REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****
CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET GEOSCIENCES
Laboratoire d'Algèbre, Géometrie et Applications

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****
POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES
Laboratory of Algebra, Geometry and Applications

La Catégorie des Monoïdes Résidués

Thèse soumise pour l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph.D en Mathématiques

Par : **OGADOA AMASSAYOGA**
D.E.A en Mathématiques

Sous la direction de
NKUIMI JUNIA Célestin
Maître de Conférence
Université de Yaoundé I, Cameroun

Année Académique : 2018-2019

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
BP: 812 Yaoundé

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
PO. Box: 812 Yaoundé

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE DOCTORAT/PHD

Nous soussignés, Professeurs **BITJONG NDOMBOL, NKUIMI JUGNIA Célestin, TONGA Marcel, TEMGOA ALOMO Etienne Romual, LELE Célestin, TIEUDJO Daniel** membres du jury de la thèse de Doctorat/PhD présentée par Madame **OGADOA AMASSAYOGA** matricule **97Z060** thèse intitulée :

«La Catégorie des Monoides Résidués »

soutenue le 29 Avril 2019 en vue de l'obtention du diplôme de **Doctorat/PhD en Mathématiques**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Président	Rapporteur	Examinateur
Pr BITJONG NDOMBOL	Pr NKUIMI JUGNIA Célestin	Pr TEMGOUA ALOMO Etienne R

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

****

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET GEOSCIENCES

****

Unité de Recherche et de Formation Doctorale en Mathématiques, Informatique, Bioinformatique et Applications

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

****

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

****

Research & Training Unit for Doctorate in Mathematics, Computer Sciences and Applications

Laboratoire d'Algèbre, Géometrie et Applications
Laboratory of Algebra, Geometry and Applications

La Catégorie des Monoïdes Résidués

Thèse soumise pour l'obtention du diplôme de
Doctorat/Ph.D en Mathématiques

Spécialité: Algèbre
Par

OGADOA AMASSAYOGA
Matricule : 97Z060
D.E.A en Mathématiques

sous la direction de
NKUIMI JUNIA Célestin
Maître de Conférence
Université de Yaoundé I, Cameroun

Année Académique 2018-2019

Dédicaces

Je dédie ce travail à l'éternel tout puissant.

Remerciements

J'exprime humblement ma gratitude à l'endroit des professeurs Nkuimi Jugnia Celestin et Tonga Marcel pour toutes les années consacrées par eux pour ma formation depuis mes premiers pas dans la recherche. Je remercie tous les membres du laboratoire d'algèbre, géométrie et applications qui ont suivi ce travail du début à la fin et en général tout le département de mathématiques de l'université de Yaoundé I. Je remercie toute ma famille biologique : mes parents, mon époux, mes enfants, mes frères, mes oncles et tantes. Je remercie tous mes amis et connaissances qui ont contribué de près ou de loin pour l'aboutissement de ce travail.

Résumé

Ce travail est une contribution à la compréhension de la catégorie des monoïdes ordonnés résidués. Nous partons d'une structure d'ensemble ordonné que nous enrichissons pour obtenir un monoïde ordonné puis un monoïde ordonné résidué.

Un monoïde ordonné est un ensemble ordonné $(M, \leq)$ muni d'une opération associative $*$ et d'un élément neutre e (l'ordre et l'opération devant être compatibles dans un certain sens).

Une structure de résiduation sur un monoïde ordonné $(M, \leq, \otimes, e)$ consiste à se donner : pour tout $z, x \in M$, un plus grand élement $y \in M$ tel que $x \otimes y \leq z$; et pour tout $z, y \in M$, un plus grand élement $x \in M$ tel que $x \otimes y \leq z$. Un monoïde ordonné $(M, \leq, \otimes, e)$, muni d'une structure de résiduation est appelé un monoïde ordonné résidué.

Dans ce travil, nous avons donné une caractérisation des congruences régulières sur les monoïdes ordonnés résidués. Nous avons prouvé que la catégorie **A-Mod** des A-modules à gauche et des applications croissantes A-équivariantes possède toutes les limites et toutes les colimites, certaines sous limites et sous colimites ; nous y avons mis en évidence les modules libres au dessus des ensembles ordonnés et montré qu'elle possède suffisamment d'injectifs. Nous avons prouvé que la catégorie $(\mathbf{A\text{-}Mod})_*$ des A-modules et des applications croissantes A équivariantes résiduées et dont les adjoints à droite sont A-équivariantes possède des limites et colimites ; nous avons mis en évidence l'équivalence des deux notions de quotient : l'une par les congruences et l'autre par certains opérateurs appelés noyaux quantiques. S'agissant de la catégorie **A-Alg**, des algèbres sur un monoïde ordonné résidué, nous nous sommes limités juste à dire que le foncteur d'oubli de cette catégorie vers **A-Mod** possède un adjoint à gauche.

Mots clés : catégorie, monoïde, ensemble ordonné, résiduation, noyau quantique, treillis, opérateur de fermeture, semigroupe, congruence, quotient.

Abstract

This work is our contribution to the study of the category of residuated ordered monoids. An ordered monoid is a poset $(M, \leq)$ together with an associative operation $*$ and a neutral element e. A residuated ordered monoid is an ordered monoid $(M, \leq, *, e)$ which is residuated in the sense that for all $z, x \in M$, there is a biggest element $y \in M$ so that $x * y \leq z$ and for all $z, y \in M$, there is a biggest element $x \in M$ so that $x * y \leq z$. We have also studied the category of modules over residuated ordered monoids.

We have shown that the category **A-Mod** of left A-modules and A-equivariant increasing maps have limits, colimits, some sublimits and subcolimits We have constructed free module and proved that there are enought injectives. We have shown that the category $(\textbf{A-Mod})_*$ of A-modules and residuated A- equivariant increasing maps for which right adjoints are A- equivariant have products indexed by ordered sets, and proved that there is equivalence between quotient congruences and quotient by quantics nucleus. The last result concerne the category of **A-Alg**, of A-algebras over residuated ordered monoid. We have shown that the forgetfull functor from **A-Alg** to **A-Mod** has left adjoint. Using Lambek's calculus, we give applications of the theory of residuated ordered monoids in linguistic. We have proved in particular that residuated ordered monoids are models of computer lingustic. We have also mentioned our result concerning Rees congruences in semigroups which has been published.

Key Words : Category, ordered set, monoid, residuation, adjonction, lattice, quantic nucleus, closure operator, semigroup, congruence, quotient.

Table des matières

Introduction

La résiduation est un concept de base en mathématiques [7] qui est en lien avec les connections de Galois et les opérateurs de fermeture. Les semi-groupes résidués ont été introduits dans les années trente du siècle dernier par Ward et Dilworth [24] dans le but d'étudier la théorie des idéaux des anneaux commutatifs unitaires. De nos jours l'étude des treillis résidués (monoïdes résidués) est devenue populaire et retient particulèrement l'attention internationale. Cet intérêt significatif est dû à la découverte d'un important lien entre les treillis résidués et les logiques sous structurelles [28, 29]. Les logiques sous struturelles sont des logiques non classiques sans règles structurelles présentes dans les logiques classiques. Leurs motivations proviennent des considérations philosophiques (logique de relèvement), lingustiques (calcul de Lambek) et informatiques (logique linéaire). De plus, les techniques des logiques sous structurelles sont régulièrement utilisées aussi dans l'étude des logiques traditionnelles telles que la logique classique et intuitioniste. Les logiques sous structurelles comptent entre autres : la logique classique, intuitioniste, de relèvement, multi-valuée, la logique basée sur les t-normes, la logique linéaire et leurs versions non commutatives. La théorie des logiques sous structurelles a mis toutes ces logiques et plusieurs autres en dessous d'une même motivation et méthodologie. Les treillis résidués seuls ont été la clef de cette unification remarquable. Parmi les treillis résidués l'on peut citer : les algèbres de Boole, les algèbres de Heyting [15], les MV-algèbres [6], les groupes de treillis ordonnés ; une variété des autres structures algebriques peut être vue comme un treillis résidué. L'application des logiques sous structurales et des treillis résidués a révolutioné la théorie des preuves, des algèbres et l'informatique. Les monoïdes résidués en revanche viennent comme une géneralisation des treillis résidués où le sup binaire commutatif est remplacé par une multiplication non commutative. Ainsi l'étude de la catégorie des tels objets serait nécessaire pour une meilleure compréhension de leur structure.

Notre premier chapitre est essentiellement basé sur des rappels des notions liées aux ensembles ordonnés. Pour les preuves concernant l'adjonction et les opérateurs de fermeture, nous nous referons à [7]. Avant de parler des monoïdes ordonnés résidués nous avons d'abord exploré les monoïdes ordonnés qui constituent le deuxième chapitre. Dans cette partie, nous établissons fondamentalement qu'il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des congruences régulières sur un monoïde ordonné et l'ensemble des noyaux quantiques sur ce même monoïde. L'étude de ces opérateurs continue au chapitre trois. Outre l'étude catégorielle des monoïdes ordonnés résidués, le troisième chapitre présente une application à la lingustique de ces monoïdes. En fait, nous avons étendu la notion de noyaux quantiques utilisée dans le chapitre précedent aux monoïdes ordonnés résidués et nous avons décrits les quotients dans cette catégorie à l'aide de ces opérateurs de fermeture. Les sous structures ont été décrites par les conoyaux quantiques et il en ressort que tout sous monoïde ordonné résidué d'un monoïde ordonné résidué P est l'image de P par un conoyau quantique. Ensuite nous présentons la completion de Mac Neille Dedeking des monoïdes ordonnés résidués. Pour clore ce chapitre, nous avons regardé les monoïdes résidués et leur lien avec la lingustique computationelle. De la grammaire catégorielle au système des séquents pour le calcul de Lambek en passant par la logique des types, on montre que les monoïdes résidués s'appliquent à l'étude logique des langues humaines.

La théorie des anneaux nous a appris que les anneaux sont mieux appréhendés par leur action sur les groupes abéliens. Tenté par une telle expérience nous abordons la notion de modules sur un monoïde ordonné résidué qui fait l'objet de notre dernier chapitre et aussi notre contribution personnelle. Nous avons d'abord isolé les trois catégories suivantes :

- **A-Mod** : la catégorie des A-modules dont les morphismes sont des applications croissantes équivariantes.
- (**A-Mod**)$_*$: la catégorie des A-modules et des applications croissantes A équivariantes résiduées et leurs adjoints sont A équivariantes.
- **A-Alg** : la catégorie des A-algèbres et des applications croissantes monoidales A équivariantes.

Nous avons prouvé, que la catégorie **A-Mod** possède toutes les limites, toutes les colimites, certaines sous limites et sous colimites en décrivant systématiquement les produits, les coproduits, les égalisateurs et sous égalisateurs, les coégalisateurs et sous coégalisateurs les produits fibrés et les sommes amalgamées. Nous avons mis en évidence les modules libres au dessus des ensembles ordonnés et montré qu'elle possède suffisamment d'injectifs.

Quand à la catégorie (**A-Mod**)$_*$, nous avons prouvé qu'elle possède des produits indexés par des ensembles ordonnés ; nous y avons mis en évidence les modules libres, l'équivalence de deux notions de quotient l'une par les congruences et l'autre par certains opérateurs de fermeture particuliers appelés noyaux quantiques.

S'agissant de la catégorie **A-Alg**, nous avons prouvé que le foncteur d'oubli de cette catégorie vers **A-Mod** possède un adjoint à gauche ; Cela permet de postuler quelques colimites dans **A-Alg**.

Chapitre Un

Quelques notions liées aux ensembles ordonnés

Ce chapitre est un rappel de quelques notions liées aux ensembles ordonnés et leurs généralisations dans les catégories. Les reférences standards sont :

1. L'ouvrage [7] pour ce qui concerne les ensembles ordonnés, les tréillis, l'adjonction entre ensembles ordonnés et les opérations de (co) fermeture.
2. L'ouvrage [23] pour ce qui concerne les catégories monoidales et les catégories enrichies sur les catégories monoidales. Cet ouvrage est aussi une bonne reférence pour les notions de limites et colimites.

La plupart des résultats de ce chapitre ne seront donc pas démontrés et on se refèrera à l'un de ces ouvrages.

1.1 Opérateurs de fermeture

Définition 1.1.1. *Un ensemble ordonné est un ensemble muni d'une relation s_A qui est reflexive, antisymétrique et transitive.*

Définition 1.1.2. *Un opérateur de fermeture dans un ensemble partiellement ordonné P est une application $j : P \longrightarrow P$ satisfaisant les axiomes suivants : pour tous $x, y \in P$,*

1. *$x \leq j(x)$ (j est extensive),*
2. *si $x \leq y$ alors $j(x) \leq j(y)$ (j est croissante,)*
3. *$j(j(x)) = j(x)$ (j est idempotente).*

La définition ci-dessus est équivalente à l'unique axiome

$$x \leq y \text{ si et seulement si } j(x) \leq j(y) \text{ pour tous } x, y \in P.$$

En utilisant l'ordre point par point des fonctions entre ensembles ordonnés, la propriété de l'extensivité peut s'exprimée par : $id_P \leq j$.

Définition 1.1.3. *Toute fonction $k : P \longrightarrow P$ qui est idempotente, croissante et telle que $k \leq id_P$ est appelée un opérateur de cofermeture ou opérateur conoyau.*

Soit P un ensemble ordonné. Soit $j : P \longrightarrow P$ un opérateur de fermeture sur P, alors l'ensemble P_j des élements j-fermés de P satisfait les propriétés :

(i) pour tout $x \in P$, min $\{a \in P_j, x \leq a\}$ existe et vaut $j(x)$

(ii) j est complètement déterminé par son image en vertu de la formule $j(x) = min\{a \in P_j, x \leq a\}$.

Il s'en suit que :

Théorème 1.1. *Il y a une bijection entre les opérateurs de fermeture sur P et les sous ensembles ordonnés O de P satisfaisant la condition :*
$min\{a \in O, x \leq a\}$ existe pour tout $x \in P$.

Soit $\sigma : P \longrightarrow P$ un opérateur de cofermeture sur un ensemble ordonné P, alors l'ensemble P_σ des élements $\sigma-$cofermés de P satisfait les propriétés :

(i) $\max\{a \in P_\sigma, a \leq x$ existe pour tout $x \in P\}$ et vaut $\sigma(x)$

(ii) σ est complètement déterminé par son image en vertu de la formule $\sigma(x) = max\{a \in P_\sigma, a \leq x\}$.

Il s'en suit que :

Théorème 1.2. *Il y a une bijection entre les opérateurs de cofermeture sur P et les sous-ensembles ordonnés O de P satisfaisant la condition :*
$\max\{a \in O, x \leq a\}$ *existe pour tout $x \in P$.*

1.2 Applications adjointes

Dans la suite les structures ordonnées seront représentées par leurs supports sauf mention du contraire.

Définition 1.2.1. *Soient P et Q deux préordres, $f : P \longrightarrow Q$ et $g : Q \longrightarrow P$ deux applications adjointe à droite de f " (ce qu'on notera $f \dashv g$) si : pour tout*
$x \in P, y \in Q, f(x) \leq y$ ssi $x \leq g(y)$.

La paire $f \dashv g$(notée de cette façon ou notée $f \dashv g : P \rightarrow Q$) sera appelée une " adjonction "

Proposition 1.1. *Soit $f \dashv g : P \longrightarrow Q$ une adjonction , alors pour tout x de P et tout y de Q , on a :*

$$x \leq g(f(x)) \text{ et } f(g(y)) \leq y.$$

Ces deux inégalités sont appelées respectivement " unité " et " co-unité " de l'adjonction $f \dashv g$.

Le corollaire immédiat en est que si $f \dashv g$ *est une adjonction, alors* f *et* g *sont des applications croissantes.*

Proposition 1.2. *[7] Soit* $f \dashv g : P \to Q$ *une adjonction entre des ensembles ordonnés ; alors,*

1. $f \circ g \circ f = f$
2. *En plus les conditions suivantes sont équivalentes :*
   a) f *est injective,*
   b) g *est surjective,*
   c) $g \circ f = 1_P$.

Proposition 1.3. *Si* P *et* Q *sont des ensembles ordonnés, si une adjointe à gauche ou à droite de* f *existe, elle est unique : plus précisément, si* $f \dashv g : P \longrightarrow Q$ *et* $f \dashv h : P \longrightarrow Q$ *sont des adjonctions, alors* g *et* h *sont égales.*

De même, si $f \dashv h$ *et* $g \dashv h$ *sont des adjonctions, alors* f *et* g *sont égales.*

Proposition 1.4. *Soient* P, Q *et* R *des collections ordonnées.*
Soient $f \dashv g : P \longrightarrow Q$ *et* $h \dashv k : Q \longrightarrow R$ *des adjonctions ;*
alors $h \circ f \dashv g \circ k : P \longrightarrow Q$ *est une adjonction.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "f"] & Q \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[r, shift left, "h"] & R \arrow[l, shift left, "k"] \end{tikzcd}$$

Proposition 1.5. *Soient* P, Q, R *et* S *des ensembles ordonnés. Soient* $f \dashv g : P \longrightarrow Q$ *et* $h \dashv k : R \longrightarrow S$ *deux adjonctions ; alors* $(f \times h) \dashv (g \times k) : (P \times R) \longrightarrow (Q \times S)$ *où les produits* $(P \times R)$ *et* $(Q \times S)$ *sont munis de l'ordre défini composante par composante.*

Exemple 1.2.1. i) Toute bijection croissante dont la bijection réciproque est croissante a cette réciproque comme adjointe à gauche et à droite.

ii) Pour $a \in \mathbb{R}, a > 0$, l'application linéaire $x \longmapsto ax$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ordonné de la manière usuelle, a une adjointe à gauche et une adjointe à droite qui est la même fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{a}x$.

iv) Soit I l'ensemble ordonné $\{0\}$ où $0 \leq 0$. Soit P un ensemble ordonné. L'application unique $f : P \longrightarrow I$ possède un adjoint à droite ssi P possède un plus grand élément, auquel cas l'adjoint à droite $f_* : I \longrightarrow P$ envoie 0 sur ce plus grand élément. De manière duale, $f : P \longrightarrow I$ possède un adjoint à gauche ssi P possède un plus petit élément.

v) (Les Quantificateurs vus comme adjoints)
Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application, alors elle induit l' application "image reciproque" $f^{-1} : 2^Y \longrightarrow 2^X$. Cette dernière possède à la fois un adjoint à gauche noté $\exists_f : 2^X \longrightarrow 2^Y$ défini par :

$$\exists_f(A) = \{y \in Y, \exists_{x \in X}(f(x) = y \wedge x \in A)\} = \{f(x), x \in A\}$$

et un adjoint à droite noté $\forall_f : 2^X \longrightarrow 2^Y$ défini par :

$$\forall_f(A) = \{y \in Y, \forall_{x \in X}(f(x) = y \Longrightarrow x \in A)\} = \{y \in Y, f^{-1}\{y\} \subset A\}.$$

L'on peut effectivement vérifier que

$$\exists_f(A) \subset B \text{ ssi } A \subset f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(B) \subset A \text{ ssi } B \subset \forall_f(A).$$

$\exists_f(A)$ est parfois appelé image de A le long de f et $\forall_f(A)$ est parfois appelé image duale de A le long de f.

Une application croissante $f : P \longrightarrow Q$ détermine une application croissante notée $f^{op} : Q^{op} \longrightarrow P^{op}$. En plus, si $f \dashv g$, alors $g^{op} \dashv f^{op}$. Ainsi, le principe de dualité permet de changer un énoncé sur les adjoints à gauche en un énoncé sur les adjoints à droite et vice-versa.

Proposition 1.6. *Soit $f : P \longrightarrow Q$ une application entre ensembles ordonnés. Si f possède un adjoint à droite, alors f conserve tous les suprema (ceux qui existent dans P;) en d'autres termes si $S \subset P$ et si $\vee S$ existe, alors $\vee\{f(s), s \in S\}$ existe et vaut $f(\vee S)$. De manière duale, si f possède un adjoint à gauche, alors f conserve tous les infima existants.*

Proposition 1.7. *i) Soient P et Q des ensembles ordonnés et $g : Q \longrightarrow P$ une application croissante. On suppose que $inf(B)$ existe pour toute partie B de Q , et que g préserve les bornes inférieures ; alors g a une adjointe à gauche.*

ii) De même, si $sup(B)$ existe pour toute partie B de Q , et si g préserve les bornes supérieures, alors g possède une adjointe à droite.

Démonstration Posons pour tout $x \in Q, Q_x = \{y \in Q | x \leq g(y)\}$ et choisissons $f(x) = inf(Q_x)$, ce qui a un sens puisque toute partie de Q a une borne inférieure. Il suffit de montrer que $f(x) \leq z$ est équivalent à $x \leq g(z)$ pour tout $x \in P$ et tout $z \in Q$. Supposons d'abord $x \leq g(z)$. Alors $z \in Q_x$, donc $f(x) = inf(Q_x) \leq z$. Réciproquement, supposons $f(x) \leq z$. Comme g est croissante, on a $g(f(x)) \leq g(z)$. Il suffit donc de montrer que $x \leq g(f(x))$.

Or, $g(f(x)) = inf(g(Q_x))$, où $g(Q_x)$ est l'image directe de Q_x par g. Pour tout $y \in Q_x$, on a $x \leq g(y)$, donc x est plus petit que tous les éléments de $g(Q_x)$ et donc $x \leq inf(g(Q_x))$ et en fin $x \leq g(f(x))$. Le cas de l'adjoint à droite se traite de la même manière.

$\square$.

Le résultat qui suit, bien connu en théorie d'ordre, met le lien entre les opérateurs de co-fermeture et l'adjonction. Ce résultat est parfois appelé "l'unité des opposés."

Théorème 1.3. *Si*

$$P \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} Q$$

avec $f^* \dashv f_*$, l'endomorphisme $j = f_* f^* : P \longrightarrow P$ est un opérateur de fermeture (on noteP_j l'ensemble des éléments j-fermés) pendant que l'endomorphisme $k := f^* f_* : Q \longrightarrow Q$ est un opérateur de cofermeture.

Ensuite le couple (f^*, f_*) induit un couple de bijections :

$$(P_j, \leq) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} (Q_k, \leq)$$

1.3 La catégorie monoidale fermée Ord des ensembles ordonnés

Nous supposons le lecteur familié avec les notions de catégorie, foncteur, transformation naturelle, limites, colimite et adjonction fonctorielle. Si A et B sont deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$, nous notons par $\mathcal{C}(A, B)$ la classe des morphismes de A vers B.

En topologie, l'union disjointe de deux variétés differentiables est une variété differentiable en soi. En logique, la conjonction de deux formules est encore une formule. En langage de programmation, on peut combiner deux types de données pour en faire un type produit. Le concept de catégorie monoidale est une unification de ces trois derniers exemples. Une catégorie monoidale $\mathcal{V}$ possède un foncteur $- \otimes - : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ qui prend deux objets A et B et les met ensemble pour produire un nouvel objet $A \otimes B$. Pour formaliser ce concept nous faisons usage du produit binaire de deux catégories et plus précisement d'une catégorie avec elle même.

Définition 1.3.1. *Une structure monoidale sur une catégorie $\mathcal{V}$ est la donnée :*

1. *d'un foncteur $- \otimes - : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ appelé le produit tensoriel.*

2. *d'un objet I de $\mathcal{V}$ (appelé objet unité.)*
3. *d'un isomorphisme naturel, appelé associateur, qui à un triplet d'objets (A, B, C) associe un isomorphisme*
   $\mathfrak{a}_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$.
4. *de deux isomorphismes à gauche et à droite appelés uniteur à gauche et à droite associant à tout objet A de $\mathcal{V}$ des isomorphismes*
   $l_A : I \otimes A \longrightarrow A$ *et* $r_A : A \otimes I \longrightarrow A$.
   Ces données doivent rendre commutatifs les diagrammes suivants :
   pour tous A, B,

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "a_{A,I,B}"] \arrow[dr, "r_A \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes l_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

Equation triangulaire.

Pour tous A, B, C et D,

$$\begin{tikzcd}
& ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[dl, "a_{A\otimes B,C,D}"'] \arrow[r, "a_{A,B,C} \otimes 1_D"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "a_{A,B\otimes C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "a_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[dl, "1_A \otimes a_{B,C,D}"] \\
& A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) &
\end{tikzcd}$$

Equation pentagonale

Lorsque l'on veut calculer le produit tensoriel de quatre objets, il existe cinq façons de les parenthéser ; l'associateur permet par exemple de construire deux isomorphismes de $A \otimes (B \otimes (C \otimes D))$ vers $((A \otimes B) \otimes C) \otimes D$. L'équation pentagonale nous dit que ces deux isomorphismes sont égaux.

1. Dans *Ens*, on peut prendre le produit tensoriel $A \otimes B$ à être le produit cartesien $A \times B$, dans ce cas l'objet unité est un singleton ; Ce produit tensoriel n'est pas associatif car $(a, (b, c)) \neq ((a, b), c)$; mais il existe un isomorphisme naturel $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ et c'est cela l'associateur.
2. Dans la catégorie (**Ord**) des ensembles ordonnés et des applications croissantes, la structure monoidale s'obtient comme suit :

a) le tenseur $P \otimes Q$ est le produit cartésien $P \times Q$ des deux ensembles ordonnés P et Q muni de l'ordre composante par composante ;

b) l'objet unité est un singleton muni de l'égalité ;

c) l'isomorphisme canonique $(P \times Q) \times R \cong P \times (Q \times R)$ est l'associateur

d) les uniteurs sont $1 \times P \cong P \cong P \times 1$ et $P \times Q \cong Q \times P$ satisfaisant les conditions de cohérence voulues.

Définition 1.3.2. *Une catégorie monoidale $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est dite fermée à gauche s'il existe un foncteur $\multimap$: $\mathcal{V}^{op} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ (appelé foncteur hom interne) muni d'un isomorphisme naturel qui à tout triplet (A, B, C) de $\mathcal{V}$ associe*

$$\mathrm{C}_{ABC} : \mathcal{V}(A \otimes B, C) \rightsquigarrow Hom(A, B \multimap C).$$

Elle est dite fermée à droite s'il existe un foncteur $\rightsquigarrow$: $\mathcal{V}^{op} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ appelé foncteur hom interne muni d'un isomorphisme naturel qui à tout triplet (A, B, C) de $\mathcal{V}$ associe $\mathrm{C}_{ABC} : \mathcal{V}(A \otimes B, C) \longrightarrow Hom(B, C \rightsquigarrow A)$.

1. Dans une catégorie monoidale symétrique (celle dans laquelle on s'est donné un isomorphisme de symétrie $s_{AB} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$) il n'y a pas de difference majeur entre les concepts de catégorie monoidale fermée à gauche et de catégorie monoidale fermée à droite.
2. La catégorie Ens dont on a vu qu'elle est monoidale est en fait monoidale symétrique : les symétries s_{AB} étant donné par
$s_{AB} : A \times B \longrightarrow B \times A$, $(a, b) \longmapsto (b, a)$. Elle est aussi fermée (pour dire fermée à gauche et droite) : le foncteur hom interne $\multimap$ est définie par $A \multimap B = B^A$ l'ensemble des applications de A vers B; l'on peut vérifier les identités d'adjonction.
3. La catégorie **Ord**, est elle aussi, monoidale symétrique et fermée. Ici $A \multimap B = B^A$ est l'ensemble des applications de A vers B muni de l'ordre point par point.

Définition 1.3.3. *Etant donnée une catégorie symétrique $\mathcal{V}$. Une $\mathcal{V}$-catégorie $\mathcal{C}$ consiste en les donneés suivantes :*

1. *Une classe $\mathcal{C}_0$ d'objets*
2. *Pour tous objets A et B de $\mathcal{C}_0$ un objet $Hom(A, B)$ de $\mathcal{V}$ appelé objet des morphismes de A vers B.*
3. *Pour tous les objets A, B et C de $\mathcal{C}_0$, une loi de composition dans $\mathcal{V}$*
$\mathfrak{C}_{A,B,C} : Hom_{\mathcal{C}_0}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}_0}(B, C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}_0}(B, C)$.
4. *Pour tout objet A de $\mathcal{C}_0$ une fonction $\mu_A : I \longrightarrow Hom(A, A)$ de $\mathcal{V}$ appelé identité sur A.*

Ces données doivent satisfaire les axiomes d'associativité et d'unité que l'on exprime par la commutativité des diagrammes suivants :

Pour tout A, B, C, D et E

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(A,B) \otimes \mathcal{C}(B,C)) \otimes \mathcal{C}(C,D) \arrow[rr, "\approxeq"] \arrow[d, "\mathcal{C}_{A,B,C} \otimes 1"'] & & B \arrow[d, "1 \otimes \mathcal{C}_{B,C,D} \otimes 1"] \\
\mathcal{C}(A,C) \otimes \mathcal{C}(C,D) \arrow[r, "\mathcal{C}_{A,C,D}"'] & \mathcal{C}(A,D) & \mathcal{C}(A,B) \otimes \mathcal{C}(B,D) \arrow[l, "\mathcal{C}_{A,B,D}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{C}(A,B) \arrow[d, "\mu_A \otimes 1"] & \mathcal{C}(A,B) \arrow[l, "\approxeq"] \arrow[r, "\approxeq"] & \mathcal{C}(A,B) \otimes I \arrow[d, "1 \otimes \mu_B"] \\
\mathcal{C}(A,B) \otimes \mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "\mathcal{C}_{A,A,B}"'] & \mathcal{C}(A,B) & \mathcal{C}(A,B) \otimes \mathcal{C}(B,B) \arrow[l, "\mathcal{C}_{A,B,B}"']
\end{tikzcd}$$

Ce que nous appelons usuellement catégories sont en fait des catégories enrichies sur $(Ens, \times, 1)$.

Etant donné que le tenseur dans **Ord** est donné par le produit cartésien, une catégorie enrichie sur **Ord** est donc une catégorie $\mathcal{C}$ telle que pour tout couple d'objets X,Y, l'ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ est muni d'une structure d'ordre rendant croissante (en chacune des composantes) la composition
$\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Z)$ qui associe à un couple (g,f) le morphisme $g \circ f$. Une telle catégorie enrichie $\mathcal{C}$ possède une catégorie sous jacante $\mathcal{C}_0$ ayant les même objets que $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{C}_0(X,Y) = \mathbf{Ord}(1, Hom(X,Y))$. Comme pour toute catégorie $\mathcal{C}$ enrichie sur les ensembles ordonnés, il existe pour de telles catégories une notion de sous limites et de sous colimites qui sont des extensions des notions de limites et colimites. Par exemple :

1. L'on dit d'un morphisme $f : P \longrightarrow Q$ d'un **Ord**$-$catégorie $\mathcal{C}$ qu'il est un *sous monomorphisme* si pour tout morphisme $u, v : R \longrightarrow P$ de $\mathcal{C}, f \circ u \leq f \circ v$ implique $u \leq v$.
2. L'on dit d'un morphisme $f : P \longrightarrow Q$ d'un **Ord**$-$catégorie $\mathcal{C}$ qu'il est un sous épimorphisme si pour tout morphisme $u, v : Q \longrightarrow R$ de $\mathcal{C}$,
$u \circ f \leq v \circ f$ implique $u \leq v$.
3. $e : P \longrightarrow Q$ est un sous épimorphisme extrémal s'il ne peut pas se factoriser à travers un sous monomorphisme (c'est à dire si $e \leq m \circ g$ où m est un sous monomorphisme alors m est un sous isomorphisme.
4. $e : P \longrightarrow Q$ est un sous monomorphisme extrémal s'il ne peut pas se factoriser à travers un sous épimorphisme (c'est à dire si $e \leq g \circ m$ où m est un sous épimorphisme alors m est un sous isomorphisme.

5. Un sous égalisateur de la paire parallèle $f, g : Q \longrightarrow \mathtt{L}$ est un couple (P, h) avec $h : P \longrightarrow Q$ tel que $fh \leq gh$ et pour tout couple $(\mathtt{P'}, h')$ tel que $fh' \leq gh'$ il existe un unique $\varphi : \mathtt{P'} \longrightarrow P$ tel que $h \circ \varphi \leq h'$.
6. Un sous coégalisateur de la paire parallèle $f, g : Q \longrightarrow \mathtt{L}$ est un couple (P, h) avec $h : \mathtt{L} \longrightarrow P$ tel que $hf \leq hg$ et pour tout couple $(\mathtt{P'}, h')$ tel que $h'f \leq h'g$ il existe un unique $\varphi : P \longrightarrow \mathtt{P'}$ tel que $h' \leq \varphi \circ h$.
7. Un sous épimorphisme régulier est un sous épimorphisme qui est sous coégalisateur d'une paire parallèle.
8. Un sous monomorphisme régulier est un sous monomorphisme qui est un égalisateur d'une paire parallèle.

Remarque 1.3.1. La catégorie **Ord** possède deux sous catégories (non pleines) importantes qui vont nous intéresser par la suite :

1. La catégorie $\mathbf{Ord}_*$ formée des ensembles ordonnés et des applications croissantes résiduées (celles qui possèdent un adjoint à droite)
2. La catégorie (**Fib**) des fibrations formée des ensembles ordonnés et des fibrations discrètes entre eux ; par le mot *fibration* nous entendons toute application croissante $f : P \longrightarrow Q$ entre ensembles ordonnés satisfaisant la propriété de relèvement suivante : pour tout $p \in P$ et $q' \leq f(p)$ il existe un unique $p' \leq p$ tel que $f(p') = q'$.

Proposition 1.8. *Soit $f : P \longrightarrow Q$ une flèche dans la catégorie **Ord**, alors*

1. f est un monomorphisme ssi f est injective

2. f est un sous-monomorphisme ssi f est un plongement pour l'ordre.

Démonstration : Soit $f : P \longrightarrow Q$ un morphisme de **Ord**.

Supposons que f est un monomorphisme et montrons que f est injective. Soient $x, y \in P$ tels que $f(x) = f(y)$; considérons $u, v : P \longrightarrow P$ tels que $u(a) = x$ et $v(a) = y$ pour tout $a \in P$. On a $fu = fv$ et comme f est un monomorphisme, alors $u = v$ d'où $x = y$ donc f est injective. Reciproquement, supposons que f injective et montrons que f est un monomorphisme. Soient $u, v : M \longrightarrow P$ tels que $fu = fv$ montrons que $u = v$. $fu \leq fv$ entraine que $f(u(x)) = f(v(x))$ pour tout $x \in M$. Comme f est injective, alors $u(x) = v(x)$ pour tout $x \in M$; donc $u = v$. Ainsi f est un monomorphisme.

Supposons que f est un sous-monomorphisme et montrons que f est un plongement pour l'ordre. Soient $x, y \in P$ tels que $x \leq y$; comme f est un sous monomorphisme, alors f est une injection donc $f(x) \leq f(y)$. supposons maintenant que $f(x) \leq f(y)$ et $x \nleq y$, alors f n'est pas injectif ; ce qui est absurde donc $f(x) \leq f(y)$ entraine $x \leq y$ d'où f est un plongement. Réciproquement supposons que f est un plongement pour l'ordre et montrons que f est un sous monomorphisme. Soient $u, v : M \longrightarrow P$ tels que $fu \leq fv$ montrons que $u \leq v$. $fu \leq fv$ entraine que $f(u(x)) \leq f(v(x))$ pour tout $x \in M$. Comme f est un plongement, alors $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in M$; donc $u \leq v$. Ainsi f est un sous monomorphisme. $\square$.

Théorème 1.4. *Soit $f\colon P \to Q$ un morphisme de **Ord**. Les énoncés suivants sont équivalents*

1. *f est un épimorphisme*
2. *f est un sous épimorphisme*
3. *f est surjectif*

Démonstration. 3. $\Rightarrow$ 1. Qu'un morphisme surjectif soit épimorphique est trivial.

1. $\Rightarrow$ 3. Supposons que f soit un épimorphisme. Si f n'est pas surjective, alors il existe q_0 élément de Q qui n'a pas d'antécédent par f. Considérons le diagramme

$$P \xrightarrow{f} Q \underset{\chi_2}{\overset{\chi_1}{\rightrightarrows}} \{0,1\}$$

où χ_1 et χ_2 les applications caractéristiques des ensemble $\{q \in Q, q_0 \leq q\}$ et $\{q \in Q, q_0 < q\}$ et où la pair $\{0, 1\}$ est muni de l'ordre $0 < 1$. Il est alors clair que les applications χ_1 et χ_2 sont croissantes. Elles sont distinctes car $\chi_1(q_0) = 1$ tandis que $\chi_2(q_0) = 0$. Enfin q_0 ne faisant pas partie de l'image de f, la relation $q_0 \leq f(p)$ est équivalente à $q_0 < f(p)$ pour tout $p \in P$; d'où $f \circ \chi_1 = f \circ \chi_2$. Ce qui contredit le fait que f est un épimorphisme.

3. $\Rightarrow$ 2. Supposons $u \circ f \leq v \circ f$, pour deux applications croissantes $u, v\colon Q \to T$; l'on veut établir que $u \leq v$. Soit q un élément quelconque de Q; il existe $p \in P$, tel que $q = f(p)$; et alors $u(q) = u(f(p)) \leq v(f(p)) = v(q)$; d'où l'on déduit que $u \leq v$.

2. $\Rightarrow$ 3. Par l'absurde comme dans la preuve de 1. $\Rightarrow$ 3 dont on reprend d'ailleurs les notations. On suppose que f n'est pas surjective. De l'égalité $f \circ \chi_1 = f \circ \chi_2$, on obtient l'inégalité $f \circ \chi_2 \leq f \circ \chi_1$; cependant on n'a pas $\chi_2 \leq \chi_1$, car $\chi_2(q_0) = 0$ tandis que $\chi_1(q_0) = 1$. Ce qui contredit le fait que f est un sous épimorphisme. $\square$.

Chapitre Deux

La catégorie des monoïdes ordonnés

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *1. Une structure monoïdale sur un ensemble ordonné P est une multiplication $\bullet : P \times P \longrightarrow P$ croissante et associative*

2. Un semigroupe ordonné est un ensemble ordonné muni d'une structure monoïdale

3. Un monoïde ordonné est un semigroupe ordonné qui admet un élément neutre pour sa multiplication.

Exemple 2.1.1. Une relation binaire est un couple (E, R) où E est un ensemble et R une partie de $E \times E$. L'ensemble ordonné Rel(E) muni de l'inclusion, de la composition des relations et de la relation identique Δ_E est un monoïde ordonné.

Exemple 2.1.2. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire. $(Id(A), \subseteq, \cdot, A)$ où Id(A) est l'ensemble des idéaux bilatères de $(A, +, \cdot)$ et l'operation "." est le produit des idéaux, est un monoïde ordonné.

Exemple 2.1.3. $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$ est un monoïde ordonné.

Exemple 2.1.4. Les groupes ordonnés sont des monoïdes ordonnés.

Exemple 2.1.5. L'exemple que nous décrivons présentement va jouer un rôle important dans la suite.

Soit X un ensemble quelconque. Un mot sur l'alphabet X (ou simplement sur X) est une suite finie d'éléments de X, c'est-à -dire une application d'un intervalle initial de $\mathbb{N}$ vers X. On note X^* l'ensemble des mots sur X. En général, les mots seront notés sous forme de l-uplets, disons $(x_1 x_2 ... x_l)$ pour un mot non vide (l est appelé la longueur du mot) et ε pour le mot vide.

Nous admettons que deux mots w et w' sont égaux si et seulement si ils ont la même longueur et pour tout entier $i \leq l$, le i^{me} caractère de w est égal au i^{me} caractère de w'. Si $u = (u_1u_2...u_l)$ et $v = (v_1v_2...v_n)$ sont deux mots non vides sur X, la concaténation de u et v est le mot noté $u * v$ et défini par :

$$u * v = (u_1u_2...u_lv_1v_2...v_n)$$

Enfin $\varepsilon * u = u$ et $u * \varepsilon = u$. Il est facile de montrer que pour tout alphabet X, la concatenation est une opération associative ; le mot vide en est forcement l'élément neutre. Ainsi $(X^*, *, \varepsilon)$ est un monoïde universel dans ce sens que l'application $\eta_X : X \longrightarrow X^*$ qui à une lettre x associe le mot (x), de longueur un est injective et satisfait la propriété universelle : pour tout monoïde $(M, \cdot, e)$, toute application $f : X \longrightarrow M$ se factorise de manière unique à travers η_X

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & & X^* \arrow[dl, "\widehat{f}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

où $\widehat{f}$ est un homomorphisme de monoïdes.

Cette propriété universelle fait dire que le foncteur d'oubli

$$(Monodes) \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

qui envoie un monoïde sur son support possède un adjoint à gauche qui est précisement le foncteur qui à un ensemble X associe le monoïde libre X^* des mots sur X. On dit alors que X^* est le monoïde libre engendré par X. En se limitant juste au mots de longueur non nul sur X, dont l'ensemble est noté X^+, l'on obtient aussi sur X^+ une structure de semigroupe et une adjonction

$$\mathbf{Sgr} \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ens}$$

où $F = ()^+$

Exemple 2.1.6. Par langage d'alphabet X, nous entendons tout sous ensemble de X^* c'est-à-dire les éléments de 2^{X^*}. Ils heritent automatiquement des opérations et relations définies sur tout ensemble de parties d'un ensemble : l'union, l'intersection, l'inclusion. Si L_1 et L_2 sont deux langages, le produit de L_1 et L_2 noté $L_1 * L_2$ est le langage

$$L_1 * L_2 = \{w, (\exists u_1 \in L_1)(\exists u_2 \in L_1)(w = u_1 * u_2)\}$$

Il va sans dire que le produit des langages est une opération associative et le langage (ε) est l'élément neutre pour le produit des langages. Ainsi à nouveau, à partir d'un ensemble X l'on a obtenu un ensemble ordonné $(2^{X^*}, \subseteq)$ qui supporte une structure monoïdale donnée par le produit ci-dessus et $\{\varepsilon\}$. Le précédent est plutôt typique des monoïdes des mots sur un alphabet. Si l'on part d'un monoïde $(M, \cdot, e)$, l'on tire un monoïde $(2^M, *, \{e\})$ comme ci-dessus où l'opération $*$ sur 2^M est définie par $L_1 * L_2 = \{l_1 \cdot l_2; l_1 \in L_1, l_2 \in L_2\}$.

De même si l'on part d'un semigroupe $(M, \cdot)$, on en tire de manière identique un semigroupe $(2^M, *)$.

2.2 La catégorie des monoïdes ordonnés

2.2.1 La variété des monoïdes ordonnés

Si l'ordre d'un monoïde ordonné est un ordre de sup (resp. inf) demi-treillis et qu'on s'intéresse à la notion de classe équationnelle d'algèbres, toute inégalité $x \leq y$ peut avantageusement être remplacée par l'équation $x \vee y = y$ (resp. $x \wedge y = x$) ; c'est dans ce contexte que l'on parle d'identités en mentionnant des inégalités. La classe des monoïdes ordonnés est définie par les identités qui régissent un monoïde, et la quasi identité qui stipule que la multiplication binaire est monotone en chacun de ses arguments. Pour fixer les idées, si l'ordre $\leq$ est un ordre d'inf demi-treillis, si r, s, t sont des termes dans le langage d'une algèbre ordonnée (une algèbre universelle dont le support est munit d'un ordre compatible avec les opérations fondamentales de l'algèbre), si l'on a une liste de variables $y_1, \cdots, y_n$ alors toute quasi identité de la forme :

$$x \leq r(y_1, \cdots, y_n) \Rightarrow s(x, y_1, \cdots, y_n) \leq t(x, y_1, \cdots, y_n)$$

est équivalente à l'inéquation :

$$s(x \wedge r(y_1, \cdots, y_n), y_1, \cdots, y_n) \leq t(x \wedge r(y_1, \cdots, y_n), y_1, \cdots, y_n).$$

Cette observation fait de la classe des monoïdes ordonnés, dans le cas exceptionnel où l'ordre est un ordre d'inf demi treillis, une variété d'algèbres au sens de Birkhoff et pour être plus exacte une variété d'algèbres au dessus de la classe des ensembles. L'on aura noté le rôle très important de l'opération $\wedge$ dans cette remarque. Pour cela, dans le cas d'un ordre quelconque, il n'est pas évident de regarder la classe des monoïdes ordonnés comme une variété d'algèbres, à moins de relativiser la notion de variété. Cette relativisation est largement étudiée dans l'article séminal [3] de Bloom où il est sous entendu que l'on puisse parler de manière générale d'une variété d'objets au dessus d'une catégorie monoïdale fermée. Dans ce cas précis, la catégorie monoïdale fermée en question est celle des ensembles ordonnés.

Soit Σ une signature (algebrique) finitaire. Soit $\mathcal{K}$ une classe de Σ-algèbres ordonnées. Suivant [3],

- soit $\mathbf{Q}(\mathcal{K})$ la classe des Σ-algèbres ordonnées isomorphes à un quotient sous régulier $A/\theta, A \in \mathcal{K}$;
- $\mathbf{P}(\mathcal{K})$ la classe des produits de Σ-algèbres ordonnés de $\mathcal{K}$;
- $\mathbf{S}(\mathcal{K})$ la classe des sous algèbres régulières de Σ-algèbres ordonnés de $\mathcal{K}$

Définition 2.2.1. *L'on dit d'une classe de Σ-algèbres $\mathcal{K}$ qu'elle est une variété d'algèbres si : $\boldsymbol{Q}(\mathcal{K}) = \boldsymbol{P}(\mathcal{K}) = \boldsymbol{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$*

Si à une signature finitaire Σ l'on ajoute un symbole de relation " $\leq$ ", l'on obtient un type du 1^{er} ordre $\tau = \Sigma \cup \{\leq\}$. Pour ce genre de type, un terme de type τ sera tout simplement encore un Σ-terme mais les identités (dites ordonnées) seront des chaînes de caractères $t \leq t'$ où t et t' sont des termes de type Σ. La notion de modèle d'une identité $t \leq t'$ ou même d'un ensemble Ω d'identités est immédiate ; par exemple un modèle de $t \leq t'$ sera une Σ-algèbre ordonné $(A, F, \leq_A)$ dans lequel $t^A \leq t'^A, t^A$ étant l'interprétation de t dans (A, F). L'on note comme dans le cas non ordonné $Mod(\Omega)$ l'ensemble des identités de Ω. C'est une variété d'algèbres ordonnées [[3], proposition2.1] $\mathcal{K}$ est une variété de Σ-algèbres ordonnées s'il existe un ensemble d'identités ordonnées Ω tel que $\mathcal{K} = Mod(\Omega)$. Tout comme pour les variétés au sens de Birkhoff, la variété des monoïdes ordonnés devient une catégorie si l'on requiert que les morphismes préservent les opérations et les relations ; d'où la notion d'application monoïdale que nous définissons.

Définition 2.2.2. *Etant donné deux monoïdes ordonnés $\boldsymbol{P} = (P, \leq, \bullet, e)$ et $\boldsymbol{Q} = (Q, \leq, \bullet, e)$, une application monoïdale $f : \boldsymbol{P} \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ est une application croissante $f : P \longrightarrow Q$ qui conserve la multiplication et l'élement neutre.*

Il est clair qu'une composition d'applications monoïdales en est une ; et que si P est un monoïde ordonné, alors l'identité $id_P : P \longrightarrow P$ est une application monoïdale. On en déduit la catégorie **Mve** des monoïdes ordonnés et des applications monoïdales entre eux.

Toute variété au sens de Bloom, on l'a signalé, est une catégorie ; dans ce cas la nature des flèches est fixée une fois pour toutes par le type de signature de la variété. Les classes de monomorphismes et d'épimorphismes de cette catégorie ont été largement étudiées dans l'article [35]. Nous en rappelons les principaux résultats obtenus accompagnés de quelques commentaires. Certains de ces résultats seront redémontrés dans le cas précis des monoïdes ordonnés avec pour objectif de préciser les notations et examiner les changements survenus lorsque la notion de morphisme est modifiée.

L'on sait de manière générale que dans toute catégorie, tout épimorphisme régulier est un épimorphisme extrémal et que tout monomorphisme régulier est extrémal. Le résultat qui suit, bien que prouvé dans [35] est en réalité immédiat.

Proposition 2.1 ([35], Lemme 1). *Dans toute catégorie enrichie sur* $\boldsymbol{Ord}$, *tout épimophisme sous régulier est un épimorphisme sous extrémal.*

Proposition 2.2 ([35], Théorème 2). *Soit* $\mathcal{V}$ *une classe d'algèbres ordonnées qui est stable pour les isomorphismes, les sous algèbres et les produits d'algèbres, alors l'algèbre libre au dessus d'un ensemble ordonné existe, pourvu que cette classe possède au moins une algèbre à deux éléments.*

En réalité ce résultat annonce l'existence d'un foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli évident de $\mathcal{V}$ vers la catégorie **Ord**, lorsque la classe $\mathcal{V}$ est regardée comme une sous catégorie pleine de la catégorie de toutes les algèbres ordonnées d'un type donné.

Proposition 2.3 ([35], Proposition 2). *Les isomorphismes dans toute variété d'algèbres ordonnées sont exactement les morphismes qui sont supportés par des plongements (pour l'ordre) surjectifs.*

Ce résultat marque déjà une différence nette avec les variétés au sens de Birkhoff, où *les isomorphismes sont exactement les morphismes bijectifs.*

Proposition 2.4 ([35], Proposition 2). *Tout monomorphisme régulier (extrémal) dans une variété d'algèbres ordonnés est un plongement.*

Mais seulement il existe des variétés d'algèbres ordonnées où les morphismes qui sont supportés par des plongements ne sont pas nécessairement des monomorphismes réguliers. D'ailleurs un exemple est fourni dans [35] à la page 7. L'auteur termine ses investigations sur les monomorphismes en faisant remarquer que les monomorphismes réguliers et les morphismes qui sont des plongements coïncident dans des variétés d'algèbres qui possèdent la propriété d'amalgamation par rapport à la classe des plongements [[35] proposition 5].

Proposition 2.5 ([35], Proposition 6). *Dans une variété au sens de Bloom,*

1. *tout épimorphisme sous extrémal est surjectif.*
2. *tout épimorphisme extrémal est surjectif*

Et comme très souvent, les épimorphismes ne sont pas forcément surjectifs ; voir [35] page10.

Enfin citons ces deux derniers résultats importants de caractérisation. pour bien cerner les choses, la notion de Q-morphisme renvoie à un affaiblissement à la fois de la surjectivité et de la reflection de l'ordre ; pour une définition plus précise voir [35] [définiton 3, page 2.]

Proposition 2.6 ([35], Théorème 3). *Soit $f\colon A \to B$ un épimorphisme dans une catégorie (variété) d'algèbres ordonnées. Les énoncés suivants sont équivalents*

1. *f est sous régulier*
2. *f est sous extrémal*
3. *f est surjectif*

Et pour tout résumer, deux systèmes de factorisation des variétés d'algèbres ordonnées sont mis en évidence qui sont :

1. **(Epis réguliers, monomorphismes)**
2. **(Epis sous réguliers, sous monomorphismes)**

Proposition 2.7 ([35], Théorème 4). *Soit $f\colon A \to B$ un épimorphisme dans une catégorie (variété) d'algèbres ordonnées. Les énoncés suivants sont équivalents*

1. *f est régulier*
2. *f est extrémal*
3. *f est un Q-morphisme*

2.2.2 Le monoïde ordonné libre sur un ensemble ordonné

On commence par définir la noion de "flèche universelle". Cette notion a déjà été utilisée dans l'exemple sur le monoîde des mots sur un alphabet.

Rappels 2.1. *Si $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est un foncteur et si C est un objet de $\mathcal{C}$, une flèche universelle de C vers G est un couple (R_C, η_C) formé d'un objet R_C de $\mathcal{D}$ et d'une flèche $\eta_C : C \to G(R_C)$ dans $\mathcal{C}$ telle que pour tout couple (D, f) formé d'un objet D de $\mathcal{D}$ et d'une flèche $f\colon C \to G(D)$ il existe une et une seule flèche $f'\colon R_C \to D$ telle que $G(f') \circ \eta_C = f$. Le couple (R_C, η_C) est aussi appelé le reflet de l'objet C le long du foncteur G.*

La propriété universelle vérifiée par le couple (R_C, η_C) fait que ce couple lorsqu'il existe est unique à isomorphisme près.

Si pour tout objet C l'on a fixé une fois pour tout le reflet (R_C, η_C) alors la correspondance $C \mapsto R_C$ s'étend, en un foncteur $R\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui alors est l'adjoint à gauche de G ayant pour unité la transformation naturelle $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ R$ dont les composantes sont les η_C.

Nous partons de l'existence du foncteur objet libre de **Ord** dans **Mve** pour établir celle des limites. Avant tout, donnons d'abord la construction d'un monoide libre sur un ensemble.

Soit X un alphabet non nécessairement fini muni d'un ordre ; cet ordre peut être prolongé sur les mots comme suit :

$$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) \leq (\beta_1\beta_2\cdots\beta_m) \text{ ssi } n = m \text{ et } \alpha_i \leq \beta_i \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq n.$$

Cette relation définit un ordre $\leq$ sur X^*; et par suite $(X^*, \leq, c, \varepsilon)$ où c désigne la concaténation est un monoïde ordonné. C'est aussi le monoïde ordonné libre sur l'ensemble ordonné $(X, \leq)$.

Proposition 2.8. *La construction $\varphi : (X, \leq) \longmapsto (X^*, \leq, c, \varepsilon)$ est fonctorielle en ce sens que si $f : (X, \leq) \longrightarrow (M, \leq, *, e)$ est un morphisme il existe un unique morphisme de la catégorie **Mve** $g : (X^*, \leq, c, \varepsilon) \longrightarrow (M, \leq, *, e)$ tel que $g \circ \varphi = f$*

$$\mathbf{Mve} \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ord}$$

où U désigne le foncteur d'oubli évident et F son adjoint à gauche.

La restriction de la construction précédente aux mots de longueur non nulle fournit la situation d'adjonction

$$\mathbf{Sgr} \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ord}$$

2.3 Limites dans Mve et Sgr

Comme les adjoints se composent, les limites existent dans la catégorie des monoïdes ordonnés. Leurs constructions se font dans **Ord** et l'on transporte dans **Mve** par le foncteur objet libre.

Théorème 2.1. *Les produits arbitraires existent dans la catégorie des monoïdes ordonnés.*

Démonstration Soit $((M_i, \leq_i, *_i, e_i))_{i\in I}$ une famille de monoïdes ordonnés ; le monoïde produit $(\prod M_i, \leq, *, e)$ est défini comme suit :

1. $\leq$: $f \leq g$ si pour tout $i \in I, f(i) \leq_i g(i)$
2. $* : f * g : I \longrightarrow \cup M_i$ avec $(f * g)(i) = f(i) *_i g(i)$

3. $e : I \longrightarrow \cup M_i$ avec $e(i) = e_i$

Ces données, munies des projections $p_i : \prod M_i \longrightarrow M_i$ à f associe $f(i)$ satisfont la propriété universelle : si on se donne un couple (M, φ_i) formé d'un monoïde ordonné et d'un cône $(\varphi_i : M \longrightarrow M_i)$ de morphismes, alors il existe un unique morphisme de monoïdes ordonnés $\varphi : M \longrightarrow \prod M_i$ tel que $\varphi_i = p_i \circ \varphi$

□

L'égalisateur d'une paire parallèle $f, g : (M, \leq, *_M, e_M) \longrightarrow (N, \leq, *_N, e_N)$ est donné par l'ensmble $E = \{x \in M, f(x) = g(x)\}$ qui hérite de la structure de M et de l'insertion $E \longrightarrow M$ qui un homomorphisme.

En résumé, le foncteur d'oubli U : **Mve** $\longrightarrow$ **Ens** crée les limites et comme **Ens** possède toutes les limites, U les conserve aussi.

La démarche est la même pour la catégorie **Sgr**.

2.4 Colimites dans Mve et Sgr

Les colimites existent aussi dans la catégorie des monoïdes ordonnés. Elles sont la conséquence de l'existence des coproduits et des coégalisateurs (cf. [23]). La construction des coproduits se fait comme suit. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de monoïdes ordonnés ; le coproduit $\coprod_i M_i$ est le sous monoïde du produit $\prod_i M_i$ formé des éléments (x_i) tels que $\{i \in I : x_i \neq e_i\}$ est un ensemble fini. Pour $i \in I$, la flèche de coprojection $\mu_i \colon M_i \to \coprod_i M_i$ est donnée par $\mu_i(x) = (x_i)$ où pour tout $j \neq i$, $x_j = e_j$ et $x_i = x$. Il est alors aisé de prouver la propriété universelle suivante :

Proposition 2.9. *Pour tout monoïde ordonné M et toute famille $(f_i \colon M_i \to M)_i$ de morphismes de la catégorie **Mve** il existe un unique morphisme $f \colon \coprod_i M_i \to M$ de **Mve** telle que $f \circ \mu_i = fi$.*

Démonstration Pour la preuve, il suffit de prendre le morphisme $f \colon \coprod_i M_i \to M$ tel que $f((x_i)) = f_i(x_i)$.

□ Le constat important est que la construction ci dessus n'est plus valable pour les semigroupes ordonnés ; à cause de l'absence d'élément neutre. Ce que l'on fait alors c'est de partir d'une famille de semigroupes ordonnés (S_i), que l'on peut supposer deux à deux disjoints ; l'on considère l'ensemble $\coprod_i S_i$ de tous les mots non vides $(a_1 a_2 \cdots a_n)$ où chaque a_i appartient à un S_i, $i \in I$ et $1 \leq k \leq n, \in \mathbb{N}$ et deux a_i adjacents ne sont pas dans le même S_i. Le coproduit $\coprod_i S_i$ est alors défini par :

$$(a_1 \cdots a_n)(b_1 \cdots b_m) = \begin{cases} (a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m) & \text{si} \quad a_n \in S_i, b_1 \in S_j, i \neq j \\ (a_1 \cdots (a_n b_1) \cdots b_m) & \text{si} \quad a_n, b_1 \in S_i \end{cases}$$

L'ordre sur ces mots est encore défini comme dans le monoïde des mots. Il est immédiat de vérifier que l'on a ainsi une structure de semi-groupe ordonné. En définissant les morphismes de coprojection $\mu_i \colon S_i \to \coprod_i S_i$ comme dans les monoïdes , on obtient encore la propriété universelle :

Proposition 2.10. *Pour tout semigroupe ordonné S et toute famille $(f_i \colon S_i \to S)_i$ de morphismes de la catégorie **Sgr** il existe un unique morphisme $f \colon \coprod_i S_i \to S$ de **Sgr** telle que $f \circ \mu_i = fi$.*

La construction des coégalisateurs est un peu plus compliquée et l'on doit d'abord examiner la notion de quotient dans la catégorie **Mve**.

Définition 2.4.1. *Une congruence d'ordre sur un monoïde ordonné $(M, \leq, \otimes, e)$ est une congruence θ sur $(M, \leq, \otimes, e)$ telle que le monoïde quotient M/θ soit muni d'un ordre pour lequel l'application quotient $\theta^\sharp \colon M \to M/\theta$ est un morphisme dans la catégorie **Mve**.*

Une intersection quelconque de congruences d'ordre sur un monoïde ordonné M est encore une congruence d'ordre et donc cela fait sens de parler d'une congruence d'ordre engendrée par toute partie H de $M \times M$. Nous décrivons à présent une telle congruence. L'on peut retrouver cette description dans [38].
Soit θ une relation sur un ensemble ordonné $(M, \leq)$. Une θ-chaine d'un élément $x \in M$ vers un élément $y \in M$ est une suite finie $x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n$ où

$$x \leq x_1 \,\theta\, x'_1 \leq x_2 \,\theta\, x'_2 \leq ... \leq x_n \,\theta\, x'_n \leq y.$$

Lorsqu'il existe une θ-chaine de x à y l'on note $x \leq_\theta y$. Une θ-chaine est dite close si ses deux extrémités sont identiques. Nous rappelons ici une caractérisation des congruences d'ordre sur les monoïdes ordonnés

Proposition 2.11. *[38] Une congruence sur un monoïde ordonné M est une congruence d'ordre si et seulement si pour tout x dans M, toute chaine close est contenue dans une classe d'équivalence : $x \leq_\theta y \leq_\theta x \Longrightarrow x\theta y$.*

Si θ est une congruence d'ordre sur M alors le monoïde quotient M/θ muni de l'ordre

$$\theta^\flat(x) \sqsubseteq \theta^\flat(x') =_{def} x \leq_\theta x',$$

où $\theta^\flat(x)$ désigne la classe de x modulo θ, est un monoïde ordonné.

Le théorème suivant donne un exemple générique des congruences d'ordre.

Théorème 2.2. *Si $f \colon P \to Q$ est un morphisme de monoïdes ordonnés, alors le noyau d'équivalence* $\mathrm{Ker}(f)$ *est une congruence d'ordre.*

Démonstration soit $f : (P, \leq, \bullet) \longrightarrow (Q, \leq, \bullet)$ un morphisme de monoïdes ordonnés ; le noyau d'équivalence $\mathrm{Ker}(f)$, on le sait, est une congruence sur l'algèbre$(P, \bullet)$. Soient $m, n \in P$ tels que $m \leq_{\mathrm{Ker}(f)} n \leq_{\mathrm{Ker}(f)} m$ montrons que $m \,\mathrm{Ker}(f) n$.

L'inégalité $m \leq_{\mathrm{Ker}(f)} n$ signifie qu'il existe une chaîne $m_1, m'_1, m_2, m'_2, ..., m_p, m'_p$ telle que $m \leq m_1$ et $f(m_1) = f(m'_1); m'_1 \leq m_2$ et $f(m_2) = f(m'_2); ...;$ $m'_{p-1} \leq m_p$ et $f(m_p) = f(m'_p); m'_p \leq n$.

L'inégalité $n \leq_{\mathrm{Ker}(f)} m$ signifie qu'il existe une chaîne $n_1, n'_1, n_2, n'_2, ..., n_k, n'_k$ telle que $n \leq n_1$ et $f(n_1) = f(n'_1); n'_1 \leq n_2$ et $f(n_2) = f(n'_2); ...; n'_{k-1} \leq n_k$ et $f(n_k) = f(n'_k); n'_k \leq m$.

Comme f est croissante, on obtient d'une part

$$f(m) \leq f(m_1) \leq f(m_2) \leq ... \leq f(m_p) \leq f(n);$$

et d'autre part

$$f(n) \leq f(n_1) \leq f(n_2) \leq ... \leq f(n_k) \leq f(m);$$

donc $f(m) = f(n)$ par conséquent $m \,\mathrm{Ker}(f) n$.

$\square$

Revenons à la congruence d'ordre engendrée par une relation R; sa construction est expliquée dans [34]. L'on commence par définir une relation $\alpha(R)$ par :

$$a\,\alpha(\mathrm{R})\,a' \text{ ssi } a = a' \text{ ou il existe } x_i, x'_i, s_i, t_i \text{ avec } (x_i, x'_i) \in R \text{ tel que}$$

$$a = t_1 x_1 s_1, t_1 x'_1 s_1 = t_2 x_2 s_2 \ldots a' = t_n x'_n s_n.$$

Cette relation est un préordre compatible avec l'ordre défini dans M.

L'on connait la construction d'un ordre à partir d'un préordre par passage à un quotient convenable. C'est ainsi que l'on définit à nouveau une congruence $\nu(R)$ à partir de $\alpha(R)$ par :

$$a\,\nu(\mathrm{R})\,a' \text{ ssi } a \leq_{\alpha(R)} a' \leq_{\alpha(R)} a$$

et sur le quotient $M/\nu(R)$ on a l'ordre $[a] \leq [a']$ ssi $a \leq_{\nu(R)} a'$. L'on montre finalement que $\nu(R)$ est la plus petite congruence d'ordre sur M telle que $(x, x') \in R \Longrightarrow [x] \leq [x']$.

Enfin la relation $\theta(R)$ définie par : $\theta(R) = \nu(R \cup R^0)$ est la congruence d'ordre cherchée c'est à dire celle engendrée par R.

Soit

$$Q \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} P$$

deux morphismes de la catégorie **Mve**. On considère sur P la congruence d'ordre $\nu(R)$ engendrée par la relation : $R = \{(f(x), g(x)), x \in Q\}$; alors le diagramme

$$Q \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{h} P/\nu(R)$$

est un coégalisateur.

2.5 Autres catégories liées aux monoïdes ordonnés et les résultats y afférents

A côté de la catégorie **Mve** qu'il faut taxer de naturelle puisqu'elle est issue d'une classe Ω d'identités, on peut envisager d'autres tout en gardant les mêmes objets. C'est ainsi que nous notons par :

1. **Rmve** la catégorie des monoïdes ordonnés et des applications multiplicatives résiduées (c'est à dire possedant un adjoint à droite).
2. **Smve** la catégorie des monoïdes ordonnés et des applications sous multiplicatives monotones.
3. **Rsmve** la catégorie des monoïdes ordonnés et des applications sous multiplicatives résiduées.

Ces quatre catégories ont les mêmes objets mais diffèrent par les morphismes. La prémière a été étudiée profondement dans le document [35] dans l'étude des algèbres ordonnées. Nous avons les inclusions :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mve} \arrow[r] & \mathbf{Smve} \\ \mathbf{Rmve} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{Rsmve} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Théorème 2.3. *Dans la catégorie **Mve**, les monos sont exactement les morphismes injectifs et les sous monos sont exactement les morphismes qui sont aussi des plongements pour l'ordre.*

Démonstration Le fait qu'un morphisme supporté par une application injective soit un mono va de soit. Réciproquement, soit $m\colon \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ un monomorphisme entre des monoïdes ordonnés ; supposons $m(p) = m(p')$. Remarquons tout de suite que le monoïde ordonné libre sur un ensemble X est simplement $(X^*, =)$ où X^* désigne le monoïde libre sur X. Ainsi considérons le diagramme.

$$\{0\}^* \underset{f_{p'}}{\overset{f_p}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{m} Q$$

où f_p est défini par $f_p(0) = p$ et de même $f'_{p'}0) = p'$. Par hypothèse l'on a $m \circ f_p = m \circ f_{p'}$; d'où $f_p = f_{p'}$ car m est un monomorphisme et par conséquent $p = p'$.
Comme ci dessus, il est facile de vérifier qu'un morphisme supporté par un plongement pour l'ordre est un sous-monomorphisme. La réciproque se montre comme ci dessus en évoquent les constructions libres. $\Box$.

Définition 2.5.1. *Soit $\boldsymbol{P}$ un monoïde ordonné,*

1. *un monoïde $\boldsymbol{Q}$ est un sous monoïde ordonné de $\boldsymbol{P}$ si $Q \subseteq P, Q$ est un sous monoïde de P et $\leq_Q \subseteq \leq_P$.*
2. *Un monoïde $\boldsymbol{Q}$ est un sous monoïde ordonné régulier si $Q \subseteq P, Q$ est un sous monoïde de P et $\leq_Q = \leq_P \cap (Q \times Q)$. Dans ce dernier cas l'inclusion $Q \hookrightarrow P$ est un morphisme de monoïdes ordonnés.*

Toujours dans l'hypothèse que $(P, \leq_P, \cdot_P)$ et $(Q, \leq_Q, \cdot_Q)$ sont des monoïdes ordonnés avec $Q \subseteq P$, si l'on veut faire de $(Q, \leq_Q, \cdot_Q)$ un sous monoïde régulier de $(P, \leq_P, \cdot_P)$ dans la catégorie **Rmve** il faudra tout d'abord exiger que le foncteur d'inclusion $i\colon Q \hookrightarrow P$ soit un foncteur plein (ce qui revient à dire que l'ordre de Q est la trace de l'ordre de P) et qu'il admette un adjoint à droite i_*. Il revient au même d'exiger que Q satisfasse la propriété

$$\text{pour tout } p \in P, \max\{q \in Q, q \leq p\} \text{ existe}$$

et alors i_* sera défini par

$$i_*(p) = \max\{q \in Q, q \leq p\}$$

Au vu de ce qui a été dit dans les rappels sur les opérations de cofermeture dans le chapitre 1, il revient au même de requérir qu'il existe sur P une opération de cofermture $c\colon P \to P$ pour laquelle $Q = P_c$. Nous venons ainsi de terminer la description des quotients réguliers des monoïdes ordonnés par les congruences d'ordre. Nous allons introduire le concept de quotient quantique dont nous verrons plus tard qu'elle est équivalente à la notion de quotient régulier.

Définition 2.5.2. *Soit $(P, \leq, .)$ un monoïde ordonné. Un conoyau quantique c sur P est une opération de cofermeture vérifiant : $c(x)c(y) \leq c(xy)$ pour tout $x, y \in P$.*

Lemme 2.1. *Soit $(P, \leq, *)$ un monoïde ordonné. $k : P \longrightarrow P$ un opérateur de cofermeture sur P. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1 $k(a * b) \leq k(a) * k(b)$

2 $k(k(a) * k(b)) = k(a * b)$

Démonstration On suppose $k(a*b) \leq k(a)*k(b)$; alors $k(k(a*b)) \leq k(k(a)*k(b))$ c'est à dire $k(a*b) \leq k(k(a)*k(b))$ car k est idempotent. D'autre part on a $k(a) \leq a$ et $k(b) \leq b$, donc $k(a)*k(b) \leq a*b$ car $\leq$ est compatible avec l'opération de P; par conséquent $k(k(a)*k(b)) \leq k(a*b$; d'où l'égalité. Reciproquement supposons que $k(k(a)*k(b)) = k(a*b)$. On sait que $k(a*b) \leq k(a*b)$; alors $k(a*b) \leq k(k(a)*k(b)) = k(a*b)$ et donc $k(k(a*b)) \leq k(k(a)*k(b))$ par conséquent $k(a*b) \leq k(a)*k(b)$ car k est croissante.

□.

Lemme 2.2. $(P, \leq, *)$ *est un monoïde ordonné ; k est un conoyau quantique sur* $(P, \leq, *)$; *alors L'ensemble* P_k *des élements* $k-$*cofermés muni de l'ordre induit, de la multiplication* $*_k$, *avec* $a *_k b = k(a*b)$ *et de* $k(e)$ *est un sous monoïde ordonné régulier.*

Démonstration Montrons que $(P_k, \leq, *_k, k(e))$ est un sous monoïde ordonné régulier.

$P_k = \{a \in P, k(a) = a\} \subseteq P$. Soient $a, b \in P_k$.

$$\begin{aligned} k(a *_k b) &= k(k(a*b)) \\ &= k(a*b) \text{ car k est idempotent} \\ &= a *_k b \end{aligned}$$

On a toujours $k(e) \leq e$. D'autre part, $e \leq k(e) \Longleftarrow k(e) \leq k(k(e))$ c'est à dire $k(e) \leq k(e)$.

De plus, $k(k(e)) = k(e)$ car k est idempotent ; et on a bien $\leq_k = \leq_P \cap (P_k \times P_k)$.

Ainsi, $(P_k, \leq, *_k, k(e))$ est un sous monoïde ordonné régulier.

□

Théorème 2.4. *Soient* $(P, \leq, *)$ *et* $(Q, \leq, .)$ *deux monoïdes ordonnés et* $Q \subseteq P$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $(Q, \leq, .)$ *est un sous monoïde régulier de* $(P, \leq, *)$
2. *Il existe un conoyau quantique c sur* $\boldsymbol{P}$ *tel que* $Q = P_c$ *et* $x*y = c(x*y)$

Démonstration 2) $\Longrightarrow$ 1) Supposons que **Q** est un sous monoïde régulier de **P**; alors l'injection $i : Q \hookrightarrow P$ admet un adjoint à droite i_*.
$c = i \circ i_* : P \to P$ est une opération de cofermeture sur P.
Soient $x, y \in P$; on a $c(x)*c(y) = i \circ i_*(x) * i \circ i_*(y) = i(i_*(x) * i_*(y))$. L'on veut montrer que $i(i_*(x)*i_*(y)) \leq i(i_*(x*y))$, ce qui revient à montrer que

$i_*(x)*i_*(y) \leq i_*(i(i_*(x*y)))$, ou encore que $i_*(x)*i_*(y) \leq i_*(x*y)$, ou aussi que $i(i_*(x)*i_*(y)) \leq x*y$, ou encore que $i(i_*(x))*i(i_*(y)) \leq x*y$. Or $i(i_*(x)) \leq x$ et $i(i_*(y)) \leq y$ donc $i(i_*(x))*i(i_*(y)) \leq x*y$. Montrons que $Q = P_c$. Soit $x \in Q, c(x) = i(i_*(x)) = i(max\{q \in Q, q \leq x\}) = i(x) = x$. Ainsi $Q \subseteq P$. Reciproquement, soit $x \in P_c$, alors $c(x) = x$; donc $i(i_*(x)) = x$ ie $i_*(x) = x$ d'où $x \in Q$ et donc $P_c \subseteq Q$.

2) $\Longrightarrow$ 1) On suppose qu'il existe un conoyau quantique c sur P tel que $Q = P_c$; montrons que Q est un sous monoïde régulier de P.

On a $Q \subseteq P$; l'inclusion $i : Q \hookrightarrow P$ admet $c : P \to Q$ comme adjoint à droite. En effet, $i(x) \leq y \Rightarrow x \leq y$. Comme c est croissante et $x = c(x)$, alors $x \leq c(y)$. Reciproquement, si $x \leq c(y)$, alors $x \leq c(y) \leq y$ donc $i(x) \leq y$.

□

Définition 2.5.3 (La notion de noyau quantique pour les monoïdes ordonnés)**.** *Un noyau quantique sur un monoïde ordonné $(M, \leq, \cdot, e)$ est une opération de fermeture $j\colon M \to M$ satisfaisant l'inégalité $j(m)\cdot j(m') \leq j(m\cdot m')$ pour tout m et m' dans M.*

Lemme 2.3. *Soit $(P, \leq, \otimes, e)$ un monoïde ordonné.*
$j : P \longrightarrow P$ un opérateur de fermeture sur P. Sont équivalents :

1 $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$

2 $j(j(x) \otimes j(y)) = j(x \otimes y)$

Démonstration On suppose $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$ alors
$j(j(x) \otimes j(y)) \leq j(j(x \otimes y))$ d'où $j(j(x) \otimes j(y)) \leq j(x \otimes y)$. D'autre part on a $x \leq j(x)$ et $y \leq j(y)$, donc $x \otimes y \leq j(x) \otimes j(y)$ car $\leq$ est compatible avec l'opération de P; par conséquent $j(x \otimes y) \leq j(j(x) \otimes j(y))$. Reciproquement supposons que $j(j(x) \otimes j(y)) = j(x \otimes y)$; comme pour tout $x \in P, x \leq j(x)$, alors
$j(x) \otimes j(y) \leq j(j(x) \otimes j(y)) = j(x \otimes y)$. Ainsi, $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$.

□.

Théorème 2.5. *(1) Si j est un noyau quantique sur un monoïde ordonné $(P, \leq, *, e)$, alors l'image P_j de P par j muni de l'ordre induit, de la multiplication $*_j$ définie par*

$$m *_j m' = j(m * m')$$

et de l'élément neutre $j(e)$ est un monoïde ordonné, l'application $P \to P_j$ est un morphisme de monoïdes ordonnés, et le diagramme

$$P \overset{j}{\underset{Id_P}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{j} P_j$$

est un coégalisateur.

(2) Réciproquement tout monoïde ordonné quotient d'un monoïde ordonné P est de la forme P_j pour un noyau quantique convenable défini sur le monoïde ordonné P.

Démonstration Montrons que $(P_j, \leq, *_j, j(e))$ est un monoïde ordonné.

– Associativité de $*_j$. Soient $a, b, c \in P_j$.
  On a $a *_j (b *_j c) = a *_j (j(b * c) = j(a * j(b * c))$. On a :

$$\begin{array}{rcl} j(a * j(b * c)) & = & j(j(a) * j(b * c)) \\ & = & j(a * (b * c)) \\ & = & j((a * b) * c) \\ & = & j(j(a * b) * j(c)) \\ & = & j((a *_j b) * c) \\ & = & (a *_j b) *_j c \end{array}$$

– Neutralité de $j(e)$. Soit $a \in P_j$, $a *_j j(e) = j(j(a) * j(e)) = j(a * e) = j(a) = a = j(j(e) * j(a)) = j(j(e) * a) = j(e) *_j a$. Ainsi $(P_j, \leq, *_j, j(e))$ est un monoïde ordonné.

– L'on a déjà fait remarquer que le couple

$$P \underset{i_P^{P_j}}{\overset{j}{\rightleftarrows}} P_j$$

  fait de j une application résiduée.

$\square$

L'on est amené à comparer les deux notions de quotient. Cela est rendu facile par la deuxième partie du théorème précédent qui stipule que tout quotient provient d'un noyau quantique. Cela nous permet d'énoncer le théorème de bijectivité suivant :

Théorème 2.6 (théorème fondamentale). *Il existe une correspondance bijective entre les congruences d'ordre sur un monoïde ordonné et les noyaux quantiques sur ce même monoïde ordonné.*

Démonstration Partons d'une congruence régulière θ sur un monoïde ordonné $(P, \leq, *, e)$. Le morphisme $\theta^\flat \colon P \to P/\theta$ donne lieu au noyau quantique $j_\theta := \theta^\flat_* \circ \theta^\flat \colon P \to P$. D'où l'application $\theta \mapsto j_\theta$.

Réciproquement si l'on part d'un noyau quantique j sur P, alors l'on obtient un morphisme de monoïde ordonné $j \colon (P, \leq, \cdot, e) \to (P_j, \leq, \cdot_j, j(e))$. Ce dernier morphisme donne lieu au noyau quantique $\theta_j = \mathrm{Ker}(j)$ sur P; d'où l'application $j \mapsto \theta_j$. Nous allons montrer successivement que $\theta_{j_\theta} = \theta$ et $j_{\theta_j} = j$.

La première égalité provient des équivalences suivantes obtenues pour tout $(m,n) \in P^2$:

$$\begin{array}{c}
(m,n) \in \theta_{j_\theta} := \mathrm{Ker}(j_\theta) \\ \hline\hline
j_\theta(m) = j_\theta(n) \\ \hline\hline
\theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m) = \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \\ \hline\hline
\theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m) \leq \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \text{ et } \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \leq \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m) \\ \hline\hline
\theta^\flat(m) \leq \theta^\flat \circ \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \text{ et } \theta^\flat(n) \leq \theta^\flat\theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m) \\ \hline\hline
\theta^\flat(m) \leq \theta^\flat(n) \text{ et } \theta^\flat(n) \leq \theta^\flat(m) \\ \hline\hline
m \leq_\theta n \text{ et } n \leq_\theta m \\ \hline\hline
(m,n) \in \theta.
\end{array}$$

La deuxième s'obtient par la règle de l'égalité indirecte comme suit : pour tout $(m,n) \in P^2$:

$$\begin{array}{c}
m \leq j_{\theta_j}(n) \\ \hline\hline
m \leq \mathrm{Ker}(j)^\flat_* \circ \mathrm{Ker}(j)^\flat(n) \\ \hline\hline
\mathrm{Ker}(j)^\flat(m) \leq \mathrm{Ker}(j)^\flat(n) \\ \hline\hline
m \leq_{\mathrm{Ker}(j)} (n) \\ \hline\hline
m \leq j(n)
\end{array}$$

La dernière équivalence s'obtient comme à la fin de la démonstration du théorème 2.2.

En plus de ce qui a déjà été fait ci-dessus, on peut former les quotients dans la classe des monoïdes ordonnés à partir d'un préordre admissible θ. Soit $\mathbf{P} = (P, \leq, \theta)$ un monoïde ordonné.

Définition 2.5.4. *L'on dit d'un préordre θ sur P qu'il est admissible (ou qu'il est une congruence sous regulière) si c'est une relation compatible avec l'ordre et contient la relation $\leq_P$. Pour un tel préordre, la fermeture symétrique $\theta \cap \theta^{op}$ est une congruence de l'algèbre (P, θ). L'on définit sur le quotient $P/\theta \cap \theta^{op}$ (encore noté P/θ dans la suite) l'ordre $\sqsubseteq_2$ par $[x] \sqsubseteq_2 [y]$ ssi $x\theta y$.*

On peut observer ici que l'ordre défini sur P/θ n'a pas de lien avec l'ordre sur P. L'on obtient alors un monoïde ordonné $(P/\theta, \sqsubseteq_2, \cdot)$ noté P/θ. Le fait pour θ de contenir l'ordre $\leq_P$ c'est d'avoir de la projection $\varphi : P \longrightarrow P/\theta$ qu'elle est une application croissante car :

$$x \leq_P y \Longrightarrow x\,\theta\, y \Leftrightarrow [x] \sqsubseteq_2 [y] \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsubseteq_2 \varphi(y)$$

.

Théorème 2.7. *Soit θ un préordre admissible sur un monoïde $\boldsymbol{P} = (P, \leq_P, \odot)$, alors le morphisme quotient $\phi\colon P \to P/\theta$ est un épi sous régulier ; plus précisément le diagramme*

$$\theta \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{\phi} P/\theta$$

est un sous-coégalisateur.

Démonstration Il est clair que $\phi \circ \pi_1 \sqsubseteq_2 \phi \circ \pi_2$. Soit $(Q, \leq, \bullet)$ supposons donné

$$L \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} P \xrightarrow{l} Q$$

tel que $l \circ \pi_1 \sqsubseteq_2 l \circ \pi_2$; alors pour $(x, y) \in \mathtt{L}$, $l(x) \sqsubseteq_2 l(y)$. Définir $\bar{l} : P/\theta \longrightarrow Q$ par $\bar{l}([x]) = l(x)$. Cette application est bien définie car si $x \sim_{\theta \cap \theta^{op}} y$, alors $x\,\theta\, y$ et $y\,\theta\, x$. On a donc à la fois $l(x) \leq l(y)$ et $l(y) \leq l(x)$ d'où $l(x) = l(y)$. $\bar{l}$ est une application croissante car

$$[x] \sqsubseteq_2 [y] \Longleftrightarrow x\,\theta\, y \Longrightarrow l(x) \leq l(y) \Longrightarrow \bar{l}([x]) \leq \bar{l}([y])$$

. Ainsi $\bar{l}$ est bien un homomorphisme d'algèbres.

$\square$.

Exemple 2.5.1. *Si l'on considère un homomorphisme de monoïdes ordonnés $f : (P, \leq, \bullet) \longrightarrow (Q, \leq, \bullet)$ le noyau orienté $\overrightarrow{ker}(f)$ de f défini par : $\overrightarrow{Ker}(f) = \{(x, y) \in P \times P / f(x) \leq_Q f(y)\}$ est un préordre admissible de $(P, \leq, \bullet)$; on le vérifie assez aisement. On a donc le quotient $P/\overrightarrow{Ker}(f)$ muni de l'ordre $[x] \sqsubseteq_2 [y]$ ssi $f(x) \leq f(y)$.*

Théorème 2.8. *Un préordre $\preccurlyeq$ sur un monoïde ordonné $\boldsymbol{P} = (P, \leq_P, \odot)$ est admissible si et seulement s'il existe un monoïde ordonné $\boldsymbol{Q}$ et un morphisme surjectif de monoïdes ordonnés $\phi\colon P \to Q$ tel que*

$$p \preceq p' \Leftrightarrow \phi(p) \leq_Q \phi(p').$$

De plus $P/\preccurlyeq$ (notation pour $\boldsymbol{P}/(\preccurlyeq \cap \preccurlyeq^0)$) est isomorphe à $\boldsymbol{Q}$.

Démonstration : Soit $\preceq$ un préordre sur $\mathbf{P}$; supposons qu'il existe $\phi\colon P \to Q$ un morphisme de monoïdes ordonnés tel que

$$p \preceq p' \Leftrightarrow \phi(p) \leq_Q \phi(p').$$

Montrons que $\preceq$ est un préordre admissible (ie $\preceq$ est une relation compatible avec l'ordre de $\mathbf{P}$ et contient cet ordre). $p \leq_{\mathbf{P}} p'$ implique que $\phi(p) \leq_{\mathbf{Q}} \phi(p')$

(car ϕ est un morphisme de monoïdes ordonnés) ; ce qui est équivalent à $p \preceq p'$ par hypothèse. Ainsi, $\preceq$ contient $\leq_{\mathbf{P}}$ et lui est compatible par conséquent c'est un préordre admissible. Reciproquement supposons que $\preceq$ est un préordre admissible sur $\mathbf{P}$ alors le morphisme $\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}/\preceq$ est surjectif et vérifie

$$p \preceq p' \Leftrightarrow \phi(p) \leq_Q \phi(p').$$

$\square$

Théorème 2.9. *(caractérisation des préordres admissibles)*

Un préordre θ sur $(P, \leq, \bullet)$ est admissible (est une congruence sous régulière) ssi il existe un homomorphisme f surjectif de monoïdes ordonnés de source $(P, \leq, \bullet)$ tel que $\theta = \overrightarrow{Ker}(f)$.

Démonstration Soit θ un préordre sur P. Supposons que $\theta = \overrightarrow{Ker}(f)$ avec $f : (P, \leq, .) \longrightarrow (Q, \leq, \bullet)$ un homomorphisme surjectif ; alors θ est admissible. Reciproquement, supposons θ un préordre admissible alors
$f : (P, \leq, \bullet) \longrightarrow (P/\overrightarrow{ker}(f), ., \sqsubseteq_2)$ est un homomorphisme surjectif avec
$\theta = \overrightarrow{Ker}(f)$. $\square$.

Remarque 2.5.1. Si donc $f : (P, \leq, \bullet) \longrightarrow (Q, \leq, \bullet)$ est un morphisme de monoïdes ordonnés, $P/ker(f)$ et $P/\overrightarrow{ker}(f)$ ont le même support mais l'ordre les differencie : l'ordre $\sqsubseteq_1$ est moins fin que l'ordre $\sqsubseteq_2$. On a donc la factorisation :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"', "epi.reg"] & \mathsf{Q} \\
(P/ker(f), \sqsubseteq_1) \arrow[r, "id"'] & (P/\overrightarrow{ker}(f), \sqsubseteq_2) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
[a] \sqsubseteq_2 [b] &\iff a\,\overrightarrow{ker}(\mathrm{f})\,b \\
&\iff f(a) \leq_Q f(b) \\
&\iff i([a]) \leq_Q i([b])
\end{aligned}$$

i est donc un plongement de monoïdes ordonnés ; on en déduit les factorisations :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & P/ker(f) \arrow[dl, "i \circ id"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "id \circ \pi"] \arrow[dr, "f"'] & & P/\overrightarrow{ker}(f) \arrow[dl, "f"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Exemple 2.5.2.

1. $(2\mathbb{N}, =)$ est un sous monoïde ordonné du monoïde ordonné $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$.
2. $(2\mathbb{N}, \leq)$ est un sous monoïde ordonné régulier du monoïde ordonné $(\mathbb{N}, \leq, +, 0)$.
3. $(2\mathbb{N}, =)$ est un sous monoïde ordonné du monoïde ordonné $(\mathbb{N}, \leq, \times, 1)$.
4. $(2\mathbb{N}, \leq)$ est un sous monoïde ordonné régulier du monoïde ordonné $(\mathbb{N}, \leq, \times, 1)$.

Chapitre Trois

Les monoïdes ordonnés résidués

Une structure de résiduation sur un monoïde ordonné $(P, \leq, \otimes, e)$ consiste à se donner :

1. pour tout $x, z \in P$ un plus grand élement $y \in P$ tel que $x \otimes y \leq z$
2. pour tout $y, z \in P$ un plus grand élement $x \in P$ tel que $x \otimes y \leq z$.

Un monoïde ordonné $(P, \leq, \otimes, e)$, muni d'une structure de résiduation est appelé un monoïde ordonné résidué.

Notation 3.0.1. *1) Le plus grand élement y tel que $x \otimes y \leq z$ sera noté $x \backslash z$: on l'appelle le résiduel à gauche de z par x.*

2) Le plus grand élement x tel que $x \otimes y \leq z$ sera noté z/y : on l'appelle le résiduel à droite de z par x.

L'on voit que les résiduels sont des espèces de quotients. Les conditions 1) et 2) de la définition de monoïde ordonné résidué peuvent être reformulées en terme d'adjonction :

i) la multiplication à gauche par x $\gamma_x := x \otimes (-) : P \longrightarrow P$ possède un adjoint à droite $(\gamma_x)_\star$ noté $x \backslash (-)$.

ii) la multiplication à droite par y $\delta_y := (-) \otimes y : P \longrightarrow P$ possède un adjoint à droite $(\delta_y)_\star$ noté $(-)/y$.

Dans la suite, pour faire bref, nous dirons monoïde résidué à la place de monoïde ordonné résidué et comme il est courant en algèbre, le support de la structure désignera la structure

Exemple 3.0.3. Un groupe (noté multiplicativement) ordonné peut être regardé comme un monoïde résidué où \ et / sont définis par $x \backslash y = x^{-1}y$, et / défini par $y/x = yx^{-1}$; puisque chaque élement est admet un symetrie.

Exemple 3.0.4. Les **monoïdes sup-demi treillis résidués** qui sont des monoïdes ordonnés résidués pour lesquels l'ordre $\leq$ est un ordre de sup demi treillis.

Exemple 3.0.5. Les treillis résidués qui sont des monoïdes ordonnés résidués pour lesquels l'ordre $\leq$ est un ordre de treillis.

Exemple 3.0.6. Un monoïde ordonné résidué pour lequel l'ordre $\leq$ est un ordre complet dans ce sens que toute partie du support possède un suprémum, est appelé un **quantale.** Dans ce cas la distributivité de la multiplication sur le supremum binaire ou le supremum arbitraire provient alors d'un résultat bien connu de la théorie des catégories qui stipule qu'un adjoint à gauche conserve les colimites.

Exemple 3.0.7. Une relation binaire est un couple (E, R) où E est un ensemble et R une partie de $E \times E$. L'ensemble Rel(E) muni de l'inclusion, de la composition des relations et de la relattion identique Δ_E est un monoïde ordonné résidué où $\backslash$ et $/$ sont définis par

$$R\backslash S = \{(y, z) : \forall x[xRy \Longrightarrow xSz]\} \text{ et } S/R = \{(x, y) : \forall z[yRz \Longrightarrow xSz]\}.$$

Exemple 3.0.8. Soit un $(A, +, .)$ un anneau unitaire. $(Id(A), \subseteq, ., A)$ où Id(A) est l'ensemble des idéaux bilatères de $(A, +, .)$ et le . est le produit des idéaux est un monoïde ordonné résidué où $\backslash$ et $/$ sont définis par

$$I\backslash J = \{k : Ik \subseteq J\} \text{ et } J/I = \{k : kI \subseteq J\}$$

Exemple 3.0.9. *Pour un monoïde M,* $(\mathcal{P}(M), \subseteq, \otimes)$ *est un monoïde ordonné résidué où* $\backslash$ *et* $/$ *sont définis par* $I\backslash J = \{z \in M : Iz \subseteq J\}$ *et* $J/I = \{z \in M : zI \subseteq J\}$; *et avec* $I \otimes J = \{x.y : x \in I, y \in J\}$.

Exemple 3.0.10. Soit X un alphabet, l'on note $(X^*, *, e)$ le monoïde des mots (suites finies de symboles de X) où " $*$ " désigne la concatenation des mots et e le mot vide. Nous avons déjà fait remarqué dans les exemples des monoïdes que l'ensemble $\mathcal{L}(X)$ des langages sur X, muni de l'inclusion et de la multiplication

$$L.M = \{l * m : l \in L, m \in M\}$$

est un monoïde ordonné. Nous ajoutons maintenant qu'il est résidué avec $\backslash$ et $/$ définis par :

$$I\backslash J = \{k; Ik \subseteq J\} \text{ et } J/I = \{k : kI \subseteq J\}$$

Son élément neutre est le singleton $\{()\}$ constitué du mot vide.

La classe des treillis résidués est définie par les identités définissant les monoïdes, les identités définissant les treillis et les propriétés de résiduation.

Ensuite l'observation faite au paragraphe 2 du chapitre précédent sur les monoïdes ordonnés, où l'ordre est un ordre de sup demi treillis, de treillis ou de treillis complet, combiné avec les propriété de résiduation font de la classe des treillis résidués une variété d'algèbres au sens de Birkhoff et pour être plus exacte une variété d'algèbres au dessus de la classe des ensembles. Il n'en est plus de même si l'hypothèse que l'ordre est un ordre de treillis est supprimée.

Remarque 3.0.2. Le fait de posséder des adjoints à droite entraine que la multiplication à gauche par x : γ_x et à droite par y : δ_y sont croissantes. D'après cette remarque, i) et ii) peuvent encore se formuler comme suit :

i)' $\gamma_x(y) \leq z \Longleftrightarrow y \leq (\gamma_x)_\star(z)$

ii)' $\delta_y(x) \leq z \Longleftrightarrow x \leq (\delta_y)_\star(z)$

La compatibilité de la multiplication avec l'ordre $\leq$ est déjà codifié dans le fait que les applications γ_x et δ_y possèdent un adjoint à droite. On peut énoncer le résultat ci-après :

Proposition 3.1. *[12] Soit $(P, \leq, \otimes)$ un monoïde ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(P, \leq, \otimes)$ possède une structure de monoïde ordonné résidué.*
2. *Il existe sur le support P trois opérations binaires $\cdot, \backslash, /$ et une opération nullaire e satisfaisant les huit inégalités :*

   a) $y \leq x\backslash(x \otimes y)$,

   b) $x \otimes (x\backslash z) \leq z$,

   c) $x \leq (x \otimes y)/y$,

   d) $(z/y) \otimes y \leq z)$,

   e) $(x \otimes y) \otimes z) \leq x \otimes (y \otimes z)$,

   f) $x \otimes (y \otimes z) \leq (x \otimes y) \otimes z$,

   g) $(x \otimes e) \leq x$,

   h) $x \leq (x \otimes e)$.

Proposition 3.2. *Soient P et Q deux monoïdes ordonnés résidués. Soit $f : P \longrightarrow Q$ un morphisme de monoïdes ordonnés alors :*

1. $f(x/y) \leq f(x)/f(y)$
2. $f(y \setminus x) \leq f(y) \setminus f(x)$

Démonstration On part de la relation évidente $x/y \otimes y \leq x$; comme f est croissante et conserve la multiplication, $f(x/y) \otimes f(y) \leq f(x)$. L'on en déduit que $f(x/y) \leq f(x)/f(y)$. L'autre inégalité se démontre de la même manière.

$\square$.

Définition 3.0.5. *Un morphisme de monoides ordonnés résidués est un morphisme de monoïdes ordonnés qui possède un adjoint à droite. Si f est un tel morphisme on note par f_* son adjoint à droite.*

Corollaire 3.1. *La composition de deux morphismes de monoides ordonnés résidués en est un ; l'identité sur un monoide ordonné résidué est un morphisme. On a ainsi la catégorie des monoides ordonnés résidués et des applications résiduées notée* ***Mor***

Proposition 3.3. *Soit $(P, \leq_P, \cdot, \backslash_P, /_P, e_P)$ et $(Q, \leq_Q, \otimes, \backslash_Q, /_Q, e_Q)$ deux monoïdes résidués. Si $f : P \longrightarrow Q$ est un morphisme de monoïdes ordonnés résidués, alors pour tout*
$x \in P, y \in Q, f_*(y/_Q f(x)) = f_*(y)/_P x$ *et* $f_*(f(x) \backslash_Q y) = x \backslash_P f_*(y)$

Démonstration Pour tout $z \in P$, et en notant f_* l'adjoint à droite de f

$$\begin{aligned}
z \leq_P f_*(y/_Q f(x)) &\iff f(z) \leq_Q y/_Q f(x)\\
&\iff f(z) \otimes f(x) \leq_Q y\\
&\iff f(z \cdot x) \leq_Q y\\
&\iff z \cdot x \leq_P f_*(y)\\
&\iff z \leq_P f_*(y)/_P x
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_*(y/_Q f(x)) \quad = \quad f_*(y)/_P x$$

$\square$

Théorème 3.1. *Soient $(P, \leq, \otimes, \backslash, /, e)$ et $(Q, \leq, \otimes, \backslash, /, e)$ deux monoïdes ordonnés résidués. Soit*
$f \dashv f_* : P \longrightarrow Q$ une adjonction, alors $j = f_* \circ f$ est une opération de fermeture sur P vérifiant : $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$ pour tout $x, y \in P$.

Démonstration Il s'agit de montrer que $f_*(f(x))f_*(f(y)) \leq f_*(f(x \otimes y))$. Il revient au même de montrer que $f(f_*(f(x))f_*(f(y))) \leq f(x \otimes y)$ ou enconre que $f(f_*(f(x)))f(f_*(f(y))) \leq f(x \otimes y)$ c'est à dire $f(x) \otimes f(y) \leq f(x \otimes y)$; ce qui est évident car f conserve l'opération du monoïde.

$\square$.

Théorème 3.2. *[12] Soient* $(P, \leq, \otimes, \backslash, /, e)$ *un monoïde ordonné résidué,* $j : P \longrightarrow P$ *un noyau quantique sur* P *et* $P_j = \{x \in P, j(x) = x\}$ *l'ensemble des éléments j-fermés de P.* P_j *muni de l'ordre induit de* P *et de la multiplication* $\otimes_j$ *définie par :* $x \otimes_j y = j(x \otimes y)$ *est un monoïde ordonné. De plus* $j \dashv i$ *avec* $i : P_j \longrightarrow P$ *l'inclusion de* P_j *dans P.*

Démonstration Montrons que $(P_j, \leq, \otimes_j, j(e))$ est un monoïde ordonné. Soient $x, y, z \in P_j$. On a $x \otimes_j (y \otimes_j z) = x \otimes_j (j(y \otimes z) = j(x \otimes j(y \otimes z))$. Or $y \otimes z \leq j(y \otimes z)$ donc $j(y) \otimes j(z) \leq j(y \otimes z)$ c'est à dire $j(y) \otimes j(z) = j(y \otimes z)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} j(x \otimes j(y \otimes c)) &= j(x \otimes j(j(y) \otimes j(z))) \\ &= j(j(x) \otimes j(y \otimes z)) \\ &= j(x \otimes (y \otimes z)) \\ &= j((x \otimes y) \otimes z) \\ &= j(j(x \otimes y) \otimes j(z)) \\ &= j((x \otimes_j y) \otimes z) \\ &= (x \otimes_j y) \otimes z \end{aligned}$$

Soient $x, y, z, t \in P_j$ tels que $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x \otimes z \leq y \otimes t$ (car $\leq$ est compatible avec $\otimes$) et $j(x \otimes z) \leq j(y \otimes t)$; ainsi, $x \otimes_j z \leq y \otimes_j t$. $\leq$ est donc compatible avec $\otimes_j$ dans P_j. De plus,

$$x \otimes_j j(e) = j(j(x) \otimes j(e)) = j(x \otimes e) = j(x) = x = j(j(e) \otimes j(x)) = j(j(e) \otimes x) = j(e) \otimes_j x.$$

$(P_j, \leq, \otimes_j, j(e))$ est donc un monoïde ordonné. $\square$.

3.1 Structures quotients et noyaux quantiques

Les quotients de monoïdes ordonnés résidués peuvent être décrits à l'aide de certaines opérations de fermeture que nous appelons les noyaux quantiques et définis plus haut. Un grand nombre de tels opérateurs est fourni par le theorème ci-après :

Théorème 3.3. *Si* $f \dashv f_*$ *est un morphisme entre les monoïdes ordonnés résidués P et Q, alors l'application* $j = f_* \circ f : P \longrightarrow P$ *est un noyau quantique.*

La preuve est similaire à celle du Théorème 3-1.

Théorème 3.4. *Si j est un noyau quantique, alors*
$j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes y) = j(x \otimes j(y)) = j(j(x) \otimes j(y))$.

Démonstration Soit j un noyau quantique, montrons que
$j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes y) = j(x \otimes j(y)) = j(j(x) \otimes j(y))$.
Comme j est un noyau quantique, alors $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$ ce qui équivaut d'après le théorème3-2 à $j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes y)$. On a $j(x) \leq j(x)$ et $y \leq j(y)$ donc $j(x) \otimes y \leq j(x) \otimes j(y)$; ce qui entraine que
$j(j(x) \otimes y) \leq j(j(x) \otimes j(y)) = j(x \otimes y)$. D'autre part,
$x \otimes y \leq j(x) \otimes j(y)$; donc $j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes j(y)) \leq j(j(x) \otimes y)$. Ainsi, on a $j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes y) = j(j(x) \otimes j(y))$. En fin, $x \otimes j(y) \leq j(x) \otimes j(y)$ donc $j(x \otimes j(y)) \leq j(jx) \otimes j(y))$.
Reciproquement, $x \otimes y \leq x \otimes j(y)$ donc $j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes j(y)) \leq j(x \otimes j(y))$.
Ainsi, on a $j(x \otimes y) = j(x \otimes j(y)) = j(j(x) \otimes j(y))$.
$\square$.

Théorème 3.5. $(P, \leq, \otimes, \backslash, /)$ *est un monoïde résidué; j un opérateur de fermeture sur* $(P, \leq, \otimes)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) j est un noyau quantique

2) $j(j(x) \otimes j(y)) = j(x \otimes y)$

3) P_j *est résiduellement clos c'est à dire* $y \backslash x, x/y \in P_j$
pour tout $x \in P_j, y \in P$.

Démonstration Pour l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2), voir theorème 3-2.
Regardons l'implication (2) $\Longrightarrow$ (3).
Soit $x \in P_j$ et $y \in P$.

$$\begin{array}{rcl} j(x/y) \otimes y & \leq & j(x/y) \otimes j(y) \\ & \leq & j(j(x/y) \otimes j(y)) \text{ car } y \leq j(y) \\ & = & j(x/y \otimes y) \\ & \leq & j(x) \text{ car } x/y \otimes y \leq x \\ & = & x \end{array}$$

D'où $j(x/y) \otimes y \leq x$ donc l'on déduit que $j(x/y) \leq x/y$; et comme
$x/y \leq j(x/y)$; l'on déduit l'égalité et donc $x/y \in P_j$. On procède de manière analogue pour prouver que $y \backslash x \in P_j$.
(3) $\Longrightarrow$ (1)
Soit $x, y \in P$ par extensivité $x \otimes y \leq j(x \otimes y)$, d'où $j(x) \leq j(x \otimes y)/y$ car $j(x \otimes y)/y$ est un élement de P_j par hypothèse. Ainsi $j(x) \leq j(x \otimes y)/y$ c'est à dire $j(x) \otimes y \leq j(x \otimes y)$; d'où $y \leq j(x) \backslash j(x \otimes y)$ qui est dans P_j. A nouveau la monotonie de j entraine que $j(y) \leq j(x) \backslash j(x \otimes y)$; soit donc $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$
$\square$.

Théorème 3.6. *Soient $(P, \leq, \otimes, \backslash, /)$ un monoïde ordonné résidué ; j un noyau quantique sur $(P, \leq, \otimes)$; alors*

1 L'ensemble P_j des élements $j-$fermés muni de l'ordre induit, de la multiplication $\otimes_j$, des résiduels induits et $j(e)$ est un monoïde ordonné résidué.

2 L'application $\varphi : P \longrightarrow P_j$ est un morphisme surjectif de monoïdes ordonnés résidués.

3 Si Q est un monoïde ordonné résidué et $f : P \longrightarrow Q$ un morphisme surjectif de monoïdes ordonnés résidués, alors il existe un noyau quantique j tel que $Q = P_j$.

Démonstration Soient $(P, \leq, \otimes, \backslash, /)$ un monoïde ordonné résidué ; j un noyau quantique sur $(P, \leq, \otimes)$.

1) Montrons que l'ensemble P_j des élements $j-$fermés muni de l'ordre induit, de la multiplication $\otimes_j$, des résiduels induits et $j(e)$ est un monoïde ordonné résidué.

On sait déjà que $(P_j, \leq, \otimes_j, j(e))$ est un monoïde ordonné.

a) Soient $x, y, z \in P_j$, montrons que $y \leq (x \otimes_j y) \setminus x$.
$x \otimes_j y = j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes y)$ car j est un noyau quantique.
$y \leq (x \otimes_j y) \setminus x$ si $y \leq j(x \otimes y) \setminus x$ c'est à dire $y \leq j(x \otimes y) \setminus j(x)$ car $x \in P_j$; ou encore que $y \leq j(x \otimes y \setminus x)$ ou bien $j(y) \leq j(x \otimes y) \setminus x)$.
Or $y \leq (x \otimes y) \setminus x$ donc $j(y) \leq j(x \otimes y \setminus x)$. Ainsi $y \leq (x \otimes_j y) \setminus x$.

b) Montrons que $x \otimes_j z \setminus x \leq z$. En effet, $x \otimes_j z \setminus x = j(x \otimes z \setminus x$. Or $x \otimes z \setminus x \leq z$ donc $j(x \otimes z \setminus x) \leq j(z) = z$; d'où $x \otimes_j z \setminus x \leq z$.

c) Montrons que $x \leq (x \otimes_j y)/y$. On a $(x \otimes_j y)/y = j(x \otimes y)/y = j(x \otimes y)/j(y)$ car $y \in P_j$. $x \leq (x \otimes_j y)/y$ si $x \leq j(x \otimes y)/j(y)$. Or $x \leq (x \otimes y)/y$ donc $j(x) \leq j(x \otimes y)/j(y)$; de plus $x \leq j(x)$ donc $x \leq j(x \otimes y)/j(y)$ c'est à dire $x \leq j(x \otimes y)/y$ car $y \in P_j$. Ainsi $x \leq (x \otimes_j y)/y$.

d) Montrons que $(z/y) \otimes_j y \leq z$.
$(z/y) \otimes_j y = j((z/y) \otimes y)$. Or $(z/y) \otimes y \leq z$, donc $j((z/y) \otimes y) \leq j(z)$ c'est à dire $j((z/y) \otimes y) \leq z$ car $z \in P_j$. Ainsi $(z/y) \otimes_j y \leq z$.

2) Montrons que la correspondance $\phi : P \longrightarrow P_j$ qui à un élement a de P associe $j(a)$ est un morphisme surjectif de monoïdes ordonnés reésidués.

Soient $x, y \in P$.

si $x \leq y$, et $\phi(x), \phi(y)$ existent dans P_j, alors $\phi(x) \leq \phi(y)$.

On a $\phi(x \otimes y) = j(x \otimes y) = j(j(x) \otimes j(y)$ et

$$\phi(x) \otimes \phi(y) = j(x) \otimes j(y) = j(j(x)) \otimes j(j(y)) = j(j(x) \otimes j(y)) = \phi(x \otimes y)$$

De plus, $\phi(e_P) = j(e_P) = e_P$ donc ϕ est un morphisme de monoïdes ordonnés.

ϕ est surjectif car pour $t \in P_j, t = \phi(t) = j(t)$.

Considérons l'inclusion i de P_j dans P; On montre que i est adjoint à droite de ϕ.

3) Soient Q un monoïde ordonné résidué et $f : P \longrightarrow Q$ un morphisme surjectif de monoïdes ordonnés résidués ; alors $j = f_*f$ est un opérateur de fermeture sur P tel que $j(x) \otimes j(y) \leq j(x \otimes y)$ pour tout $x, y \in P$ donc c'est un noyau quantique sur P.

$\square$.

3.2 Sous structures et conoyaux quantiques

Tout comme les quotients des monoïdes ordonnés résidués sont déterminés par certaines opérations de fermeture, les sous structures, elles, seront déterminées par certaines opérations de cofermeture. On rappelle qu'il y a bijection entre les opérateurs de cofermeture sur un ensemble ordonné P et les sous ensembles ordonnés O de P satisfaisant : $max\{a \in O, a \leq x\}$ existe pour tout $x \in P$.

Définition 3.2.1. *Soit $(P, \leq, \otimes, \backslash, /)$ un monoïde ordonné résidué ; une opération de cofermeture σ sur P satisfaisant $\sigma(e) = e$ et $\sigma(x)\sigma(y) \leq \sigma(xy)$ est appelé un conoyau quantique sur P.*

Définition 3.2.2. *Soit $(P, \leq, \otimes, \backslash, /)$ un monoïde ordonné résidué.*

1. *Un monoïde **Q** est un sous monoïde ordonné sous résidué de **P** si Q est un sous monoïde de $(P, \leq, \otimes)$ tel que l'inclusion $i : Q \longrightarrow P$ est un morphisme de monoïdes résidués.*
2. *Un monoïde **Q** est un sous monoïde ordonné régulier sous résidué de **P** si Q est un sous monoïde régulier de $(P, \leq, \otimes)$ tel que l'inclusion $i : Q \longrightarrow P$ soit un morphisme de monoides ordonnés.*

Théorème 3.7. *Si $f \dashv f_*$ est un morphisme de monoïdes résidués entre P et Q, alors l'application $\sigma = f \circ f_* : Q \longrightarrow Q$ est un conoyau quantique.*

Démonstration Il s'agit de montrer que $f(f_*(x)) \otimes f(f_*(y)) \leq f(f_*(x \otimes y))$. Il revient au même de montrer que $f(f_*(f(x)) \otimes f(f_*(f(y))) \leq f(x \otimes y)$ (car $ff_*f = f$) ou alors de montrer que $f(x)f(y) \leq f(x \otimes y)$; cette dernière inégalité est déjà vraie car f conserve l'opération du monoïde. $\square$.

Théorème 3.8. $(P, \otimes, \leq, \backslash, /, e)$ *est un monoïde ordonné résidué.* $S \subseteq P$ *est un sous monoïde ordonné régulier sous résidué si et seulement s'il existe un conoyau quantique* $c : P \longrightarrow P$ *d'image* S.

Démonstration Supposons que $S \subseteq P$ est un sous monoïde ordonné régulier sous residué de P, alors l'inclusion $i : S \hookrightarrow P$ est un morphisme donc $i \circ i_* : P \longrightarrow P$ est un conoyau quantique.

$$i(i_*(p)) = i(max\{s \in S : s \leq p\}) = i(q) = q \in S$$

avec $q = max\{s \in S : s \leq p\}$; donc $i(i_*(P)) \subseteq S$. Réciproquement, soit $s \in S$. $i(i_*(s)) = i(s) = s$; ce qui signifie que $S \subseteq i(i_*(P))$. □

Théorème 3.9. $(Q, \leq, \otimes, \backslash, /)$ *est un monoïde ordonné résidué ; σ est un conoyau quantique sur* $(Q, \leq, \otimes)$; *alors L'ensemble* Q_σ *des élements* $\sigma-$*cofermés muni de l'ordre induit, de la multiplication* $\otimes_\sigma$ *définie par* $x \otimes_\sigma y = \sigma(x \otimes y)$, *des résiduels induits et de* $\sigma(e)$ *est un sous monoïde ordonné régulier sous résidué de* $\boldsymbol{Q}$.

Démonstration $(Q, \leq, \otimes, \backslash, /)$ est un monoïde ordonné résidué ; σ est un conoyau quantique sur $(Q, \leq, \otimes)$.

1) Montrons que l'ensemble Q_σ des élements $\sigma-$cofermés muni de l'ordre induit, de la multiplication $\otimes_\sigma$, des résiduels induits et $\sigma(e)$ est un sous monoïde ordonné régulier sous résidué de $\mathbf{Q}$.

On a $Q_\sigma = \sigma(Q) \subseteq Q$. D'après le théorème précedent, Q_σ est un sous monoïde ordonné régulier sous résidué de Q.

□.

3.3 La complétion de Mac Neille Dedekind des monoïdes résidués

La complétion de Mac Neille-Dedekind, connue en littérature mathématique sous les appellations de complétion par coupure, complétion normale ou complétion minimale permet de plonger un ensemble ordonné dans un ensemble treillis complet. Une description très détaillée de cette construction se trouve dans l'ouvrage [7]

Elle est décrite en gros comme suit. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de P. On note $L(A)$ l'ensemble des minorants de A et $U(A)$ l'ensemble des majorants de A. Nous disons que A est un *idéal normal* de P

lorsque $A = LU(A)$). Posons $j := LU$. Alors j est un opérateur de fermeture sur le treillis complet 2^P de l'ensemble des parties de P muni de l'inclusion. Les objets j-fermés de 2^P sont exactement les idéaux normaux de P. Comme j est un opérateur de fermeture l'ensemble $DM(P)$ des éléments j-fermés de 2^P muni de l'inclusion possède une structure de treillis complet où l'infimum arbitraire est décrit par $\bigwedge_{\alpha\in I} N_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} N_\alpha$ et le supremum abribtraire par $\bigvee_{\alpha\in I} N_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} N_\alpha$ pour toute famille $(N_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'idéaux normaux de P.

Il existe un plongement $\phi\colon P \to DM(P)$ défini par

$$\phi(x) =\downarrow x = \{a \in P : a \leq x\}.$$

Ce plongement possède de bonnes propriétés qui sont :

- l'image de ϕ est sup-dense et inf-dense dans $DM(P)$.
- le plongement ϕ conserve tous les suprema et tous les infima (ceux qui existent dans P)
- En particulier si P est un treillis, alors le plongement ϕ conserve les infima binaires et les suprema binaires.

Malheureusement il y'a beaucoup d'autres propriétés qui ne sont pas conservées par cette complétion. Il est notoire que la complétion de Mac Neille-Dedekind d'un treillis distributif n'est pas forcément un treillis distributif. Mais nous nous intéressons au cas favorable des monoïdes (resp semigroupes) résidués. Assez curieusement lorsque P est un monoïde (resp semigroupe) résidué , le plongement ϕ conserve aussi bien la multiplication que les résiduels. Nous expliquons ce résultat.

Si $(Q, \leq \otimes, e)$ est un quantale et j un noyau quantique sur Q, l'ensemble Q_j des éléments j-fermés est aussi un quantale lorsque l'on le muni de l'ordre induit et de la multiplication $\otimes_j$ définie par $x \otimes_j y = j(x \otimes y) = j(x \otimes y)$; [31].

En plus Q_j est stable pour les divisions à droite et à gauche; en effet $x\backslash y$ et y/x appatiennent à Q_j dès lors que y tout seul appartient à Q_j; (voir [18]

L'on rappelle que d'un monoïde $(M, \otimes, e)$ l'on peut extraire un monoïde résidué (en fait un quantale unitaire) $(2^M, \subseteq, \otimes, \{e\})$, mais la multiplication est définie par $X \otimes Y = \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}$, et les divisions par
$X\backslash Y = \{z \in M, \{z\} \otimes X \subseteq Y\}$, et $Y/X = \{z \in M, X \otimes \{z\} \subseteq Y\}$. Et l'on peut conclure par le théorème de plongement suivant :

Théorème 3.10. *Si $(P, \leq, \otimes, e)$ est un monoïde ordonné, l'opérateur de fermeture $j = LU$ est un noyau quantique sur le quantale $(DM(P), \subset, \otimes, j(e))$ qui est un quantale unitaire. En plus le plongement $\phi\colon P \to DM(P)$ conserve la multiplication et les divisions.*

Démonstration Nous renvoyons dans [13], lemme 1. □

3.4 Monoïdes résidués et linguistique computationelle

Une des plus grandes applications des monoïdes résidués se trouve dans l'étude logique des langues humaines.

Une phrase a une structure logique, la phrase simple est pour ainsi dire la version grand public de la proposition logique. Voici un exemple

(1) Tout homme parle une langue.

(2) $\forall x[\, homme(x) \to \exists y[\, langue(y) \wedge parle(x, y)]]$.

Ce parallèle entre phrases et propositions logiques participe d'une plus vaste correspondance entre rôles logiques et catégories syntaxiques :

- les groupes nominaux correspondent aux individus de la logique (individus ou variables d'individus souvent quantifiées),
- les verbes intransitifs et les groupes verbaux correspondent à des prédicats unaires
- tandis que les verbes transitifs correspondent aux prédicats binaires et les verbes ditransitifs (quelqu'un donne quelque chose à quelqu'un) à des prédicats ternaires.
- Les adjectifs partagent des caractères avec les noms et groupes nominaux (accord, déclinaisons) mais aussi avec les verbes puisqu'ils expriment un prédicat.

Rappelons que la logique ; en particulier la logique mathématiques revêt essentiellement deux aspects : la forme (syntaxe) et le sens (sémantique)

- Par syntaxe logique d'un langage nous entendons l'exposé systématique des règles formelles qui le gouvernent et le développement des conséquences qui résultent de ces règles. Une règle ou une théorie est dite formelle lorsqu'aucune référence n'y est faite soit à la signification des symboles (par exemple, des mots) soit au sens des expressions (par exemple , des énoncés), mais simplement et uniquement aux types et à l'ordre des symboles à partir desquels sont construites les expressions. Cette syntaxe est décrite par des grammaires formelles (de mots ou d'arbre, algébrique ou faiblement contextuelle) ; mais si on vise à extraire de l'analyse syntaxique une représentation utilisable du sens de la phrase, on peut aussi utiliser des systèmes déductifs.
- En logique, la sémantique est l'étude de l'interprétation des langages formels. Une interprétation attribue un sens aux symboles d'un langage.

Aujourd'hui la logique apparait comme un élément fédérateur capable de traiter de la sémantique de la langue, mais aussi de sa syntaxe. En fait, on peut unir ces deux aspects, forme et sens, par le biais d'un autre aspect de la logique, la **théorie des types** qui fait partie de la théorie de la démonstration. Ce rapprochement peut être grosso-modo formulé ainsi : pourquoi ne pas identifier la structure d'une phrase avec la preuve formelle qu'elle est une phrase ? Il s'agira bien sûr d'une logique simple et élégante, bien adaptée à décrire une grammaire formelle, **le calcul de Lambek** [21]. L'intérêt linguistique du calcul de Lambek est qu' il permet d'exprimer une grammaire catégorielle comme un calcul purement logique, exempt de règles ad hoc. Nous allons consacrer l'essentiel de ce paragraphe aux grammaires catégorielles dites de Lambek, qui réalisent ce parallèle entre composition syntaxique et composition des sens. Elles ramènent la bonne formation syntaxique d'une phrase à la prouvabilité d'une formule (ou au typage des constituants de la phrase) dans une logique. Tandis que la structure syntaxique est la preuve elle-même, un morphisme entre systèmes logiques transforme formules et preuves en représentations sémantiques.

3.4.1 la notion de grammaire non contextuelle

Les grammaires non contextuelles forment l'une des principales branches des grammaires formelles. Une telle grammaire est formée :

- d'un alphabet Σ de symboles dits terminaux
- d'un alphabet N de symboles dits non terminaux (on suppose très souvent que N est disjoint de Σ.) ;
- d'un symbole non-terminal spécial S appelé axiome ;
- d'une relation binaire $\lhd \subseteq N \times (\Sigma \cup N)^*$; les couples d'élements de $\lhd$ sont appelés des *productions* et $\lhd$ elle même est appelé lexique.

  Une production (A, x) est parfois notée $A \lhd x$. L'on écrit $x \longrightarrow z$ lorsque z resulte de x comme suit : il existe une production $A \lhd y$ telle que $x = uAv$ et $z = uyv$. On dit alors que z dérive de x.

Soit $G = (N, \Sigma, \lhd, S)$ une grammaire non contextuelle. l'on dira que z est dérivable de x, noté $x \to^* z$, s'il existe une suite finie de relations
$x \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n = z$. Une chaine de caractères $w \in \Sigma^*$ est engendrée par G si $S \to^* w$.

Le langage engendré par une grammaire G est l'ensemble des chaines de caractères w qui sont engendrées par G. On note $L(G)$ le langage engendré par G. Par exemple si $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \lhd \epsilon, S \lhd aSb\}, S)$ alors le langage engendré par G est $\{a^n b^n, n \geq 0\}$; ici ϵ désigne le mot vide.

3.4.2 La notion de grammaire catégorielle

Le mot "*grammaire catégorielle*" fait référence à une famille de formalismes dans la syntaxe des langages naturels, tous motivés par le **principe de composabilité** qui dit en gros, que le sens d'une expression complexe est déterminé par le sens de ses constituants et des règles qui ont servi à la construire.

Les grammaires catégorielles ont ceci de commun avec le lambda calcul typé qu'ils sont tous deux typés. Le lambda calcul n'a qu'un seul type, le type de fonction $A \Rightarrow B$ tandis que les grammaires catégorielles en ont deux B/A et $A\backslash B$. Le premier, B/A, est le type d'une phrase qui résulte d'une phrase de type B suivi sur la droite par une phrase type A. Le second, $A\backslash B$, est le type d'une phrase qui résulte d'une phrase de type B précédé (à gauche) d'une phrase de type A.

Les notations trouvent leur intuition de l'algèbre. Une fraction lorsqu'elle est multipliée (concaténée) par son dénominateur donne pour résultat son numérateur. Dans le cas d'une concaténation non commutative [1], il y'a une réelle différence lorsque le dénominateur est situé à gauche ou à droite.

Les grammaires catégorielles sont des grammaires lexicalisées. A partir d'un ensemble Typ_0 de *catégories*, encore appelé *types atomiques* ou *variables* on construit un ensemble de types définis récursivement comme suit

$$Typ = Typ_0 | Typ \otimes Typ | Typ/Typ | Typ\backslash Typ$$

L'on peut donc penser des objets de Typ comme des expressions formelles générées librement à partir des types de base ; la signification de ces types suivra. Dans le cas présent, l'alphabet Σ des terminaux est une partie de Typ_0. Comme ce lexique $\lhd$ est fini, il peut être spécifié en listant l'ensemble de ses éléments sous la forme $Type \rhd symbole$.

On peut formaliser les grammaires catégorielles sous une forme algébrique ou sous forme de séquents à la Gentzen.

3.4.3 Axiomatisation algébrique de la logique L

Le calcul de Lambek, noté **L**, est une logique composée d'un triplet constitué d'une opération de base notée $\otimes$ et de deux opérations notées $\backslash$ et $/$ satisfaisant les lois

$$\text{(Ass)} \quad a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

1. Les langues naturelles ont un ordre des mots qui leur est propre : en français l'ordre est généralement Sujet Verbe Objet, tandis qu'en japonais c'est plutôt Sujet Objet Verbe et en arabe classique Verbe Sujet Objet. Il faut donc plutôt utiliser des fractions non commutatives

$$\text{(Res)} \quad a \otimes b \leq c \text{ ssi } b \leq a\backslash c \text{ ssi } a \leq c/b.$$

où la relation $\leq$ désigne un ordre. L'opération $\otimes$ est appelée le produit, la multiplication ou la fusion. L'opération $\backslash$ est appelée la division à droite(ou résiduel à droite) et la dernière opération $/$ est appelée la division à gauche (ou résiduel à gauche).

En terme algébrique, L correspond aux semigroupes ordonnés résidués. En plus du caractère monotone de la multiplication

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } c \otimes a \leq c \otimes b \text{ et } a \otimes c \leq b \otimes c$$

tout semigroupe ordonné et résidué satisfait les propriétés suivantes :

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } c\backslash a \leq c\backslash b \text{ et } b\backslash c \leq a\backslash c$$

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } a/c \leq b/c \text{ et } c/b \leq c/a.$$

La forme algébrique de L se présente donc comme suit. Les types atomiques sont notés $p, q, r, \cdots$ et les types arbitraires sont notés $A, B, C, \cdots$. Les expressions de la forme $A \vdash B$ sont appelées des séquents de L.

Les axionmes de L sont

$$A \vdash A.$$

$$(A \otimes B) \otimes C \vdash A \otimes (B \otimes C)$$

$$A \otimes (B \otimes C) \vdash (A \otimes B) \otimes C$$

et les règles d'inférence sont :

$$\frac{A \otimes B \vdash C}{B \vdash A\backslash C} \quad \frac{B \vdash A\backslash C}{A \otimes B \vdash C}$$

$$\frac{A \otimes B \vdash C}{A \vdash C/B} \quad \frac{A \vdash C/B}{A \otimes B \vdash C}$$

$$\frac{A \vdash B; B \vdash C}{A \vdash C}\text{(La coupure)}$$

Le symbole formel $\vdash$ est interprété comme l'inégalité $\leq$. Nous rappelons qu'une règle formelle $\frac{\Gamma}{S}$ où Γ est suite de séquents et S un séquent est dite dérivable dans une logique $\mathcal{L}$ si S est prouvable dans $\mathcal{L}$ enrichi de tous les séquents de Γ comme hypothèse (en d'autres termes S est prouvable à partir de Γ dans $\mathcal{L}$ ce que l'on note $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} S$ L'écriture $\vdash_{\mathcal{L}} S$ signifie que S est prouvé à partir de la logique $\mathcal{L}S$ toute seule.

Les règles suivantes sont dérivables dans **L**.

$$\frac{A \vdash B}{C \otimes A \vdash C \otimes B} \quad \frac{A \vdash B}{A \otimes C \vdash B \otimes C}$$

$$\frac{A \vdash B}{C \backslash A \vdash C \backslash B} \quad \frac{A \vdash B}{B \backslash C \vdash A \backslash C}$$

$$\frac{A \vdash B}{A/C \vdash B/C} \quad \frac{A \vdash B}{C/B \vdash C/A}$$

Enfin voici quelques lois prouvables dans le calcul **L** (voir[37]).

$A \otimes (A\backslash B) \vdash B,$	$(B/A) \otimes A \vdash B$	lois d'application
$(A\backslash B) \otimes (B\backslash C) \vdash (A\backslash C),$	$(A/B)(\otimes(B/C) \vdash A/C$	lois de composition
$(A\backslash B) \vdash (C\backslash A)\backslash(C\backslash B),$	$(A/B) \vdash (A/C)/(B/C)$	Les lois de Geach
$A \vdash (B/A)\backslash B,$	$A \vdash B/(A\backslash B)$	lois d'élévation des types
$A \vdash (B\backslash(B \otimes A)),$	$A \vdash (A \otimes B)/B$	lois d'expansion
$(A\backslash B) \otimes C \vdash A\backslash(B \otimes C),$	$A \otimes (B/C) \vdash (A \otimes B)/C$	Loi de décalage

Examinons rapidement la signification linguistique de ces lois. Par exemple pour la langue française, considérons seulement pour l'instant deux types atomiques que sont s, n ;
s pour phrase (sentence en anglais)
-n pour nom ou groupe nominal.
Le verbe pourrait avoir le type $n\backslash(s/n)$, parce que s'il est suivi d'un nom et l'ensemble précédé d'un nom encore, alors la fusion de tout cela donnera une phrase. Expliquons ces lois de formation au travers d'un exemple. En prenant par exemple la phrase Jean aime Jeanne, le lexique est

$$\{n \lhd Jean, n \lhd Jeanne, aime \lhd n\backslash(s/n)\}$$

et la suite des types est

Jean	aime	Jeanne
$n,$	$n\backslash(s/n),$	n

Maintenant si l'on admet l'axiome $n \vdash n$ et les règles d'inférence $X/Y \otimes Y \vdash X$ et $Y \otimes Y\backslash X \vdash X$ l'on obtient facilement la dérivation

$$\underbrace{n, n\backslash(s/n)}, n$$
$$\underbrace{(s/n), n}_{s}$$

Le fait que le résultat est s montre que la chaine de caractères est une phrase de la langue française.

Voici un exemple plus raffiné où l'on sépare les noms communs des noms propres :

s-la catégorie des phrases déclaratives

n-la catégorie des noms propres

N-la catégorie des noms communs

Les types plus complexes représentent les catégories des foncteurs. Une chaine x est de type $(A\backslash B)$ ssi pour tout y de type A la concaténation yx est de type B ; l'on dit alors que x est un foncteur "left-looking" de la catégorie A vers la catégorie B; de même toute chaine de caractères de type B/A sera vu comme un foncteur "right-looking" de la catégorie A vers la catégorie B. Une chaine z est de type $A \otimes B$ ssi elle s'écrit $x = yz$ où y est de type A et Z de type B. D'où $n\backslash s$ représente la catégorie des verbes ou phrases verbales, $(n\backslash s)/n$ la catégorie des verbes transitifs (ou phrases verbales transitives) $s/(n\backslash s)$ la catégories des phrases nominales ou des noms, $(s/(n\backslash s))/N$ la catégorie des déterminants etc.

La loi d'application $A \otimes (A\backslash B) \vdash B$ correspond à la loi réduction de toute grammaire catégorielle classique.

Les règles d'expansion et de décalage contiennent le produit ; elles sont plus difficiles à interpréter ; pour dire vrai les types de la plupart des catégories syntaxiques ne contiennent pas le produit. Les types avec fusion jouent d'avantage un rôle dans les modèles.

Un modèle de L est un couple $(M, [[-]])$ formé d'une algèbre ordonnée possédant au moins des opérations de multiplication $\cdot$ et de résiduation $\backslash$ et $/$ et une application $[[-]]$ de l'ensemble des types atomiques vers M appelé la valuation. Cette application admet une extension unique de l'ensemble des types vers M en posant

$$[[A \otimes B]]) = [[A]] \cdot [[B]], [[A\backslash B]] = [[A]]\backslash[[B]], [[A/B]] = [[A]]/[[B]].$$

Un séquent $A \vdash B$ est vrai dans un tel modèle lorsque $[[A]] \leq [[B]]$. Un tel séquent est dit vrai dans M lorsqu'il est vrai pour tout modèle $(M, [[-]])$. Il est dit vrai dans une classe $\mathcal{C}$ lorsqu'il est vrai dans toute algèbre de $\mathcal{C}$. L'on dit d'une suite de séquents Γ qu'elle infère un séquent S dans une classe d'algèbres $\mathcal{C}$ si S est vrai dans tout de modèle $(M, [[-]])$ telle que M est un membre de $\mathcal{C}$ et tout séquent de Γ est vrai dans $(M, [[-]])$

Théorème 3.11 (Un théorème de complétude). *(voir[37]*

Le calcul L est fortement complet par rapport à la classe des semigroupes *résidués, dans ce sens que pour tout ensemble de séquents* Γ *et tout séquent* S, $\Gamma \vdash_L S$ *ssi* Γ *infère* S *par rapport à la classe des semigroupes résidués.*

On peut étendre le calcul de lambek en un calcul $L1$ par ajout d'un symbole de constante 1 et d'axiomes additionnels

$$1 \otimes \vdash A, A \vdash 1 \times A, A \otimes 1 \vdash A, A \vdash A \otimes 1.$$

Obtient ainsi cet autre théorème de complétude

Théorème 3.12 (Un théorème de complétude). *(voir[37]*

Le calcul $L1$ *est fortement complet par rapport à la classe des monoïdes résidués, dans ce sens que pour tout ensemble de séquents* Γ *et tout séquent* S, $\Gamma \vdash_L S$ *ssi* Γ *infère* S *par rapport à la classe des monoïdes résidués.*

3.4.4 Axiomatisation du calcul de L par un système des séquents

Les calculs des séquents sont des systèmes de déduction logique introduits par (Gentzen G. 1934), et qui permettent de nombreuses variations. Ce sont des systèmes à trois niveaux : celui des formules, celui des séquents, et celui des démonstrations. Pour ce qui concerne la logique L de Lambek introduite par Lambek lui même dans [20] sous l'appellation calcul syntaxique qui est devenu un standard logique des types pour les grammaires catégorielles, nous avons déjà mentionné que les types ou formules sont formés à partir des atomes (variables ou constantes) au moyen des symboles d'opérations $\backslash$, $/$ $\otimes$. Les opérations dites de résiduation $\backslash$, $/$ sont aussi parfois notées $\rightarrow$ et $\leftarrow$ respectivement. Un système déductif dans le style de Gentzen pour le calcul **L** se présente comme suit :

$$\frac{}{A \vdash A}(Id)$$

$$\frac{\Gamma, B, \Delta \vdash C; \Phi \vdash A}{\Gamma, \Phi, A\backslash B, \Delta \vdash C}(\backslash L) \quad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A\backslash B}(\backslash R)$$

$$\frac{\Gamma, B, \Delta \vdash C; \Phi \vdash A}{\Gamma, B/A, \Delta \vdash C}(/L) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B/A}(/R)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \otimes B, \Delta \vdash C}(\otimes L) \quad \frac{\Gamma \vdash A; \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}(\otimes R)$$

pour tout types A, B, C et toute liste de types Γ, Δ, Φ à la condition que Γ ne contiennent pas le mot vide.

Il existe plusieurs variantes du calcul de Lambek. Par exemple en admettant le mot vide $\Gamma = \epsilon$ dans $(\backslash R)$ et $(/R)$ l'on obtient un calcul de Lambek ayant possiblement des antécédents vides. Ce calcul est noté $\mathbf{L}^{\star}$. Ce nouveau calcul est un fragment de **L1**. Ce dernier calcul admet une nouvelle constante 1, une nouvelle règle d'inférence et un nouvel axiome :

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash A}{\Gamma, 1, \Delta \vdash A} \quad (1L)$$

Si en plus on adjoint les opérations $\vee$ et $\wedge$ et des règles convenables, l'on obtient le calcul de Lambek plein (voir[28]) , que l'on note habituellement **FL.**

Pour finir signalons que les logiques de types sont des logiques sous-structurelles, dans ce sens qu'elles ne contiennent pas les règles structurales que sont l'affaiblissent, la contraction et l'échange.

$$\frac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\Gamma, A, \Delta \vdash B} \quad \text{(Affaiblissemnt)}$$

La règle d'affaiblissement autorise à ajouter des hypothèses redondantes. Si donc $\Pi \vdash \Theta$, est prouvable dans le système, toute hypothèse de Π doit être utilisée au moins une fois.

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \vdash B}{\Gamma, A, \Delta \vdash B} \quad \text{(Contraction)}$$

La règle de contraction autorise d'utiliser chaque hypothèse plus d'une fois.

$$\frac{\Gamma, A, B\Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash B} \quad \text{(Echange)}$$

La règle d'échange autorise d'utiliser les hypothèses dans un ordre quelconque.

3.4.5 Le Pregroupe de Lambek

Le pregroupe de Lambek est un monoïde ordonné $(P, \leq, \otimes, (-)^l, (-)^r, e)$ dans lequel tout élement possède un adjoint à gauche et un adjoint à droite ; c'est à dire pour tout $a \in P$, il existe a^r et a^l dans P satisfaisant les inégalités :

$$\begin{array}{ccccc} a \otimes a^r & \leq & e & \leq & a^r \otimes a \\ a^l \otimes a & \leq & e & \leq & a \otimes a^l \end{array}$$

Pour tout prégroupe P, si on définit $x \setminus y = x^r \otimes y$ et $x/y = x \otimes y^l$. alors l'on obtient un monoïde résidué $(P, \leq, \otimes, \setminus, /, e)$. on peut donc par abus de langage dire que tout prégroupe est un monoïde ordonné résidué.

La réciproque n'est pas necessairement vraie. En effet, un prégroupe satisfait les identités (inégalités)

$$\begin{array}{rcl} x \setminus (y \otimes z & \leq & (x \setminus y) \otimes z \\ x \otimes y/z & \leq & x \otimes (y/z) \end{array}$$

Ce qui n'est pas le cas de certains monoides résidués.

Un exemple de prégroupe bien connu est l'ensemble $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ des applications monotones non bornées. L' ordre ici est donné par $f \leq g$ ssi $f(n) \leq g(n), \forall n \in \mathbb{Z}$. L'opération du monoïde est la composition des applications et l'element neutre est l'application identique. Les adjoints à gauche et à droite d'une application f sont definis comme suit : $f^r(n) = \vee\{m \in \mathbb{Z}, f(m) \leq n\}$ et
$f^l(n) = \wedge\{m \in \mathbb{Z}, n \leq f(m)\}$.

3.5 Limites et Colimites dans la catégorie de monoïdes ordonnés résidués

3.5.1 Limites

Nous venons de voir l'importance des semigroupes (respectivement de monoïdes) ordonnés résidués en lingustique. Ce qui est remarquable est que les modèles des logiques $\mathbf{L}, \mathbf{L}^*$ et $\mathbf{L}_1$ conservent la multiplication et les résiduels et nous suggère de considérer comme morphismes les applications croissantes qui conservent les résiduels (les divisions à gauche et à droite.) On va noter par **Mor** cette catégorie et en donner quelques propriétés.

Théorème 3.13. *Soit $\{(M_i, \leq_i, \otimes_i, \setminus_i, /_i, e_i)\}_{i\in I}$ une famille de monoïdes ordonnés résidués. Le produit de cette famille existe et est construit comme suit :*

1. *Le support du produit est le produit cartésien $\prod_{i\in I} M_i$*
2. *L'ordre, la multiplication, les résiduations et l'élment neutre sont définis point par point.*
3. *Les projections $\Pi_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ sont les morphismes de **Mor** par définition des opérations dans $\prod_{i\in I} M_i$.*

Théorème 3.14. *Soient $f, g : M \longrightarrow N$ deux morphismes de **Mor**. L'égalisateur du couple (f, g) est donné par $E = \{x \in M, f(x) = g(x)\}$ muni de l'ordre induit et des opérations induites.*

Démonstration Il suffit de vérifier que E est stable pour le produit et les divisions. Cela va de soit parce que les applications f et g conservent la multiplication et les résiduels.

$\square$.

Théorème 3.15. *Soient $f : P \longrightarrow M$ et $g : Q \longrightarrow M$ deux morphismes de **Mor**. Le produit fibré du couple (f, g) est donné par :*
$P \times_M Q = \{(x, y) \in P \times Q, f(x) = g(y)\}$.

Démonstration L'on vient de voir dans le cadre du produit, que $P \times Q$ muni de l'ordre point par point et des opérations point par point est un monoïde ordonné. L'on vérifie alors aisement que $P \times_M Q$ est un sous monoïde ordonné de $P \times Q$. Cette vérification provient de ce que f et g conservent la multiplication et les divisions.

$\square$.

Corollaire 3.2. *La catégorie **Mor** est complète et le foncteur d'oubli **Mor** $\longrightarrow$ **Ens** conserve les limites.*

3.5.2 Colimites

La construction des coproduits est identique à celle donnée dans le chapitre sur les monoïdes ordonnés. Etant donné une famille de monoïdes ordonnés résidués $\{(M_i, \leq_i, \otimes_i, \backslash_i, /_i, e_i)\}_{i \in I}$, on considère leur coproduit dans la catégorie des monoïdes ordonnés : il est donné par le sous monoide $\coprod_{i \in I} M_i$ des I-uplets (x_i) dont presque tous les x_i sont égaux à e_i. Pour s'assurer que le $\coprod_{i \in I} M_i$ est stable pour les résiduels, il faut et il suffit de montrer que la division à gauche (respectivement à droite) d'un élement neutre e_i par lui même est encore égale à e_i. En effet, pour tout élement x d'un monoïde ordonné résidué d'élement neutre e, $(x \leq e/e) \Longleftrightarrow x \otimes e \leq e \Longleftrightarrow x \leq e$ d'où $e/e = e$. De manière similaire, on montre que $e \backslash e = e$. On en déduit que si (x_i) et (y_i) appartiennent à $\coprod_{i \in I} M_i$ alors x_i/y_i et $x_i \backslash y_i$ appartiennent aussi à $\coprod_{i \in I} M_i$. Il est alors clair que les coprojections $\mu_i : M_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$ conservent aussi bien la multiplication que les divions et l'élement neutre. La propriété universelle du couple$(\coprod_{i \in I} M_i, \mu_i)$ est immédiate.

Théorème 3.16. *La catégorie des monoïdes ordonnés résidués possède des coproduits arbitraires. De plus le foncteur **Mor** $\longrightarrow$ **Mve** conserve les coproduits.*

La construction des coégalisateurs reste toujours délicate comme dans le cas des monoïdes ordonnés ; mais on va se servir abondamment de ce qui a été fait dans le cas des monoïdes ordonnés. L'on introduit d'abord une nouvelle définition :

Définition 3.5.1. *Une congruence résiduée sur un monoïde ordonné résidué M est une congruence d'ordre θ sur le monoïde sous jacent telle que le monoïde ordonné quotient M/θ soit résidué et que l'application quotient $\theta^\sharp : M \longrightarrow M/\theta$ conserve les divisions.*

Il faut déjà observer qu'une intersection arbitraire de congruences résiduées est une congruence résiduée ; cela fait donc sens de parler de congruence résiduée engendrée par une partie H de $M \times M$ où M est un monoïde ordonné résidué. Nous n'allons pas caractériser ici les congruences résiduées. Un tel travail a été fait dans un cas très particulier où la congruence θ provient d'une congruence de Rees [27]. Soit donc

$$M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

une paire parllèle de morphismes de monoïdes ordonnés résidués. Considérons $\nu(R)$ la congruence résiduée engendrée par la relation $R = \{(f(x), g(x)), x \in M\}$. Le diagramme

$$M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N \xrightarrow{h} N/\nu(R)$$

est alors un coégalisateur.

La propriété universelle est aussi immédiate.

Chapitre Quatre

Modules sur les monoïdes ordonnés résidués

Le sujet central de ce chapitre concerne les catégories de modules sur les monoïdes (ordonnés) résidués. Les principales propriétés catégorielles sont établies.

La notion de module sur un anneau est bien connu. En dehors de cette notion classique il faut aussi y ajouter celle des ensembles munis de l'action d'un monoïde et leurs variantes ordonnées qui ont elles aussi été abondamment étudiées ces trente dernières années.

Soit **M** un monoïde $(M, \cdot, e)$. Un **M**-ensemble à gauche est un ensemble X muni d'une application $M \times X \to X$ notée $(m, x) \mapsto m.x$ telle que $m.(n.x) = (m \cdot n).x$ et $e.x = x$ pour tout $m, n \in M$ et $x \in X$. Cette application est appelée une action à gauche de M sur X. Cette notion date des années 1960. L'étude des **M**-ensembles connait un rebondissement suivant la publication en l'an 2000 du monographe [17]. Sa variante ordonnée, celle de **S**-posets est initiée par Fakhrudin dans les années 1980 [9],[10]. Cette fois ci **S** est un monoïde ordonné, et l'on va requérir à l'ensemble X d'être au moins un ensemble ordonné et à l'action d'être compatible, dans un certain sens avec l'ordre. Après cette introduction, il a fallu attendre le début du millénaire pour voir se développer une recherche intense autour de cette notion de **S**-posets. Il faut faire remarquer que dès les années 1980, certains ensembles ordonnés sup complets, appelé **locale** [16], ont connus une considération particulière ; la notion de module sur un locale est considérée. La variante non commutative d'un locale est appelé **quantale** ; c'est un semi-groupe de la catégorie monoidale des sup-démi-treillis ; donc, pour un quantale Q, un Q -module devrait être un sup-demi-treillis M avec une action $Q \otimes M \to M$ satisfaisant les axiomes habituels. Pour des faits sur les catégories des modules sur un quantale le lecteur peut consulter [18]

En dehors de la zone d'origine des modules sur les anneaux unitaires, le concept de projectivité et celui d'injectivité ont fait l'objet d'une étude pour des ensembles dotés d'une action de semigroupe ou de monoïde voir[17] , [8], leurs variantes partiellement ordonnées ainsi que pour les cas des modules sur un quantale [19]. Nous allons juste en dire un petit mot dans ce travail. Nous nous sommes évertués dans le chapitre 3, à exhiber des monoïdes ordonnés résidués qui ne sont pas des quantales. Nous sommes à notre connaissance, la première personne, à introduire la notion de module sur un monoïde ordonné résidué. Autrement dit notre concept de module est intermédiaire entre celui de module sur un ensemble ordonné et de module sur un quantale ; et ce travail que nous initions ici est le début d'une longue investigation sur cette notion. Il commence dans le présent document et nous le terminerons dans des publications ailleurs. Voici en grandes lignes les principaux résultats obtenus. Nous avons d'abord isolé les trois catégories suivantes :

- **A-Mod** : la catégorie des A-modules dont les morphismes sont des applications croissantes équivariantes.
- $(\mathbf{A\text{-}Mod})_*$: la catégorie des A-modules et des applications croissantes A-équivariantes résiduées et leurs adjoints sont A-équivariantes.
- **A-Alg** : la catégorie des A-algèbres et des applications croissantes monoidales A-équivariantes.

S'agissant de la catégorie **A-Mod**,

-nous avons prouvé qu'elle possède toutes les limites et toutes les colimites, et certaines sous limites et sous colimites en décrivant systématiquement les produits, les coproduits, les égalisateurs et sous égalisateurs, les coégalisateurs et sous coégalisateurs, les produits fibrés et les sommes amalgamées.

-nous avons mis en évidence les modules libres au dessus des ensembles ordonnés.

-nous avons montré que la catégorie **A-Mod** possède suffisamment d'injectifs.

S'agissant de la catégorie $(\mathbf{A\text{-}Mod})_*$

-nous avons prouvé qu'elle possède des produits indexés par des ensembles ordonnés,

-nous y avons mis en évidence l'équivalence des deux notions de quotient l'une par les congruences et l'autre par certains opérateurs particuliers appelés noyaux quantiques.

Enfin s'agissant de la catégorie **A-Alg**, nous nous sommes limités juste sur le fait que le foncteur d'oubli de cette catégorie vers **A-Mod** possède un adjoint à gauche. Cela permet quand même de postuler quelques colimites dans **A-Alg**.

Remarque 4.0.1. *Nous rappelons [11] que les produits dans la catégorie M-*

Poset a pour objet le produit cartésien muni de l'action et de l'ordre point par point. En particulier, l'objet terminal est le singleton muni des structures canoniques d'ordres et de M-ensemble ordonné. Rappelons aussi que l'égalisateur d'une paire parallèle $f, g : S \longrightarrow T$ de M-morphismes dans M-Poset est donné par $E = \{s \in S, f(x) = g(x)\}$ muni de l'action induite et de l'ordre induit. Le produit fibré de deux morphismes $f : X \longrightarrow S$ et $g : Y \longrightarrow S$ est le sous-M-ensemble ordonné $P = \{(x, y), f(x) = g(y)\}$ de $X \times Y$. Le coproduit est la somme disjointe munie de l'action et de l'ordre usuels.

Maintenant introduisons l'objet de notre étude à savoir une notion d'action d'un monoïde ordonné résidué. Sauf que, compte tenu de la l'adjonction

$$\mathbf{Mve} \underset{F}{\overset{U}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ord}$$

nous allons faire agir un monoïde ordonné résidué $\mathbf{A} = (A, \leq, \otimes, e, /, \backslash)$ d'abord sur un ensemble ordonné (pour obtenir la notion de A-module) et ensuite sur un monoïde ordonné (pour obtenir la notion de A-algèbre.)

Le paradigme est le suivant : dans tout ce qui a précédé, la catégorie de base a été celle des ensembles ordonnés et des applications croissantes résiduées. Nous prenons une sorte d'anneau dans cette catégorie, ce que nous avons baptiser "monoïde ordonné résidué" et nous faisons agir un tel anneau sur les objets de la catégorie pour obtenir une notion de module. C'est cela qui motive la définition qui suit.

Définition 4.0.2. *Soit $\boldsymbol{A} = (A, \leq, \otimes, e, /, \backslash)$ un monoïde ordonné résidué. Une action de $\boldsymbol{A}$ sur un ensemble ordonné $(M, \leq)$ est la donnée d'une application $A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto a \star m$, satisfaisant les axiomes suivants :*

- *$(a \otimes b) \star m = a \star (b \star m)$ pour tous $m \in M$, $a, b \in A$*
- *$e \star m = m$ pour tout $m \in M$*
- *pour tout $a \in A$, l'application $\widehat{a}_M : M \to M$, $m \mapsto a \star m$ est résiduée. Le résiduel à droite $(\widehat{a}_M)_*$ sera noté $a\backslash_*(-)$. Ainsi,*

$$a \star m \leq n \text{ ssi } m \leq a\backslash_* n$$

- *pour tout $m \in M$, l'application $\widehat{m} : A \to M$, $a \mapsto a \star m$ est résiduée ; Le résiduel à gauche $(\widehat{m})_*$ sera noté $(-)_*/$. Ainsi,*

$$a \star m \leq n \text{ ssi } a \leq n_*/m$$

Un $\boldsymbol{A}$-module est la donnée d'un ensemble ordonné muni d'une action à gauche de $\boldsymbol{A}$. L'on adoptera la notation ${}_A M$ pour signifier que M est un A

module à gauche. Mais très souvent pour éviter des lourdeurs d'écriture, les structures seront désignées par leur support.

La notion de A-module à droite se définie de manière analogue.

Exemple 4.0.1. Tout monoïde ordonné résidué $(A, \leq, \otimes, /, \backslash, e)$ est à la fois un A-module à gauche et à droite. En fait l'opération du monoïde est une action de A sur A.

Exemple 4.0.2. Soit $(A, \leq, \otimes, /, \backslash, e)$ un monoïde ordonné résidué. Soit X un ensemble quelconque. L'on considère l'ensemble A^X des application de X vers A. On le munit de l'ordre $\leq$ défini point par point. On y définit aussi une action à gauche par A noté $\star_X$; si $a \in A$ et $f \in A^X$, l'action $a \star_X f$ de a sur f est définie par

$$(a \star_X f)(x) = a \otimes f(x).$$

Il n'y a aucune difficulté à vérifier les deux premiers axiomes de A-module. Ainsi nous ne vérifions que les deux derniers. Soit $a \in A$; pour définir l'adjoint à droite de $\widehat{a} := a \star_X (-) \colon A^X \to A^X$, observons que pour f, g éléments de A^X

$$\begin{array}{c}
a \star_X f \leq g \\
\hline\hline
a \otimes f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout } x \text{ élement de } X \\
\hline\hline
f(x) \leq a\backslash g(x) \quad \text{pour tout } x \text{ élement de } X
\end{array}$$

Ce qui permet ainsi de déduire que l'application adjointe $\widehat{a}_* \colon A^X \to A^X$ de $\widehat{a}$ est définie par $\widehat{a}_*(g)(x) = a\backslash g(x)$.

Enfin pour f fixé dans A^X l'adjoint à gauche $\widehat{f}_*$ de $\widehat{f}$ est défini par $\widehat{f}_*(g) = g/f \colon A \to A$ où $(g/f)(x) = g(x)/f(x)$ pour tout x; en effet, pour tout $a \in A$, pour tout $g \in A^X$,

$$\begin{array}{c}
\widehat{f}(a) \leq g \\
\hline\hline
\widehat{f}(a)(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout élement } x \text{ de } X \\
\hline\hline
a \otimes f(x) \leq g(x) \quad \text{pour tout élement } x \text{ de } X \\
\hline\hline
a \leq g(x)/f(x) \quad \text{pour tout élement } x \text{ de } X \\
\hline\hline
a \leq g/f
\end{array}$$

Dans cette dernière ligne, l'on voit a comme une application constante de X vers A

Exemple 4.0.3. Si les ordres sur $(A, \leq, \otimes, /, \backslash, e)$ et sur $(M, \leq)$ sont des ordres de sup-demi treillis, les deux derniers axiomes de la notion de module sont équivalents (d'après le théorème fondamentale des fonteurs adjoints) aux deux conditions de conservation suivantes : $a \star \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I}\{a \star x_i\}$ pour toute famille $\{x_i\}_{i\in I}$ de M, $a \in A$; et $(\bigvee_{i\in I} a_i) \star x = \bigvee_{i\in I}\{a_i \star x\}$ pour toute famille $\{a_i\}_{i\in I}$ de A et $x \in M$. L'on retrouve alors la notion bien connue de module sur un quantale.

Le résultat suivant bien connu dans la théorie des modules sur un quantale [32] reste vrai sur les modules sur un monoïde ordonné résidué

Théorème 4.1. *Soit $(M, \leq)$ un A-module à gauche.*

1. $(n_*/m) \star m \leq n$
2. $a \star (a\backslash_* m) \leq m$
3. $m \leq a\backslash_*(a \star m)$
4. $(a\backslash_* m)_*/n = a\backslash_*(m_*/n)$
5. $(m_*/n) \star n_*/n = m_*/n$
6. $e_A \leq m_*/m$
7. $(m_*/m) \star m = m$

Définition 4.0.3. *Soient M et N deux A- modules à gauche. Soit $f : M \longrightarrow N$ une application croissante.*

-L'on dit que f est faiblement A-équivariante lorsque $a \star f(m) \leq f(a \star m)$ pour tout $a \in A, m \in M$.

-L'on dit que f est A-équivariante lorsque $a \star f(m) = f(a \star m)$ pour tout $a \in A, m \in M$.

Proposition 4.1. *Soient ${}_AM$ et ${}_AN$ deux A-modules à gauche. Si $f : M \longrightarrow N$ est une application croissante faiblement A- équivariante qui admet un adjoint à droite faiblement A- équivariante alors f est A-équivariante.*

Démonstration Soit $f : M \longrightarrow N$ une application croissante faiblement A-équivariante qui admet un adjoint à droite f_* faiblement A-équivariante.

On a d'après les propriétés de l'adjonction $a \star m \leq a \star f_*f(m)$. Ainsi $a \star m \leq f_*(a \star f(m))$ car f_* est A-équivariante ; donc $f(a\star m) \leq f(f_*(a\star f(m))) \leq a\star f(m)$. Comme f est faiblement A-équivariante, alors $a\star f(m) \leq f(a\star m)$, d'où l'égalité et par conséquent f est A-équivariante. $\square$.

A cause de ce résultat, nous allons distinguer deux univers de travail :

– la catégorie **A-Mod** des A-modules dont les morphismes sont des applications croissantes A équivariantes.

– la catégorie (**A-Mod**)$_*$ des A-modules et des applications croissantes A équivariantes résiduées et leurs adjoints sont A-équivariantes.

De manière similaire on a les catégories **Mod-A** et (**Mod-A**)$_*$ pour les A-modules à droite.

4.1 Etude de la catégorie A-Mod

Exemple 4.1.1. Considérons le tréillis résidué $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, 0 \leq 1, \wedge, 1)$ muni de l'unique division $\div$ définie comme suit : $a \div b = \bigvee\{c; c \wedge a \leq b\}$

Il est clair que les catégories **2**-mod et **Ord** sont isomorphes ; Ainsi en étudiant A-mod l'on étudie aussi **Ord**.

4.1.1 Sous-modules, module quotient et factorisation de morphismes dans A-Mod

Dans cette sous section nous définissons la notion de sous module et insistons sur deux sortes de quotients, ceux qui sont définis par les préordres A-compatibles et ceux qui sont définis par les A- congruences dites d'ordre.

Définition 4.1.1. *Soit ${}_AM$ un A-module. Une partie non vide S de M, est appelé un A-sous module de ${}_AM$ si elle est munie de l'ordre induit et si elle est stable pour l'action de A.*

L'on établit aisément que :

1. Pour tout $m \in M$, l'ensemble $A * m := \{a * m, a \in A\}$ est un A-sous module de ${}_AM$. On l'appelle le sous module cyclique déterminé par m.
2. Tout idéal à gauche I de $(A, \leq, \otimes, \backslash, /, e)$ est un A-sous module de ${}_AA$, où par idéal de $(A, \leq, \otimes, \backslash, /, e)$ l'on entend toute partie I de A tel que $A \otimes I \subset I$ et $(a \in A, i \in I \Rightarrow a/i \in I)$.

Définition 4.1.2. *Soit θ une relation d'équivalence sur un A-module ${}_AM$. L'on dit de θ qu'elle est A-compatible avec l'action de A si $m\,\theta\,m'$ implique $(a * m)\,\theta(a * m')$ pour tout $m, m' \in M$ et $a \in A$. Elle est aussi appelée une A-congruence.*

Dans cette seconde situation l'ensemble quotient M/θ est muni de l'action $a * [m]_\theta = [a * m]_\theta$, dont on vérifie aisément qu'elle est bien définie et l'application quotient $\theta^\flat : M \to M/\theta$ est A-équivariante.

Définition 4.1.3. *Une A-congruence sur un A-module ${}_AM$ est appelée une A-congruence d'ordre, ou que le quotient M/θ est un A-module quotient, s'il existe sur le quotient M/θ un ordre $\leq$ qui en fait un A-module et qu'en plus la surjection canonique $\theta^\flat : M \to M/\theta$ soit croissante et A-équivariante.*

Il peut arriver que ce quotient possède plusieurs ordres pour lesquels la surjection canonique est un A-morphisme ; prenons par exemple A à être le monoïde résidué trivial ayant un seul élément $A = \{e\}$ et M à être l'ensemble à trois éléments $M = \{1, a, b\}$ muni de l'ordre induit par la relation de couverture

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

et de l'action triviale. La relation d'égalité δ_M est manifestement une A-congruence d'ordre sur M. L'ensemble quotient peut revêtir les trois ordres suivants

$$\begin{tikzcd} & [1] & \\ [a] \arrow[ur] & & [b] \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} [1] \\ [a] \arrow[u] \\ [b] \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} [1] \\ [b] \arrow[u] \\ [a] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Pour chacun de ses ordres la projection canonique $m \mapsto [m]$ est croissante. Le premier quotient est isomorphe à la structure de départ. Il va donc falloir préciser quel ordre est en train d'être utilisé. En général nous prendrons l'ordre que" nous conviendront d'appeler, plus tard, l'ordre compatible ou l'ordre canonique (cf 4.2).

Notons $\mathbf{Cong}({}_AM)$ l'ensemble des A-congruences d'ordre du A-module ${}_AM$. C'est un treillis complet lorsqu'on le munit de la relation d'inclusion. Pour toute famille $(\theta_i)_i$ de telles congruences, l'infimum est donné par l'intersection.

Définition 4.1.4. *Un A-pré ordre sur un A-module ${}_AM$ est une relation réflexive, transitive, A-compatible et qui contient l'ordre initial $\leq_M$.*

C'est le cas du noyau dirigé $\overrightarrow{\mathbf{ker}}(f) = \{(m, m'), f(m) \leq f(m')\}$ d'un A-morphisme $f \colon {}_AM \to {}_AN$ entre des A-modules. Réciproquement nous adaptons un résultat de [39] pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soit ${}_AM$ un A-module et soit α une relation binaire sur M. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *La relation α est un A-pré ordre sur M.*
2. *Il existe un A-morphisme $f \colon {}_AM \to {}_AN$ tel que $\alpha = \overrightarrow{\boldsymbol{ker}}(f)$.*

Démonstration . Si α est un A-pré ordre sur un A-module ${}_AM$, alors la relation $\theta(\alpha) := \alpha \cap \alpha^{op}$ est une A-congruence sur M. Vérifions cela.

Réflexivité La relation α et sa relation opposée α^0 contiennent toutes la relation identique Δ_M; il en est de même de leur intersection.

Symétrie Par construction, la relation $\theta(\alpha) := \alpha \cap \alpha^0$ est symétrique.

Transitivité Si l'on suppose $m\, \alpha \cap \alpha^0\, m'\, \alpha \cap \alpha^0\, m''$, alors on a, à la fois $m\, \alpha\, m'\, \alpha\, m''$, et $m\, \alpha^0\, m'\, \alpha^0\, m''$; par transitivité de α et donc de α^0, on a $m\, \alpha \cap \alpha^0\, m''$.

La compatibilité avec l'action de A. Elle résulte immédiatement de ce que la relation α est A-compatible.

Il est immédiat de vérifier que $\alpha = \overrightarrow{\mathbf{ker}}(\theta(\alpha)^\flat)$. La réciproque est tout aussi immédiate.

$\square$

Remarque 4.1.1. ***et Notation*** *Il existe donc sur le quotient $M/\theta(\alpha)$ un ordre $\preccurlyeq$ pour lequel la surjection canonique $\theta^\flat \colon M \to M/\theta(\alpha)$ est croissante et A-équivariante ; c'est l'ordre*

$$[m]_{\theta(\alpha)} \preccurlyeq [m']_{\theta(\alpha)} \text{ si, et seulement si, } m\, \alpha\, m'$$

car la relation α contient l'ordre $\leq$ de M. L'on est déjà tenté d'affirmer que la A-congruence $\theta(\alpha)$ est une A-congruence d'ordre ; mais il reste un seul point important, celui d'établir que l'ensemble ordonné $M/\theta(\alpha)$ est un A-module. Cela est clairement établi dans la démonstration du théorème 4.1 ci dessous.

Dans la suite le quotient $M/\theta(\alpha)$ issu d'un A-pré ordre α sera préférablement noté M/α, surtout pour nous rappeler que l'ordre est défini à partir de α indépendamment de l'ordre initial de M.

Nous allons procéder à de nombreuses constructions qui utilisent la définition 2.4.1 de la page 22 que nous rappelons ici :

Définition 4.1.5. *Soit R une relation binaire sur un ensemble ordonné $(M, \leq)$. Une R chaîne d'un élément m vers un élément m' est une suite de la forme*

$$m \leq m_1 \,\mathrm{R}\, m'_1 \leq m_2 \,\mathrm{R} \leq \cdots \leq m_p \,\mathrm{R}\, m'_p \leq m'$$

où p est un entier naturel, $m_1, m'_1, \cdots m_p, m'_p$ des éléments de M. Pour exprimer qu'il existe une R chaine de m à m' on note $m \leq_R m'$.

Observation. Si $_AM$ est un A-module et θ une A-congruence, alors $m \leq_R m'$ implique $a * m \leq_R a * m'$ pour tout $a \in A$.

Théorème et Définition 4.1. *Soit $_AM$ un A-module. Une A-congruence sur $_AM$ est A-congruence d'ordre si et seulement si,*
$m \leq_\theta m' \leq_\theta m \Rightarrow m\,\theta\,m'$ pour tout $m, m' \in M$. L'ensemble quotient M/θ est alors muni de l'ordre $[m]_\theta \leq [m']_\theta$ si, et seulement si $m \leq_\theta m'$.

Démonstration Supposons que θ soit une A-congruence d'ordre sur $_AM$. Si l'on suppose qu'il existe un entier p et des éléments m_i, m'_i de M pour p allant de 1 à p tel que

$$m \leq m_1\theta m'_1 \leq m_2\theta \leq \cdots \leq m_p\theta m'_p \leq m',$$

alors par passage au quotient et compte tenu du fait que l'application $m \mapsto [m]_\theta$ est croissante, on obtient $[m]_\theta \leq [m']_\theta$. En exploitant la relation $m' \leq_\theta m$ on obtient, pour la même raison, que $[m']_\theta \leq [m]_\theta$. D'où $[m]_\theta = [m']_\theta$, soit $m\theta m'$.

Réciproquement soit θ un A-congruence sur M satisfaisant l'implication $m \leq_\theta m' \leq_\theta m \Rightarrow m\,\theta\,m'$. L'on va munir M de l'ordre $[m]_\theta \leq [m']_\theta$ si et seulement si $m \leq_\theta m'$.

1. La relation $\leq$ ainsi définie sur M/θ est bien définie car si $m\,\theta\,n$ et $m'\,\theta\,n'$ et $m \leq_\theta m'$, alors on a $n \leq n\theta m \leq m'\theta n' \leq n'$, d'où l'on en déduit $n \leq_\theta n'$.
2. La relation $\leq$ sur M/θ est un ordre

   Reflexivité Pour tout $m \in M$ $m \leq m\theta m$; d'où $m \leq_\theta m$.

   Antisymétrie C'est la conséquence immédiate de l'hypothèse
   $m \leq_\theta m' \leq_\theta m \Rightarrow m\,\theta\,m'$.

   transitivité Il est clair qu'une concaténation des θ chaînes est encore une θ-chaîne.
3. L'ensemble quotient M/θ muni de l'action quotient et de l'ordre ainsi défini est un A-module. Les deux premiers axiomes d'un A-module sont faciles à vérifier. Il reste à vérifier que pour $a \in A$ et $m \in M$ les applications $\widehat{a}\colon M/\theta \to M/\theta$, $[m]_\theta \mapsto [a * m]_\theta$ et $\widehat{m}\colon A \to M/\theta$, $[m]_\theta \mapsto [a * m]_\theta$ sont résiduées. La première a pour résiduel (adjoint à droite) l'application $\widehat{a}_*\colon M/\theta \to M/\theta$, $[m]_\theta \mapsto [a\backslash_* m]_\theta$ et la deuxième a pour résiduel $\widehat{m}_*\colon A \to M/\theta$, $a \mapsto a_*/m$. Les vérifications sont assez faciles.
4. Enfin il est clair que l'application canonique $\theta^\flat\colon M \to M/\theta$ est croissante et conserve l'action par A.

□

Théorème 4.3. *Soit $_AM$ un A-module et soit θ une A-congruence sur $_AM$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *La relation θ est une A-congruence d'ordre sur M.*
2. *Il existe un A-pré ordre α sur M tel que $\theta = \alpha \cap \alpha^o p$.*
3. *Il existe un A-morphisme $f\colon {}_AM \to {}_AN$ tel que $\theta = \textbf{\textit{ker}}(f)$.*

Démonstration . 1) $\Rightarrow$ 2). D'après 1) il existe un ordre sur le quotient M/θ pour lequel la projection canonique $\theta^\flat$ est A-équivariante et croissante. L'on prendra α à être $\overrightarrow{\mathbf{ker}}(\theta^\flat)$.

2) $\Rightarrow$ 3). D'après le théorème 4.2, l'on peut prendre d'abord le A-morphisme $f\colon {}_AM \to {}_AN$ induit par α, c'est-à -dire tel que $\alpha = \overrightarrow{\mathbf{ker}}(f)$, et alors $\mathbf{ker}(f) = \overrightarrow{\mathbf{ker}}(f) \cap \overrightarrow{\mathbf{ker}}(f)^0 = \alpha \cap \alpha^0 = \theta$.

3) $\Rightarrow$ 1). Soit $f\colon {}_AM \to {}_AN$ un A-morphisme tel que $\alpha = \overrightarrow{\mathbf{ker}}(f)$; alors le noyau dirigé $\alpha := \overrightarrow{\mathbf{ker}}(f)$ de f est un A-pré ordre sur M. Par conséquent $\alpha \cap \alpha^o p$ est une A-congruence d'ordre sur M. $\square$

Proposition 4.2. *Tout morphisme $f\colon {}_AM \to {}_AN$ admet la factorisation canonique*

$$\begin{tikzcd} {}_AM \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & & {}_AN \\ M/\overrightarrow{ker}(f) \arrow[rr, "I"] & & M/ker(f) \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

*où π désigne la projection canonique, I est l'application qui envoie une classe $[m]$ sur elle même et $\bar{f}$ envoie une classe $[m]$ sur $f(m)$. Cette dernière application est bien définie. Toutes ces application sont des morphismes de A-**Mod***

Démonstration . Les vérifications sont immédiates. $\square$.

Maintenant nous allons considérer une relation α dans un A-module M qui est réflexive , transitive et A-compatible. Une telle relation n'est pas forcément un A-pré ordre car elle ne contient pas forcément l'ordre de départ. Ce que l'on fait c'est d'abord la plonger dans un A-pré ordre avant d'appliquer les résultats précédents. Le candidat tout indiqué est la relation $\leq_\alpha$. Par définition elle contient l'ordre $\leq$ de M et l'on a le résultat presque évident.

Lemme 4.1. *Si α est un A-pré ordre dans un A-module M qui est réflexive, transitive et A-compatible, alors la relation $\leq_\alpha$ est le plus petit A-pré ordre contenant α.*

Théorème et Définition 4.2. *Soit α une relation réflexive, transitive et A-compatible sur un A-module $_AM$. La relation $\theta(\alpha) :=\leq_\alpha \cap \leq_\alpha^o p$ est une*

A-congruence d'ordre. C'est la plus petite A-congruence d'ordre contenant α. On l'appelle la A-congruence d'ordre engendrée par α.

L'ordre qui accompagne le quotient $M/\theta(\alpha)$ est :

$$[m]_{\theta(\alpha)} \preccurlyeq [m']_{\theta(\alpha)} \text{ si, et seulement si, } m \leq_{\alpha} m'.$$

Cet ordre est appelé l'ordre compatible ou l'ordre canonique.

Démonstration La preuve découle du théorème 4.1, du lemme 4.2 et de la première partie de la démonstration du théorème 4.2. □

Une observation importante Si $m \leq m'$, alors $m \leq_{\alpha(R)} m'$, d'où $[m]_{\theta(\alpha)} \leq [m']_{\theta(\alpha)}$.

Dans la suite nous allons construire des A-congruences d'ordre à partir des relations binaires quelconques sur le support M d'un A-module ${}_AM$.

D'abord nous décrivons la A-congruence engendrée par une relation binaire R sur M. La relation $\alpha(R)$ sur M définie par : $m\,\alpha(\mathrm{R})\,m'$ ssi $m = m'$ ou

$$\begin{aligned}
m =& a_1 * m_1 \\
& a_1 * m'_1 = a_2 * m_2 \\
& a_2 * m'_2 = a_3 * m_3 \\
& \vdots \\
& a_{p-1} * m'_{p-1} = a_p * m_p \\
m' =& a_p * m'_p
\end{aligned}$$

où p est un entier naturel et $(m_1, m'_1), \cdots (m_p, m'_p) \in R$.

Lemme 4.2. *La relation $\alpha(R)$ est réflexive, transitive et A-compatible et contient R. Si R est transitive, alors $\alpha(R) = R$.*

Démonstration La preuve est immédiate. □

Définition 4.1.6. *Si R est une relation binaire sur un A-module ${}_AM$ la A-congruence d'ordre $\theta(\alpha(R))$ engendrée par $\alpha(R)$ est appelée la A-congruence d'ordre engendrée par R; elle est aussi noté $\theta(R)$.*

Nous avons enfin le résultat

Théorème et Définition 4.3. *Soit R une relation binaire sur un A-module ${}_AM$. Il existe une A-congruence d'ordre $\nu(R)$, et donc un ordre $\leq$ sur $M/\nu(R)$, satisfaisant les deux propriétés :*

1. *si $(m, m') \in R$, alors $[m]_{\nu(R)} \leq [m']_{\nu(R)}$*

2. *Si κ est une A-congruence d'ordre sur ${}_AM$.*
   tel que $(m,m') \in R \Rightarrow [m]_\kappa \leq [m']_\kappa$, alors $\nu(R) \subset \kappa$.

La A-congruence d'ordre $\nu(R)$ est dite induite par la relation R.

Démonstration. Prendre $\nu(R)$ à être définie par $\nu(R) = \leq_{\alpha(R)} \cap \leq^0_{\alpha(R)}$ et prendre sur le quotient $M/\nu(R)$ l'ordre standard, c'est-à -dire,
$[m]_{\nu(R)} \leq [m']_{\nu(R)}$ si et seulement si $m \leq_{\alpha(R)} m'$. □

Enfin donnons le lien entre les constructions $\theta(R)$ et $\nu(R)$.

Proposition 4.3. *Si R est une relation binaire sur le support M de ${}_AM$, alors $\theta(R) = \nu(R \cup R^0)$.*

La relation $R \cup R^0$ est une relation symétrique, d'où la relation $\alpha(R \cup R^0)$ est elle aussi symétrique et donc $\nu(R \cup R^0)$ est égale à $\leq_{\alpha(R \cup R^0)}$. Il est clair que la relation $\leq_{\alpha(R)}$, et donc son opposé $\leq^0_{\alpha(R)}$, sont toutes incluses dans $\leq_{\alpha(R \cup R^0)}$ d'où $\theta(R)$ est incluse dans $\leq_{\alpha(R \cup R^0)}$. Si l'on observe que

$$(m,m') \in R \Rightarrow (m,m') \in R \cup R^0 \Rightarrow m \leq_{R \cup R^0} m' \Rightarrow [m]_{\nu(R \cup R^0)} \leq [m']_{\nu(R \cup R^0)},$$

alors on conclut par minimalité de $\nu(R \cup R^0)$ que $\nu(R \cup R^0) \subset \theta(R)$.

□

4.1.2 Limites et colimites dans A-Mod

Proposition 4.4. *La catégorie **A-Mod** possède des produits.*

Démonstration. Le produit d'une famille $({}_AM_i)_{i \in I}$ de A-modules est donné par le produit cartésien $\prod_{i \in I} M_i$ muni de l'action et de l'ordre composante par composante. La ième projection $\pi_i \colon \prod_{i \in I} M_i \to M_i$ qui accompagne ce produit est définie par $\pi_i(((m_i)_i) = m_i$. Si l'on se donne une famille de morphismes $f_i \colon {}_AM \to {}_AM_i, i \in I$, alors la factorisation unique $\hat{f} \colon M \to \prod_{i \in I} {}_AM_i$ est donnée par $\hat{f}(m) = (f_i(m))_{i \in I}$.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in I} M_i \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\
M \arrow[u, "\hat{f}"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 4.5. *La catégorie **A-Mod** possède des coproduits.*

Démonstration. Soit I un ensemble ordonné. Le coproduit d'une famille $({}_AM_i)_{i\in I}$ de A-modules est donné par l'union disjointe $\bigcup_{i\in I}(M_i \times \{i\})$ munie de l'action naturelle et de l'ordre composante par composante. La ième coprojection $s_i\colon M_i \to \coprod_{i\in I} M_i$ qui accompagne ce coproduit est définie par $s_i(m) = (m, i)$. Si l'on se donne une famille de morphismes $f_i\colon {}_AM_i \to {}_AM, i \in I$, alors la factorisation unique $\hat{f}\colon \coprod_{i\in I} {}_AM_i \to M$ est donnée par $\hat{f}((i, m)) = f_i(m)$.

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "s_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} M_i \arrow[d, "\hat{f}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

□

Proposition 4.6. *La catégorie* ***A-Mod*** *possède des égalisateurs.*

Démonstration. L'égalisateur d'une paire parallèle $M \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} N$ est donné par $E = \{m \in M : f(m) = g(m)\}$ avec l'action et l'ordre induits par M.

□

Proposition 4.7. *La catégorie* ***A-Mod*** *possède des sous égalisateurs.*

Démonstration. Le sous-égalisateur d'une paire parallèle $M \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} N$ est donné par $E = \{m \in M : f(m) \leq (m)\}$ avec l'action et l'ordre induits par M.

□

Proposition 4.8. *La catégorie* ***A-Mod*** *possède des coégalisateurs.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\theta^\flat"] & K \\ & N/\theta. \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Considérons une paire parallèle constituée de deux morphismes f, h de la catégorie **A-Mod** . Soit $\theta(R)$ la A-congruence d'ordre sur N engendrée par la relation $R = \{(f(m), g(m)) : m \in M\}$. L'on obtient le A-module quotient $N/\theta(R)$. Il est clair que $\theta^\flat \circ f = \theta^\flat \circ g$. Soit h un morphisme de A-module tel que $h \circ f = h \circ g$. La relation $\ker(h)$ est une A-congruence d'ordre sur N qui contient R car $h \circ f = h \circ g$. L'on vérifie aisément que $\bar{h}\colon N/\theta(R) \to K$, définie par $\bar{h}([n]_{\theta(R)}) = h(n)$ est bien définie et que c'est la factorisation unique cherchée.

□

Proposition 4.9. *La catégorie **A-Mod** possède des sous- coégalisateurs.*

Démonstration Ici nous nous contentons de donner juste l'indication suivante. Le sous coégalisateur d'une paire parallèle $M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$ est donné par le quotient de N par la A-congruence d'ordre $\mu(R)$ induite par
$R = \{(f(m), g(m)) : m \in M\}$. La vérification est facile.

□

Proposition 4.10. *La catégorie **A-Mod** possède des produits fibrés.*

Démonstration. Le produit fibré du couple $f : M \to P, g : N \to P$ est donné par le sous module $M \times_P N$ de $M \times N$ défini par :

$$M \times_P N = \{(m, n) \in M \times N, f(m) = g(n)\}.$$

$$\begin{tikzcd} M \times_P N \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "="] & N \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & P \end{tikzcd}$$

Ici π_1 et π_2 désignent la première et deuxième projections.

□

Proposition 4.11. *La catégorie **A-Mod** possède des sommes amalgamées.*

Démonstration. La somme amalgamée du couple $f : M \to P, g : M \to N$ est donnée par le quotient du coproduit $P \coprod M$ par la congruence θ engendrée par $R = \{(f(m), 1), (g(m), 2), m \in M\}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & P \arrow[d, "s_2"] \\ N \arrow[r, "s_1"'] & (N \coprod P)/\theta \end{tikzcd}$$

Ici s_1 et s_2 désignent respectivement les morphismes $m \mapsto [(m, 1)]_{\theta(R)}$ et
$n \mapsto [(n, 2)]_{\theta(R)}$. □

4.1.3 Monomorphismes et épimorphismes

Définition 4.1.7. *(A-morphisme final)*

Un A-morphisme $\phi : {}_AM \longrightarrow {}_AN$ est dit final lorsque pour toute application croissante $h : {}_AN \longrightarrow {}_AK$, si $h \circ \phi$ est un A-morphisme alors h est un A-morphisme.

Théorème 4.4. *Tout A-morphisme surjectif est final.*

Démonstration Soit $\phi : {}_AM \longrightarrow {}_AN$ un A-morphisme surjectif. Soit $h : {}_AN \longrightarrow {}_AK$ une application croissante et résiduée telle que $h \circ \phi$ est un A-morphisme ; montrons que h est un A-morphisme.

Soient $a \in A, x \in N$, alors il existe $t \in M$ tel que $x = \phi(t)$

$$\begin{aligned} h(a \star x) &= h(a \star \phi(t)) \\ &= h(\phi(a \star t) \\ &= a \star (h(\phi(t))) \quad \text{car } h \circ \phi \text{ est un } A\text{-morphisme} \\ &= a \star h(x) \end{aligned}$$

□

Théorème 4.5. *Un A-morphisme $f : {}_AM \longrightarrow {}_AN$ est un A-monomorphisme si et seulement s'il est injectif.*

Démonstration Si f est un A-morphisme injectif alors il est clair que f est un monomorphisme. Reciproquement, supposons que $f : M \longrightarrow N$ est un A-monomorphisme et soient $x, y \in M$ tels que $f(x) = f(y)$. Considérons les morphismes $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ définis de A vers M par : $\widetilde{x}(a) = a \star x$, $\widetilde{y}(a) = a \star y$; ces morphismes sont des applications croissantes car pour $a, b \in A$,
$a \leq b \Longrightarrow (a \star x \leq b \star x)$ et $a \star y \leq b \star y$, les applications résiduées de $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ sont respectivement R^x et R^y. L'on a $f \circ \widetilde{x} = f \circ \widetilde{y}$ car pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} f \circ \widetilde{x}(a) &= f(a \star x) \\ &= a \star f(x) \\ &= a \star f(y) \\ &= f(a \star y) \\ &= f \circ \widetilde{y}(a) \end{aligned}$$

Comme f est un monomorphisme alors $\widetilde{x} = \widetilde{y}$ donc $\widetilde{x}(e) = \widetilde{y}(e)$, c'est à dire $e \star x = e \star y$; soit donc $x = y$

□

Théorème 4.6. *Tout sous monomorphisme est un monomorphisme*

Démonstration Soit $m : P \longrightarrow Q$ un sous monomorphisme, $f_1, f_2 : Q \longrightarrow R$ une paire parallèle telle que $mf_1 = mf_2$, montrons que $f_1 = f_2$.

Dire que $mf_1 = mf_2$ signifie que $mf_1 \leq mf_2$ et $mf_2 \leq mf_1$; c'est à dire $f_1 \leq f_2$ et $f_2 \leq f_1$ car m est un sous monomorphisme ; par conséquent $f_1 = f_2$.
□

Théorème 4.7. *Tout sous monomorphisme de A-modules f est un A-morphisme qui est un plongement et réciproquement, tout A-morphisme qui est un plongement est un sous monomorphisme.*

Démonstration Supposons que $f : M \longrightarrow N$ est un A-sous-monomorphisme et montrons que f est un plongement pour l'ordre. Soient $x, y \in M$ tels que $x \leq y$; comme f est un sous monomorphisme, alors f est croissante donc $f(x) \leq f(y)$. supposons maintenant que $f(x) \leq f(y)$ et $x \nleq y$, alors f n'est pas injectif ; ce qui est absurde car f est sous-monomorphisme ; donc $f(x) \leq f(y)$ entraine $x \leq y$ d'où f est un plongement. Réciproquement supposons que f est un plongement pour l'ordre et montrons que f est un sous monomorphisme. Soient $u, v : M \longrightarrow P$ tels que $fu \leq fv$ montrons que $u \leq v$. $fu \leq fv$ entraine que $f(u(x)) \leq f(v(x))$ pour tout $x \in M$. Comme f est un plongement, alors $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \in M$; donc $u \leq v$. Ainsi f est un sous monomorphisme.

□

4.1.4 Module libre sur un ensemble ordonné

$$\begin{tikzcd} A\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[d, "U\dashv"] \\ \mathbf{Ord} \arrow[u, bend left=60, "F\dashv"] \arrow[u, bend right=60, "K"'] \end{tikzcd}$$

Le foncteur d'oubli U indiqué ci-dessus associe à un A-module ${}_AM$ l'ensemble ordonné sous-jacent $(M, \leq)$. Maintenant nous voulons reconstituer un A-module à partir d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$. Il y'a au moins deux manières optimales del le faire. Le mot optimale, ici, fait référence à des propriétés universelles.

Soit donc $(X, \leq)$. un ensemble ordonné. L'on considère le produit cartésien $A \times X$, que l'on munit de l'ordre composante par composante et de l'action par $A : \alpha * (a, x) = (\alpha \otimes a, x)$. Nous disons que

1. l'action ainsi définie donne au produit $A \times X$ une structure de A-module.
2. l'application $\eta_{(X,\leq)} : X \to A \times X, x \mapsto (e_A, x)$ est une application croissante.
3. Si $(M, \leq, *)$ est un A-module et si $f : X \to M$ est une application croissante, il existe un unique morphisme $\hat{f} : {}_A(A \times X) \to {}_AM$ tel que $f = \hat{f} \circ \eta_{(X,\leq)}$

Montrons ces propriétés. Les deux premiers axiomes de la définition d'un A-modules sont facilement vérifiables. Montrons les deux autres. Soit $\alpha \in A$. l'application $\widehat{\alpha}\colon A \times X \to A \times X, (a, x) \mapsto (\alpha \otimes a, x)$ a pour résiduel l'application $\widehat{\alpha}_\star\colon A \times X \to A \times X, (a, x) \mapsto (\alpha \backslash a, x)$; la vérification est immédiate. Enfin pour (a, x) fixé dans $A \times X$, l'application $\widehat{(a, x)}\colon A \to A \times X$, définie par $\alpha \mapsto (\alpha \otimes a, x)$ a pour résiduel l'application $\widehat{(a, x)}_\star\colon A \times X \to A$, définie par $(a, x) \mapsto \alpha \backslash a$. Enfin montrons la propriété universelle du couple $({}_A(A \times X), \eta_{(X,\leq)})$. Soit $f\colon (X, \leq) \to M$ une application croissante vers le support M d'un A-module ; la factorisation unique $\hat{f}\colon {}_A(A \times X) \to {}_AM$ est donnée par $\hat{f}(a, x) = a * f(x)$.

On a ainsi construit le reflet $({}_A(A \times X), \eta_{(X,\leq)})$ de $(X, \leq)$ le long du foncteur d'oubli U et du même coup, l'on a ainsi montré le résultat :

Proposition 4.12. *Le foncteur d'oubli $U\colon A$-**Mod** $\to$ **Ord** possède un adjoint à gauche. Cet adjoint à gauche est communément appelé le foncteur objet libre.*

4.1.5 Projectivité et Injectivité

Commençons par le concept de projectivité.

Définition 4.1.8. *Un A-module P est dit projectif si pour tout morphisme surjectif $g\colon {}_AM \to {}_AN$ de A-**Mod** et pour tout morphisme $f\colon {}_AP \to {}_AN$, il existe un morphisme $h\colon {}_AP \to {}_AM$, tel que le diagramme suivant soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} & {}_AP \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ {}_AM \arrow[r, "g"'] & {}_AN \end{tikzcd}$$

L'on a déjà signalé que le monoïde résidué A peut être vu comme un module sur lui même et à ce titre il sera noté ${}_AA$. Si b est un élément de A le module cyclique ${}_A(A * b)$ déterminé par b peut être tout aussi noté ${}_A(A \otimes b)$.

Théorème 4.8. *1. Si b est un élément idempotent de A, alors le module cyclique ${}_A(A \otimes b)$ est projectif.*

2. Un coproduit de modules projectifs est projectif.

Démonstration. Le deuxième énoncé est un résultat classique. Vérifions le premier énoncé. Consédérons le diagramme ci- dessous g est un morphisme surjectif.

$$\begin{tikzcd} & {}_A(A \otimes b) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ {}_AM \arrow[r, "g"'] & {}_AN \end{tikzcd}$$

Notons n_0 l'image de b par f et m_0 un antécédent de n_0 par g; cela a un sens car g est surjectif. Définissons h par $h(a \otimes b) = (a \otimes b) * m_0$. Il n'est pas difficile de vérifier que h est un homomorphisme de A-modules. En plus comme $b \otimes b = b$, on a $g \circ h(a \otimes b) = g((a \otimes b) * m_0) = (a \otimes b) * g(m_0) = (a \otimes b) * n_0 = (a \otimes b) * f(b) = a * f(b \otimes b) = a * f(b) = f(a \otimes b)$.

□

Nous allons à présent prouver que la catégorie **A-Mod** possède suffisamment d'injectifs.

Définition 4.1.9. *Un A-module ${}_AI$ est injectif si pour tout sous module $j\colon {}_AS \to {}_AM$ et tout morphisme $\phi\colon {}_AS \to {}_AI$ il existe un morphisme $\psi\colon {}_AM \to {}_AI$ tel que $\psi \circ j = \phi$*

$$\begin{tikzcd} {}_AS \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\phi"'] & & {}_AM \arrow[dl, "\psi"] \\ & {}_AI & \end{tikzcd}$$

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 4.13. *Le retract d'un A-module injectif est lui aussi injectif.*

Définition 4.1.10. *Un A-module ${}_AJ$ est dit faiblement injectif si pour tout idéal à gauche K de A, et tout morphisme $\phi\colon K \to J$, il existe $m \in M$ tel que $\phi(a) = a * m$.*

Proposition 4.14. *Tout A module injectif est faiblement injectif.*

Démonstration. Soit ${}_AI$ un A-module injectif. Soit K un idéal à gauche de A. Considérons l'idéal K comme module ${}_AK$ sur A.
Tout morphisme $\phi\colon K \to I$ admet une extension ψ par injectivité de ${}_AI$.

$$\begin{tikzcd} {}_AK \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\phi"'] & & {}_AA \arrow[dl, "\psi"] \\ & {}_AI & \end{tikzcd}$$

Lorsque l'on pose $m := \psi(e_A)$, on a pour tout $a \in K$,
$\phi(a) = \psi(a) = \psi(a \otimes e_A) = a * \psi(e_A) = a * m$.

□

Théorème 4.9. *Soit ${}_AM$ un A-module quelconque. Soit $[A, M]_\star$, l'ensemble des applications croissantes de A dans M qui possèdent un adjoint à droite, et qui satisfait la condition que pour deux quelconques de ses éléments f, g l'ensemble $\{a \backslash (f_\star(g(a)), a \in A\}$ possède un minimum ; alors $[A, M]_\star$ possède une structure de A-module ; ce A-module est injectif et est une extension de ${}_AM$.*

Démonstration. L'ordre sur $[A, M]_\star$, est l'ordre point par point. On va le munir de l'action $A \times [A, M]_\star \xrightarrow{*} [A, M]_\star$, $(\alpha, f) \mapsto \alpha * f$, avec $(\alpha * f)(a) = f(a \otimes \alpha)$. Cette action est bien définie dans ce sens que $\alpha * f$ possède pour résiduel l'application évidente $f_\star/\alpha, m \mapsto f_\star(m)/\alpha$. En effet

$$(\alpha * f)(a) \leq m \Leftrightarrow f(a \otimes \alpha) \leq m \Leftrightarrow a \otimes \alpha \leq f_\star(m) \Leftrightarrow a \leq f_\star(m)/\alpha.$$

Vérifions tous les axiomes d'un A-module.

1. Pour tout $a \in A$, $(\alpha * (\beta * f))(a) = (\beta * f)(a \otimes \alpha) = f(a \otimes \alpha \otimes \beta) = ((\alpha \otimes \beta) * f)(a)$ d'où $\alpha * (\beta * f) = (\alpha \otimes \beta) * f$.
2. En désignant par e_A l'élément neutre de A, on a pour tout $a \in A$, $(e_A * f)(a) = f(a \otimes e_A) = f(a)$, d'où $e_A * f = f$.
3. Soit α un élément fixé de A. L'application $\widehat{\alpha}\colon [A, M]_\star \to [A, M]_\star$ résultant de l'action, c'est-à -dire définie par $\widehat{\alpha}(f)(a) = f(a \otimes \alpha)$ a pour résiduel l'application $\widehat{\alpha}_\star\colon [A, M]_\star \to [A, M]_\star$ définie par $\widehat{\alpha}_\star(g)(a) = g(a/\alpha)$. A ce niveau il y'a une vérification importante à faire ; c'est que l'application $a \mapsto g(a/\alpha)$ est résiduée lorsque g l'est ; cela est facile à faire.
4. Soit f un élément fixé de $[A, M]_\star$. L'application $\widehat{f}\colon A \to [A, M]_\star$ définie par $\widehat{f}(\alpha)(a) = f(a \otimes \alpha)$ a pour résiduel $(\widehat{f})_\star\colon A \leftarrow [A, M]_\star$ défini par $(\widehat{f})_\star(g) = \min\{a \backslash f_\star(g(a)), a \in A\}$.

Maintenant que nous avons montré que $[A, M]_\star$ est A-module, considérons l'application $\psi\colon M \to [A, M]_\star$, définie par $\psi(m) = \widehat{m}\colon a \mapsto a * m$. Cette application est bien définie car $\psi(m)$ est bel et bien residuée et admet pour adjoint à droite l'application $\widehat{m}_\star$. L'application ψ est un plongement pour l'ordre. Le fait qu'elle est croissante est évidente. Si maintenant $\psi(m) \leq \psi(m')$, alors en appliquant cette inégalité à l'élément neutre e_A de A, on obtient que $m \leq m'$. Ainsi ψ réfléchit aussi l'ordre. Il reste à montrer que ψ est A-équivariante. Pour cela, pour tout $a \in A$, $\psi(\alpha * m)(a) = a * (\alpha * m) = (a \otimes \alpha) * m = \psi(m)(a \otimes \alpha) = (\alpha * \psi(m))(a)$, d'où $\psi(\alpha * m) = \alpha * \psi(m)$.

Montrons enfin le point culminant à savoir le caractère injectif de $[A, M]_\star$. Soit $j\colon {}_AM \to {}_AN$ un morphisme injectif de A-modules ; soit un morphisme $\phi\colon {}_AM \to {}_A([A, P]_\star)$ où P est un A-module.

$$\begin{tikzcd} {}_AM \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "\phi"'] & & {}_AN \arrow[dll, "\psi"] \\ {}_A([A, P]_\star) & & \end{tikzcd}$$

L'on va définir le prolongement ψ, de ϕ comme suit

$$\psi(n)(a) = \begin{cases} \phi(j^{-1}(a * n))(e_A) & \text{si } a * n \in j(M) \\ \text{tout autre élément fixé } p_0 \text{ de } P & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application ψ est l'extension requise car par définition $\psi \circ j = \phi$, ψ est croissante et pour tout $\alpha \in A, a \in A$ et $n \in N$ si $\alpha * (a * n) \in j(M)$, alors $\psi(a * n)(a) = \phi(j^{-1}(a * (\alpha * n)) = \phi(j^{-1}((a \otimes \alpha) * n)) = \psi(n)(a \otimes \alpha) = (\alpha * \psi)(n)(a)$. D'où $\psi(a * n) = a * \psi(n)$ et ψ est A-équivariant.

□

4.2 Etude de la catégorie (A-Mod)$_\star$

Dans le cadre des modules sur un anneau non commutatif, l'on prouve que (A-mod) est isomorphe à mod-A^0 où A^0 est l'anneau opposé à l'anneau A. Dans le contexte d'un monoïde ordonné résidué, $(A, \leq, \otimes, /, \backslash, e)$ nous allons prouver une dualité A-mod$\approxeq$ mod-A (c'est à dire un isomorphisme D tel que $D \circ D \equiv id.$) Voici les étapes précises de cette démonstration :

1. Pour $M = (M, \leq)$ on associe l'ensemble ordonné dual $M^0 = (M, \leq^0)$
2. De l'action $\star : A \times M \longrightarrow M$, on fait correspondre l'action $\Box : A \times M^0 \longrightarrow M^0$ qui à (a, m) associe $a \Box m = a \backslash_* m$ dont on vérifie que c'est une action de A sur M^0.

En effet,

1. $a \Box (a' \Box m) = a \backslash_* (a' \backslash_* m) = a \backslash_* [a' \backslash_* (a' \star (a' \backslash_* m))]$
2. $e \Box m = e \backslash_* m$
3. $\widehat{a} : M^0 \longrightarrow M^0$ qui à m associe $a \Box m$ a pour résiduel $\widehat{a}_*$ qui à m associe $a \star m$.
4. $\widehat{m} : A \longrightarrow M^0$ qui à a associe $a \Box m$ a pour résiduel $\widehat{m}_*$ qui à a associe $a \star m$.

4.2.1 Limites dans la catégorie (A-Mod)$_*$

Les produits dans (A-Mod)$_*$

Théorème 4.10. *Soit $\mathcal{D}$ la sous catégorie pleine de* ($\texttt{A-Mod}$)$_\star$ *dont les objets sont les ensembles ordonnés ayant des infima finis (objets ayant des infima binaires et un élément maximal,) alors les produits binaires existent dans $\mathcal{D}$.*

Démonstration Soient M et N deux élements de $\mathcal{D}$. On munit le produit cartésien $M \times N$ de l'ordre et de l'action composante par composante ; nous allons montrer que $M \times N$ est un A-module appelé module produit de M et N. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(K,\leq) \arrow[dr, dotted, "\varphi"'] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& M \times N \arrow[r, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift right, "p_2"'] & (M,\leq) \arrow[l, shift right, "p_{1*}"'] \\
& (N,\leq) \arrow[u, shift right, "p_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $p_1(m) = (m,1)$, $p_2(n) = (1,n)$ et $\varphi(l) = (q_1(l), q_2(l))$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(a \star l) & = & (q_1(a \star l), q_2(a \star l)) \\
& = & (a \star q_1(l), a \star q_2(l)) \\
& = & (a \star (q_1(l), q_2(l))) \\
& = & a \star \varphi(l) \\
\varphi(l) \leq (x,y) & \Longleftrightarrow & (q_1(l) \leq x) \wedge (q_2(l) \leq y) \\
& \Longleftrightarrow & (l \leq q_{1*}(x)) \wedge (l \leq q_{2*}(y)) \\
& \Longleftrightarrow & l \leq \min(q_{1*}(x), q_{2*}(y))
\end{array}$$

L'application φ a donc pour application résiduée $\varphi_* = \min(q_{1*}, q_{2*})$.

□

Les techniques déployées dans la démonstration précedente peuvent être généralisées à une famille quelconque de modules à condition que l'on manipule des modules dont les ensembles ordonnés possèdent des infima arbitraires (des sous ensembles inf complets ;) ce qui conduit au théorème suivant :

Théorème 4.11. *Soit $\mathcal{D}^*$ la sous catégorie pleine de $(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{Mod})_*$ constituée des modules inf-complets, alors $\mathcal{D}^*$ possède des produits arbitraires.*

Démonstration Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de modules de $\mathcal{D}^*$; on munit $\prod_{i\in I} M_i = \{x : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i / x(i) \in M_i\}$ de l'action et de l'ordre composante par composante. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(K,\leq) \arrow[dr, dotted, "\varphi"'] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift right, "p_2"'] & (M_i,\leq) \arrow[l, shift right, "p_{1*}"'] \\
& (M_j,\leq) \arrow[u, shift right, "p_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour tout $i \in I$, $p_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i$ tel que $p_i(x) = x(i) = x_i$. $p_{i*}(u) = \widehat{u}$ tel que ($\widehat{u}(j) = x \quad$ si $\quad i = j$ et $\widehat{u}(j) = 1_i \quad$ sinon). $\varphi(l) = (q_i(l))_{i\in I}$

$$\begin{aligned}
\varphi(a \star l) &= (q_i(a \star l))_{i\in I} \\
&= a \star q_i(l))_{i\in I} \\
&= a \star \varphi(l) \\
\varphi(l) \leq (x_i)_{i\in I} &\Longleftrightarrow q_i(l) \leq x_i \quad \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow l \leq q_{i*}(x_i) \quad \forall i \in I \\
&\Longleftrightarrow l \leq \bigwedge_{i\in I} q_{i*}(x_i)
\end{aligned}$$

φ a donc pour application résiduée $\varphi_* = \bigwedge_{i\in I} q_{i*}$

□

Théorème 4.12. *Soit $f, g : M \longrightarrow N$ une paire prallèle de $(\texttt{A-mod})_\star$; l'égalisateur de la paire f, g existe dans $(\texttt{A-mod})_\star$.*

Démonstration Soit $f, g : M \longrightarrow N$ une paire prallèle de(**A-Mod**)$_*$; considérons l'ensemble

$$E = \{x \in M, f(x) = g(x) \text{ et il existe un plus grand élement } y \in M, y \leq x\}.$$

L'ensemble E muni de l'action induite de M est un sous module de M. En effet, pour tout $a \in A$, $x \in E$, $f(a\star x) = a\star f(x) = a\star g(x) = g(a\star x)$; de plus, $a \star y_x$ est le plus grand element de $\{y, y \leq a \star x\}$ avec $y_x = \max\{y \leq x\}$ donc $a\star x \in E$. La deuxième propiété de sous module est déjà vérifier par la définition de E. Le couple (E, i) où i est l'inclusion de E dans M est l'égalisateur de f, g. On a $fi = gi$ et pour tout couple (L, φ) où $\varphi : L \longrightarrow M$ tel que $f\varphi = g\varphi$ on a bien l'existence unique de $\psi : L \longrightarrow E$ tel que $i\psi = \varphi$ avec $\psi = \varphi$.

□

Coproduits dans (A-Mod)$_*$

Théorème 4.13. *Les coproduits binaires existent dans (**A-Mod**)$_*$*

Démonstration Soit M, N deux A-modules ; on définit une addition $\oplus$ par :

1. Les éléments de $M \oplus N$ sont des couples $(m, 1)$ pour $m \in M$ et $(n, 2)$ pour $n \in N$.
2. On définit dans $M \oplus N$ l'ordre $\leq$ par :

   (a) si $m, m' \in M, (m, 1) \leq (m', 1)$ ssi $m \leq m'$

(b) si $n, n' \in N, (n,2) \leq (n',2)$ ssi $n \leq n'$

(c) $\forall m \in M, n \in N, (m,1) \leq (n,2)$

3. L'action de A sur $M \oplus N$ est définie par : $a \star (m,1) = (a \star m, 1)$ et $a \star (n,2) = (a \star n, 2)$. Par définition cette action est compatible avec l'ordre.
4. Les applications $i_M : M \longrightarrow M \oplus N \longleftarrow N : i_N$ sont des morphismes résidués de résiduels i_{M*} tel que $i_{M*}(y,j) = y$ et i_{N*} tel que $i_{N*}(y,j) = y$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "q_M"'] & M \oplus N \arrow[d, dotted, "\varphi"] & N \arrow[l, "i_N"'] \arrow[dl, "q_N"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

avec $i_M(m) = (m,1)$, $i_N(n) = (n,2)$ et $\varphi((m,1)) = q_M(m)$ et $\varphi((n,2)) = q_N(n))$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a \star (m,1)) & = & q_M(a \star m) \\ & = & (a \star q_M(m) \\ & = & a \star \varphi((m,1)) \\ \varphi((m,1)) \leq x & \Longleftrightarrow & (q_M(m) \leq x) \\ & \Longleftrightarrow & (m \leq q_{M*}(x)) \end{array}$$

L'application φ a donc pour application résiduée $\varphi_* = q_{M*} \vee q_{N*}$.

□

Théorème 4.14. *Les familles $(M_k)_{k \in I}$ où I est un ensemble ordonné possèdent des coproduits dans (**A-Mod**)$_*$*

Démonstration Soit $(M_k)_{k \in I}$ une famille de A-modules avec I un ensemble ordonné ; on définit une addition $\oplus$ par :

1. Les éléments de $\oplus_{k \in I} M_k = \{(x,k)/x \in M_k\}$
2. On définit dans $\oplus_{k \in I} M_k$ l'ordre $\leq$ par : $(m,k) \leq (n,j)$ ssi $(k < j$ ou $(k = j$ et $m \leq n))$
3. L'action de A sur $\oplus_{k \in I} M_k$ est définie par : $a \star (m,k) = (a \star m, k)$. Par définition cette action est compatible avec l'ordre.
4. Les applications $i_{M_K} : M_K \longrightarrow \oplus_{K \in I} M_k$ sont des morphismes résidués de résiduels $i_{M_k *}$ tel que $i_{M_k *}(y,j) = y$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i_M"] \arrow[dr, "q_M"'] & M \oplus N \arrow[d, dotted, "\varphi"] & N \arrow[l, "i_N"'] \arrow[dl, "q_N"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

avec $i_{M_k}(m) = (m,k)$, $\varphi((m,k)) = q_{M_k}(m)$

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a \star (m,k)) & = & q_{M_k}(a \star m) \\ & = & (a \star q_{M_k}(m) \\ & = & a \star \varphi((m,k)) \\ \varphi((m,k)) \leq x & \Longleftrightarrow & (q_{M_k}(m) \leq x) \\ & \Longleftrightarrow & (m \leq q_{M_k *}(x)) \end{array}$$

L'application φ a donc pour application résiduée $\varphi_* = \bigvee_{k \in I} q_{M_k *}$.

□

Nous voulons à présent donner un certain nombre de constructions qui à partir de A-modules donnés à l'avance, produisent d'autres A-modules. Nous commençons par les notions de sous module et module quotient.

4.2.2 Sous module, module quotient

IL est tout à fait impératif de définir d'abord de bonnes notions de sous structures et de structure quotient, qui sont toujours sollicitées dans les théorèmes d'isomorphismes.

Sous module

Définition 4.2.1 (La notion de sous module). *Soit* $(A, \leq, \otimes, /, \backslash, e)$ *un monoïde ordonné résidué. Soient* M, N *deux* A*-modules tels que* N *soit une partie de* M *munie de l'ordre induit. On dit que* N *est un sous* A*-module de* M *lorsque :*

1. *Pour tout* $a \in A, x \in N, a \star x \in N$
2. *Pour tout* $y \in M$*, l'ensemble* $\{x : x \leq y\} \cap N$ *possède un plus grand élement. Ceci revient à dire que l'inclusion* $i : N \longrightarrow M$ *est un morphisme de* A*-modules (*i *est résidué et* $i_*(y) = max\{x \in N, x \leq y.\}$*)*

Théorème 4.15. *Soit* $f, g : M \longrightarrow N$ *une paire prallèle de* $(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{Mod})_*$*; le sous égalisateur de la paire* f, g *existe dans* $(\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{Mod})_*$*.*

Démonstration Soit $f, g : M \longrightarrow N$ une paire prallèle de $(\textbf{A-Mod})_*$; considérons l'ensemble

$$E = \{x \in M : f(x) \leq g(x) \text{ et il existe un plus grand élement } y \in M, y \leq x\}.$$

L'ensemble E muni de l'action induite de M est un sous module de M. En effet, pour tout $a \in A$, $x \in E$, $f(a \star x) = a \star f(x) \leq a \star g(x) \leq g(a \star x)$; de plus, $a \star y_x$ est le plus grand element de $\{y : y \leq a \star x\}$ avec $y_x = \max\{y : y \leq x\}$ donc $a \star x \in E$. La deuxième propriété de sous module est déjà vérifiée par la définition de E. Le couple (E, i) où i est l'inclusion de E dans M est l'égalisateur de f, g. On a $f(i) \leq g(i)$ et pour tout couple (L, φ) où $\varphi : L \longrightarrow M$ tel que $f\varphi \leq g\varphi$ on a bien l'existence unique de $\psi : L \longrightarrow E$ tel que $i\psi \leq \varphi$ avec $\psi \leq \varphi$.

□

Définition 4.2.2. *Soient $(A, \leq, \otimes, \backslash, /)$ un monoïde ordonné résidué et M un A-module ; un conoyau quantique sur M est une opération de cofermeture σ sur M satisfaisant l'inégalité $a \star \sigma(x) \leq \sigma(a \star x)$.*

Théorème 4.16. *(1) Si σ est un conoyau quantique sur un A-module M, alors l'image $M_\sigma = \sigma(M)$ des éléments σ-cofermés de M muni de l'action $\star_\sigma$ définie par :*

$$a \star_\sigma x = \sigma(a \star x)$$

est un A-module.

Démonstration Nous vérifions les quatre axiomes de définition d'un A-module.

1) pour tout a, b dans A et m dans M_σ,

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \star_\sigma m &= \sigma((a \otimes b) \star m) \\ &= \sigma(a \star (b \star m)) \\ a \star_\sigma (b \star_\sigma m) &= a \star_\sigma \sigma(b \star m) \\ &= \sigma(a \star \sigma(b \star m)) \end{aligned}$$

On sait que $(b \star m) \leq \sigma(b \star m)$; par l'action à droite de a on obtient $a \star (b \star m) \leq a \star \sigma(b \star m)$ et en appliquant σ on a $\sigma(a \star (b \star m)) \leq \sigma(a \star \sigma(b \star m))$. Le dernier axiome de la définition du conoyau quantique nous permet de dire que $a \star \sigma(b \star m) \leq \sigma(a \star (b \star m))$, donc $\sigma(a \star \sigma(b \star m)) \leq \sigma(\sigma(a \star (b \star m)))$; d'où l'égalité.

2) $e_A \star_\sigma m = \sigma(e_A \star m) = \sigma(m) = m$. La dernière égalité provient de ce que $m \in M_\sigma$.

3) Soit a un élément de A et m un élément de M_σ. $\widehat{a}_{M_\sigma}(m) = a \star_\sigma m = \sigma(a \star m) = \sigma(\widehat{a}_M(m)) = \sigma(\widehat{a}_M(i(m)))$; donc l'application $\widehat{a}_{M_\sigma} \colon M_\sigma \to M_\sigma$ n'est autre que la composition $\widehat{a}_{M_\sigma} = \sigma \circ \widehat{a}_M \circ i$ de trois applications résiduées ; elle est donc une application résiduée d'adjoint à droite $(\widehat{a}_{M_\sigma})_* = (\sigma \circ \widehat{a}_M \circ i)_* = i_* \circ (\widehat{a}_M)_* \circ \sigma_* = \sigma \circ (\widehat{a}_M)_* \circ i_M^{M_\sigma}$ où $i_M^{M_\sigma}$ désigne l'inclusion de M_σ dans M.

4) De même, pour m élément de M_σ, l'application $\widehat{m}_{M_\sigma} \colon A \to M_\sigma$ qui à a associe $a \star_\sigma m$ est simplement $\sigma \circ \widehat{m}_M$; elle est donc résiduée et d'adjoint à droite $(\widehat{m}_M)_* \circ i_M^{M_\sigma}$.

□

Théorème 4.17. *(1) Si σ est un conoyau quantique sur un A-module M, alors l'image $M_\sigma = \sigma(M)$ des éléments σ-cofermés de M est un sous module de M.*

Démonstration Vérifions les deux propriétés du sous module :

1) Soient $a \in A$, $x \in M_\sigma$; $\sigma(a \star_\sigma x) = \sigma(\sigma(a \star x))$. σ étant idempotent $\sigma(a \star_\sigma x) = \sigma(a \star x) = a \star_\sigma x$ d'où $(a \star_\sigma x) \in M_\sigma$.

2)Nous disons que l'inclusion $i : M_\sigma \hookrightarrow M$ est résiduée d'adjoint à droite $i_* : M \longrightarrow M_\sigma$ défini par : $i_*(y) = max\{x \in M_\sigma, x \leq y\}$. En effet, soit $x \in M_\sigma$ et $y \in M$; $i(x) \leq y$ équivaut à $x \leq y$ c'est à dire $x \leq max\{t \in M_\sigma, t \leq y\} = i_*(y)$.

□

4.2.3 Quotient de module

Définition 4.2.3 (La notion de noyau quantique pour les modules)**.** *Soit $(A, \otimes, \leq, \backslash, /, e)$ un monoïde ordonné résidué. Un* ***noyau quantique*** *sur un A-module M est une opération de fermeture $j \colon M \to M$ satisfaisant l'inégalité $a \star j(m) \leq j(a \star m)$ pour tout a dans A et m dans M.*

Théorème 4.18. *(1) Si j est un noyau quantique sur un A-module M, alors l'image $M_j = j(M)$ des éléments j-fermés de M muni de l'action $star_j$ définie par :*

$$a \star_j m = j(a \star m)$$

est un A-module et l'application $M \to M_j$ est un morphisme de A-module, et aussi un coégalisateur

(2) Réciproquement tout A-module quotient d'un A-module M est de la forme M_j pour un noyau quantique convenable défini sur le A-module M.

Démonstration Nous vérifions les quatre axiomes de définition d'un A-module.

1) pour tout a, b dans A et m dans M_j,

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \star_j m &= j((a \otimes b) \star m) \\ &= j(a \star (b \star m)) \\ a \star_j (b \star_j m) &= a \star_j j(b \star m) \\ &= j(a \star j(b \star m))\end{aligned}$$

On sait que $(b\star m) \leq j(b\star m)$; par l'action à droite de a on obtient $a\star(b\star m) \leq a \star j(b \star m)$ et en appliquant j on a $j(a \star (b \star m)) \leq j(a \star j(b \star m))$. Le dernier axiome de la définition du noyau quantique nous permet de dire que $a \star j(b \star m) \leq j(a \star (b \star m))$; donc $j(a \star j(b \star m)) \leq j(j(a \star (b \star m)))$; d'où l'égalité.

2) $e_A \star_j m = j(e_A \star m) = j(m) = m$. La dernière égalité provient de ce que $m \in M_j$.

3) Soit a un élément de A et m un élément de M_j. $\widehat{a}_{M_j}(m) = a \star_j m = j(a \star m) = j(\widehat{a}_M(m)) = j(\widehat{a}_M(i(m)))$; donc l'application $\widehat{a}_{M_j} \colon M_j \to M_j$ n'est autre que la composition $\widehat{a}_{M_j} = j \circ \widehat{a}_M \circ i$ de trois applications résiduées ; elle est donc une application résiduée d'adjoint à droite $(\widehat{a}_{M_j})_* = (j \circ \widehat{a}_M \circ i)_* = i_* \circ (\widehat{a}_M)_* \circ j_* = j \circ (\widehat{a}_M)_* \circ i_M^{M_j}$ où $i_M^{M_j}$ désigne l'inclusion de M_j dans M.

4) De même, pour m élément de M_j, l'application $\widehat{m} \colon A \to M_j$ qui à a associe $a \star_j m$ est simplement $j \circ \widehat{m}_M$; elle est donc résiduée et d'adjoint à droite $\widehat{m}_M)_* \circ i_M^{M_j}$.

L'on a déjà fait remarquer que le couple $M \underset{i_M^{M_j}}{\overset{j}{\rightleftarrows}} M_j$ fait de j une application résiduée. Il reste à vérifier que ce dernier conserve l'action par $a \in A$, c'est à dire $j(a\star m) = a\star_j j(m)$. Il est équivalent de montrer que $j(a\star m) = j(a\star j(m))$.

- L'on a $a \star m \leq a \star j(m)$ car $m \leq j(m)$ et l'action à gauche par a est croissante car résidué ; le fait pour j d'être croissant implique alors que $j(a \star m) \leq j(a \star j(m))$.
- L'autre inégalité provient de l'axiome sur le noyau quantique qui dit que $a \star j(m) \leq j(a \star m)$.

Enfin l'on sait que j coégalise la pair (j, id) car $j \circ j = j \circ j \circ id$, de plus c'est une application surjective. Vérifions que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "j"] \arrow[r, shift right, "Id_M"'] & M \arrow[r, "j"] & M_j \end{tikzcd}$$

est un coégalisateur. Soit $t : M \longrightarrow N$ tel que $t \circ j = t$ cherchons $\varphi : M_j \longrightarrow N$ unique tel que $\varphi \circ j = t$. Prendre $\varphi = t \circ j$. Reciproquement, soit N un A-module et f un morphisme surjectif de A-modules $M \underset{f_*}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N$. Posons $j = f_* \circ f$; vérifions si $a \star j(m) \leq j(a \star m)$, c'est à dire $a \star f_*(f(m)) \leq f_*(f(a \star m))$, il revient au même de montrer que $f(a \star f_*(f(m))) \leq f(a \star m)$ ou encore que $a \star f(m) \leq a \star f(m)$. Cette dernière condition étant toujours vraie, on a le résultat.

□

Définition 4.2.4. *Soit $(M, \leq)$ un A-module. Une relation d'équivalence θ sur l'ensemble $(M, \leq)$ est appelé une congruence régulière sur l'ensemble $(M, \leq)$ si*

1. *θ est une congruence sur l'ensemble$(M, \leq)$*
2. *θ est régulière, dans ce sens que*
   (a) *$m \leq_\theta n \leq_\theta m \Rightarrow m\theta n$*
   (b) *L'application $\theta^\flat \colon M \to M/\theta$ est résiduée*
3. *θ est compatible avec l'action à gauche par A, pour ainsi dire que si $(m, m') \in \theta$, alors $(a \star m, a \star m') \in \theta$ pour tout $a \in A$.*

Théorème 4.19. *Si $f : {}_AM \longrightarrow {}_AN$, est un A-morphisme, alors $\theta = ker(f)$ est une congruence régulière de A-modules.*

Démonstration On a déjà montré que $ker(f)$ est une congruence sur l'ensemble $(M, \leq)$.

Pour la troisième propriété, si $(m, m') \in ker(f)$ et $a \in A$, on a $f(m) = f(m')$ et donc $a \star f(m) = a \star f(m')$ soit $f(a \star m) = f(a \star m')$.

2. a) déjà (caractérisation des congruences sur les monoïdes ordonnés.)

b) Montrons que $\theta^\flat : M \longrightarrow M/\theta$ est résiduée.

On définit $\theta^\flat_*(m) = f_*f(m')$

Montrons que $\theta^\flat$ est bien défini.

Soit $(m, m') \in ker(f)$, pour tout $n \in M$

$$\begin{aligned} n \leq f_*f(m) &\iff f(n) \leq f(m) \\ &\iff f(n) \leq f(m') \\ &\iff n \leq f_*f(m') \\ &\iff f_*f(m) = f_*f(m') \end{aligned}$$

Montrons que $\theta^\flat \dashv \theta^\flat_*$

On a

$$\begin{aligned}\theta^\flat(m) \leq \theta^\flat(n) &\iff m \leq_{ker(f)} n \\ &\iff m \leq f_* f(n) \\ &\iff m \leq \theta^\flat_*(n)\end{aligned}$$

□

Il a été démontré que tout quotient régulier d'un A-module M est de la forme M_j où j est un noyau quantique de A-module convenable. En réalité ceci n'est pas surprenant au vu du théorème suivant :

Théorème 4.20. *Soit M un A-module. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des congruences regulières sur le A-module M et l'ensemble des noyaux quantiques sur le A-module M.*

Démontration Soit θ une congruence régulière sur un A-module $(M, \leq)$. Le morphisme $\theta^\flat \colon M \to M/\theta$ donne lieu au noyau quantique $j_\theta := \theta^\flat_* \circ \theta^\flat \colon M \to M$. D'où l'application $\theta \mapsto j_\theta$.

Réciproquement si l'on part d'un noyau quantique j sur M, alors l'on obtient un A- morphisme $j \colon M \to M_j$. Ce dernier map donne lieu au noyau quantique $\theta_j = \mathrm{Ker}(j)$ sur M. D'où l'application $j \mapsto \theta_j$. Nous allons montrer successivement que $\theta_{j_\theta} = \theta$ et $j_{\theta_j} = j$.

La première égalité provient des équivalences suivantes obtenues pour tout $(m, n) \in M^2$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{(m,n) \in \theta_{j_\theta} := \mathrm{Ker}(j_\theta)}{j_\theta(m) = j_\theta(n)}}{\theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m) = \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n)}}{\theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m) \leq \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \text{ et } \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \leq \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m)}}{\theta^\flat(m) \leq \theta^\flat \circ \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(n) \text{ et } \theta^\flat(n) \leq \theta^\flat \theta^\flat_* \circ \theta^\flat(m)}}{\theta^\flat(m) \leq \theta^\flat(n) \text{ et } \theta^\flat(n) \leq \theta^\flat(m)}}{m \leq_\theta n \text{ et } n \leq_\theta m}}{(m,n) \in \theta.}$$

La deuxième s'obtient par la règle de l'égalité indirecte comme suit : pour tout $(m, n) \in M^2$:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{m \leq j_{\theta_j}(n)}{m \leq \mathrm{Ker}(j)^\flat_* \circ \mathrm{Ker}(j)^\flat(n)}}{\mathrm{Ker}(j)^\flat(m) \leq \mathrm{Ker}(j)^\flat(n)}}{m \leq_{\mathrm{Ker}(j)} n}}{m \leq j(n)}$$

La dernière équivalence s'obtient comme à la fin de la démonstration du théorème 2.2.

□

4.3 Algèbres et morphismes d'algèbres

Définition 4.3.1. *Soit* $\boldsymbol{A} = (A, \leq, \otimes, e, /, \backslash)$ *un monoïde ordonné résidué. Une A-algèbre (à gauche)est la donnée d'un monoïde ordonné* $(M, \leq, \boxtimes, e)$ *tel que :*

- $(M, \leq)$ *est un A-module à gauche ;*
- *La multiplication* $\boxtimes : M \times M \longrightarrow M$ *est bilinéaire en ce sens que* $a \star (x \boxtimes y) = (a \star x) \boxtimes y = x \boxtimes (a \star y)$ *pour tout* $a \in A, (x, y) \in M^2$.

Définition 4.3.2. *Un A-morphisme d'algèbres* f *de* M *vers* N*, entre deux A-algèbres est un morphisme de modules entre les A-modules* $(M, \leq)$ *et* $(N, \leq)$ *qui conserve la multiplication* $\boxtimes$ *et l'action par* A.

L'on note **A-alg(M,N)** l'ensemble des A-morphismes de la A-algèbre M vers la A-algèbre N. Cet ensemble est muni de l'ordre $f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x)$ pour tout $b \in B$. Il est immédiat de vérifier que **A-alg(B,C)** est une catégorie enrichie sur celle des ensembles ordonnés. En effet, la composition de deux morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbre, l'identité sur une A-algèbre M est trivialement un morphisme d'algèbres. L'on obtient ainsi la catégorie des A-algèbres et des morphismes de A-algèbres notée par **A-Alg**.

Exemple 4.3.1. Tout monoïde ordonné $(M, \leq, \otimes, e)$ est une **2**-algèbre.

Théorème 4.21. *Le foncteur d'oubli*

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Alg}) \xrightarrow{U} (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Mod})$$

admet un adjoint à gauche.

Démonstration On définit le foncteur adjoint F de U comme suit :

-Sur les objets

Pour $(X, \leq)$ un A-module, $F(X, \leq) = (X^*, \leq, \star)$ où $\star$ désigne le prolongement de l'action $\star$ de A sur $(X, \leq)$ définie de $A \times X^* \longrightarrow X^*$ à $(a, x_1 x_2 ... x_n)$ associe $a \star x_1 a \star x_2 ... a \star x_n$

-Sur les morphismes

Pour $f : (X, \leq) \longrightarrow (Y, \leq)$ on associe le morphisme de **Mve**
$f : (X^*, \leq, \star) \longrightarrow (Y^*, \leq, \star)$

□

Conclusion et perspectives

Les résultats démontrés dans ce travail trouvent leurs sources dans [24], [35], [18] et bien d'autres.

En fait dans notre étude de la catégorie monoides ordonnés résidués, nous avons montré que dans la catégorie des monoides ordonnés et des des applications résiduées, les quotients peuvent s'obtenir à l'aide de certaines opérateurs de fermeture que nous appelons les noyaux quantiques ; nous établissons fondamentalement qu'il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des congruences régulières sur un monoïde ordonné et l'ensemble des noyaux quantiques sur ce même monoïde. Nous avons étendu la notion de noyaux quantiques aux monoïdes ordonnés résidués et nous avons décrits les quotients dans cette catégorie à l'aide de ces opérateurs de fermeture. Les sous structures ont été décrites par les conoyaux quantiques et il en ressort que tout sous monoïde ordonné résidué d'un monoïde ordonné résidué P est l'image de P par un conoyau quantique. Ensuite nous présentons la completion de Mac Neille Dedeking des monoïdes ordonnés résidués. Les limites (produits, égalisateurs, produits fibrés) et colimites (coproduits, coégalisateurs) ont été calculées dans la catégorie des monoïdes ordonnés résidués. Une application à la lingustique de ces monoïdes a été donnée. En effet, nous avons étudié le lien entre les monoïdes ordonnés résidués et la lingustique computationelle. De la grammaire catégorielle au système des séquents pour le calcul de Lambek en passant par la logique des types, on montre que les monoïdes résidués s'appliquent à l'étude logique des langues humaines. Dans la partie module sur un monoide ordonné résidué nous avons dégagé trois catégories fondamentales.

- S'agissant de la catégorie **A-Mod**,
  - Nous avons prouvé qu'elle possède toutes les limites et toutes les colimites, et certaines sous limites et sous colimites en décrivant systématiquement les produits, les coproduits, les égalisateurs et sous égalisateurs, les coégalisateurs et sous coégalisateurs les produits fibrés et les sommes amalgamées.
  - Nous y avons mis en évidence les modules libres au dessus des en-

sembles ordonnés et montré qu'elle possède suffisamment d'injectifs.

- S'agissant de la catégorie $(\mathbf{A\text{-}Mod})_*$
  - Nous avons prouvé qu'elle possède des produits indexés par des ensembles ordonnés.
  - Nous avons mis en évidence les modules libres au dessus des ensembles ordonnés.
  - Nous y avons mis en évidence l'équivalence des deux notions de quotient l'une par les congruences et l'autre par certains opérateurs particuliers appelés noyaux quantiques.
- Enfin s'agissant de la catégorie **A-Alg**, nous nous sommes limités juste à dire que le foncteur d'oubli de cette catégorie vers **A-Mod** possède un adjoint à gauche. Cela permet quand même de postuler quelques colimites dans **A-Alg**

Certains sujets n'ont pas abordés entre autres :

- Le produit tensoriel de deux modules sur un monoïde ordonné résidué reste d'actualité et la complétion de Mac Neille Dedekind d'un A-modules restent d'actualité.
- Nous envisagons aussi de regarder dans un futur proche les objets colibres de la catégorie des modules sur un monoïde ordonné résidué.
- Nous pensons aussi calculer le produit tensoriel et établir une équivalence du type Morita de deux modules sur un monoïde ordonné résidué.

Bibliographie

[1] K.Ajdukiewicz, *Die Syntaktische Konnexität*, Studia philosophica 1, (1935) pp 1-27

[2] P.Berthiaume, *The injective envelope of S-sets,* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 10, (1967) pp 261-273.

[3] S.L. Bloom, *Varieties of ordered algebras,* J. Compt.System Sci. 13 (1976), pp 200-212.

[4] T. S. Blyth, M. F. Janowitz, *Residuation Theory,* Pergamon Press, 1972.

[5] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra, Vol. 2,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[6] R. Cignoli, I. M. L. Dottaviano, D. Mundici, *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning,* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[7] B.A.Davey and H.A.Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1980.

[8] Ebrahimi, M.M., Mahmoudi, M., Moghaddasi Angizan, Gh. *Injective hulls of acts over semigroups,* Semigroup Forum 75,(2007) pp 212-220

[9] S.M.Fakruddin,*Absolute flatness and amalgam in pomonoids*, Acta Scfi. Math. (Szeged) 52 (1988), pp 85-92.

[10] S.M.Fakruddin,*On the category of Sposets*, Semigroup forum 33,1986, pp 15-22

[11] S.Bulman-Fleming and M.Mahmoudi, *The Catégorie of de S-posets,* Semigroup forum, 71 (2005) n^o3 pp 443-461.

[12] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono, *Residuated Lattices* An Algebraic Glimpse at Substructural Logics, Elsevier, 2007, pp 532

[13] R. Goldblatt *A Kripke-Joyal semantics for noncommutative logic in quantales*, in Governatori, Hodkinson,Venema (Eds.), Advances in Modal Logic, volume 6, College Publications London 2006.

[14] P. Hajek, *Metamathematics of Fuzzy Logic,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, pp 209-225

[15] P.T. Johnstone, *Stone spaces,* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[16] André Joyal, M. Tierney, *An extension of the Galois theory of Grothendieck,* Mem. Amer. Math. Soc. 51 , no. 309, (1984)

[17] M.Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids, acts and categories*, de Gruyter, Berlin (2000).

[18] Kimmo I. Rosenthal, *Quantales and their applications,* Pitman Research Notes in Mathematics, 234, Longman Scientific and Technical, 1990, pp 165.

[19] D.Kruml, and J.Paseka, *Algebraic and categorical aspects of quantales,* in : Handbook of Algebra, Vol. 5 (Elsevier/North-Holland, Amsterdam, (2008), pp 323-362

[20] J. Lambek,*The Mathematics of Sentense Structure* American Mathematics Monthly, (1958) pp 65,154-170.

[21] J. Lambek, *Logical Aspects of Computational Linguistics* Type grammar revisited.(1999) pp 1582.

[22] Y. Li, M. Zhou et Z. Li, *Projective and injective objects in the category of quantales,* , J. Pure Appl. Algebra 176(2-3) (2002), pp 249-258

[23] S.Mac Lane, *categories for the working mathematicians* Springer Verlag, New York, (1971).

[24] Morgan Ward and R.P Dilworth, *Residuated Lattices*, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 24 (1938), pp. 162- 164 (corrected version).

[25] C. J. Mulvey, *"&"* Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 12,(1986) pp 99-104.

[26] Niovi Kehayopulu and Michael Tsingelis, *On free ordered semigroups*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, (2010), pp 97-103.

[27] Nkuimi and Ogadoa, *Rees Congruences on Residuated Semigroups* Journal of Algebra,Number Theory : Advances and Applications. vol 19, Number2, 2018, pp 67-77.

[28] H.Ono, : *Semantics for substructural logics.* In : Substructural Logics, eds. by K. Dosen and P. Schroeder-Heister, Oxford University Press, (1993) pp 259-291.

[29] H. Ono, *Structural rules and a logical hierarchy,* in : Mathematical Logic, Proceedings of the Summer School and Conference on Mathematical Logic, Heyting 88, P.P. Petrov (ed.), Plenum Press (1990), pp 95-104.

[30] H. Ono, Komori, Y. : *Logics without the contraction rule.* Journal of Symbolic Logic, 50, (1985) pp 169-201 .

[31] Kimmo I. Rosenthal *Constructing locales from quantales,* Math. Proceedings of Cambridge Philosophical Society 104 (1988), 215-234.

[32] Russo. *Quantales and their modules : projectors objects, ideals, and their congruences,* Souuth American Journal of Logic,vol2,n.2,(2016) pp405-424 ; ISSN :2446-6719

[33] Sergey A. Solovyov *A note on nuclei of quantale algebras* Bulletin of the section of Logic, volume 40 :1/2 (2011) pp 91-112

[34] Sydney Bulman-Fleming and Mojgan Mahmoud. *The category of S-Posets* Semigroup Forum, vol 71 (2005) pp 443-461.

[35] Valdis Laan and Sohhail Nasir,*On monomorphism and epimorphisms in varieties of ordered algebras* Communication in algebra, volume 43, (2015), Issue 7.

[36] Ward, M. and R. P. Dilworth, *Residuated lattices,* Transactions of the American Mathematical Society 45,(1939) pp 335-354,

[37] W. Buszkowski *Lambek Calculus and substructural logics* Linguistic Analysis,36, 1-4 (2010) pp 15-48.

[38] Xie Xiang-Yun *On regular, strongly regular congruences on ordered semigroups.* Semigroup Forum ; Springer-Verlag New York Inc Vol. 61 (2000) pp159-178

[39] Xiang Yun Xie and Xiaoping Shi,*Order congruences on S-posets* , Commun. Korean math. Soc. 20 No1 (2005) , pp 1-14

Annexe