REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHERTRAINING COLLEGE OF YAOUNDE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT DE VECTEUR EN CLASSE DE SECONDE C

Mémoire de DI.P.E.S II de mathématiques

De

YOUDOM Rose Christelle

Matricule : **CM04-09SCI0093**

Licenciée en Mathématiques

Sous la direction de :

Dr SADJA KAM Judith

Chargé de Cours

Dr TEGANKONG David

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique : 2015 - 2016

ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE DU CONCEPT DE VECTEUR EN CLASSE DE SECONDE C

Mémoire de DI.P.E.S. II de mathématiques

rédigé par

YOUDOM Rose Christelle

Matricule : CM04-09SCI0093

licenciée en Mathématiques

sous l'encadrement de

Dr. SADJA KAM Judith

Chargé de Cours

et

Dr. TEGANKONG David

Chargé de Cours

7 juillet 2016

Dédicace

À ma mère et à mon fils

Remerciements

J'ouvre cette page de remerciements en adressant un merci particulier à mes encadreurs le Dr. David TEGANKONG et le Dr Judith SADJA KAM qui, pendant toute la période accordée pour la production de ce mémoire m'ont guidée et donnée toutes les orientations nécessaires. Ensuite mes remerciements vont à l'endroit de tous les enseignants du département de mathématiques et d'informatiques de la faculté des sciences et de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé I pour leur contribution à ma formation d'enseignante de mathématiques. Par la présente occasion, je voudrais également adresser mes remerciements à toute ma famille particulièrement, Mme Victorine SILINOU, Mr Appolinnaire DJEUFACK, Mr Pascal NGANMENI, Mr Patrick TCHONANG, sans oublier Francis, Mariette, Armand, Larissa, Christian, Leopold, Steve, Pelvi, Viviane.

Je ne saurais refermer cette page sans remercier mes camarades du département de mathématiques et ceux du Renouveau d'Obili particulièrement Victor, Aurelien. Que toutes ces personnes trouvent en ces quelques mots l'expression de ma profonde gratitude pour leur soutien dans la réalisation de cet ouvrage.

Déclaration sur l'honneur :

Déclaration sur l'honneur :

Le présent travail est une oeuvre originale de la candidate et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Résumé

L'objet de notre travail porte sur l'étude de la **transposition didactique** du concept de vecteur en classe de seconde C. Au Cameroun, le concept de vecteur est un objet d'enseignement introduit dès la classe de quatrième. De nombreuses difficultés sont rencontrées dans des productions des élèves en mathématiques relativement à la notion de vecteur.

Les résultats de plusieurs recherches ont fait état des difficultés que rencontrent les élèves sur les vecteurs. Que ce soit celles liées aux opérations vectorielles que celles liées aux problèmes de géométrie, la représentation graphique de la somme de deux vecteurs n'est pas étrangère. Nous faisons l'hypothèse que les représentations graphiques des vecteurs comme segments orientés seraient à l'origine des difficultés des élèves.

L'idée que nous défendons est celle suivant laquelle une bonne transposition didactique du concept de vecteur en classe de seconde C pourrait pallier à toutes ces difficultés rencontrées par des élèves.

Nous avons opté pour une analyse du manuel CIAM et nous avons soumis un questionnaire aux élèves de la classe de seconde C dans un lycée de la ville de Yaoundé. Ce questionnaire porte sur la construction graphique de la somme de deux vecteurs. Ce questionnaire nous a permis de réperer certaines conceptions des élèves à propos de la construction graphique de la somme de deux vecteurs.

Mots-clés :transposition didactique, didactique, concept de vecteur, apprentissage, enseignement.

Abstract

The purpose of this study focuses on the didactik transposition of the vector in form five. In Cameroon, the concept of vector is a teaching module introduced in form three and it is involved in several geometric objects. Many difficulties are encountered in the production of mathematik concerning this concept. The results of several studies have noted the difficulties faced by students in vector.

Be it those related to operations related to geometric problem, the sum of two vectors is not a stronger to these challenges. We assume that the first graphic représentations of vectors as oriented segments could be the origin of difficulties of the students. The idea we stand for is that, for the learning of the vector, we need an didactik transposition.

We passed a questionnaire on vectors to students of end of course in form five. The questionnaire allowed us to idenify some students' conceptions concerning the concept of vector.

Introduction

L'objet de notre travail porte sur une étude de la transposition didactique du concept de vecteur en classe de seconde C. On entend par transposition didactique, l'ensemble des transformations que doit subir un savoir savant, savoir construit par des scientifiques pour devenir un savoir enseignable.

Dans les nouveaux programmes officiels de mathématiques au Cameroun, les vecteurs sont introduits dès la classe de quatrième et entrent en vigueur dès la rentrée 1996. La translation est utilisée pour introduire la notion de vecteur dont l'objectif est de faire découvrir à l'élève de façon intuitive la notion de direction, la notion de sens et la notion de norme **(CIAM ,4e, 2004, P.68).**
Suites à nos observations dans les productions des élèves, nous avons remarqué des phénomènes récurrents dans les processus cognitifs et les copies des élèves. Les problèmes repérés sont les suivants :

- Les difficultés à déterminer géométriquement la somme de deux vecteurs lorsque l'extrémité de l'un ne coïncide pas avec l'origine de l'autre d'une part et lorsque les origines des deux vecteurs coïncident d'autre part ;
- Les difficultés à mettre en œuvre les propriétés relatives aux vecteurs dans la résolution des problèmes de géométrie. Notamment, montrer que trois points sont alignés en utilisant le déterminant, montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme en utilisant l'égalité de deux vecteurs ;
- Les difficultés à distinguer le vecteur du segment, distinguer la direction du sens, prendre en compte les trois caractéristiques du vecteur lors de la construction géométrique de la somme de deux vecteurs. On note également les difficultés à déterminer le nombre réel m tel que $\vec{u}$ = m.$\vec{v}$, décomposer un vecteur en deux vecteurs colinéaires, reconnaitre la relation entre un repère et la base qui lui est associée.

Ces problèmes dans l'enseignement des vecteurs nous amènent à étudier la transposition didactique faite sur les vecteurs en classe de seconde C.

Afin de déterminer dans quelle mesure la transposition didactique a un impact sur l'acquisition des connaissances relativement au concept de vecteur en classe de seconde, nos hypothèses de recherches sont les suivantes :

- Les représentations graphiques du vecteur comme segment orienté seraient à l'origine des difficultés des élèves.

– L'introduction des vecteurs par le biais des situations de la vie courante pourraient faciliter l'appréhension du concept de vecteur chez les élèves.

Nos hypothèses nous amènent au questionnement suivant :

Quelle transposition didactique du concept de vecteurs a été effectuée dans le manuel scolaire CIAM ?

De cette question, découlent les sous-questions suivantes :

1. Quelle transposition est faite du concept de vecteur dans le manuel en la classe de seconde ?
2. Quelles conceptions ont les élèves à propos des vecteurs ?

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous avons divisé notre travail en deux grandes parties : une partie théorique et une partie expérimentale.

La partie théorique est composée de trois chapitres. Le premier chapitre porte sur une étude épistémologique du concept de vecteur subdivisée en deux parties. La première partie porte sur un aperçu historique de la construction du vecteur que nous avons choisie de présenter parce que les difficultés que les élèves rencontrent au cours de l'apprentissage d'un concept sont souvent en liaison avec celles rencontrées dans la construction de ce dernier dans les laboratoires ; obstacle que Gaston Bachelard qualifie d'obstacle épistémologique. Cet aperçu historique nous permet de mettre en évidence les résistances survenues lors de l'apparition et le développement du concept de vecteur pour mieux cerner les difficultés des élèves. Dans la seconde partie, nous allons présenter le contexte de son introduction dans l'enseignement.

Le deuxième chapitre porte sur une revue de littérature et un cadre théorique. Nous allons présenter les résultats de quelques travaux antérieurs de didactique de mathématiques qui sont en liens avec notre problématique. Il s'agit des travaux de Gervais Affogon, Joël Tossa , Le THI 1997, didacticiens de mathématiques ayant montré dans leur article que l'enseignement des vecteurs en mathématiques au secondaire pose plusieurs difficultés aux élèves. Nous présenterons le cadre théorique qui cadre avec notre problématique. Il s'agit de la transposition didactique et de la géométrie euclidienne. Les éléments de ces théories nous permettrons d'analyser le manuel et d'élaborer les techniques de résolution de tâches de notre questionnaire.

La partie expérimentale comporte deux grands chapitres : Le premier chapitre porte sur une analyse du manuel CIAM de seconde C, précisément le cours portant sur les vecteurs du plan. Cette analyse a pour but d'étudier les différentes méthodes d'approche utilisées par les auteurs du manuel CIAM pour passer du savoir savant ou savoir qu'on pourrait qualifier de savoir "*brut*" au savoir à enseigner, ce savoir qui est contenu dans le manuel. Un autre objectif de cette analyse

est d'étudier les difficultés des élèves en lien avec le contenu du manuel. C'est-à-dire, voir si les difficultés rencontrées par les élèves sont dues au contenu du manuel.
Le deuxième chapitre de cette partie englobe l'analyse à priori et l'analyse à postériori du questionnaire. Nous avons conçu un questionnaire pour les élèves de la classe de seconde. Par l'analyse à priori, nous allons élaborer les différentes techniques de résolutions des différents types de tâches proposés dans le questionnaire et prédire les éventuelles erreurs qui pourraient survenir dans les copies des élèves. Enfin, une analyse à postériori du questionnaire où nous allons faire une analyse des productions des élèves et nous exposerons les origines des erreurs survenues dans leurs productions.

CHAPITRE UN

Analyse épistémologique

1.1 Aperçu historique de la construction du vecteur

L'étude épistémologique nous permet de préciser les conditions dans lesquelles le concept de vecteur s'est développé et de mettre en évidence des résistances à l'apparition de ce concept. Cette analyse nous permet aussi de mettre en évidence les difficultés des élèves à sortir du modèle métrique lors du passage au modèle vectoriel car les élèves sont souvent convaincus que la droite (AB) est différente de la droite (BA) ainsi que la longueur AB est différente de BA . L'autre difficulté est la prise en compte des deux caractéristiques d'orientation du vecteur, la direction et le sens.

Le calcul vectoriel a connu un développement lent dans l'histoire des mathématiques. Il prend racine dans le processus d'élargissement du concept de nombre qui débuta dans les civilisations babyloniennes et égyptiennes. L'origine du calcul vectoriel remonte à plus de 300 ans, et cela, en raison de trois principaux facteurs. Tout d'abord, l'étude des solutions des équations du 3^{e} degré a conduit les mathématiciens à utiliser des racines carrées négatives, encore appelées " *nombres imaginaires* " par Bombelli en 1572. Ces nombres ont été utilisés comme moyen de calcul pendant près de 200 ans. Puis, ces nombres ont conduit les mathématiciens à ressortir un sens sur une droite et donc des " *segments orientés dans le plan* " (notamment avec Argand en 1806). De plus, Leibniz à la fin du XVIIe siècle critiqua la géométrie cartésienne, il voulait un calcul opérant directement sur les figures, et non des intermédiaires algébriques étrangers à la géométrie. Il semblait en effet intolérable pour lui que la résolution d'un problème géométrique passe par l'utilisation de nombres étrangers au domaine de la géométrie. Enfin, la dernière raison, même indirecte (Pressiat, 1999) qui peut être considérée comme une des origines du calcul vectoriel est le développement de l'étude des mouvements par Newton (1726). Isaac Newton (1643-1727) développe la géométrie analytique et l'utilise en astronomie. Cette application est la source de l'utilisation du terme **vecteur**. On retrouve encore ce terme sous la plume de Pierre-Simon (1749-1827) dans l'expression rayon vecteur toujours dans le contexte astronomique. Il vient du latin *vehere* et signifie transporter.

Au 19e siècle, les mathématiciens Argand Jean Robert (1768-1822) et Wessel (1745-1818) reprennent les idées de Bombelli. Ils interprètent géométriquement les nombres imaginaires et qui seront qualifiés de nombres complexes par Gauss en 1831 *(ChronoMath, une chronologie des mathématiques).* Le plan complexe également appelé plan d'Argand-Gauss ; il s'agit d'un plan euclidien muni du repère orthonormé (O, i, j) où 1 représente le vecteur de coordonnées $(1, 0)$ et i le nombre imaginaire de coordonnées $(O, 1)$ dont le carré vaut -1. Dans ses notations, la vision d'Argand est clairement vectorielle : il distingue entre OA (longueur, nombre positif) et $\overline{OA}$, "*lignes dirigées*", notation des mesures algébriques que nous rencontrons dans le manuel CIAM. $\overline{OB}$ est l'opposé de $\overline{BO}$. Dans l'addition géométrique des nombres complexes, Argand est amené à poser la formule : $\overline{AB}$=$\overline{AC}$+$\overline{CB}$. Argand annonce l'entrée en scène de la notion de vecteur. Il constate que les nombres imaginaires sont des lignes dirigées : segments orientés du plan.

Ensuite, l'idée de sens sur une droite se fait ressortir suite à l'utilisation de ces nombres imaginaire et par conséquent des segments orientés dans le plan. L'Allemand Grassmann (1809-1877) développe une partie du calcul vectoriel dans son traité Die Ausdehnungs Lehre (Théorie de l'extension linéaire, 1843) à partir de ses travaux sur la théorie des marées, tout en travaillant sur la reformulation de ce que l'on nomme aujourd'hui la relation de Chasles et sur la possibilité de donner un sens à une droite.

A la même période, William Rowan Hamilton, mathématicien, physicien et astronome irlandais en travaillant sur la théorie des nombres complexes a développé en 1843, le corps des quaternions de dimension quatre à partir de la théorie des nombres complexes. Il définit pour la première fois le vecteur comme partie d'un quaternion ; Il définit les quaternions comme une suite ordonnée de quatre nombres réels et appelle la première partie scalaire et les trois autres la partie vecteur. L'ensemble des quaternions est noté H et constitue une extension des nombres complexes . Un vecteur est donc considéré comme "*une ligne droite AB qui a non seulement une longueur et une direction [...]. Un vecteur est conçu pour être (ou pour construire) la différence entre ces deux points ; ou, plus précisément, pour résulter de la soustraction de sa propre origine avec sa propre extrémité* "(Hamilton, 1899,p.9).

Giusto Bellavitis (1803-1880) mathématicien italien du dix-neuvième siècle formalise les vecteurs par la notion de bipoints (couples de points, le premier désignant l'origine) et d'équipollence. Ses contributions peuvent être reconstituées à partir de ses publications de 1832, 1833, 1835 telles que " *Methode des equipollences* ", " *Sopra alcune Applicatzioni di un Nuovo Metodo di Geome-*

tria Analitica " et " *Saggio di Applicazioni di un Nuovo Metodo di Geometria Analitica (Calcolo delle Equipollence)"*. Nous pouvons retenir de lui que : *" Une ligne droite (retta), désignée comme d'habitude par deux lettres, est considérée comme allant de la première à la deuxième, si bien que AB et BA ne doivent pas être considérés comme désignant la même entité, mais comme deux quantités égales ayant des signes opposés."* De ce calcul géométrique, nous pouvons ressortir pour la première fois la définition de la notion de vecteur géométrique (les équipollences) comme classe d'équivalence de bipoints (Dorier, 1997). Ici, deux bipoints (ou couples de points) (A, B) et (C, D) sont dits équipollents si [AD] et [BC] ont le même milieu, c'est dire si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme. L'ensemble de tous les bipoints équipollents à (A, B) définissent un même objet mathématique (en fait, une classe d'équivalence de cette relation d'équivalence est le vecteur d'origine A et d'extrémité B). *(cf. La représentation géométrique des nombres imaginaires par Argand)*. Nous avons les principes de l'addition des équipollences et de leur multiplication par un scalaire ainsi que la multiplication de deux vecteurs colinéaires.

Peu à peu, les scientifiques vont montrer qu'il existe un lien entre les vecteurs et la physique. C'est notamment le cas de Tait, en 1882, qui a été l'un des premiers à montrer ces liens entre la théorie des quaternions et de ce fait les vecteurs et la physique (cinématique, dynamique et électrodynamique). C'est ainsi, que les objets physiques, tels que la vitesse, l'accélération, les forces sont alors représentés sous la forme de vecteurs et que toutes les propriétés des vecteurs sont appliquées à ces objets (notamment pour la résultante de deux forces qui reprend la règle du parallélogramme sous sa forme vectorielle). Par ailleurs, les vecteurs sont d'abord apparus dans l'enseignement de la mécanique dès 1902, puis dans l'enseignement de la géométrie en 1905.

Vers 1930, les mathématiciens ont étendu le calcul vectoriel à la théorie des espaces vectoriels. Au cours de ce développement de la théorie des espaces vectoriels, les systèmes symboliques représentant les vecteurs, ainsi que les définitions, ont évolué. En effet, lorsque Hamilton définit pour la première fois ce qu'est un vecteur, la notation utilisée alors pour représenter un vecteur était $A - B$, ou bien encore AB. Cette notation était déjà utilisée par Argand à la fin du XVIIIe siècle et elle sera reprise par de nombreux mathématiciens, dont Tait en 1882, et cela va durer jusqu'aux années 1940. De plus, les représentations graphiques des vecteurs sont de simples segments de droite sans flèche. Ce n'est qu'à partir de la moitié du XXème siècle, après la seconde guerre mondiale, que les notations vectorielles actuelles des vecteurs, c'est-à-dire la notation fléchée $\overrightarrow{AB}$ en mathématiques et $\overrightarrow{F}$ en physique, se sont imposées. Cette notation fut d'abord adoptée par les physiciens, puis en mathématiques à partir de 1960. Aujourd'hui, les représentations graphiques des vecteurs sont données sous la forme de segment de droite fléché à l'extrémité, et ils sont notés dès la classe de quatrième par les notations $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ où (A, B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$.

1.2 Introduction des vecteurs dans l'enseignement

En mathématiques, les vecteurs sont à la fois des objets et des outils mathématiques. Selon les définitions de R. Douady (1986, p.9) : *" Un concept est un outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. (...) Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement "*. Ainsi, le vecteur peut être considéré comme un objet, lorsqu'il est directement un objet d'étude, lorsqu'il est représenté par une définition, des propriétés et des théorèmes.

Le vecteur est enseigné dans différentes disciplines, notamment en mathématiques. Il est défini par trois caractéristiques (sa norme, son sens et sa direction). Aujourd'hui, les vecteurs sont davantage présentés aux élèves en tant que outils afin de résoudre des problèmes géométriques. Prenons l'exemple du manuel CIAM de la classe de Seconde : sur 36 exercices proposés à la fin du cours, seuls 16 d'entre eux font intervenir les vecteurs en tant que objet mathématique. L'attention est peu focalisée sur leur aspect objet.

Arrivés au terme de cette analyse, nous remarquons que l'évolution des vecteurs dans l'histoire montre que la construction ne s'est pas faite de façon linéaire, c'est-à-dire qu'elle ne s'est pas faite sans obstacles. Il est à noter que les vecteurs ont évolués au cours du temps notamment en ce qui concerne leurs notations. Tout d'abord le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté tout simplement AB avec Moebius, ensuite A-B ou AB et enfin $\overrightarrow{AB}$. Ils ont été utilisés pour résoudre des problèmes de géométrie et conçus en premier lieu pour résoudre des problèmes de physique puisqu'ils apparaissent d'abord dans l'enseignement de physique. On constate que la première représentation du vecteur AB est souvent rencontrée dans les copies des élèves car ils sont souvent convaincus d'exprimer l'opposé du vecteur AB par BA.

Révue de littérature et cadre théorique

2.1 Révue de littérature

La notion de vecteur a fait l'objet de quelques études en Didactique de mathématiques. Nous nous sommes référés dans ce chapitre aux travaux de deux auteurs portant sur l'enseignement des vecteurs au secondaire et sur une étude didactique et épistémologique de l'enseignement du vecteur au secondaire. Ces travaux nous ont permis de situer notre recherche par rapport aux recherches antérieures. Les articles que nous avons retenus dans cette revue de littérature sont intitulés : *" Décalage de l'enseignement de direction et de sens et introduction du vecteur géométrique en classe de quatrième "* de Gervais Affognon et Joël Tossa et *"Une étude institutionnelle sur l' enseignement des vecteurs au niveau secondaire au Viet-nam et en France."* de Hoài Châu LÊ THI.

Gervais Affognon et Joël Tossa dans leur article intitulé " *Décalage de l'enseignement de direction et de sens et introduction du vecteur géométrique en classe de quatrième*", porte sur l'introduction des vecteurs en classe de quatrième avec le problème de mauvaise conception qui existe entre le sens et la direction d'un vecteur chez les élèves en classe de 4^{e}. Ayant constaté que les apprenants ont du mal à discerner la direction d'avec le sens, émettent l'idée suivant laquelle la confusion entre les notions de direction et de sens en géométrie peut se réduire grâce à un décalage entre leurs enseignements. Suite à l'analyse institutionnelle réalisée, ils remarquent que la notion de direction est abordée depuis l'école primaire mais c'est seulement en classe de quatrième que le terme est utilisé.

De plus, de la classe de sixième à la classe de quatrième, en plus des programmes officiels, il y a une introduction chronologique des caractéristiques du vecteur géométrique. De ces faits, ils tirent les conclusions suivant lesquelles le parallélisme de droites devrait faciliter l'apprentissage de la direction et aussi l'enseignement des segments de droites et du parallélogramme devrait soutenir l'apprentissage de la direction et faire apparaitre la cohabitation de la direction et de la longueur dans un même objet mathématique. Remarquant l'absence du mot " direction " dans les programmes et manuels des classes de sixième et cinquième, ils réalisent une expérimentation auprès des élèves d'une classe de sixième. De notre point de vue, ces difficultés sont le plus souvent rencontrées dans nos salles de classes.

Les auteurs réalisent une expérimentation sur un groupe constitué des élèves de la classe de 6e durant les trois premières années, de la classe de sixième à la classe de quatrième. Le but est d'introduire le mot direction dans le lexique des élèves et la focalisation de leur intention sur la différence entre un objet mathématique et sa représentation.

Les résultats montrent que la reconnaissance de la direction comme caractéristique de la droite est de 7/10 pour le groupe expérimental mais la direction comme caractéristique du segment et du bipoint n'est pas perçue par certains élèves qui ont reçu le traitement. Les auteurs expliquent cela par les difficultés que les apprenants ont à trouver un lien entre un segment et une droite d'une part et entre un bipoint et une droite d'autre part. Pour ce qui est de la conceptualisation de sens, la plupart des élèves soumis au test y rencontrait encore des difficultés.
Au terme de ces expérimentations, les auteurs soutiennent l'idée selon laquelle le décalage de l'enseignement de la direction et le sens en géométrie a permis d'introduire un peu plus tôt le terme direction dans le lexique des élèves. Malgré le risque de génération d'obstacle ontogénétique dans l'apprentissage, cette introduction précoce semble avoir favorisé la conceptualisation de la direction et développé des savoir-faire en ce qui concerne le sens. La conceptualisation du sens pourrait être stimulée par des choix mathématiques appropriés.

Dans sa thèse de Doctorat, Le Thi (1997) a conduit une étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur en classe de seconde. En premier lieu, elle dresse une étude historique de la genèse du concept de vecteur et du développement du calcul vectoriel. Ce qui lui permet alors de mettre en évidence des difficultés qui ont entravées l'émergence de ce concept, difficultés dans lesquelles les caractéristiques de sens et de direction représentent les difficultés essentielles. L'auteur réalise une analyse d'un manuel intitulé "*Le livre du Maitre*". Parmi les difficultés repérées, la plus tenace concerne l'addition vectorielle à laquelle s'ajoutent celles dues à l'utilisation dans le manuel de la langue naturelle (sens de A à B). Cet auteur situe les difficultés relatives à la notion de sens dans l'absence d'explicitation de la notion de direction et support de vecteur. A ce sujet, il affirme que : "*l'on ne peut parler ni de direction ni de support d'un vecteur, risque de ne pas mettre suffisamment en évidence le fait que l'on ne peut comparer que le sens des vecteurs de même direction (ou de même support)*".
En ce qui concerne l'addition vectorielle, le Thi souligne le fait que les auteurs du manuel n'ont pas mis l'accent sur la différence entre les deux types de vecteurs (*liés* et *libres*), ce qui d'après lui

a provoqué des ambiguïtés dans la mise en texte de certains savoirs abordés dans le manuel. Selon ses propos, les opérations vectorielles sont définies sur les vecteurs libres. L'addition, la soustraction et la multiplication par un nombre réel sont définies à travers la construction géométrique de la somme de deux vecteurs, différence et produit par un scalaire. Dans sa thèse, il souligne un problème relatif à la somme de deux vecteurs. Il écrit :

la somme de deux vecteurs est définie de la manière suivante : Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ A partir d'un point quelconque A, on trace $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ puis, à partir de B, on trace $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est appelé somme des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et on note : $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (ibd. 6).
Selon cette définition, $\overrightarrow{AC}$ est la somme de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Or, puisqu'on peut changer le choix de A, la somme de deux vecteurs donnés n'est pas déterminée. Il affirme ce problème du choix du représentant d'un vecteur lors de l'étude de la différence de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un nombre.

A propos de ce vecteur nul, il écrit : *Le vecteur nul n'a de sens que lorsque l'aspect algébrique intervient : sa présence conditionne l'existence de la somme de deux vecteurs opposés ainsi que la différence de deux vecteurs égaux. Géométriquement, le vecteur nul qui n'a pas de direction et dont la norme est nulle est plus difficile à concevoir. Comment les auteurs du manuel étudié prennent en compte ce fait ? Le vecteur nul est introduit par la définition suivante : " Si A et B sont confondus, AB et BA sont identiques. Dans ce cas, ce vecteur est appelé vecteur nul." (Van Nhu Cuong et al. 1990a, 3). Rappelons qu'en sixième, la notion de segment n'est considérée que dans le cas de deux points distincts, il n'y a donc pas de "segment nul". Il existe donc une contradiction avec la définition que l'on vient de présenter : comment peut-on parler des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ si on n'a pas de segment [AB] et [BA] dans ce cas ? Il y a ici, à notre avis, une nouvelle ambiguïté dans la présentation du manuel. Cette ambiguïté risque de provoquer des difficultés pour l'élève dans l'apprentissage de ces notions nouvelles. De plus, le fait que la distinction entre un vecteur et ses représentants n'est pas explicitée peut amener les élèves à croire qu'il y a autant de vecteurs nuls que de points dans le plan.*

L'auteur présente une méthode d'approche des deux caractéristiques d'orientation du vecteur (direction et sens). Selon lui, pour définir l'égalité de deux vecteurs, le manuel s'appuie sur des notions connues de l'élève (droite, sens d'un chemin,...). *La définition de l'égalité de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est présentée en utilisant simultanément le langage mathématique et le langage de la vie quotidienne : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :*

1. *les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues et telles que sur ces droites le*

sens de A à B est le même que celui de C à D ;

2. *les longueurs des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont égaux :* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
   Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont égaux, on note* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*." (Van Nhu Cuon et al. 1990a,4).*

D'après lui, Les auteurs n'introduisent pas la notion de direction ni celle de support du vecteur $\overrightarrow{AB}$ mais parlent de "*la droite (AB)*". De plus, l'utilisation de la langue naturelle "*le sens de A à B*" renvoie l'élève à la signification du sens d'un chemin dans la vie courante. En ce qui concerne le sens d'un vecteur, les élèves peuvent se référer à la définition de deux vecteurs de même sens, qui est donnée sous une rubrique "*Attention : Si deux vecteurs ne vérifient que la condition a, on dit qu'ils ont même sens. (ibid., 5). Cette définition se présente implicitement comme une convention : on considère que le sens du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est le sens de A à B. Le terme "sens du vecteur" est utilisé dans la suite du manuel. Dans le Livre du Maître les auteurs justifient leur choix de contourner l'introduction d'une définition mathématique des vecteurs de même sens en parlant des complications que cette définition peut provoquer dans la pratique des élèves. Le sens du vecteur (de l'origine à l'extrémité) est un des deux sens de la droite contenant ce vecteur. En pratique, les élèves doivent utiliser la transitivité de la relation "avoir même sens" des vecteurs. La démonstration de la transitivité n'est pas simple pour les élèves à partir de la définition de vecteur de même sens qui' leur a été donnée. Alors que "les conceptions de "sens ", de "même sens ", de "sens opposé" sur une droite ne sont pas étrangères aux lycéens. Au contraire, elles sont habituelles pour eux, par exemple, le sens unique ", "deux amis vont ensemble de la maison à l'école ", "deux voitures circulent dans le sens opposé ", . . ., sont des situations qu'ils ont rencontrées dans la vie courante ainsi que dans plusieurs problèmes mathématiques du niveau de collège.*" (ibid., 12)

2.2 Cadre théorique

Notre travail de recherche se situe dans le cadre de la transposition didactique développée par Yves Chevallard à partir des années 1980 et de la théorie de la géométrie euclidienne. La théorie de la transposition didactique nous a permis de mettre en relation le savoir de référence avec le contenu du manuel. Il nous a fourni des éléments qui seront mis en œvre dans l'analyse du manuel. La théorie de la géométrie euclidienne présente un certain nombre d'objets(points, droite,cercle,. . .) et d'axiomes d'Euclide qui vont nous permettre d'examiner le contenu du manuel CIAM de la classe de seconde C et nous aider à mener à bien nos différentes analyses.

2.2.1 Géométrie euclidienne

Dans le cadre général de la géométrie euclidienne, Euclide s'appuie sur les objets usuels suivants : point, droite, ligne, plan, droites parallèles d'un même plan, surface, droites perpendiculaires, polygones pour construire son modèle et des axiomes d'Euclide. Dans la suite nous énumérons les définitions de quelques objets usuels présentés par Euclide comme suit :

1. Point : ce dont la partie est nulle ;
2. Ligne (finie) : longueur sans largeur dont les extrémités sont des points ;
3. Droite : ligne qui est également (de manière égale) placée entre ses points ;
4. Droites (distinctes) parallèles d'un même plan : droites qui, prolongées indéfiniment d'un côté ou de l'autre, ne se rencontrant pas ;
5. Plan : surface également placée entre ses droites.

Il est à noter qu'Euclide ne définit pas le segment par un terme spécifique : il parle de droite finie (limitée de part et d'autre). On note d // d' pour exprimer que les droites d et d' sont parallèles et, dans la pratique, on utilisera la définition : d // d' si et seulement si : d = d' où bien d et d' ne se rencontrent pas (n'ont aucun point en commun).
Après les définitions, Euclide pose ses axiomes dont le cinquième est resté Le postulat d'Euclide. Ces axiomes sont les suivants :

Premier axiome : Étant donnés deux points A et B, il existe une droite passant par A et B. Euclide écrit : Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

Second axiome : Tout segment [AB] est prolongeable en une droite passant par A et B.

Troisième axiome : Pour tout point A et tout point B distinct de A, on peut décrire un cercle de centre A passant par B ;

Quatrième axiome : Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Cinquième axiome Par un point extérieur à une droite, on peut mener une parallèle et une seule à cette droite.

Ces objets usuels et postulats d'Euclide étant mis en place, comment faire une construction géométrique au sens d'Euclide ?

Selon Euclide, construire une figure consiste à déterminer les points qui la constituent tout en utilisant les deux seuls instruments, la règle et le compas. La règle est considérée ici comme un moyen de relier deux points (déjà construits) : elle sert à tracer un segment ou une droite ; elle n'est donc pas graduée. La règle permet aussi de construire un point, intersection de deux lignes (une ligne est ici une droite, un segment, un cercle ou une courbe quelconque déjà construits). Le compas sert à tracer des cercles dont le centre et un point (ou le rayon : écart) sont déjà déterminés. Le compas permet également de construire un point, intersection de deux cercles. L'usage de la règle et du compas seuls dans une construction oblige à la réflexion, au raisonnement, mais il ne doit pas être obligatoire ou systématique (à l'école ou au collège).

Selon Euclide, Les figures jouent en effet un rôle essentiel en géométrie. Il ne faut jamais hésiter à illustrer une situation ou une démonstration par un schéma, parfois même très simple. Si une figure ne constitue jamais en elle-même une démonstration, il y en a des cas où la démonstration découle presque instantanément d'une figure, même très simple. Si les figures les plus simples peuvent se tracer aisément à la main, des constructions plus compliquées nécessitent souvent l'usage d'instruments .
A l'école, si l'objectif de la construction est d'évaluer les connaissances de l'élève sur un nouveau savoir et les propriétés géométriques remarquables de ce savoir (par exemple, construire la médiatrice d'un segment, suite à sa caractérisation), on pourra exiger l'usage des seules règles non graduée et compas. Sinon on parlera de tracer plutôt que de construire. Et là, tous les outils sont permis.
Cette méthode de la construction des figures géométriques sur la base de ces deux outils est encore utilisée au secondaire. Cette partie nous sera important dans l'analyse des schémas de notre manuel.

2.2.2 Théorie de la transposition didactique

La notion de transposition didactique a fait son entrée dans le champ de la didactique au début des années 1980. Elle était le premier émergent d'un programme épistémologique qui se donne l'activité mathématique comme principal objet de recherche.

L'enseignement est le résultat d'un traitement didactique obéissant à des contraintes précises, On distingue le *savoir savant* (tel qu'il émane de la recherche, produit dans les laboratoires),le *savoir à enseigner* (ce sont ceux qui sont contenus dans les programmes officiels et les contenus de manuels scolaires) le *savoir enseigné* (celui que l'on rencontre dans les pratiques de classe). La transposition didactique est constituée des mécanismes généraux permettant le passage d'un objet de savoir à un objet d'enseignement. Selon Chevallard, : *Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue didactiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner. [...] Un contenu du savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail »qui, d'un objet de savoir à enseigner,* *fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique* (Y.Chevallard, La transposition didactique. Grenoble : La pensée sauvage, 1985).

Selon Chevallard, pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique notamment qu'il se modifie, sinon il ne peut pas se maintenir dans l'institution. Ainsi, pour que le savoir savant devienne un savoir enseigné, il doit subir deux types de transpositions didactiques que Chevallard appelle transposition didactique externe (transformation des savoirs et des pratiques en programmes scolaires) et transposition didactique interne (transformation des programmes en contenus effectifs de l'enseignement).

Dans la suite, nous présentons les outils de la transposition didactique que nous allons utiliser pour analyser le cours portant sur les vecteurs dans le manuel CIAM de la classe de seconde.

Pour l'analyse de notre manuel, nous mettrons en œuvre certains éléments de la transposition didactique suivants :

1. La mise en texte du savoir. Cette mise en texte du savoir assure sa dépersonnalisation qui le détache des individus et des groupes qui le produisent ou s'en servent. Dans notre analyse, nous allons présenter la forme du texte et l'organisation des définitions, des théorèmes, des propriétés,des schémas d'accompagnement, des démonstrations et des exercices d'application ;
2. La désyncrétisation où nous allons voir s'il existe une similitude entre la programme officiel et le contenu du manuel ;
3. Le vocabulaire ou reformulation des termes ou expressions du savoir savant. Nous allons présenter les termes ou expression du savoir de référence qui ont été modifié dans le contenu du manuel et citer si possible les raisons de ces modifications.

Chevallard affirme que : *« Le savoir enseigné suppose un processus de naturalisation, qui lui confère l'évidence incontestable des choses naturelles ; « donnée », l'école étend alors sa juridiction, fondatrice des valeurs qui, désormais, administrent l'école didactique. En définitive, dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie de la transposition didactique qui nous a fourni des éléments pour l'analyse de notre manuel. Cette théorie nous a permis de connaitre les différentes étapes que subi un savoir savant pour devenir un savoir enseigné (savoir dispensé dans la salle de classe). Elle nous a aussi fourni les contraintes que doit respecter un savoir pour devenir enseignable. »*

En définitive, l'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats des travaux antérieurs déjà effectués sur les vecteurs, principalement ceux qui cadrent avec notre problématique et les théories sur lesquelles nous nous sommes appuyés pour nos recherches. Les résultats obtenus de ces analyses nous donnent de comprendre l'impact du choix du représentant d'un vecteur dans la construction géométrique de la somme de deux vecteurs et ces résultats nous fournissent des éléments essentiels qui nous permettront d'analyser les caractéristiques d'un vecteur. Il apparaît à travers cette revue de littérature que l'enseignement du vecteur pose des problèmes en mathématiques. Ces résultats sont d'une grande importance dans nos analyses car privilégient l'identification des difficultés d'élèves sur les vecteurs plus précisément la construction géométrique de la somme de deux vecteurs, la résolution de problèmes de géométrie (alignement de points, parallélisme de droite) en utilisant le déterminant. Enfin, nous avons présenté deux théories à savoir la théorie de la transposition didactique et la théorie de la géométrie. La théorie de la transposition didactique met l'accent sur le rôle de l'enseignant et de l'enseigné en rapport avec le savoir mis en jeu. Le cadre de la géométrie euclidienne nous a fourni des éléments permettant de comprendre et analyser les différentes techniques de résolutions des tâches de notre questionnaire.

CHAPITRE TROIS

Analyse du manuel

Les savoirs enseignés dans l'enseignement sont généralement conçus des recherches menées dans des communautés scientifiques (les Universités, les centres de recherches, les laboratoires) et la notion de vecteur en fait partie. La notion de vecteur qui est un objet d'enseignement en mathématique trouve son utilité dans d'autres disciplines (physique, chimie, etc) ainsi que dans la vie de tous les jours (plan de localisation, panneau d'orientation etc). Ces savoirs pour être enseignés doivent subir des transformations pour devenir des objets enseignables. Ces transformations sont qualifiées par l'expression *transposition didactique* par Yves Chevallard, didacticien de mathématiques . A ce sujet, il ecrit : *"Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. le travail qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique*" (Y.Chevallard. La transposition didactique. Grenoble : La pensée sauvage. 1985). En nous appuyant sur quelques éléments de cette théorie, nous allons dans la suite faire une analyse de notre manuel.

Nous avons choisi la collection CIAM parce qu'elle cadre avec les exigences du programme officiel camerounais et elle est utilisée dans nos établissements scolaires. Pour notre analyse de manuel, nous avons choisi un savoir de référence dans le cadre de la géométrie analytique et vectorielle un cours portant sur deux chapitres, les chapitres 4 et 5 dont les intitulés sont les suivants : "*Vecteurs dans l'espace*", "*Espace affine*". Après avoir présenté le concept de vecteur et des outils qui sont développés autour de ce concept dans le savoir de référence, nous allons analyser le rapport entre le contenu de ce savoir et le contenu du manuel scolaire CIAM de la classe de seconde C. Comme outils, il s'agit des définitions, des propriétés, du niveau de formulation, des propositions, des opérations sur les vecteurs du plan, la notion de combinaison linéaire, les notions de bases et de repères. Notre grille d'analyse est la suivante :

1. Le niveau de reformulation des termes et expressions du savoir de référence apparaissant dans le contenu du manuel ;
2. Les notions implicites et explicites qui surgissent dans le manuel ;

3. La méthode employée pour introduire le concept de vecteur dans le savoir de référence et dans le manuel ;
4. Les opérations vectorielles (addition et multiplication) qui surviennent dans le savoir de référence et dans le manuel ;
5. La notion de combinaison linéaire ;
6. Les notions de bases et de repères.

Dans un premier temps, nous allons présenter les vecteurs du plan tels que cela a été fait dans le savoir de référence, ensuite nous allons établir une similitude entre le contenu de notre manuel portant sur les vecteurs du plan et celui du savoir de référence.

3.1 Présentation des vecteurs dans le savoir de référence et dans le manuel

3.1.1 Présentation des vecteurs dans le savoir de référence

L'introduction du vecteur se fait par une définition. Pour y parvenir, les auteurs définissent d'abord la notion de bipoint, et introduisent des éléments qui caractérisent deux bipoints équipollents. Dans ce document, un bipoint est défini ainsi : "*tout couple (A ; B) de points du plan où A est l'origine et B l'extrémité de ce bipoint*". Ensuite, Les auteurs introduisent les notions de droite et de longueur par les propriétés suivantes : "*Si A et B sont deux points distincts, la droite* (AB) *est le support du bipoint (A ; B). La longueur du bipoint (A ; B) est la distance AB*". Les notions de sens et de direction sont aussi introduites via la notion de bipoint. A ce sujet, ils écrivent : "*Deux bipoints ont la même direction si leurs supports sont parallèles ou confondus. Deux bipoints de même direction sont soit de même sens soit de sens contraire. On dit que deux bipoints (A ; B) et (A' ; B') sont équipollents si les segments [AB'] et [A'B] ont le même milieu*". La relation d'équipollence comme propriété dans ce cadre est une relation d'équipollence.

Par la suite, ils définissent le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme la classe d'équivalence du bipoint (A ; B). C'est-à-dire l'ensemble des bipoints (M ; N) équipollents au bipoint (A ; B) dont l'expression en langage mathématique est la suivante : $\overrightarrow{AB}$ = {(M ; N)/(M ; N) $\sim$ (A ; B)} . Le bipoint (A ; B) ou tout autre bipoint appartenant à $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de ce vecteur.

De cette définition, il en ressort que le vecteur est un ensemble. Mais le fait de représenter un vecteur par un couple de points qui possède une longueur permet d'entrevoir cette longueur comme élément caractéristique du vecteur. Les auteurs ont fait allusion aux termes direction, sens et longueur par la notion d'équipollence, ce qui renvoit aux éléments caractérisant un vecteur.

3.1.2 Les notions de base, de repère et de composante

La notion de base précède celle de repère. Dans le savoir de référence, la base est définie comme sous-ensemble du plan vectoriel tel que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base. On note une proposition et une propriété qui sont rattachées à la notion de base. La proposition stipule qu'une base est constituée d'un couple de vecteurs linéairement indépendants. Tandis que la propriété précise que si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan vectoriel, tout vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire unique de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Le repère du plan affine est tout triplet de points non alignés dont la première composante est l'origine.

3.1.3 Opérations sur les vecteurs

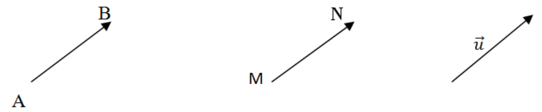
L'ensemble des vecteurs du plan a une structure d'espace vectoriel réel, la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et le produit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par un réel k est noté $k\overrightarrow{u}$. L'addition vectorielle est associative, la multiplication est distributive sur l'addition et l'élément neutre pour l'addition est le vecteur nul.

En définitive, le vecteur est défini dans le savoir de référence comme la classe d'équivalence de bipoints équipollents. Par ce fait, le vecteur est présenté comme un ensemble mais sa représentation par un couple de points permet de déceler son caractère géométrique qui est sa longueur. On remarque que plusieurs notions dans ce savoir sont introduites par des définitions en plus des propriétés et des propositions. Etant donné que ce savoir a été conçu pour un enseignement dans nos universités, nous allons dans la suite étudier la manière par laquelle il a été transposé dans notre manuel CIAM afin d'être enseigné dans nos établissements secondaires au Cameroun.

3.2 Présentation des vecteurs dans le manuel CIAM

3.2.1 Introduction du concept de vecteur dans le manuel CIAM

La notion de translation a des liens très étroits avec celle de vecteur. Dans l'enseignement on peut définir d'abord la translation, puis le vecteur par la classe des couples de points dont le second est l'image du premier par la translation ; on définit d'abord le vecteur, puis la translation à partir du vecteur. En classe de quatrième, l'introduction de la translation précède celle du vecteur . La dénomination bipoint utilisée dans le savoir de référence disparait au profit de couple de points et dans le manuel nous ne trouvons aucune trace de justification du choix des auteurs. Pour introduire les vecteurs en seconde, à la page 28 on retrouve le schéma suivant :



Les concepteurs du manuel CIAM prennent deux points A et B, puis en considérant la translation t qui au point A associe le point B, construisent le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ainsi, l'ensemble des couples de points (M ; N) où N est l'image de M par la translation t qui applique A sur B est ce qu'ils ont appelé le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les couples de points (A ; B) et (M ; N) sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$. La translation utilisée par les auteurs du manuel met en évidence l'utilisation implicite de la relation d'équipollence par l'égalité suivante : $\overrightarrow{u}$=$\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{MN}$. On voit que la différence entre le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ noté (A ; B) et le vecteur $\overrightarrow{u}$ est clairement explicitée. En effet, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur libre tandis que tous ses représentants sont des vecteurs liés car ils ont une origine et une extrémité. Ils mentionnent que la nouvelle notation $\overrightarrow{u}$ est utilisée pour désigner tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ comme dans le savoir de référence. Nous avons remarqué que beaucoup d'élèves ont du mal à comprendre qu'un couple de points est un représentant d'un vecteur. En 2011, AFFOGON et Joel TOSSA dans l'article "*utilité des nombres dans l'introduction des vecteurs en classe de 4^{e}*", ont mis en évidence les difficultés des élèves à concevoir un couple de points sans la ligne qui joint les deux points et la distance entre ces points. Par conséquent les élèves sont face à un obstacle didactique dû à la nature du savoir lui-même et dû aussi au contenu des livres de référence.

Comment sont introduites les caractéristiques du vecteur ?

Dans le savoir de référence, les auteurs affirment : "*deux bipoints $(A; B)$ et $(A'; B')$ sont équipollents si les segments $[AB']$ et $[A'B]$ ont le même milieu ou bien si ces bipoints ont une même direction, un même sens et une même intensité*". On note que les caractéristiques d'un vecteur dans le savoir de référence sont introduites par la relation d'équipollence. Par contre, la notion de direction d'un vecteur est introduite dans le manuel à l'aide de la direction d'une droite. Nous notons ici que le terme direction est nouvellement introduit et déterminé par la donnée d'une droite quelconque (AB) (cf. manuel CIAM 4ieme).

La notion de sens est liée à celle de direction. En effet, pour une direction déterminée par une droite (AB), il y a deux sens de parcours pour cette direction :

– Le sens de A vers B, on dit que c'est le sens du couple (A ; B) ;

– Le sens de B vers A, on dit que c'est le sens du couple (B ; A).

Par ailleurs en classe de seconde, les caractéristiques du vecteur sont dégagées en relation avec les propriétés de la translation. En effet, on choisit un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque auquel on associe ses représentants (M ; N), (M' ; N'), (M" ; N"). Comme les droites (MN), $(M'N')$, $(M''N'')$ sont parallèles, les auteurs concluent que ces droites définissent la direction du vecteur $\vec{u}$. Par la suite, ils déclarent que la translation qui transforme M en N, M' en N' et M" en N" définit sur cette direction un sens de parcours appelé sens du vecteur $\overrightarrow{u}$.

3.2.2 Opérations sur les vecteurs du plan

L'enseignement de la géométrie au secondaire peut se faire par la méthode vectorielle, par la méthode analytique ou par la méthode synthétique

La méthode analytique consiste à l'introduction d'un repère et d'une base. Les points du plan peuvent être représentés par des couples de nombres et les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. L'idée de base de la géométrie analytique est d'étudier géométriquement les figures au moyen de calculs algébriques.

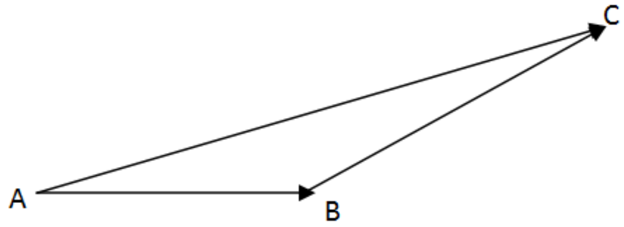
Quant à la méthode vectorielle, elle permet d'opérer directement sur des objets géométriques sans transfert sur un domaine numérique. Cette méthode permet d'exploiter l'aspect intuitif du cadre géométrique lors de la résolution de problèmes tout en utilisant des techniques algébriques. La méthode synthétique consiste à faire des calculs directement sur les figures géométriques de manière intuitive.

Au vu de l'importance des vecteurs dans l'étude de la géométrie , dans le manuel les auteurs présentent les vecteurs suivant deux aspects : vectorielle et analytique. Dans la suite , nous allons analyser les différentes méthodes employées par les auteurs du manuel pour la construction du vecteur-somme.

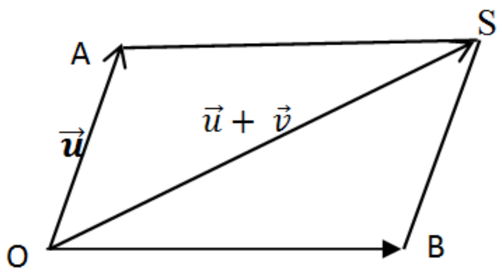
En nous appuyant sur le savoir de référence , nous avons remarqué que les auteurs ont présenté la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$ et le produit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par un réel α noté $\alpha.\overrightarrow{u}$ comme étant les deux opérations sur les vecteurs du plan. Le plan vectoriel V muni de l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel a une structure d'espace vectoriel. En ce qui concerne les opérations vectorielles dans notre savoir de référence, elles sont définies sur les vecteurs libres. L'addition, la soustraction et la multiplication par un nombre réel sont définies à travers la construction géométrique de la somme de deux vecteurs, différence et produit par un scalaire.

3.2.3 Opérations sur les vecteurs suivant la méthode vectorielle

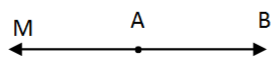
La somme de deux vecteurs est introduite dès la classe de 4e et pour sa représentation vectorielle, les auteurs ont mis à la disposition des élèves l'égalité de Chasles. En classe de troisième, la somme de vecteurs revient et la détermination d'un somme de deux vecteurs repose beaucoup plus sur l'égalité de Chasles. Une représentation géométrique peut se faire comme suit :



En classe de seconde, la relation de Chasles et la règle du parallélogramme sont utilisées.
La méthode du parallélogramme consiste à :
Choisir deux représentants des vecteurs à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant la même origine O. On Compléte le parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en tracant la diagonale allant de l'origine O au sommet opposé S du parallélogramme.



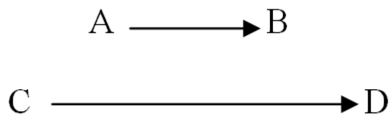
La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est $\overrightarrow{OS}$.
Multiplication d'un vecteur par un nombre réel
Le critère de colinéarité est utilisé pour montrer que trois points sont alignés, pour montrer que deux droites sont parallèles. Pour montrer l'intérêt du critère de colinéarité en géométrie, les auteurs du manuels mettent en relation le langage géométrique et le langage vectoriel associé. Alors dit dans le langage géométrique que trois points A, B et M sont alignés équivaut à dire dans le langage vectoriel qu'on peut trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.



si $k \neq 0$.

si $k = 0$. Où A et M sont confondus.

De même, dire que (AB) et (CD) sont parallèles dans le langage géométrique revient à dire qu'on peut trouver un réel k tel que : $\overrightarrow{CD}$ = k $\overrightarrow{AB}$ dans le langage vectoriel.



Ici, les élèves pourraient faire face à un obstacle didactique. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ tels qu'ils sont représentés sont colinéaires et par conséquent l'élève peut les représenter de telles sorte que le support de la droite (CD) contienne les points A et B et obtient :

En utilisant la caractérisation vectorielle de trois points alignés donné plus haut, cet élève peut croit que les points A, B , D sont alignés.

Comment les auteurs manipulent-ils le vecteur nul ?

Lorsqu'on parle de vecteur nul, immédiatement il nous vient à l'esprit la somme de deux vecteurs opposés ainsi que la différence de deux vecteurs égaux. En classe de sixième, la notion de segment n'est considérée que pour de deux points distincts, parler de segment nul est difficile. Géométriquement, le vecteur nul qui n'a pas de direction et dont la norme est nulle est difficile à concevoir par l'élève. De plus, le fait que la distinction entre un vecteur et ses représentants n'est pas explicitée peut être une source de difficultés chez les élèves à concevoir le vecteur opposé $\overrightarrow{BA}$ comme l'ensemble des bipoints équipollents au bipoint (B ; A).

Les opérations vectorielles se font sur les vecteurs libres dans le savoir de référence. En classe de quatrième et de troisième , on travaille sur des vecteurs liés (ayant une origine et une extrémité). En classe de seconde on passe de vecteurs liés aux vecteurs libres. Le fait des auteurs de n'avoir pas insister sur ce type de vecteurs lors de leur définition constitue un obstacle dans le choix du représentant d'un vecteur chez les élèves à représenter la somme de deux vecteurs.

3.2.4 Opérations sur les vecteurs suivant la méthode analytique

La méthode analytique consiste à substituer aux objets et aux relations géométriques des objets et des relations numériques en s'appuyant sur l'introduction d'un système de coordonnées. La notion d'axe graduée et la notion repère sont introduites dès la classe de cinquième mais ce n'est qu'à partir de la classe troisième que les élèves commencent à se familiariser avec la représentation

graphique de fonctions affines.
En classe de seconde, on introduit la notion de base et de repère. Les opérations vectorielles sont exprimées ensuite sous une forme analytique. L'expression qui permet de calculer la longueur d'un vecteur selon ses coordonnées est donnée ainsi que l'expression en coordonnées de la somme de deux vecteurs et du produit d'un vecteur par un scalaire. Les élèves peuvent résoudre certains types de tâches tels que : calculer les coordonnées du milieu d'un segment, démontrer l'alignement des points de coordonnées bien connues ou utiliser le déterminant pour montrer que deux droites sont parallèles.

Comment les auteurs présentent-ils toutes ces notions ?

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord voir comment la notion de combinaison linéaire est présentée dans le manuel. Ensuite, nous verrons comment les notions de base et de repère sont introduites et enfin exposer les différentes opérations sur les vecteurs représentés par leurs coordonnées.

Notion de combinaison linéaire

Cette notion est introduction par une définition comme dans le savoir de référence. La reformulation n'a pas changée. Etant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on définit dans le manuel une combinaison linéaire comme tout vecteur de la forme k$\overrightarrow{u}$ +k$\overrightarrow{v}$ accompagné d'un schéma illustratif.

Comment les auteurs du manuel définissent-ils une base ? Pour définir une base, les auteurs introduisent d'abord une propriété fondamentale qui est la suivante : Soit $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur$\overrightarrow{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels (x ;y) tel que : $\overrightarrow{u}$=x$\overrightarrow{i}$ +y$\overrightarrow{j}$. Or dans la savoir de référence, cette propriété est énoncée après avoir définit une base. Cette propriété signifie que tout vecteur peut se décomposer de façon unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}$ et de $\overrightarrow{j}$ sous la condition que les deux vecteurs ne soient pas colinéaires. Une base du plan vectoriel est définie par tout un couple ($\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$) de vecteurs non colinéaires car un plan ou un espace ayant une structure d'espace vectorielle possède plusieurs bases. Dans la reformulation faite par les auteurs, la notion d'ensemble qui est explicite dans le savoir de référence devient une notion implicite dans le manuel. Ce qui pourrait s'expliquer par le fait que les ensembles ne sont plus aux programmes des enseignements secondaires.

Comment est présentée la notion de repère dans notre savoir de référence

Dans l manuel, le repère du plan affine est tout triplet de points non alignés. associé à une base du plan vectoriel. Nous remarquons aussi que les notions de familles génératrices et libres ne figurent pas dans le manuel. Ils mettent en relation les coordonnées d'un point M(x ;y) dans un repère (O ; i ;j) aux coordonnées dans une base(i,j). Cette relation montre implicitement le lien entre un espace affine et l'espace vectoriel associé. La difficulté que les élèves rencontrent le plus souvent c'est la mise en relation d'une base et du repère qui lui est associé. Les opérations sont définies comme dans le savoir de référence. L'addition de deux vecteurs consiste à additionner leurs composantes dans une base donnée et la multiplication par un scalaire consiste à multiplier chaque composante par ce scalaire.

3.2.5 Aspect outil des vecteurs

L'un des objectifs de l'introduction des vecteurs dans l'enseignement est la résolution des problèmes de géométrie. Le vecteur est considéré comme un outil lorsqu'il est utilisé comme une astuces pour résoudre de problèmes. Par exemple, on pourrait démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, démontrer que trois points sont alignés, démontrer que deux droites sont parallèles.

Nous remarquons que les auteurs présentent le vecteur comme outil à travers les exercices proposés dans le manuel. Pour ce faire, les exercices sont classés comme suit :

- les exercices ayant pour but d'approfondir les notions relatives aux vecteurs, les opérations portant sur des vecteurs et les coordonnées du vecteur. Ils visent l'approfondissement de certaines techniques nécessaires pour manipuler des expressions vectorielles ;
- les exercices ayant pour but d'appliquer des connaissances concernant le vecteur pour démontrer des résultats géométriques (alignement de points, parallélisme de droite, milieu d'un segment).

En définitive, l'objectif de ce chapitre est d'analyser le manuel CIAM principalement étudier le contenu par rapport à celui du savoir de référence. Les résultats obtenus de ces analyses nous donnent de comprendre que le contenu du manuel n'est pas très éloigné du savoir de référence. On note plusieurs termes et expressions du savoir de référence ont été reformulés dans le manuel CIAM qui laisse entrevoir le soucis des auteurs du manuels à rendre plus accessible la notion de vecteurs chez les apprenants. On souligne une ambiguïté dans le manuel, le segment nul qui peut être une difficulté pour l'apprentissage. On remarque aussi plusieurs notions implicites dans le manuel comme la notion d'espace vectoriel, de familles génératrices et la notion d'ensembles, la relation d'équipollence. Le fait que les auteurs ait laissé dans l'implicite la notion de bipoints équipollents pourrait être une source de difficultés dans le choix d'un représentant d'un vecteur ; ce qui pourrait influe la construction de la somme de deux vecteurs.

La somme de deux vecteurs est très important dans la composée des applications tels que les translations, les similitudes dans les classes de première et terminales, les élèves doivent être bien formés. Le vecteur est un concept qui a un champ d'action vaste. Dans le chapitre qui suit, nous passons un questionnaire aux élèves de la classe de seconde C dont le but est d'identifier leurs difficultés spécifiquement dans la construction de la somme de deux vecteurs.

CHAPITRE QUATRE

Etude exploratoire des connaissances des élèves sur la somme de deux vecteurs

4.1 Analyse a priori

4.1.1 Motivations, contexte, choix globaux, modalité de passation

Afin de mieux cerner les rapports entre les élèves et le concept de vecteur, nous avons réalisé ce questionnaire destiné aux élèves de la classe de seconde C. Les ambigüités ayant un impact sur l'apprentissage de la somme de vecteurs que nous avons soulevé lors de l'analyse du manuel en l'occurrence la difficulté à choisir un représentant d'un vecteur ainsi que la technique convenable(la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme), nous ont conduits à émettre des interrogations sur l'impact de ces ambiguïtés ou les confusions sur l'appropriation des connaissances par les élèves relativement à cette notion.

Il est à noter que le vecteur se situe dans plusieurs registres. Nous avons le registre vectoriel où le vecteur est vu comme élément d'un espace vectoriel ; le registre analytique où le vecteur est représenté par ses coordonnées dans une base ou bien est assimilé à un point dans un repère ; le registre graphique où le vecteur est caractérisé par une norme, une direction et un sens. Dans ce cadre, étant donné que le vecteur est un concept très vaste, nous nous sommes restreints à la construction du vecteur somme dans le registre graphique. Ainsi, nous avons choisi de poser une première question relative aux caractéristiques du vecteur.

Les objectifs de ce questionnaire cadrent avec ceux qui sont évoqués dans les programmes officiels des enseignements secondaires de mathématiques en classes de seconde au Cameroun. Pour des questions pratiques, nous avons recueilli des données essentiellement au lycée bilingue d'Etoug-Ebe, lycée de l'enseignement général de la ville de Yaoundé, Capitale Politique du Cameroun où j'ai passé mon examen pratique de DipesII(stage académique). Nous avons remarqué que les programmes officiels ainsi que la progression des cours étaient respectés par les enseignants. Notre questionnaire a été présenté à un groupe de 10 élèves de 14 à 18 ans tous de la classe de seconde. On a passé ce questionnaire au mois d'avril 2016 après que le cours portant sur les vecteurs fut dispensé. Pour ces élèves volontaires, la durée de passation était d'environ 20 minutes. Les élèves avaient pour consigne de travailler silencieusement et individuellement sur une double feuille. De plus, il leur avait été demandé de commencer par n' importe quel schéma. Dans nos analyses, nous avons porté l'attention sur les conceptions du vecteur et les connaissances mathématiques des élèves dans la construction géométrique de la somme de deux vecteurs. Cette analyse a aussi pour but d'identifier les difficultés des apprenants relativement à la représentation graphique de la somme de vecteurs que nous essayeront de donner les origines dans l'analyse à postériori de notre questionnaire.

4.1.2 Questionnaire sur la représentation graphique de la somme de deux vecteurs

Le questionnaire porte sur un seul exercice. Nous avons choisi de nous restreindre à cet exercice parce que le concept de vecteur est très vaste. Cet exercice vise à obtenir des renseignements sur les conceptions des élèves d'avec la somme géométrique de deux vecteurs. Les instruments de géométrie pour accomplir cette tache sont : un compas, une règle, un équerre. L'exercice est énoncé comme suit :

- Quels sont les éléments qui caractérisent un vecteur ?
- Représentez la somme géométrique $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans chacun des cas suivants :

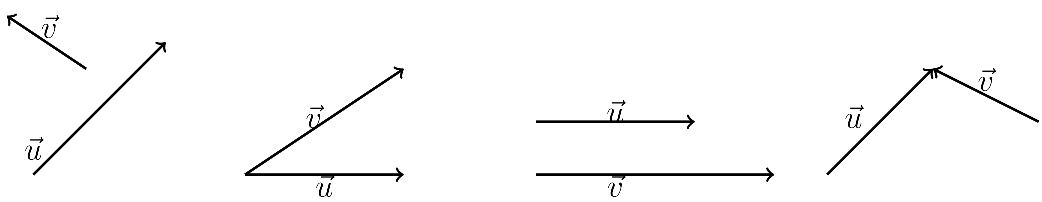


FIGURE 4.1 – Schéma du questionnaire

4.1.3 analyse a priori

Pour résoudre les tâches qui leur sont proposées, les élèves doivent faire appel aux connaissances qui peuvent s'exprimer de deux façons : sous forme prédicative et sous forme opératoire. Pour analyser les types de connaissances et les différentes méthodes qui pourraient être produits par les élèves de notre questionnaire, nous nous intéressons à la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud. Cette théorie nous intéresse dans la mesure où elle permet de mettre en évidence les connaissances des élèves sur la somme géométrique des vecteurs. Elle nous permet d'analyser la compétence du sujet à mobiliser des connaissances opératoires en situation de résolution des problèmes faisant intervenir la somme des vecteurs dans le registre graphique.

Dans cette théorie, Vergnaud(2001) définit deux types de connaissances : connaissance opératoire et connaissance prédicative. La connaissance opératoire selon lui est «*la connaissance qui permet de faire et de réussir*». Selon Vergnaud(2010) déclare : «*La plus grande de nos connaissance se situe dans nos compétences, souvent de manière implicite, voire inconsciente. C'est ce qu'on peut appeler la forme opératoire de la connaissance, celle qui permet d'agir en situation. Elle ne s'oppose pas aux connaissances académiques classiquement transmises par l'école et l'université, mais il existe un décalage parfois impressionnant entre ce qu'une personne peut faire en situation, et ce qu'elle est capable d'en dire. La forme opératoire de la connaissance est en général plus riche, plus subtile, que la forme prédicative, celle qui énonce les propriétés et les relations des objets de pensée*»

Dans cette théorie, Vergnaud approche la notion de compétence comme suit : «*A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permet d'utiliser tantôt une procédure, tantôt une autre, et de s'adapter ainsi plus aisément aux différents cas de figures qui peuvent se présente ou alors « A est plus compétent s'il sait se débrouiller devant une situation nouvelle d'une catégorie jamais rencontrée auparavant*» (Vergnaud, 1991, pp.2-3). Dans cette définition, l'accent est mis sur la capacité du sujet à s'adapter face à une situation nouvelle. Des aspects de cette théorie nous permettront d'évaluer la capacité des élèves à pouvoir mobiliser des connaissances opératoires lorsqu'ils sont en situation du tracé du vecteur-somme.

La première question de notre questionnaire est la suivante :

Quels sont les éléments qui caractérisent un vecteur ?

Cette tâche nous permet de tester les connaissances des élèves sur les caractéristiques d'un vecteur car très souvent ils ne prennent pas en compte toutes les caractéristiques du vecteur lorsqu'ils sont en situation de résolution de tâches. Pour répondre à cette question, les élèves devront formuler la phrase suivante : *les éléments qui caractérisent un vecteur sont : son sens, sa direction et sa norme*. Nous pensons que nous pouvons avoir d'autres réponses qui ne répondent pas convenablement à la question posée de la part des élèves. Ces réponses sont les suivantes :

- Un vecteur est caractérisé par une flèche ;
- Un vecteur est caractérisé par un segment et une flèche ;
- Un vecteur est caractérisé par une longueur, un sens et une direction ;
- Un vecteur est caractérisé par deux points et une flèche.

La seconde tâche vise à récolter des indices sur les connaissances des élèves à propos du choix du représentant des vecteurs mis en jeu pour la représentation géométrique de la somme de ces vecteurs lorsque leurs extrémités coïncident ; et le choix du représentant des deux vecteurs lorsqu'ils ont une même origine. On veut déceler les capacités des élèves à pouvoir mettre en œuvre la relation de Chasles et la règle du parallélogramme lors de la construction de la somme de deux vecteurs. La seconde question de notre questionnaire est la suivante :

Représentez la somme géométrique $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans chacun des cas suivants :

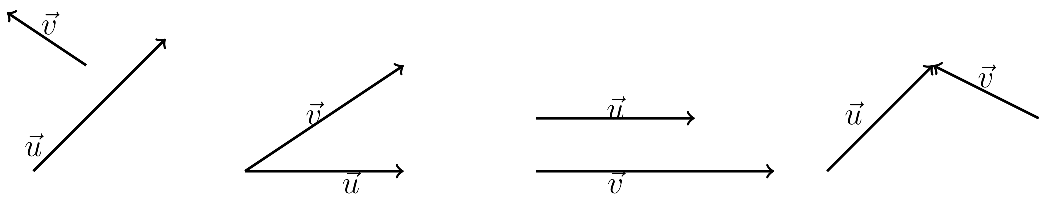


FIGURE 4.2 – Schéma du questionnaire

Techniques de la construction de la somme des deux vecteurs du premier schéma

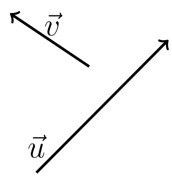
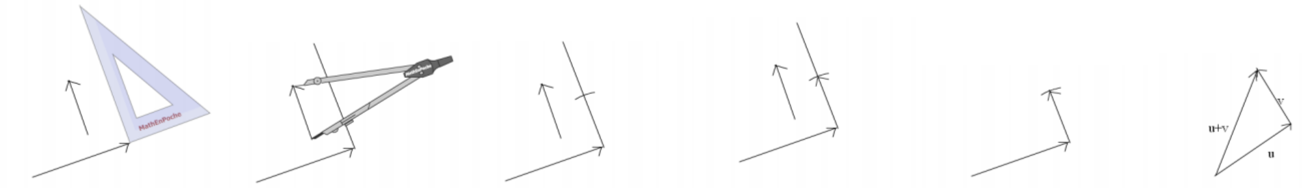
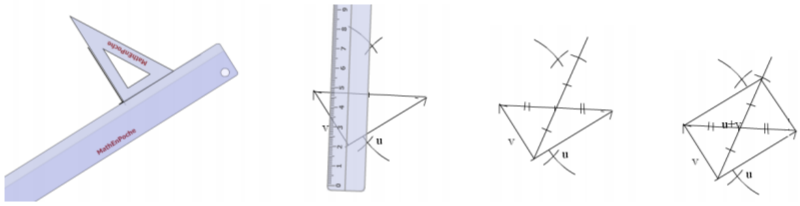


FIGURE 4.3 – Premier schéma du questionnaire

La résolution de ce type de tâche repose sur deux techniques. Comme première technique, on trace un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$ à partir de l'extrémité de $\overrightarrow{u}$ et ensuite on applique la règle de Chasles. Les étapes de la construction sont les suivantes :



Comme autre démarche, on trace un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$ à partir de l'origine de $\overrightarrow{u}$ et ensuite on applique la règle du parallélogramme. Les étapes de la construction sont les suivantes :



Les autres réponses qui pourraient surgir des copies des élèves sont les suivantes :

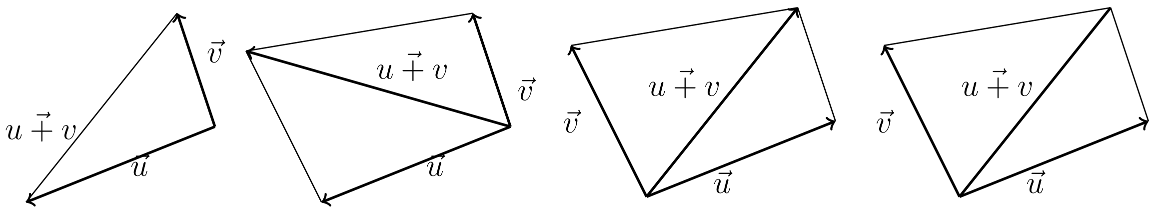


FIGURE 4.4 – Productions des élèves

Techniques de la construction de la somme des deux vecteurs du second schéma du questionnaire .

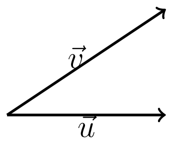
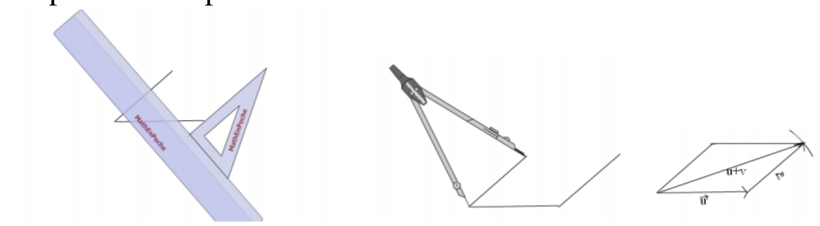


FIGURE 4.5 – Second schéma du questionnaire

La résolution de ce type de tâche repose sur deux connaissances opératoires, la relation de Chasles et la règle du parallélogramme. Dans ce cas, l'élève intelligent pourrait directement utiliser la règle du parallélogramme. Dans ce cas, les étapes de la construction sont les suivantes :

On peut encore procéder comme suit :



Les autres réponses qu'on pourrait rencontrer dans les productions des élèves sont les suivantes :

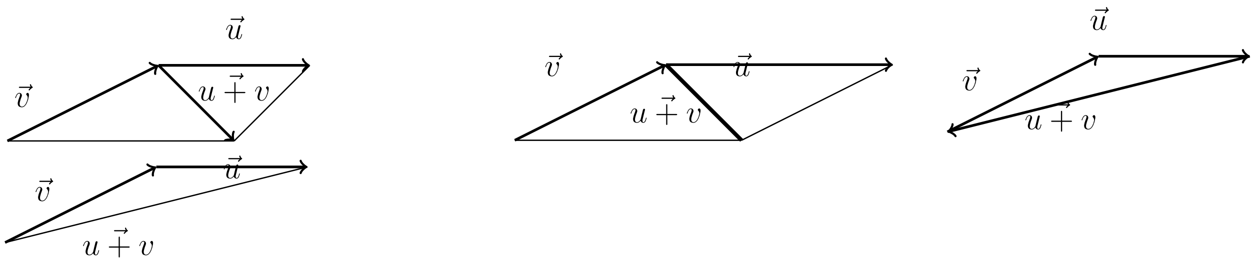


FIGURE 4.6 – Productions des élèves

Techniques de la construction de la somme des deux vecteurs du troisième schéma du questionnaire

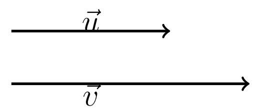


FIGURE 4.7 – Troisième schéma du questionnaire

Une technique de résolution de ce type tâche consiste : Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ à partir de l'extrémité de $\overrightarrow{v}$ et ensuite on joint l'origine de $\overrightarrow{v}$ à l'extrémité du représentant de $\overrightarrow{u}$. On obtient un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$. Comme autre technique, on tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$ à partir de l'extrémité de $\overrightarrow{u}$ et ensuite on joint l'origine de $\overrightarrow{u}$ à l'extrémité du représentant de $\overrightarrow{v}$. On obtient aussi un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$.

La tendance chez les élèves serait de tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ à partir de l'origine $\overrightarrow{v}$ et de choisir comme un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ + $\overrightarrow{v}$ le vecteur $\overrightarrow{v}$ car il a la plus grande norme.

Techniques de la construction de la somme des deux vecteurs du quatrième schéma du questionnaire

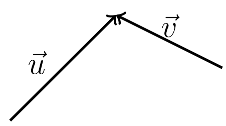
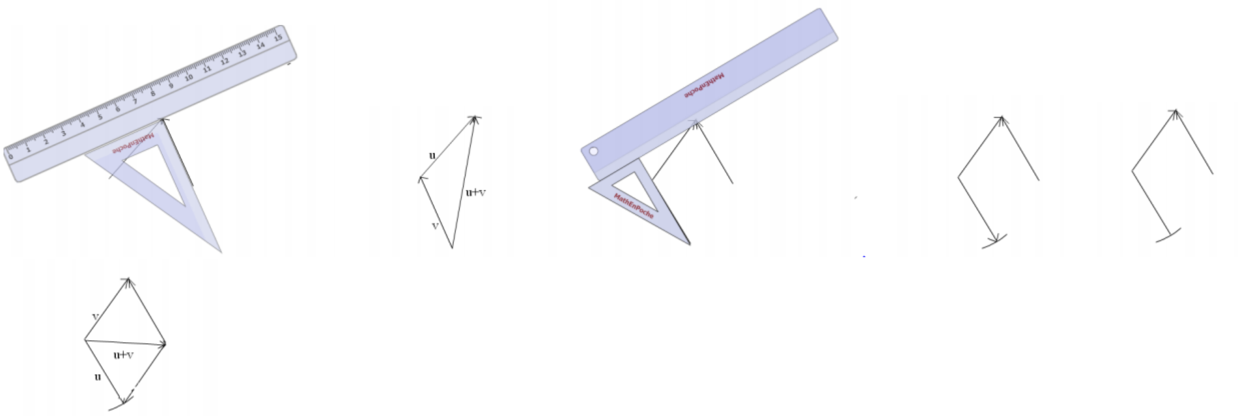
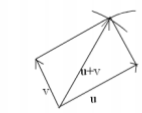


FIGURE 4.8 – Quatrième schéma du questionnaire



Ce type de tâche n'est pas très souvent rencontré par les élèves. La résolution repose sur deux connaissances opératoires, la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme. Comme première technique,

– On trace un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$ à partir de l'origine de $\overrightarrow{v}$ et ensuite on applique la règle du parallélogramme pour obtenir un représentant de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. On peut schématiser cette situation de la manière suivante :

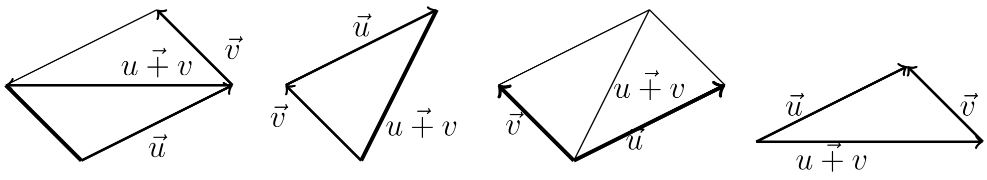


Comme seconde technique,

– Esquisser un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$ à pertir de l'origine de vecteur $\overrightarrow{u}$. puis on utilise la règle du parallélogramme.

On peut encore crayonner un représentant du vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que son extrémité coïncide avec l'origine du vecteur $\overrightarrow{u}$ Puis, on utilise la relation de Chasles. Comme moyen de réalisation de cette tâche, on peut procéder comme suit : Les réponses qu'on pourrait prévoir des productions des élèves sont les suivantes :

En définitive, dans cette partie, nous avons élaboré un questionnaire qui visait à étudier les compétences des élèves en mettre en œuvre la relation de Chasles et la règle du parallélogramme dans la construction géométrique de la somme de deux vecteurs. Ainsi, nous avons réalisé une analyse à priori du questionnaire qui nous a permis de présenter les objectifs visée de chaque tâche



et ainsi que les différentes techniques de résolution. Dans la partie qui suit, nous allons analyser les différentes techniques utilisées par les élèves et nous allons proposer les origines des éventuelles erreurs commises par les élèves.

4.2 Analyse a postériori

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats que nous avons obtenus suite aux enquêtes que nous avons menées sur le terrain. L'enquête via le questionnaire vise à recueillir des informations auprès des élèves qui nous permettront d'évaluer leurs capacités à pouvoir mettre en œuvre les propriétés et définitions relatives aux vecteurs pour construire géométriquement la somme de deux vecteurs.

L'analyse des copies à l'issu du questionnaire est faite à partir des grilles d'analyse construites dans le cadre de l'analyse a priori. Les grilles ont été préalablement remplies après lecture et classification des différents types de réponses écrites dans les copies étudiées. Les différentes questions issues de l'analyse a priori organisent notre étude et nos commentaires de ces différents éléments.

4.2.1 Classifications des différentes réponses

Nous nous intéressons aux questions posées dans notre analyse à priori nécessitant la mobilisation et la mise en œuvre de la règle du parallélogramme, de la relation de Chasles et des éléments caractéristiques du concept de vecteur par les élèves dans la construction de la somme de deux vecteurs.

En ce qui concerne la méthodologie de recueil des données, nous avons classé chaque type de procédure correspondant à un type de technique de résolution en trois sous catégories dans lesquelles nous précisons si une procédure donnée qui est associée à une technique bien déterminée est exacte, incomplète ou erronée. Or, l'objectif principal du dépouillement des réponses des élèves associées aux différentes questions du questionnaire n'est pas d'analyser la nature des réponses (exactes, incomplètes ou erronées), mais de repérer le type de technique mobilisée à chaque type de tâche demandée.

4.2.2 Analyse de l'exercice

4.2.2.1 Analyse de la question 1

Pour ce qui est de la 1^{ere} question, dans l'analyse à priori, nous avons proposé quatre réponses possibles. L'examen des réponses des 10 copies des élèves au sujet de cette question montre que tous n'ont pas répondu à la question. En effet, on leur avait demandé d'énumérer les éléments qui caractérisent un vecteur. Nous avons enregistré 8 réponses sur 10 interrogés.

Réponse	Caractéristiques du vecteur
Erronée	2
Incomplète	4
Correcte	2

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des notes

Deux élèves ont produit des réponses erronées, deux d'entre eux ont donné une réponse exacte, réponse semblable à celle que nous avons proposée et les quatre autres ont produit des réponses incomplètes. Les élèves qui ont produit les réponses erronées ont caractérisé un vecteur par une flèche et par la notation $\overrightarrow{u}$ ou encore l'ont caractérisé par un segment et une flèche. Des productions des élèves, on note la confusion des caractéristiques d'un vecteur d'avec les notations ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$) et le symbole ($\rightarrow$). On note que le vecteur dans les manuels universitaires est généralement noté $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ notations que l'on rencontrent le plus souvent dans le manuel CIAM de la classe de 4^{e} à la classe de 2^{e}. Ces élèves sont habitués aux représentations graphiques des vecteurs depuis la classe de 4^{e}ce qui pourrait être une autre source de ces difficultés.

Les élèves ayant produit des réponses incomplètes ont proposé des solutions que nous avons prédire dans l'analyse à priori. Ils émettent ceci : *un vecteur est caractérisé par un sens, une direction et une flèche ; un vecteur est caractérisé par une norme, une direction et une flèche ; il est caractérisé par un sens, une direction et un segment*. On constate que dans chaque réponse, on retrouve un seul élément caractérisant le vecteur. On remarque aussi que le terme flèche revient fréquemment ce qui pourrait s'expliquer par la représentation graphique qui leur est proposé dans le manuel et sur lequel les enseignants s'appuient pour préparer leur leçon.

En définitive, l'analyse des productions des élèves nous révèle que les élèves rencontrent des difficultés à pouvoir reconnaitre les caractéristiques d'un vecteur.

4.2.2.2 Analyse de la question 2

Les types de tâches proposés aux élèves consistent à construire la somme graphique de deux vecteurs. L'énoncé est le suivant :

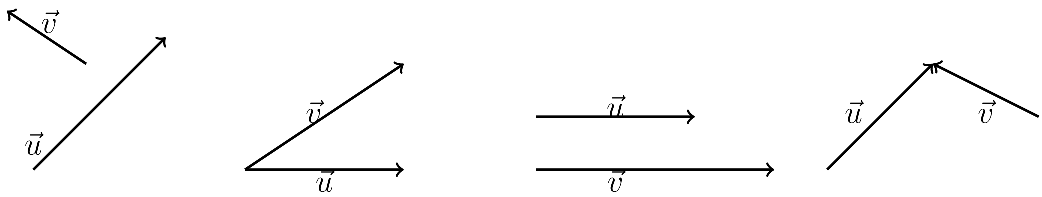


FIGURE 4.9 – Schéma du questionnaire

4.2.2.3 Analyse a priori du premier schéma du questionnaire

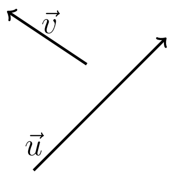


FIGURE 4.10 – Premier Schéma du questionnaire

Dans l'analyse a priori, nous avons exposé deux techniques, la relation de Chasles et la règle du parallélogramme.

Après une analyse des productions des élèves, il en ressort que tous les élèves ont proposé une réponse à cette question. Parmi ces réponses, deux élèves ont réalisé une construction erronée, Deux personnes ont réalisé une construction correcte et les six autres ont réalisé des réponses incomplètes. Les élèves ayant réalisé une réponse exacte se sont appuyés sur les techniques que nous avons proposées dans l'analyse a priori. Les techniques sur lesquelles ils se sont appuyés est la relation de Chasles et la règle du parallélogramme.

Certains élèves ayant produit une réponse erronée avait comme connaissances prédicatives la relation de Chasles et la règle du parallélogramme. Mais leurs difficultés résidaient dans le choix de la connaissance opératoire selon qu'on ait des vecteurs ayant une même origine ou lorsque l'extrémité de l'un les apprenants s'arrangent à obtenir deux vecteurs de mémé origine mais le technique mise en oe uvre est la relation de Chasles. De même lorsque l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre, ils emploient la règle du parallélogramme au lieu de la relation de Chasles.

Les élèves ayant produit des réponses incomplètes sont ceux qui ont utilisé l'une des méthodes des élèves que nous avons prédire dans l'analyse a priori. Ce qui rend leur réponse incomplète, c'est le fait qu'ils ne précisent pas le sens du vecteur-somme.

4.2.2.4 Analyse a priori du second schéma du questionnaire

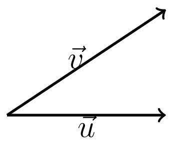


FIGURE 4.11 – Second schéma du questionnaire

Dans l'analyse a priori, nous avons exposé deux techniques de construction, la règle du parallélogramme et la relation de Chasles.

Une analyse détaillée des productions des élèves montre que tous les élèves ont proposé une réponse à cette question. Parmi ces réponses, deux élèves ont réalisé une construction erronée, trois personnes ont réalisé une construction correcte et les cinq autres ont réalisé des réponses incomplètes.

Les élèves ayant réalisé une réponse exacte se sont appuyés sur les techniques que nous avons proposé dans l'analyse a priori pour ce cas. Les techniques sur lesquelles ils se sont appuyés sont la relation de Chasles et la règle du parallélogramme. Les élèves ayant proposé une réponse incomplète ont utilisé comme technique la règle du parallélogramme et la relation de Chasles mais n'ont pas précisé le sens du vecteur-somme.

Nous constatons que la majorité des élèves a traité cette question. Presque tous ont opté pour la relation de Chasles. Mais ils ont des difficultés à préciser le sens du vecteur-somme obtenu. Certains n'ont pas précisé le sens du vecteur-somme.

4.2.2.5 Analyse a priori du troisième schéma du questionnaire

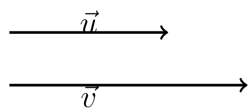


FIGURE 4.12 – Troisième schéma du questionnaire

Dans l'analyse a priori, nous avons exposé deux techniques de construction. Une technique de résolution de ce type tâche consiste à faire coïncider l'extrémité de l'un avec l'origine de l'autre. Puis le vecteur de norme égale à la somme des normes des autres vecteurs dont le sens et la direction coïncide avec l'un des autres vecteurs est le vecteur-somme recherché.

Les étapes de la construction sont les suivantes :

- Reproduire les deux vecteurs colinéaires ;
- A l'aide d'un compas, fais un écartement dont la longueur est égale à la norme de l'un des deux vecteurs ;

– En maintenant cet écartement, à l'extrémité de l'autre vecteur ; placer la pointe sèche et tracer un arc de cercle ;
– Enfin, tracer la droite passant par l'extrémité du premier vecteur et par l'extrémité du second vecteur.

Ce type de tâche est rarement rencontré dans le manuel. Les élèves doivent adapter leurs schèmes pour le résoudre. Quatre personnes ont donné des réponses fausses ce qui pourrait s'expliquer par le fait qu'ils ne sont habitués à ce type de tâche. Une seule personne a proposé une réponse juste en utilisant la technique énoncé dans l'analyse a priori. Les élèves ayant proposé des réponses incomplètes sont ceux ayant utilisé notre technique mais n'ont pas indiqué le sens de la flèche.

4.2.2.6 Analyse a priori du quatrième schéma du questionnaire

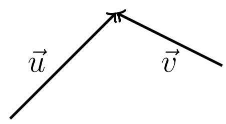


FIGURE 4.13 – Quatrième schéma du questionnaire

La résolution de ce type de tâche repose sur deux connaissances opératoires, la relation de Chasles et la règle du parallélogramme.

Après une analyse détaillée des productions des élèves, il en ressort que tous les élèves n'ont pas tous proposé une réponse à cette question. Parmi ces réponses, bon nombre ont réalisé une construction erronée.Deux personnes ont réalisé une construction incomplète. L'élève ayant réalisé une réponse incomplète s'est appuyé sur l'une des technique que nous avons proposé dans l'analyse à priori pour ce cas. La méthode sur laquelle il s'est appuyé est l'application de la relation de Chasles. Les élèves ayant produit une réponse erronée se sont référés à la relation de Chasles. Nous constatons qu'ils ont vraiment du mal à donner un sens au vecteur-somme.
En définitive, nous avons analysé les données recueillies auprès des élèves des élèves par un questionnaire. Dans ledit questionnaire, nous avons proposé des tâches dont la résolution fait appel à plusieurs techniques mobilisant les propriétés relatives aux vecteurs. L'analyse des productions des élèves s'est appuyée sur l'opérationnalité des connaissances de Gérard Vergnaud et certains axiomes d'Euclide nous ont permis de conclure que :

- Les élèves de la classe de seconde rencontrent des difficultés à énumérer les caractéristiques d'un vecteur ;
- Ils ont du mal à différencier la relation de Chasles et la règle
  du parallélogramme. Ils ne maitrisent le domaine de validité de chacune de ses méthodes. On remarque aussi que la relation de Chasles est un théorème-en-acte pour eux, ce qui pourrait s'expliquer par le fait qu'ils se sont familiarisés avec cette technique depuis la classe de 4^{e}. La règle du parallélogramme introduite en classe de 2nde n'est pas encore bien assimilée par les élèves.

Apports didactiques

Interêt de l'étude d'une transposition didactique

Nous proposons dans cette partie deux activités dans le but de pallier aux dificultés des apprenants que nous avons recencés après analyse des productions des élèves. La première activité proposée a pour but d'introduire la relation de Chasles. La seconde activité a pour but d'essayer de pallier aux difficultés des élèves en ce qui concerne le choix du représentant d'un vecteur.

Activité 1

Trois quartiers A, B et C sont représentés par les points non alignés. TAMO et son frère Toto se trouvent au quartier A et décident de se rendre au quartier C. TAMO voudrait aller directement au quartier C tandis que son frère Toto préfère passer d'abord par le quartier B. On notera $\overrightarrow{PQ}$ le chemin suivi par un individu quittant le point P pour le point Q.

1. Quel est le point de départ et le point d'arrivée de TAMO et de son frère ?
2. Représentez à l'aide d'une flèche ou de plusieurs flèches si nécessaire le chemin suivi par chaque frère.
3. Que remarquez-vous ?

Au départ, TAMO et son frère étaient accompagnés de leur ami Ali. Ce dernier voudrait aussi arriver au quartier C mais décide de passer par un quartier autre que B qu'on nomme D. Comment représenter l'itinéraire de Ali ?

NB : Le bout de la flèche indique le point d'arrêt d'un individu dans un quartier. De plus, vous tracez l'itinéraire de TAMO au rouge et celui de Toto au noir.
Cette activité vise d'une part à représenter convenablement le sens du vecteur obtenu d'une somme de deux vecteurs et d'autre part à introduire la relation de Chasles et de remarquer que cette relation se fait sur deux vecteurs dont l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine de l'autre.

Activité 2

Soit la figure ci-dessous :

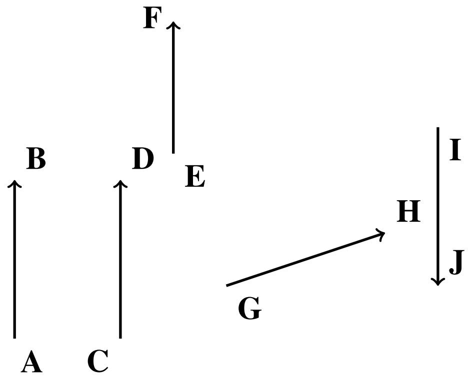


FIGURE 4.14 – Schéma de l'activité proposée

Dans la suite, l'origine de la flèche représente le point de départ et l'extrémité représente le point d'arrivée. On notera $\overrightarrow{PQ}$ le chemin suivi par le parachutiste quittant du point P pour le point Q. Un parachutiste déplace sur les différentes trajectoires de cette figure.

1. Enumérer les différents chemins suivis par le parachutiste.
2. Quels sont les chemins sur lesquels il dépense la même énergie ? Justifiez vos réponses.
3. Représentez un chemin où ce parachutiste dépense l' énergie nécessaire pour suivre le chemin $\overrightarrow{GH}$.

Conclusion et perspectives de recherches

Notre travail de recherche portait sur l'étude de la transposition didactique du concept de vecteur en classe de seconde. Il consiste à analyser le contenu du manuel scolaire CIAM dans le but de lever des ambiguïtés qui pourraient avoir un impact sur l'acquisition des connaissances par les élèves. Pour mener notre recherche, nous avons défini notre problématique en mettant en avant son contexte, son objectif, son intérêt pour notre système éducatif. Nous avons également défini quelques concepts qui entrent dans notre travail. Ensuite, nous avons présenté les travaux antérieurs portant sur le vecteur au secondaire. Nous avons également proposé un cadre théorique s'appuyant sur la théorie de la transposition didactique qui nous a fourni quelques principes de base pour l'analyse de notre manuel . La théorie de la géométrie euclidienne nous a fourni des axiomes sur lesquels nous nous sommes appuyés pour analyser les productions des élèves suite à un questionnaire que nous leur avons soumis. Cette théorie nous a permis d'identifier les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction géométrique de la somme de deux vecteurs.

les objectifs de ce questionnaire étaient d'identifier les compétences des élèves à pouvoir choisir la technique adéquate pour la construction géométrique de la somme de deux vecteurs. Pour parvenir à nos fins, nous avons présenté les astuces qui nous ont permis de construire le questionnaire.

A travers l'analyse des productions des élèves que nous avons réalisée au chapitre quatre, nous avons constaté que les élèves rencontrent toujours des difficultés lors de la construction géométrique de la somme de deux vecteurs. Ils ne prennent pas en compte toutes les caractéristiques du vecteur lorsqu'ils sont en situation de résolution d'une tâche. Ils ont aussi du mal à orienter un vecteur. Etant donné que la construction géométrique de la somme de deux vecteurs se fait par la règle du parallélogramme et la relation de Chasles, on remarque que les élèves, lorsqu'ils sont en situation ont du mal à choisir la méthode convenable.

Perspectives de recherche

Nous sommes invités au travers des résultats que nous avons obtenus à approfondir notre travail afin d'amener les élèves de la classe de seconde à rendre opératoire leur connaissance sur le relation et la règle du parallélogramme pour construire la somme de deux vecteurs. Les perspectives que nous proposons pour orienter notre travail sont les suivantes :

- Le vecteur est un outil très important en géométrie. Etant donné que la géométrie est une branche des mathématiques qui prime sur les autres dans l'enseignement au secondaire, nous exhortons les enseignants à s'informer sur les probables difficultés que peuvent rencontrer les apprenants afin de mieux préparer leurs leçons.
- Nous demandons aussi aux inspecteurs pédagogiques d'accorder un peu plus des heures sur le chapitre portant sur les vecteurs afin que les enseignants puissent eux-mêmes organiser leurs leçons.
- Nous recommandons aussi aux enseignants de revisiter l'histoire de la construction du concept de vecteur et d'étudier la transposition didactique de ce concept afin d'identifier l'origine des éventuelles erreurs des élèves pour améliorer leurs pratiques d'enseignants.
- Nous faisons une proposition d'activité sur la construction de la somme de deux vecteurs à l'aide de la relation de Chasles. Ces activités sont présentées dans la partie réservée aux apports didactiques.

Bibliographie

1. Chevallard Y. (1991) La transposition didactique, 2ème éd., Grenoble : La Pensée Sauvage.
2. Chevallard Y. (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Année 1988-1989, IMAG, pp. 211-235.
3. Cisse B.(2007) Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique lien entre mouvement de translation et translation mathématique, p.43.
4. Clerc J., Minder p., Roduit G.(2006) La transposition didactique. Université Joseph Fourier -Grenoble 1 et École normale supérieure de Vinh-Viêt-nam.
5. Tossa J., Affogon G.(2014) Décalage de l'enseignement de «direction» et de «sens» et introduction du vecteur géométrique en classe de de 4e. Cahier Didirem n07, Paris : lREM de Paris VII.
6. Patonnier S.(2006) Vecteur, objet d'enseignement multiple.Petit x, N°34, pp. 59-87.
7. Van N., Vu D., Truong C.(1990b) Livre du maÎtre-Géométrie de loe. Maison d'édition de l'éducation, Ha-nôi, Viêt-nam. Procedings of the conferenceon Universal Algebra and lattice theory,Szeged,Hungrary,june 21-25, 2012.
8. Zhuk D.(1997) Une étude institutionnelle sur l'enseignement des vecteurs au niveau secondaire au Viêtnam et en France. Ecole Normale Supérieure de Vinh, Viêt-nam.

Références de manuels et programmes

1. Programmes de mathématiques du second cycle des lycées et collèges d'enseignement général. Arrêté N°53/D/43MINEDUC/SG/IGP/ESG,12 Août 1998.
2. Collection CIAM (Collection Inter Africaine de Mathématiques) Seconde SM, EDICEF 58, rue jean-Bleuzen 92178 Vanves Cedex.

Annexes

Questionnaire

Lycée bilingue

d’Etoug-Ebe Classe : 2$^{\text{nde}}$

Durée :20 min

Exercice

- Quels sont les éléments qui caractérisent un vecteur ?
- Représentez graphiquement la somme de deux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ dans chacun des cas suivants :

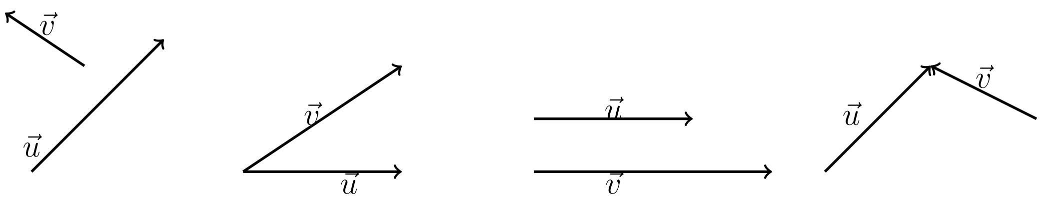


FIGURE 4.15 – Schéma du questionnaire