pour un $n \geq 3$. Alors il existe une fonction de Mal'tsev dans C_d. D'après le lemme 1.14, d est une ultramétrique.

($\Leftarrow$) Evidemment la n-projectivité entraîne la 2-projectivité. □

Corollaire 3.18

Pour la métrique associée à un ensemble ordonné la 2-projectivité est équivalente à la projectivité.

Preuve

La métrique d associée à l'ordre n'est pas une ultramétrique (cf chap. 0 ex. 2) On applique alors le corollaire 3.17. □

Corollaire 3.19

L'espace métrique (E,d) est projectif si et seulement s'il est n-projectif pour n=2 et 3.

Preuve: ($\Rightarrow$) Si (E,d) est projectif il est n-projectif pour n = 2 et 3.

($\Leftarrow$) Supposons que (E,d) est projectif pour n = 2 et 3. Alors P_{2d} et P_{3d} sont vides. D'après le théorème 3.16, P_d est vide ce qui veut dire que (E,d) est projectif. □

Proposition 3.20

Soit (E,d) un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique projectif. Alors (E,d) ne peut-être décomposé en un produit de deux $\underset{\sim}{V}$-espaces métriques non triviaux.

Preuve

Supposons $E = E_1 \times E_2$ où (E_1,d_1) et (E_2, d_2) sont des $\underset{\sim}{V}$- espaces métriques et que

$$d((x_1,x_2), (y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) \vee d_2(x_2,y_2).$$

Définissons comme dans [17] (cf. page 201) et [4], f: $E^2 \rightarrow E$ par $f((b,c),(b',c')) := (b,c')$. Vérifions que f est non expansive. Soient (u,v), (u',v') dans E^2 et $t := d(u,u') \vee d(v,v')$. On a

$$u = (u_1,u_2),\ v = (v_1,v_2),\ u' = (u'_1,u'_2),\ v' = (v'_1,v'_2)$$

$$(f(u,v),\ f(u',v')) = (f((u_1,u_2),(v_1,v_2)),\ f((u'_1,u'_2),\ (v'_1,v'_2)))$$

$$= ((u_1,v_2),\ (u'_1,v'_2))$$

Or

$$(u,u') = ((u_1,u_2),(u'_1,u'_2)),\ (v,v') = ((v_1,v_2),(v'_1,v'_2))$$

$$d(u,u') = d_1(u_1,u'_1) \vee d_2(u_2,u'_2)$$

d'où

$$d(f(u,v),f(u',v') = d((u_1,v_2),(u'_1,u'_2) = d_1(u_1,u'_1) \vee d_2(v_2,v'_2).$$

Comme

$$d_1(u_1,u'_1) \vee d_2(v_2,v'_2) \leq d_1(u_1,u_1') \vee d_2(u_2,u_2') \vee d_1(v_1,v_1') \vee d_2(v_2,v_2'),$$

on a $d(f(u,v),f(u',v') = d(u,u') \vee d((v,v')$. Puisque f est non expansive c' est donc une projection. Supposons que f est la première projection; alors pour tous $b \in E_1$, $c, c' \in E_2$ on a $(b,c) = f((b,c), (b',c')) = (b,c')$ donc $c = c'$. Ce qui prouve que E_2 est réduit à un élément. Si f est la deuxième projection, alors E_1 est réduit à un élément. □

Pour les ordres ce résultat est dû à Corominas [4] (thm. 1.).

Théorème 3.21
Si E est fini et (E,d) est projectif, alors tout sous-clone minimal de C_d est essentiellement unaire.

Preuve
D'après un théorème de Rosenberg (cf [31], prop. 1.2.), tout clone minimal est engendré par une opération de l'un des types suivantes:

1) unaire
2) binaire idempotente
3) majorité ternaire
4) une opération ternaire x+y+z dans un groupe abélien 2-élémentaire
5) une semi-projection.

D'après la projectivité seul le cas 1) est possible. Ce qui prouve le théorème 3.21.□

Conclusion

Dans ce travail nous avons mis en évidence le fait que les fonctions qui sont des a-fonctions partielles sur des sous-ensembles finis, jouent un rôle essentiel dans la théorie des algèbres affinement complètes et localement affinement complètes. Cependant le test que nous avons trouvé pour décider si oui ou non une algèbre est localement affinement complète (théorème 2.21) ne nous a pas permis de répondre à la question de Kaarli, à savoir si une algèbre affinement complète et arithmétique était localement affinement complète. Une des difficultés fondamentales pour répondre à ce genre de question réside dans le problème suivant:

Problème

Soit (E,d) un $\underset{\sim}{V}$-espace métrique possédant la propriété d'extension finie. Quelles conditions imposer sur la métrique d pour que pour que toute fonction partielle $f : X \to E$, avec X un sous-ensemble fini de E^n, puisse être prolongée à une fonction $g \in C_d$?

La métrique définie sur le treillis des congruences d'une algèbre ne permet pas de se rendre compte de ce qui se passe pour la variété engendrée par cette algèbre, parce qu'en général les congruences d'une algèbre et celles des algèbres que l'on construit à partir d'elle sont très différentes. Pour les applications en algèbre universelle, il serait interessant de pouvoir construire une métrique respectant les produits, les passages aux quotients et les sous-algèbres.

Bibliographie

[1] Baker K.A. et Pixley A.F.: Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems. *Math Z.* 143, (1975), 165-174.

[2] Chajda I.: Algebraic theory of tolerance relations, Univerzita Palackého v Olomouci (1991).

[3] Chajda I.: Recent results and trends in tolerances on algebras and varieties, *Colloquia Mathematica societatis Jánós Bolyai* 28: Finite algebras and multiple-valued logic, Szeged, Hungary (1979), 69-95.

[4] Corominas E.: Sur les ensembles ordonnés projectifs et la propriété du point fixe, *C.R. Acad. Sci. Paris* t. 311, Série I, (1990), 199-204.

[5] Fraïssé R.: Theory of relations. Studies in logic and the foundations of mathematics, vol. 118. North-Holland Elsevier Science Publishers B.V. 1986.

[6] Grätzer G.: Universal algebra, 2e éd. Springer-Verlag, New York 1978.

[7] Gumm: Is there a Mal'cev theory for single algebras? *Algebra Universalis* 8 (1978), 320-329.

[8] Hagemann J. et Herrmann C.: Arithmetical locally equational classes and representations of partial functions. Universal Algebra, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, vol. 29 (1982), 345-360.

[9] Kaarli K.: Compatible function extension property. *Algebra Universalis* 17 (1983), 200-207.

[10] Kaarli K. et Pixley A.F.: Affine complete varieties. *Algebra Universalis*, 24 (1987), 74-90.

[11] Korec I.: A ring with arithmetical congruence lattice not preserved by any Pixley functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 82, no 1, (1981), 23-27.

[12] Korec I.: A ternary function for distributivity and permutability of an equivalence lattice. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 69, (1978), 8-10.

[13] Iskander A.: Algebraic function on p-rings, *Coll. Math.* vol. XXV, Fasc. 1, (1982), 38-41.

[14] Jawhari E.: Les rétractions dans les graphes. Applications et généralisations. Thèse de 3e cycle, Lyon I (1983).

[15] Jawhari E., Misane D., Pouzet M.: Graphs and ordered sets from the metric point of view. *Contemporary Mathematics*, vo. 57 (1986).

[16] Larose B.: Finite projective ordered sets. *Order* 8, (1991), 33-40.

[17] McKenzie R.N., McNully G.F. et Taylor W.F.: Algebras, lattices, varieties. Tome I, 1987. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced books and software.

[18] McKenzie R.N.; McNully G.F.; Taylor W.F.: Algebras, lattices, varieties, Tome II, preprint.

[19] Misane D.: Retracts absolus d'ensembles ordonnés et de graphes. Propriétés du point fixe. Thèse de 3e cycle. Lyon 1 (1984).

[20] Pixley A.F.: A survey of interpolation in universal algebra, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* 29. Universal Algebra, Esztergom (Hungary) 1977.

[21] Pixley A.F.: Completeness and arithmetical varieties. Communications au séminaire de mathématiques supérieures, 30e session, Université de Montréal, 1991.

[22] Pixley A.F.: Completeness in arithmetical algebras. *Algebra Universalis* 2, (1972), 179-196.

[23] Pixley A.F.: Characterizations of arithmetical varieties. *Algebra Universalis* 9 (1979) 87-98.

[24] Pöschel R. et Kaluzhnin L.A.: Functions and relation algebras (German) *Veb. Deutscher Ver. d. Wiss.* Berlin (1979) Math. Mon. 15 and Birkhauser Ver. Basel u. Stuttgart (1979).

[25] Pouzet M.: Communications au séminaire de mathématiques supérieures 30e session, Université de Montréal (1991).

[26] Pouzet M. et Rosenberg I. G.: General metrics and contracting operations. Preprint, Université de Lyon (1991), 75 pp..

[27] Pouzet M., Rosenberg I.G. et Stone M.: A projection property. Preprint, University of Calgary (1991), 37 pp..

[28] Quilliot A.: An application of the Helly property to the partially ordered sets. *J. of Combinatorial Theory*, (A) 35(1983),185-198.

[29] Quilliot A. : Homomorphismes, points fixes, rétractions et jeux de poursuites dans les graphes, les ensembles ordonnés et les espaces métriques. Thèse de doctorat d'État, Université Paris VI (1983).

[30] Rosenberg I.G. et Schweigert D.: Almost unanimity operations. *Contributions to general algebra* 5. Proceedings of the Salzburg conference, May 29-June 1, 1986. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1987- Verlag B.G. Teubner, Stuttgart.

[31] Szendrei A.: Clones in universal algebra. Les presses de l'Université de Montréal, vol. 99, 1986, 166 p..

[32] Werner H.: A Mal'cev condition for admissible relations. *Algebra Universalis* 8 (1973), 263.

Appendice I

1) Algèbres

On appelle algèbre $\underline{A}$ un couple ordonné $\langle E; F \rangle$ où E est un ensemble non vide et $F = \langle F_i : i \in I \rangle$ où pour tout $i \in I$, F_i est une fonction finitaire sur E. On dit que E est l'univers de $\underline{A}$ et que pour tout $i \in I$, F_i est une opération de base de $\underline{A}$. I est appelé l'ensemble d'indices de $\underline{A}$ ou l'ensemble des symboles de $\underline{A}$. Il peut arriver que l'ensemble F ne soit pas indexé explicitement.On dira alors que $\underline{A}$ est une algèbre non indexée sur E. Pour tout symbole Q de $\underline{A}$, on note par $Q^{\underline{A}}$, l'opération de $\underline{A}$ indexée par Q. On dit que $Q^{\underline{A}}$ est l'interprétation de Q dans $\underline{A}$. Soit $\Phi : I \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $Q \in I$, $\Phi(Q)$ est l'arité de $Q^{\underline{A}}$; alors Φ est appelée la fonction rang de $\underline{A}$ où le type de $\underline{A}$. Deux algèbres $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont dites semblables si elles ont la même fonction rang.

2) Notion de clone.

Soient n et k deux entiers naturels non nuls, $f_0,\ldots,f_{k-1}$, des opérations n-aires et g une opération k-aire sur l'ensemble E. L'opération composée de g avec les f_i est la fonction n-aire h définie pour tout $\overline{x} \in E^n$ par la formule suivante:

$$h(\overline{x}) = g(f_0(\overline{x}),\ldots,f_{k-1}(\overline{x})).$$

La i-ème projection d'arité n sur E est la fonction

$$p_i^n : E^n \to E$$

telle que $p_i^n(x_1,\ldots,x_n) = x_i$. Un clone sur l'ensemble E est un ensemble C d'opérations sur E qui est clos pour la composition et qui contient les projections d'arités quelconques.

3) Algèbres sous-directement irréductibles, produit sous-direct.

Soit $\underline{A}$ et $(\underline{A}_i)_{i \in I}$, une famille d'algèbres semblables à $\underline{A}$. On dit que $\underline{A}$ est une représentation sous-directe $(\underline{A}_i)_{i \in I}$, s'il existe un homomorphisme injectif d'algèbres

$$f : \underline{A} \to \prod_{i \in I} \underline{A}_i$$

tel que pour tout i [I, $f_i = pr_i \circ f$ est un homomorphisme surjectif de $\underline{A}$ sur $\underline{A}_i$ où pr_i est la projection

$$pr_i : \prod_{i \in I} \underline{A}_i \to \underline{A}_i$$

définie par $pr_i((x)) = x_i$ si $x = (x_i)_{i \in I}$. Les $\underline{A}_i$ sont appelées les facteurs de $\underline{A}$. Si f est une inclusion, on dit que $\underline{A}$ est un produit sous-direct des $\underline{A}_i$.

Une algèbre $\underline{A}$ est dite sous-directement irréductible si $|\underline{A}| > 1$ et si pour toute représentation sous-directement irréductible de $\underline{A}$ par une famille $(\underline{A}_i)_{i \in I}$, il existe $i \in I$ tel que f_i est un isomorphisme de $\underline{A}$ sur $\underline{A}_i$.

Théorème [17] (thm. 4.44).
Toute algèbre $\underline{A}$ possède une représentation sous-directe par une famille d'algèbres sous-directement irréductibles qui sont des algèbres quotients de $\underline{A}$.

4) Variété.

Une variété est une classe *C* d'algèbres semblables qui est close sous la formation des produits, des sous-algèbres , et des images homomrphes. On note respectivement par P, S et H la formation des produits, des sous-algèbres et des images homomorphes. Soit *K* une classe d'algèbres et V(*K*) = V, la plus petite variété contenant *K*.

Théorème [17] (thm. 4.95)
V = HSP(K).

Appendice II

Index des notations

$\underset{\sim}{V}$	un monoïde ordonné $\langle V; +, 0, {}^{-}, \leq \rangle$ muni d'une involution	3