UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

****

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

****

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

****

HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

DOMAINE DES PRÉFÉRENCES UNIMODALES ET MANIPULATION

Mémoire de DIPES II de Mathématiques

De

SAFOKEM Adin

Licencié en Mathématiques

***Matricule :* 11Y680**

Sous la direction de :

MOYOUWOU Issofa

Maître de Conférences

Année académique : 2015-2016

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce mémoire à ma sœur **SIGNING MADELEINE Colette** pour toute l'affection que je lui porte et pour toutes les peines et sacrifices consentis pour moi.

✠ Remerciements ✠

Mes remerciements vont à l'endroit de :

♡ Mon Sauveur et Seigneur **JESUS-CHRIST** ;

♡ Mon directeur de mémoire le **Professeur MOYOUWOU Issofa** pour la pertinence du thème proposé, pour sa disponibilité et son soutien dans la réalisation de ce mémoire ;

♡ L'ensemble du **corps enseignant de l'école normale supérieure de Yaoundé** pour leur accompagnement tout au long de nos cinq années de formation ;

♡ Mon encadreur de stage Mr **NGUEFACK KENFACK Flaubert** enseignant de mathématiques au lycée de Biyem-Assi pour les conseils pratiques reçus lors du stage ;

♡ Mon père **NDADJIO André** et ma mère **FEUPE Pauline** ***épse*** **NDADJIO** pour leur soutien indéfectible et pour l'attention particulière qu'ils m'ont accordé durant leur séjour sur terre ;

♡ Ma sœur **SIGNING MADELEINE Colette** pour ses conseils, son soutien financier et pour l'attention qu'elle m'accorde ;

♡ Mr **GNIPIEZI Jean Marie** pour l'aide multiforme qu'il m'apporte, je ne cesserai de lui dire **merci** pour le savoir-être, le savoir-faire et le savoir-vivre qu'il m'a inculqué ;

♡ Mon oncle **TEDJIOTSOP Étienne** et son **épouse** pour leurs conseils ;

♡ Mes frères, mes sœurs, mes cousins et mes cousines **KENGMO NDADJIO Marcel**, **MEFEUDONG NDADJIO Victorine**, **NGOUANET FEUJIO Gislain** et **TEDJIOTSOP Flora** pour leur assistance morale ;

♡ **FOPA Gildas** pour son expertise et pour avoir accepté de lire ce travail ;

♡ Tous mes amis et camarades de promotion en particulier **FEUDJIO JEMELE, NGUEFO TAKONGMO Amour, MBATCHOU Alain, ABOUGNE Luc, DJOUMESSI Joseph, TCHUISSEU Féraud** pour l'esprit d'équipe ;

♡ Tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

SAFOKEM Adin

✠ Table des matières ✠

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Déclaration sur l'honneur **iii**

Résumé **vi**

Abstract **vii**

Introduction générale **1**

1 Préliminaires **3**

1.1 Préférences 3

1.1.1 Relations binaires 3

1.1.2 Préférences individuelles et fonctions d'utilité 11

1.1.3 Cas des préférences unimodales 16

1.2 Règles de prise de décision 21

1.2.1 Quelques classes de règles 21

1.2.2 Règles positionnelles simples et séquentielles 22

1.2.3 Jeux simples 25

1.3 Manipulation des fonctions de choix social 25

1.3.1 Notion de fonction de choix social manipulable 26

1.3.2 Notion de fonction de choix social collectivement manipulable 29

2 Non manipulabilité et unimodalité **32**

2.1 Non manipulabilité 32

2.1.1 Non manipulabilité : cas de deux options 32
2.1.2 Le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterthwaite 35
2.1.3 Restriction de domaine 36
2.2 Résultat de caractérisation de Moulin 40
2.2.1 Quelques préliminaires 40
2.2.2 Théorème de caractérisation 45

3 Implications pédagogiques **55**
3.1 Comprendre, mobiliser et construire des connaissances 55
3.2 Aptitude à mener un raisonnement logique 56
3.3 Initiation à l'usage des nouvelles technologies de l'information et de la communication 56

Conclusion et perspectives **58**

Bibliographie **59**

✠ Résumé ✠

Le théorème de Gibbard-Satterthwaite est l'un des résultats d'impossibilité en choix social : toute fonction de choix social sur le domaine universel qui est non dictatoriale et ayant au moins trois options éligibles est manipulable. En 1980, sur le domaine restreint des préférences unimodales, Moulin a proposé une solution pour échapper à cette impossibilité. Nous présentons et illustrons les notions telles que la manipulation et l'unimodalité indispensables à la compréhension des concepts de l'article de *Moulin* ainsi que la preuve du résultat d'existence des fonctions de choix sociales non manipulables et non dictatoriales définies sur le domaine restreint des préférences unimodales vérifiant à la fois la condition de Pareto et l'anonymat.

Mots clés : Préférences, Fonction de choix social, Domaines restreints, Unimodalité, Non manipulabilité.

✠ Abstract ✠

The Gibbard-Satterthwaite theorem is a well known impossibility theorem in social choice theory : any non dictatorial social choice function that admits more than two options in its range is vulnerable to strategic voting over the domain of all linear orders. Domain restriction such as single peakedness as shown by Moulin (1980), is a possible wayout. Here are presented with detailed proofs and illustrations, Moulin's result on the existence of non dictatorial and strategy-proof social choice function on single peaked domains which satisfy Pareto condition and anonymity.

Keys words : Preferences, Social choice functions, Domain restrictions, Single-peakedness, Strategy-proofness.

✠ Introduction générale ✠

La littérature sur la manipulation des règles de décision qui a suivie le théorème de **Gibbard-Satterthwaite** traite du résultat d'impossibilité évoqué par celui-ci. Si les préférences des agents sur l'ensemble des alternatives peuvent être formalisées par une relation d'ordre totale sans exception (domaine universel), alors en dehors des règles de décision dictatoriales, toutes les bonnes fonctions de choix social ou règles de décision sélectionnant une seule alternative parmi au moins trois sont manipulables : des agents peuvent, en exprimant des péférences non sincères, obtenir un résultat meilleur que celui qui serait obtenu en exprimant des préférences sincères. Plusieurs relaxations des hypothèses du théorème de **Gibbard-Satterthwaite** ont été étudiées : Tchantcho et Diffo (2009) ont restreint leur étude à la manipulation des correspondances de choix social sélectionnant un nombre fixe de candidats ; Andjiga et al. (2005, 2008) ont enrichi leurs investigations sur la manipulation par la prise en compte de l'information.

Nous nous intéressons ici à la manipulation lorsque le domaine des préférences individuelles est restreint au domaine des préférences unimodales. Les préférences unimodales sont obtenues lorsqu'on suppose que les alternatives peuvent être classé suivant un axe idéologique gauche-droite. Chaque individu définit alors sa préférence par un positionnement sur cet axe et sa proximité par rapport à chacun des candidats. Initialement introduites par Black (1948) pour garantir l'existence d'un vainqueur de Condorcet (une alternative qui est préférée à toute autre alternative par au moins la moitié des agents), les préférences unimodales deviennent célèbres dans la littérature. Notamment Dummett et Farquharson (1961) montrent l'existence, en cas d'unimodalité, des fonctions de choix social non dictatoriales et non manipulables.

Concrètement, nous portons notre attention aux travaux de Moulin (1980) qui caractérise, sur le domaine des préférences unimodales, les fonctions de choix social non manipulables et vérifiant certaines propriétés comme l'efficience et l'anonymat. L'anonymat correspond à un égal traitement des agents tandis que l'efficience requiert que toute alternative unanimement meilleure est sélectionnée comme élu. À travers des exemples détaillés, nous donnons un aperçu de la notion de préférence en choix collectif tout en nous attardant particulièrement sur les préférences unimodales que nous dénombrons ainsi que les préférences localement unimodales que nous introduisons. En dehors des résultats de Moulin (1980) que nous présentons, nous proposons aussi une caractérisation des fonctions de choix social non manipulables à l'aide de la notion de jeux simples ; ainsi qu'un dénombrement du nombre de préordres totaux sur un ensemble fini.

L'ensemble du travail est organisé en trois chapitres ainsi qu'il suit : au chapitre un intitulé préliminaires, nous rappelons quelques notions indispensables dans notre étude telles que les préférences, l'unimodalité et la manipulation. Le chapitre deux est consacré à l'étude de la non manipulabilité sur le domaine des préférences unimodales. Dans ce chapitre nous caractérisons les fonctions de choix social non manipulables en présence de deux alternatives ; puis nous présentons les résultats de Moulin caractérisant les fonctions de choix social à la fois non manipulables, efficientes et anonymes. Au chapitre trois nous donnons les implications pédagogiques de notre expérience.

Chapitre Un

Préliminaires

Ce chapitre préliminaire nous permet de présenter quelques outils nécessaires pour aborder les problèmes de choix social en général et notre thème en particulier : il s'agit entre autres des notions de relation de préférences, des préférences unimodales et des règles de prise de décision collective.

1.1. Préférences

1.1.1. Relations binaires

Soit A un ensemble non vide. Désignons par A^2 le produit cartésien $A \times A$.

Définition 1.1.1

On appelle **relation binaire sur** A toute partie $\mathcal{R}$ de $A \times A$.
Étant donnés $(a, b) \in A^2$ et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur A, on dit que :

1. a est en relation avec b et on note $a\mathcal{R}b$, si $(a, b) \in \mathcal{R}$;
2. a n'est pas en relation avec b et on note non$(a\mathcal{R}b)$, si $(a, b) \notin \mathcal{R}$;
3. a et b sont **équivalents suivant** $\mathcal{R}$ si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$.

La **partie stricte** $P_{\mathcal{R}}$ et la **partie indifférence** $I_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ sont les relations binaires sur A définies par :

1. $\forall (a, b) \in A^2, (a, b) \in P_{\mathcal{R}}$ si $a\mathcal{R}b$ et $non(b\mathcal{R}a)$;
2. $\forall (a, b) \in A^2, (a, b) \in I_{\mathcal{R}}$ si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$.

Remarque 1.1.1. $aI_{\mathcal{R}}b$ signifie que a et b sont équivalents suivant la relation $\mathcal{R}$.

Notation 1.1.1. On note par $\mathcal{B}(A)$ l'ensemble des relations binaires sur A.

Les définitions suivantes donnent certaines propriétés des relations binaires sur un ensemble.

Définition 1.1.2

Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{B}(A)$. On dit que $\mathcal{R}$ est :

(i) **réflexive** si $\forall a \in A, \quad a\mathcal{R}a$;

(ii) **symétrique** si $\forall a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;

(iii) **antisymétrique** si $\forall a, b \in A, \quad (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$;

(iv) **transitive** si $\forall a, b, c \in A, \quad (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$;

(v) **totale (ou complète)** si $\forall a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$.

Certaines relations binaires sur A vérifient plusieurs des propriétés précédentes et forment des familles particulières comme les suivantes :

Définition 1.1.3

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble A est :

(i) une **relation d'équivalence sur** A si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive ;

(ii) un **préordre** sur A si $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive ;

(iii) un **ordre** sur A si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive .

Notation 1.1.2. : On note par $\mathcal{L}$ l'ensemble des ordres totaux sur A et par $\mathcal{W}$ l'ensemble des préordres totaux sur A.

Remarque 1.1.2. Lorsque A est fini, un ordre total sur A est un classement de tous les éléments de A du premier au dernier sans ex aequo tandis qu'un préordre total sur A est un classement de tous les éléments de A du premier au dernier avec éventuellement des ex aequo.
Un ordre total $\mathcal{R}$ sur A sera alors noté $\mathcal{R} = abc...$ pour dire que suivant $\mathcal{R}$:

1. a est le premier (il est en relation avec tous les éléments de A) ;
2. b est le second (il est en relation avec tous les éléments de A autres que a) ;

3. c est le troisième (il est en relation avec tous les éléments de A autres que a et b) ;
4. et ainsi de suite jusqu'au dernier qui n'est en relation avec aucun élément de A autre que lui-même.

Notation 1.1.3. Pour tout ensemble fini E, on note par $\#E$ ou $|E|$ le nombre d'éléments de E.

Exemple 1.1.1. 1. Posons $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.

a) La relation $\mathcal{R}$ définie sur A par :

$$\forall a_j, a_k \in A, a_j \mathcal{R} a_k \iff j \leq k$$

est une relation d'ordre totale sur A appellée **ordre lexicographique sur A**.

b) Posons $A' = \mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.

La relation Q définie sur A' par :

$$\forall B, C \in A', BQC \iff |B| \geq |C|$$

est un préordre total sur A'.

2. Soit X un ensemble fini non vide. Posons $A = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

La relation $\mathcal{R}$ définie sur A par :

$$\forall B, C \in A, B\mathcal{R}C \iff |B| = |C|$$

est une relation d'équivalence sur A.

Proposition 1.1.1

Si A est un ensemble fini non vide de cardinal m, alors le nombre total des ordres totaux sur A est $m!$.

Preuve. Comme A est fini, notons qu'un ordre total sur A est un classement de tous les éléments de A du premier au dernier sans ex aequo. Par conséquent, un ordre total sur A est une permutation des éléments de A. Il y a donc exactement $m!$ ordres totaux possibles sur A. ■

Définition 1.1.4

Étant donnés une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A et a un élement de A, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $\widetilde{a} = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}$.
La relation binaire $\widetilde{\mathcal{R}}$ est définie sur l'ensemble $A/\mathcal{R}$ des classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ par

$$\forall X, Y \in A/\mathcal{R}, (X\widetilde{\mathcal{R}}Y \text{ si } \exists a \in X, \exists b \in Y/a\mathcal{R}b).$$

En utilisant les propriétés d'une relation d'équivalence, on montre que la relation $\widetilde{\mathcal{R}}$ est bien définie sur $A/\mathcal{R}$. Notamment on a la propriété suivante :

Proposition 1.1.2

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A, alors $\forall X \in A/\mathcal{R}, \forall x \in X, X = \widetilde{x}$.

Preuve. Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur A et $X \in A/\mathcal{R}$. Alors $\exists a \in A$ tel que $X = \widetilde{a}$.
Soit $x \in X$, montrons que $X = \widetilde{x}$. Soit $y \in A$.
-Si $y \in X$, alors $y\mathcal{R}a$, or $x \in X = \widetilde{a}$ donc $x\mathcal{R}a$ et on a également $a\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est réflexive.
Ainsi $y\mathcal{R}a$ et $a\mathcal{R}x$, donc $y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive. Par conséquent $y \in \widetilde{x}$. Donc $X \subseteq \widetilde{x}$.
-Si $y \in \widetilde{x}$, alors $y\mathcal{R}x$ or $x\mathcal{R}a$ (car $x \in X = \widetilde{a}$). Donc $y\mathcal{R}a$ car $\mathcal{R}$ est transitive. Par conséquent $y \in X = \widetilde{a}$. Donc $\widetilde{x} \subseteq X$. D'où $X = \widetilde{x}$. ■

Définition 1.1.5

On appelle partition de A toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de A vérifiant :

a) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$;

b) $\forall i, j \in I,\ A_i \cap A_j \neq \emptyset \Longrightarrow A_i = A_j$;

c) $\cup_{i\in I} A_i = A$.

Proposition 1.1.3

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur A.

1. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors l'ensemble des classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est une partition de A.
2. Si $\mathcal{R}$ est un préordre total, alors la relation $\widehat{\mathcal{R}}$ définie sur $A/I_{\mathcal{R}}$ par

$$\forall X, Y \in A/I_{\mathcal{R}}, (X\widehat{\mathcal{R}}Y \text{ si } \exists a \in X, \exists b \in Y/a\mathcal{R}b)$$

   est un ordre total sur $A/I_{\mathcal{R}}$.

Preuve. 1. Supposons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

On a $A/\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$ par définition de $A/\mathcal{R}$.

a) Soit $X \in A/\mathcal{R}$, alors $\exists a \in A$ tel que $X = \widetilde{a}$.

Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, alors $a\mathcal{R}a$.

Ainsi $a \in X$. Donc $X \neq \emptyset$.

b) Soient $X, Y \in A/\mathcal{R}$ tels que $X \cap Y \neq \emptyset$.

Soit $c \in X \cap Y$, montrons que $X = Y$. Comme $c \in X \cap Y$, alors $c \in X$ et d'après la proposition 1.1.2, $X = \widetilde{c}$. De même comme $c \in X \cap Y$, alors $c \in Y$ et d'après la proposition 1.1.2, $Y = \widetilde{c}$. D'où $X = Y$.

c) On a $\forall X \in A/\mathcal{R}, X \subseteq A$, donc $\cup_{X\in A/\mathcal{R}} X \subseteq A$.

Soit $a \in A$, alors $a \in \widetilde{a}$ car $\mathcal{R}$ est réflexive.

Ainsi, $a \in \cup_{X\in A/\mathcal{R}} X$. Donc $A \subseteq \cup_{X\in A/\mathcal{R}} X$.

D'où $A = \cup_{X\in A/\mathcal{R}} X$.

Donc l'ensemble des classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est une partition de A.

2. Supposons que $\mathcal{R}$ est un préordre total, et montrons que la relation $\widehat{\mathcal{R}}$ définie sur $A/I_{\mathcal{R}}$ par

$$\forall X, Y \in A/I_{\mathcal{R}}, (X\widehat{\mathcal{R}}Y \text{ si } \exists a \in X, \exists b \in Y/a\mathcal{R}b).$$

est un ordre total sur $A/I_{\mathcal{R}}$.

L'ensemble $A/I_{\mathcal{R}}$ est bien défini car $I_{\mathcal{R}}$ est une relation d'équivalence sur A, par conséquent $\widehat{\mathcal{R}}$ est une relation sur $A/I_{\mathcal{R}}$ qui est bien définie.

Soit $X \in A/I_{\mathcal{R}}$. Alors $X \neq \emptyset$, donc $\exists a \in X/X = \widetilde{a}$. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, on obtient $a\mathcal{R}a$; ainsi $X\widehat{\mathcal{R}}X$. Donc $\widehat{\mathcal{R}}$ est réflexive.

Soient $X, Y, Z \in A/I_{\mathcal{R}}$ tels que $X\widehat{\mathcal{R}}Y$ et $Y\widehat{\mathcal{R}}Z$. Alors $\exists a \in X, \exists b, c \in Y$ et $\exists d \in Z/a\mathcal{R}b$ et $c\mathcal{R}d$.

On a : $b, c \in Y$ donc $b\mathcal{R}c$ et $c\mathcal{R}b$ car $Y \in A/I_{\mathcal{R}}$.

Comme $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$, alors $a\mathcal{R}c$ car $\mathcal{R}$ est transitive.

De même comme $a\mathcal{R}c$ et $c\mathcal{R}d$, alors $a\mathcal{R}d$ car $\mathcal{R}$ est transitive.

Par conséquent $a \in X, d \in Z$ et $a\mathcal{R}d$. Donc $X\widehat{\mathcal{R}}Z$.

D'où $\widehat{\mathcal{R}}$ est transitive.

Soient $X, Y \in A/I_{\mathcal{R}}$ tels que $X\widehat{\mathcal{R}}Y$ et $Y\widehat{\mathcal{R}}X$.

Alors $\exists a, b \in X$ et $\exists c, d \in Y/a\mathcal{R}c$ et $d\mathcal{R}b$.

Par conséquent on a $X = \widetilde{a} = \widetilde{b}$ et $Y = \widetilde{c} = \widetilde{d}$.

$a\mathcal{R}c \Longrightarrow X \subseteq Y$, de même $d\mathcal{R}b \Longrightarrow Y \subseteq X$.

Donc $X = Y$. D'où $\widehat{\mathcal{R}}$ est antisymétrique.

Soient $X, Y \in A/I_{\mathcal{R}}$, alors $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$. Soient $a \in X$ et $b \in Y$, alors $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$ car $\mathcal{R}$ est totale. Ainsi $X\widehat{\mathcal{R}}Y$ ou $Y\widehat{\mathcal{R}}X$. Donc $\widehat{\mathcal{R}}$ est totale.

D'où $\widehat{\mathcal{R}}$ est un ordre total sur $A/I_{\mathcal{R}}$.

■

Dans toute la suite, nous noterons un préordre total $\mathcal{R}$ sur A par

$$\mathcal{R} = C_1C_2...C_k$$

pour dire que

1. Les classes d'équivalence suivant $I_{\mathcal{R}}$ sont $C_1, C_2, ..., C_k$;
2. C_1 est la classe des premiers ex aequo ;
3. C_2 est la classe des deuxièmes ex aequo ;
4. ainsi de suite jusqu'à C_k qui est la classe des derniers ex aequo.

Proposition 1.1.4

Soit C une partition de A en k éléments.
Le nombre de préordres totaux sur A dont l'ensemble des classes d'équivalence coïncide avec C est donné par $k!$.

Preuve. D'après la proposition 1.1.3., deux préordres totaux sur A dont les ensembles respectifs des classes d'éléments équivalents donnent C diffèrent suivant leurs classements des différentes classes d'équivalence $B \in C$; ces classements étant des permutations des éléments de C, on obtient le résultat.

$\blacksquare$

Exemple 1.1.2. Posons $A = \{a, b, c\}$ et $C = \{\{a, b\}, \{c\}\}$. Alors les 2 préordres totaux sur A dont l'ensemble des classes d'équivalence coïncide avec C sont

$$\mathcal{R} = \{a, b\}\{c\} \text{ et } \mathcal{R}' = \{c\}\{a, b\}.$$

Étant donnée une collection d'entiers naturels non nuls $c = (c_1, c_2, ..., c_k)$, posons

$$[c] = \left\{c_j, 1 \leq j \leq k\right\} \text{ et } |c^u| = \left|\left\{j \in \{1, 2, ..., k\} : c_j = u\right\}\right| \text{ pour tout } u \in [c].$$

L'ensemble $[c]$ donne tous les différents entiers naturels qui apparaissent dans c et pour chaque entier u ainsi obtenu, $|c^u|$ est le nombre de composantes de c égales à u. Le nombre de permutation distinctes des composantes de c est donné à partir des formules d'anagrammes d'un mot par

$$ana(c) = \frac{k!}{|c^{u_1}|!\,|c^{u_2}|!...\,|c^{u_t}|!} \text{ où } [c] = \{u_1, u_2, ..., u_t\}.$$

Proposition 1.1.5

Soient k un entier naturel non nul et $c = \left(c_j\right)_{1 \leq j \leq k}$ un $k-$uplet d'entiers naturels non nuls de somme m.
Alors le nombre total de préordres totaux $\mathcal{R}$ sur A tels que $\forall a \in A, |\overline{a}| \in [c]$ et pour tout $j \in \{1, 2, ..., k\}$, il existe exactement $|c^{c_j}|$ classes distinctes de cardinal c_j est donné par

$$ana(c)\frac{m!}{|c_1|!\,|c_2|!...\,|c_k|!}.$$

Preuve. Un préordre total $\mathcal{R}$ sur A tel que $\forall a \in A, |\overline{a}| \in [c]$ et pour tout $j \in \{1, 2, ..., k\}$, il existe exactement $|c^{c_j}|$ classes distinctes de cardinal c_j est obtenu pour chaque permutation de c en chosisissant c_1 éléments de A, puis c_2 éléments de A parmi les éléments de A restants, ainsi de suite jusqu'aux c_k derniers éléments restants. Le nombre de tels choix est exactement le nombre d'anagrammes d'un mot de m lettres formé à partir de k lettres distinctes en nombres respectifs c_1, c_2, ..., c_k. C'est-à-dire

$$\frac{m!}{|c_1|!\,|c_2|!...\,|c_k|!}.$$

Puisque le nombre de permutations distinctes de c est $ana(c)$, alors on obtient le résultat. $\blacksquare$

Exemple 1.1.3. Posons $A = \{a, b, c, \}$ et $c = (2, 1)$. Alors les seuls préordres totaux sur A dont l'ensemble des classes d'équivalence comprend une classe à 2 éléments et une autre à un seul élément sont au nombre de

$$\frac{2!}{1!1!}\frac{3!}{2!1!} = 6 \text{ sachant que } c^2 = 1 \text{ et } c^1 = 1.$$

et listés ci-dessous

$$\begin{aligned} R_1 &= \{a, b\}\{c\}, R_2 = \{c\}\{a, b\}, \\ R_3 &= \{a, c\}\{b\}, R_4 = \{b\}\{a, c\}, \\ R_5 &= \{c, b\}\{a\}, R_6 = \{a\}\{c, b\}. \end{aligned}$$

Posons

$$D_m = \left\{c : \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } c \in \mathbb{N}^{*k}, \sum_{j=1}^{k} c_j = m \text{ et } c_j \geq c_{j+1}, j = 1, 2, ..., k-1\right\}.$$

l'ensemble de toutes les décompositions possibles de m en des entiers de somme m listés dans l'ordre décroissant. Pour tout $c = (c_1, c_2, ..., c_k) \in D_m$, posons $|c| = k$ le nombre de composantes de k. Alors

Proposition 1.1.6

Le nombre des préordres totaux sur A est donné par

$$P_m = \sum_{c \in D_m} ana(c) \frac{m!}{|c_1|!\,|c_2|!...\,|c_k|!}.$$

Preuve. La preuve découle de la Proposition 1.1.5. en remarquant que pour tout préordre total $\mathcal{R}$ sur A, il existe un seul élément c de D_m (les composantes de c sont ordonnées dans l'ordre décroissant) tel que $\mathcal{R} = C_1C_2...C_k$ vérifiant $\forall a \in A, |\widehat{a}| \in [c]$ et il existe exactement $|c^{c_j}|$ classes distinctes de cardinal c_j suivant $\mathcal{R}$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., k\}$. ■

Exemple 1.1.4. Posons $A = \{a, b, c\}$. Alors $m = 3$ et

$$D_m = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\} \text{ et } P_3 = \frac{1!}{1!}\frac{3!}{3!} + \frac{2!}{1!1!}\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{3!}\frac{3!}{1!1!1!} = 13$$

Exemple 1.1.5. Posons $A = \{a, b, c, d\}$. Alors $m = 4$, $D_m = \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ et

$$P_4 = \frac{1!}{1!}\frac{4!}{4!} + \frac{2!}{1!1!}\frac{4!}{3!1!} + \frac{2!}{2!}\frac{4!}{2!2!} + \frac{3!}{2!1!}\frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{4!}\frac{4!}{1!1!1!1!} = 75.$$

1.1.2. Préférences individuelles et fonctions d'utilité

Préférences individuelles

On considère :

➢ Un ensemble N fini et non vide dont les éléments sont appelés votants ou électeurs. Un votant peut être par exemple un décideur, un expert, ... Les votants représentent des personnes physiques ou morales dont les avis comptent dans un processus de prise de décision. Ainsi, un électeur peut être un individu, un groupe d'individus, un pays, un parti politique, ...

Dans la suite, $N = \{1, 2, ..., n\}$ où n est le nombre d'éléments de $N, n \geq 2$.

➢ Un ensemble A fini non vide dont les éléments sont appelés candidats ou options. Les candidats peuvent être des projets, des allocations, des états sociaux, ... Les éléments de A représentent des objets proposés au choix des votants.

Dans la suite, nous désignons par m le nombre d'éléments de A.

Dans le cadre de notre travail, nous supposons que les préférences individuelles sur les candidats peuvent être formalisées par les relations binaires sur A. Nous noterons par $\mathcal{R}^i$ la relation de préférence du votant i sur les candidats.

Étant donnés $i \in N, \mathcal{R}^i \in \mathcal{B}(A)$ et $a, b \in A$,

- $a\mathcal{R}^i b$ (ou tout simplement $a \succeq_i b$ si aucune confusion n'est possible), signifie que pour l'électeur i, le candidat a est au moins aussi bon que b ; ou encore que le votant i préfère (au sens large) a à b.

- $a\mathcal{P}^i b$ (ou tout simplement $a \succ_i b$ si aucune confusion n'est possible), signifie que pour l'électeur i, le candidat a est strictement plus bon que b ; ou encore que le votant i préfère (au sens stricte) a à b.

1. La partie stricte de $\succeq_i$ notée $\succ_i$ est définie par :

$$\forall a, b \in A \ (a \succ_i b) \text{ si } [a \succeq_i b \text{ et } non(b \succeq_i a)].$$

   On dit alors que l'électeur i préfère strictement a à b.

2. L'indifférence de $\succeq_i$ notée $\sim_i$ est définie par :

$$(a \sim_i b) \text{ si } (a \succeq_i b \text{ et } b \succeq_i a).$$

Dans ce cas, on dit que l'électeur i est indifférent entre a et b ou que a et b sont des ex aequos pour i.

Définition 1.1.6

Soit D une partie non vide de $\mathcal{B}(A)$.
On appelle profil de préférences de D, toute collection $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^i)_{i\in N} \in D^n$ où le terme $\mathcal{R}^i$ représente la relation de préférences de l'individu i.
En particulier, si $D \subseteq \mathcal{L}$, on dit que $\mathcal{R}$ est un profil d'ordres totaux et si $D \subseteq \mathcal{W}$, on dit que $\mathcal{R}$ est un profil de préordres totaux.

$\mathcal{L}^N$ désigne l'ensemble des profils de préférences d'ordres totaux sur A.
$\mathcal{W}^N$ désigne l'ensemble des profils de préférences de préordres totaux sur A.

Notions de fonction d'utilité

Définition 1.1.7

On appelle **fonction d'utilité** sur un ensemble non vide B toute application

$$\begin{array}{rccc} u: & B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & u(a) \end{array}.$$

Si u est une fonction d'utilité sur B, alors pour tout $a \in B, u(a)$ représente (ou mesure) la satisfaction que l'objet a procure. Si A est un ensemble de biens et a un élément de A, alors $u(a)$ représente la satisfaction procurée par le bien a.

Exemple 1.1.6. : Si $B = \{\text{ananas, orange, mangue, papaye, pastèque}\}$, alors l'application

$$\begin{array}{rccl} u: & B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & u(a) = \begin{cases} 6 \text{ si } a = \text{ananas} \\ 5 \text{ si } a = \text{orange} \\ 8 \text{ si } a = \text{pastèque} \\ 0 \text{ si } a = \text{mangue} \\ 1 \text{ si } a = \text{papaye} \end{cases} \end{array}$$

est une fonction d'utilité sur B.

Définition 1.1.8

Soit u une fonction d'utilité sur B.

On appelle **relation binaire associée à** u, la relation notée $\mathcal{R}_u$ et donnée par :

$$\forall a, b \in B, \quad a\mathcal{R}_u b \Longleftrightarrow u(a) \geq u(b).$$

Proposition 1.1.7

Si u est une fonction d'utilité sur B, alors la relation binaire $\mathcal{R}_u$ associée à u est un préordre total sur B.

Preuve. ➢ Il est clair que $\mathcal{R}_u$ est une relation binaire sur B.

➢ Soit $a \in B$, alors $u(a) \geq u(a)$, ainsi $a\mathcal{R}_u a$.

Donc $\mathcal{R}_u$ est réflexive.

➢ Soient $a, b, c \in B$ tels que $a\mathcal{R}_u b$ et $b\mathcal{R}_u c$, alors $u(a) \geq u(b)$ et u$(b) \geq u(c)$, par conséquent $u(a) \geq u(c)$ car $\geq$ est transitive sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $a\mathcal{R}_u c$, donc $\mathcal{R}_u$ est transitive.

➢ Soient $a, b \in B$. Comme $\geq$ est totale sur $\mathbb{R}$, alors $u(a) \geq u(b)$ ou $u(b) \geq u(a)$; c'est à dire

$a\mathcal{R}_u b$ ou $b\mathcal{R}_u a$. Donc $\mathcal{R}_u$ est totale.

D'où $\mathcal{R}_u$ est un préordre total sur B. ■

Nous dirons que la fonction d'utilité u représente la relation $\mathcal{R}_u$. De manière plus formelle, nous donnons ci-dessous la définition de relation de préférence représentable par une fonction d'utilité.

Définition 1.1.9

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur B est représentable par une fonction d'utilité s'il existe une fonction d'utilité u sur B telle que :

$$\forall a, b \in B, \quad a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow u(a) \geq u(b); \text{ c'est-à-dire } \mathcal{R} = \mathcal{R}_u.$$

Remarque 1.1.3. 1. Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire sur A et $a, b \in A$ tels que $a \sim_i b$; si $\mathcal{R}$ est représentable par une fonction d'utilité u sur A, alors $u(a) = u(b)$.

2. Supposons que $A = \{a, b, c\}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur A par :

$$a \succ_{\mathcal{R}} b, b \succ_{\mathcal{R}} c \text{ et } c \succ_{\mathcal{R}} a.$$

Si $\mathcal{R}$ était représentable par une fonction d'utilité u, alors on aurait :

$$u(a) > u(b), u(b) > u(c) \text{ et } u(c) > u(a), \text{donc } u(a) > u(a) \text{ impossible.}$$

La relation $\mathcal{R}$ n'est donc pas représentable par une fonction d'utilité sur A.

Le second point de la remarque précédente nous amène à nous poser la question de savoir s'il existe une condition aussi bien nécessaire que suffisante pour qu'une relation sur A soit représentable par une fonction d'utilité sur A. Le résultat ci-dessous, dû à Debreu G. (1954), répond à cette question lorsque A est fini.

Théorème 1.1.1. *Si A est un ensemble fini non vide, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur A est représentable par une fonction d'utilité sur A si et seulement si elle est un préordre total sur A.*

Preuve. Soient A est un ensemble fini non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur A.

$\Longrightarrow$) Supposons que $\mathcal{R}$ est représentable par une fonction d'utilité u sur A.
Alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}_u$ et d'après la proposition 1.1.6, $\mathcal{R}$ est un préordre total sur A.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\mathcal{R}$ est un préordre total sur A et construisons une fonction d'utilité sur A représentant $\mathcal{R}$.

Notons $\forall a \in A, \widetilde{a} = \{x \in A / a\mathcal{R}x\}$ et $f(a) = \#\widetilde{a}$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & f(a) = \#\widetilde{a} \end{array}$$

est bien définie (car A est fini) et f est une fonction d'utilité sur A.

Montrons que f représente $\mathcal{R}$ sur A c'est à dire $\forall a, b \in A,\ \ a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow f(a) \geq f(b)$.
Soient $a, b \in A$.

- Supposons que $a\mathcal{R}b$.

Considérons $x \in \widetilde{b}$, on a : $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}x$; ainsi $a\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive.
Donc $x \in \widetilde{a}$. Nous venons de montrer que $\widetilde{b} \subseteq \widetilde{a}$. Par conséquent $\#\widetilde{a} \geq \#\widetilde{b}$, c'est à dire $f(a) \geq f(b)$.

- Supposons que $f(a) \geq f(b)$ et $non(a\mathcal{R}b)$.

Comme $\mathcal{R}$ est totale, alors $b\mathcal{R}a$ et on a de façon analogue que $\widetilde{a} \subseteq \widetilde{b}$, par conséquent $\#\widetilde{a} \leq \#\widetilde{b}$.

On obtient $\#\widetilde{a} \leq \#\widetilde{b}$ et $\#\widetilde{b} \leq \#\widetilde{a}$, c'est à dire $\#\widetilde{a} = \#\widetilde{b}$ et comme $\widetilde{a} \subseteq \widetilde{b}$, on déduit que $\widetilde{a} = \widetilde{b}$ absurde car $a \in \widetilde{a}$ et $a \notin \widetilde{b}$ (puisqu'on a $non(a\mathcal{R}b)$).

D'où f est une fonction d'utilité sur A qui représente $\mathcal{R}$.

■

Proposition 1.1.8

Si A est un ensemble fini non vide, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur A est représentable par une fonction d'utilité **injective** sur A si et seulement si $\mathcal{R}$ est un ordre total sur A.

Preuve. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur A.

$\Longrightarrow$) Supposons qu'il existe une fonction d'utilité u injective sur A telle que :

$$\forall a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow u(a) \geq u(b)$$

Alors d'après la proposition 1.1.7, $\mathcal{R}$ est un préordre total sur A .

Soient $a, b \in A$ tels que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, Alors $u(a) \geq u(b)$ et $u(b) \geq u(a)$, c'est à dire $u(a) = u(b)$, par conséquent $a = b$ car u injective.

Ainsi $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale sur A.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale sur A. Alors $\mathcal{R}$ est un préordre total sur A et d'après le théorème 1.1.1, il existe une fonction d'utilité u sur A telle que :

$$\forall a, b \in A, \quad a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow u(a) \geq u(b)$$

Montrons que u est injective.

Soient $a, b \in A$ tels que $u(a) = u(b)$, alors $u(a) \geq u(b)$ et $\mathrm{u}(b) \geq u(a)$, c'est à dire $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$.
On obtient $a = b$ car $\mathcal{R}$ est antisymétrique, ainsi u est injective.

Donc u est une fonction d'utilité sur A injective et $\mathcal{R}$ est représentable par u. ■

Proposition 1.1.9

Si $\mathcal{R}$ est représentable par une fonction d'utilité u sur A, alors il existe une infinité de fonctions d'utilité sur A représentant $\mathcal{R}$.

Preuve. La preuve se fait en deux étapes.

1. Soient g une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et u une fonction d'utilité sur A représentant $\mathcal{R}$.
   L'application $g \circ u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie. De plus, $\forall a, b \in A$, on a
   $a \geq_{\mathcal{R}} b$ équivaut à $u(a) \geq u(b)$, ce qui équivaut à $g[u(a)] \geq g[u(b)]$ (puisque g est strictement croissante), ce qui équivaut à $g \circ u(a) \geq g \circ u(b)$.
   Donc si u est une fonction d'utilité représentant $\mathcal{R}$ et g une application strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors $g \circ u$ est aussi une fonction d'utilité représentant $\mathcal{R}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes réelles avec $a > 0$, alors l'application
   $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = ax + b \end{array}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc on obtient un ensemble infini de fonctions d'utilité représentant $\mathcal{R}$ en considérant $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

■

1.1.3. Cas des préférences unimodales

Black (1948) propose la condition d'unimodalité qui sera reprise plus tard par Arrow (1951). On suppose ici que A contient m candidats avec $m \geq 3$.

Notion de préférence unimodale

Définition 1.1.10

Soit $\mathcal{R}^0 = a_1 a_2 ... a_m$ un ordre total sur $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.
Un ordre total $\mathcal{R}$ est dit **unimodal par rapport à** $\mathcal{R}^0$ si pour tout a_i, a_j et $a_k \in A$ avec $i < j < k$, a_j n'est jamais surclassé par a_i et a_k simultanément. C'est-à-dire :

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, ..., m\} : i < j < k, non(a_i \succ_{\mathcal{R}} a_j \text{ et } a_k \succ_{\mathcal{R}} a_j).$$

Un profil $\mathcal{R}$ est **unimodal** s'il existe un ordre de référence par rapport auquel tous les ordres de préférences du profil $\mathcal{R}$ sont unimodaux.

Exemples

1. **Pour** $m = 3$ **et** $A = \{a, b, c\}$, les seuls ordres unimodaux par rapport à abc sont abc, bca, bac et cba.
2. **Pour** $m = 4$ **et** $A = \{a, b, c, d\}$,

   (i) les seul ordres unimodaux par rapport à $abcd$ sont

   $$abcd, bacd, bcad, cbad, bcda, cbda, cdba \text{ et } dcba.$$

   (ii) le profil $\mathcal{R} = (bacd, dabc, bcad)$ est unimodal (par rapport à $cbad$)

   (iii) le profil $Q = (abcd, bcda, cdab)$ n'est pas unimodal.
   En effet si Q est unimodal par rapport à $\mathcal{R}^o = a_1a_2a_3a_4$ avec $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{a, b, c, d\}$ deux à deux distints, alors a_3 n'est jamais dernier, par conséquent $a_3 \neq a, a_3 \neq b, a_3 \neq d$ car a est surclassé dans Q^2, b est surclassé dans Q^3, d est surclassé dans Q^1 ; donc $a_3 = c$.
   De même on montre que $a_2 = c$, par conséquent $a_2 = a_3$, ce qui est absurde.

La proposition suivante donne le nombre total des ordres totaux unimodaux par rapport à un ordre de référence donné.

Proposition 1.1.10

Si $\mathcal{R}$ est un ordre unimodal sur A, il y a exactement 2^{m-1} ordres unimodaux par rapport à $\mathcal{R}$.

Preuve. Sans nuire à la généralité, supposons que $\mathcal{R} = a_1a_2...a_m$. En queue d'un ordre unimodal par rapport à $\mathcal{R}$, se trouve soit a_1, soit a_m ; si tel n'est pas le cas cet élément sera surclassé par a_1 et a_m. Il y a donc deux possibilités pour le choix du dernier candidat. Supposons fixé ce dernier candidat, l'avant dernier candidat ne peut être alors qu'une des deux extrémités de $\mathcal{R}$ amputé du dernier candidat de cet ordre. Il y a donc deux possibilités pour le choix de l'avant dernier candidat. Ainsi il y a 2×2 possibilités d'avoir l'avant dernier et le dernier candidat de l'ordre. On a ainsi à chaque étape 2 possibilités et en tout $(m - 1)$ étapes entraînant ainsi un choix car la dernière possibilité est fixée. Il y a donc 2^{m-1} ordres totaux unimodaux par rapport à $\mathcal{R}$. ■

Proposition 1.1.11

Soient $\mathcal{R}^0 = a_1a_2...a_m$ et $\mathcal{R}$ deux ordres totaux sur A. Alors il y a équivalence entre :

(a) $\mathcal{R}$ est unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$

(b) $\exists ! k \in \{1, 2, ..., m\} / \forall i, j \in \{1, 2, ..., m\} : a_k \mathcal{R} a_i$ et $[(i < j < k$ ou $k < j < i) \Longrightarrow a_k \mathcal{R} a_j \mathcal{R} a_i]$

Preuve. $(a) \Longrightarrow (b)$. Supposons que $\mathcal{R}$ est unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$.

Existence de k

Soit a_{k_0} le candidat classé premier suivant $\mathcal{R}$.

Soient $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ tels que $i < j < k_0$ ou $k_0 < j < i$.

Alors $a_{k_0} \mathcal{R} a_j$ et $a_{k_0} \mathcal{R} a_i$ car a_{k_0} est le candidat classé premier suivant $\mathcal{R}$.

Comme $\mathcal{R}$ est totale, alors $a_i \mathcal{R} a_j$ ou $a_j \mathcal{R} a_i$.

Si $a_i \mathcal{R} a_j$, alors a_j est surclassé dans $\mathcal{R}$ par a_i et a_{k_0} ; absurde.

Donc $a_j \mathcal{R} a_i$.

Ainsi $a_{k_0} \mathcal{R} a_j$ et $a_j \mathcal{R} a_i$, c'est à dire $a_{k_0} \mathcal{R} a_j \mathcal{R} a_i$.

Il suffit de prendre $k = k_0$.

Unicité de k

Supposons qu'il existe k et $k^{'} \in \{1, 2, ..., m\}$ vérifiant (b).

Alors $a_k \mathcal{R} a_{k'}$ et $a_{k'} \mathcal{R} a_k$.

Comme $\mathcal{R} \in \mathcal{L}$, alors $a_k = a_{k'}$; donc $k = k^{'}$.

D'où l'unicité de k.

$(b) \Longrightarrow (a)$. Supposons que $\exists ! k \in \{1, 2, ..., m\} / \forall i, j \in \{1, 2, ..., m\} : a_k \mathcal{R} a_i$ et $(i < j < k$ ou $k < j < i) \Longrightarrow a_k \mathcal{R} a_j \mathcal{R} a_i$ et $\mathcal{R}$ n'est pas unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$.

Alors $\exists i_0, j_0, k_0 \in \{1, 2, ..., m\}$ avec $i_0 < j_0 < k_0$ tel que $a_{k_0} \succ_{\mathcal{R}} a_{j_0}$ et $a_{i_0} \succ_{\mathcal{R}} a_{j_0}$.

comme $\mathcal{R} \in \mathcal{L}$, alors $\mathcal{R}|\{a_{i_0}, a_{j_0}, a_{k_0}\} = a_{k_0}a_{i_0}a_{j_0}$ ou $\mathcal{R}|\{a_{i_0}, a_{j_0}, a_{k_0}\} = a_{i_0}a_{k_0}a_{j_0}$

Si $k = k_0$, alors $i_0 < j_0 < k_0$ ce qui entraîne $a_{k_0} \mathcal{R} a_{j_0} \mathcal{R} a_{i_0}$, on obtient $a_{j_0} \succ_{\mathcal{R}} a_{i_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{i_0}$; absurde.

Si $k = i_0$, alors $i_0 < j_0 < k_0$ ce qui entraîne $a_{i_0} \mathcal{R} a_{j_0} \mathcal{R} a_{k_0}$, on obtient $a_{j_0} \succ_{\mathcal{R}} a_{k_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{k_0}$; absurde.

Si $k_0 < k$, alors $i_0 < j_0 < k_0 < k$ ce qui entraîne $a_k \mathcal{R} a_{k_0} \mathcal{R} a_{j_0} \mathcal{R} a_{i_0}$, on obtient $a_{j_0} \succ_{\mathcal{R}} a_{i_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{i_0}$; absurde.

Si $k < i_0$, alors $k < i_0 < j_0 < k_0$ ce qui entraîne $a_k \mathcal{R} a_{i_0} \mathcal{R} a_{j_0} \mathcal{R} a_{k_0}$, on obtient $a_{j_0} >_{\mathcal{R}} a_{k_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{k_0}$; absurde.

Si $i_0 < k < j_0 < k_0$, alors $k < j_0 < k_0$ ce qui entraîne $a_k \mathcal{R} a_{j_0} \mathcal{R} a_{k_0}$, on obtient $a_{j_0} >_{\mathcal{R}} a_{k_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{k_0}$; absurde.

Si $i_0 < j_0 < k < k_0$, alors $i_0 < j_0 < k$ ce qui entraîne $a_k \mathcal{R} a_{j_0} \mathcal{R} a_{i_0}$, on obtient $a_{j_0} >_{\mathcal{R}} a_{i_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{i_0}$; absurde.

Si $k = j_0$, alors $i_0 < j_0 < k_0$ ce qui entraîne $a_{j_0} \mathcal{R} a_{i_0}$ et $a_{j_0} \mathcal{R} a_{k_0}$, on obtient $a_{j_0} >_{\mathcal{R}} a_{k_0}$ car $a_{j_0} \neq a_{k_0}$; absurde.

■

Unimodalité locale : une extension de la notion d'unimodalité

Associons à chaque ordre total une fonction d'utilité. Dans le cas des préférences unimodales par rapport à un ordre fixé $\mathcal{R}^0$, la proposition 1.1.10 met en évidence l'existence d'un unique candidat a_k tel que l'utilité est maximale pour a_k ; puis décroît pour tout autre candidat a_j au fur et à mesure que le nombre de candidats entre a_k et a_j dans l'ordre de référence $\mathcal{R}^0$ augmente. L'unimodalité locale suit la même logique avec la possibilité que l'utilité soit maximale pour plusieurs candidats à condition que ceux-ci soient consécutifs suivant $\mathcal{R}^0$.

Définition 1.1.11

Soient $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}, \mathcal{R}^0 = a_1 a_2 ... a_m$

(a) $\forall i, j \in \{1, 2, ..., m\} : a_k \mathcal{R} a_i$ et $[(k \leq j \leq k' \text{ ou } k' \leq j \leq k) \Longrightarrow a_k \mathcal{R} a_j \mathcal{R} a_{k'}]$;

(b) $\forall i, j \in \{1, 2, ..., m\} : (i < j < k \leq k' \text{ ou } k \leq k' < j < i) \Longrightarrow a_{k'} \mathcal{R} a_k >_{\mathcal{R}} a_j >_{\mathcal{R}} a_i$.

Exemple 1.1.7. **Pour** $m = 3$ **et** $A = \{a, b, c\}$, les seuls préordres localement unimodaux par rapport à abc sont $abc, bca, bac, cba, (bc)a, b(ac)$ et (abc).

Proposition 1.1.12

Toute préférence unimodale par rapport à $\mathcal{R}^0$ est localement unimodale par rapport à $\mathcal{R}^0$.

Preuve. Soit $\mathcal{R}$ une préférence unimodale par rapport à $\mathcal{R}^0$. Alors $\mathcal{R} \in \mathcal{L}$.

D'après la proposition 1.1.11, $\exists k_0 \in \{1, 2, ..., m\} / \forall i, j \in \{1, 2, ..., m\}$: $a_k \mathcal{R} a_i$ et $[(i < j < k_0$ ou $k_0 < j < i) \Longrightarrow a_{k_0} \mathcal{R} a_j \mathcal{R} a_i]$.

En prenant $k = k_0$ et $k^{'} = k_0$, les conditions (a) et (b) de la définition 1.1.11 sont vérifiées. Donc $\mathcal{R}$ est localement unimodale par rapport à $\mathcal{R}^0$. ■

Proposition 1.1.13

Si $\mathcal{R}^0$ est un ordre total sur A, il y a exactement $2^m - 1$ ordres localement unimodaux par rapport à $\mathcal{R}^0$.

Preuve. Soit $\mathcal{R}^0$ un ordre total sur A.

Pour un préordre total $\mathcal{R}$ localement unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$, il existe deux candidats a_k et $a_{k'}$ tels que définis dans les conditions d'unimodalité locale. Par définition de $\mathcal{R}$, les candidats de a_k à $a_{k'}$ (avec $k \leq k'$) sont équivalents suivant $\mathcal{R}$ et sont tous premier ex aequo. En fusionnant ces candidats en un candidat noté $a_{kk'}$, $\mathcal{R}^0$ est remplacé par $\mathcal{T}^0$ et $\mathcal{R}$ par $\mathcal{T}$. Le problème est alors celui de déterminer le nombre d'ordres totaux unimodaux suivant $\mathcal{T}^0$ et classant $a_{kk'}$ premier. Lorsqu'on a fusionné exactement p candidats, le nombre de ces ordres totaux est :

$$\sum_{l=0}^{m-p} C_{m-p}^{l} = 2^{m-p}$$

car il faut trouver parmi les $m - p$ places restantes, les emplacements des candidats a_j à la gauche de a_k (c'est-à-dire $j < k$) sachant que les candidats a_j à la droite de $a_{k'}$ (c'est-à-dire $k' < j$) sont rangés dans les places restantes de façon unique. Puisqu'on a fusionné p candidats, k varie de 1 à $m - p + 1$; tandis que le nombre l de candidats à la gauche de a_k varie de 0 à $m-p$. Comme p varie de 1 (cas des ordres unimodaux) à m (cas d'indifférence totale), le nombre cherché vaut

$$\sum_{p=1}^{m} 2^{m-p} = 2^m - 1.$$

■

L'un des problèmes en théorie du choix social est celui de savoir comment transformer les opinions individuelles exprimées par les individus en une opinion collective. Pour aborder ce problème, nous définissons quelques règles de prise de décision puis nous en donnons quelques exemples.

1.2. Règles de prise de décision

1.2.1. Quelques classes de règles

Dépendant du problème à résoudre, le résultat collectif peut être :

- Un unique candidat : c'est par exemple le cas de l'élection d'un président. On dira que la règle de prise de décision est une **fonction de choix social**.
- Une partie non vide de l'ensemble des candidats : ceci arrive par exemple lorsqu'on doit élire les membres d'une délégation. Dans ce cas la règle de prise de décision est appelée **correspondance de choix social**.
- Un classement des différents candidats : on dit qu'on a une **procédure d'agrégation des préférences**.

  Exemple 1.2.1. Élection des membres d'un bureau avec une hiérarchie établie On veut élire les membres d'un bureau constitué d'un président, d'un vice-président, d'un secrétaire, d'un commissaire aux comptes et d'un censeur. On décide de faire un classement collectif de tous les candidats et de prendre comme président le premier candidat du classement, pour vice-président le deuxième candidat, pour secrétaire le troisième candidat, pour commissaire aux comptes le quatrième candidat et comme censeur le cinquième candidat. On demande alors à chaque des membres de proposer un classement. La règle de décision est alors une procédure d'agrégation des préférences.

Notation 1.2.1. Notons par 2^N l'ensemble des parties non vides de N, un élément de 2^N est appelé une coalition de N

Définition 1.2.1

Étant donnée une partie D non vide de $\mathcal{B}(A)$, on appelle :

(i) **fonction de choix social sur** D toute application $f : D^N \longmapsto A$, pour tout $\mathcal{R} \in D^N$, $f(\mathcal{R})$ est appelé candidat élu au profil $\mathcal{R}$;

(ii) **correspondance de choix social sur** D toute application $C : D^N \longmapsto 2^A$, pour tout $\mathcal{R} \in D^N$, $C(\mathcal{R})$ est appelé ensemble des candidats élus au profil $\mathcal{R}$;

(iii) **procédure d'agrégation des préférences sur** D toute application $F : D^N \longmapsto \mathcal{B}(A)$, pour tout $\mathcal{R} \in D^N$, $F(\mathcal{R})$ est appelé classement collectif au profil $\mathcal{R}$;

(iv) **fonction d'utilité social sur** D toute application $F : D^N \longmapsto \mathcal{W}$.

1.2.2. Règles positionnelles simples et séquentielles

Notations : Soient $x, y \in A, \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$ et $B \in 2^A$,

$$N(x, y, \mathcal{R}) = \{i \in N : x \succ_i y\} \text{ et } n(x, y, \mathcal{R}) = \#N(x, y, \mathcal{R})$$

$$Rg(x, \mathcal{R}^i) = \#\{y \in A : x \succ_i y\} + 1$$

$\mathcal{R}^i|B$ désigne la restriction de $\mathcal{R}^i$ à B.

Les règles positionnelles simples

Définition 1.2.2

1) On appelle **vecteur score** tout vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ de $\mathbb{R}^m$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_m$ avec $\alpha_1 > \alpha_m$.

2) Soit $\mathcal{R}$ un profil, le **score** d'un candidat x dans $\mathcal{R}$ suivant α est le nombre réel noté $S(x, \alpha, \mathcal{R})$ et donné par $S(x, \alpha, \mathcal{R}) = \sum_{i \in N} \alpha_{Rg(x, \mathcal{R}^i)}$.

Pour tout vecteur score α et tout profil $\mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$, on pose :

$$\begin{cases} F_\alpha(\mathcal{R}) = Argmax_{x \in A} S(x, \alpha, \mathcal{R}) = \{x \in A : S(x, \alpha, \mathcal{R}) \geq S(y, \alpha, \mathcal{R}) \ \forall y \in A\}. \\ \forall x, y \in A, x \succeq_{f_\alpha(\mathcal{R})} y \iff S(x, \alpha, \mathcal{R}) \geq S(y, \alpha, \mathcal{R}). \end{cases}$$

Notons que F_α est une correspondance de choix social et f_α est une procédure d'agrégation des préférences.

Définition 1.2.3

1) Une correspondance de choix social F sur $\mathcal{L}^N$ est dite de **type positionnelle simple** s'il existe un vecteur score α tel que $F = F_\alpha$.

2) Une fonction d'utilité social f sur $\mathcal{L}^N$ est dite de **type positionnelle simple** s'il existe un vecteur score α tel que $f = f_\alpha$.

Remarque 1.2.1. Pour obtenir une fonction de choix social à partir d'une correspondance de choix social, on peut la munir d'une règle de *"tie-break"* c'est-à-dire d'une règle permettant de départager les ex aequo.

Exemple 1.2.2. La pluralité : $\alpha = (1, 0, 0, ..., 0)$ (Scrutin uninominal à un tour)
L'élu est le candidat qui est le plus souvent classé en tête dans les préférences individuelles.
C'est par exemple la règle de vote utilisée au Cameroun pour les élections présidentielles.

Exemple 1.2.3. L'antipluralité : $\alpha = (1, 1, 1, ..., 1, 0)$
L'élu est le candidat le moins souvent classé dernier dans les préférences individuelles.

Exemple 1.2.4. La procédure de Borda : $\alpha = (m - 1, m - 2, ..., 2, 1, 0)$
Cette procédure fut proposée par Jean-Charles Borda (1781) pour l'élection des membres de l'Académie des sciences de Paris.

Exemple 1.2.5. Considérons l'environnement de vote suivant : $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $\mathcal{R} = (abcde, adecb, becad, bdcea, cdabe, ecbda, edcba)$.
L'ensemble des vainqueurs pour la pluralité est $\{a, b, e\}$.
L'ensemble des vainqueurs pour l'antipluralité est $\{c\}$.
L'ensemble des vainqueurs pour la procédure de Borda est $\{c\}$.

Remarque 1.2.2. Nous remarquons que pour un même environnement de vote, l'ensemble des vainqueurs varie suivant la règle de vote utilisée.

Les règles positionnelles séquentielles

On dispose d'un $(m-1)-uplet$ de vecteurs scores $\alpha^A = (\alpha^m, ..., \alpha^k, ..., \alpha^2)$, α^k étant le vecteur score qui doit être utilisé lorsque l'ensemble des candidats encore en compétition est tel que $|B| = k \geq 2$. À la première étape, les scores sont calculés en utilisant le vecteur score α^m et les candidats de scores plus petits que ceux des autres. On passe alors à la deuxième étape en utilisant le vecteur score approprié en fonction du nombre de candidats encore en lice. On continue ce processus jusqu'à ce que l'on obtient un ensemble sans aucun candidat ayant un score plus petits que ceux des autres.

Pour tout $B \in 2^A, \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$ et tout vecteur score $\alpha^k \in \mathbb{R}^k$, l'ensemble des perdants noté $L(B, \mathcal{R}, \alpha^k)$ formé des candidats $a_i \in B$ tels que :

$\forall a_j \in B, S(a_i, \alpha^k, \mathcal{R}|B) \leq S(a_j, \alpha^k, \mathcal{R}|B)$;

$\exists a_j \in B : S(a_i, \alpha^k, \mathcal{R}|B) < S(a_j, \alpha^k, \mathcal{R}|B)$.

Définition 1.2.4

Soit $\alpha^A = (\alpha^m, ..., \alpha^k, ..., \alpha^2)$ une collection de vecteurs scores.

On appelle **règle positionnelle séquentielle associée à** α^A toute correspondance de choix social notée F_{α^A} telle que pour toute partie $B \subseteq A, \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$ et $a_j \in A, a_j \in F_{\alpha^A} \Longleftrightarrow a_j \in A_k$, avec A_k défini de manière séquentielle ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
A_1 &= A \\
A_2 &= A \backslash L(A_1, \mathcal{R}|A_1, \alpha^{\#A_1}) \\
&\vdots \\
A_{\#B+1} &= A_{\#B} \backslash L(A_{\#B}, \mathcal{R}|B, \alpha^{\#B}) \\
&\vdots \\
A_p &= A_{p-1} \backslash L(A_{p-1}, \mathcal{R}|A_{p-1}, \alpha^{\#A_{p-1}}).
\end{aligned}$$

Une règle positionnelle séquentielle élimine donc pogressivement les perdants à chaque étape jusqu'à ce qu'il n'en reste plus.

Les règles positionnelles séquentielles les plus utilisées sont données dans les trois exemples ci-dessous.

Exemple 1.2.6. La procédure de Hare : À chaque étape, le vecteur score $\alpha^{\#B}$ utilisé est le $\#B$-uplet $(1, 0, ..., 0)$.

Exemple 1.2.7. La procédure de Coombs : À chaque étape, le vecteur score $\alpha^{\#B}$ utilisé est le $\#B$-uplet $(1, 1, 1, ..., 1, 0)$.

Exemple 1.2.8. La procédure de Nanson : À chaque étape, le vecteur score $\alpha^{\#B}$ utilisé est le $\#B$-uplet $(\#B - 1, \#B - 2, ..., 2, 1, 0)$.

1.2.3. Jeux simples

Définition 1.2.5

Soient $W \subseteq 2^N$ et $G = (N, W)$.

i) On dit que G est un jeu simple si $W \neq \emptyset$ et $\forall S \in W, T \in 2^N, S \subseteq T \Longrightarrow T \in W$.

ii) On dit que G est propre si $\forall S, T \in W; S \cap T \neq \emptyset$.

Les jeux simples sont utilisés pour modéliser les votes "pour ou contre", W est appelé ensemble des coalitions gagnantes. C'est par exemple le modèle utilisé pour l'adoption ou le rejet d'un projet à l'assemblée nationale.

Exemple 1.2.9. 1) **L'unanimité**

Pour ce jeu simple, on a $W = \{N\}$, c'est à dire qu'un projet est adopté si et seulement si tous les votants sont "pour" son adoption.

2) **La dictature**

Ce type de jeu simple est donné par l'existence d'un (unique) $i \in N$ appelé **dictateur** tel que $W = \{S \in 2^N / i \in S\}$.

Dans ce cas l'adoption ou le rejet d'un projet dépend uniquement de l'opinion du dictateur.

3) **Le vote à la majorité absolue**

L'ensemble des coalitions gagnantes est donné par $W = \{S \in 2^N / \#S > \frac{n}{2}\}$.

Ici un projet est adopté si et seulement si plus de la moitié des votants est "pour" son adoption.

1.3. Manipulation des fonctions de choix social

1.3.1. Notion de fonction de choix social manipulable

Quelques notations : Pour tout profils de préférences $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^1, ..., \mathcal{R}^i, ..., \mathcal{R}^n)$ et $Q = (Q^1, ..., Q^i, ..., Q^n)$, $i \in N$, on note : $\mathcal{R}^{-i}$ le profil de préférence des $n-1$ autres agents de N différents de i, $\mathcal{R}^{-i}$ est appelé une **contingence** (Andjiga et al. 2005) ;

$(\mathcal{R}|Q^i)$ ou $(Q^i, \mathcal{R}^{-i})$ le profil obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en remplaçant la préférence $\mathcal{R}^i$ de l'agent i par Q^i et en conservant les préférences des autres agents ;

$(\mathcal{R}|Q^1, Q^2)$ le profil de préférence obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en remplaçant la préférence $\mathcal{R}^1$ de l'agent 1 par Q^1 et la préférence $\mathcal{R}^2$ de l'agent 2 par Q^2 et en conservant les préférences des autres agents. On note de façon formelle :

$$(\mathcal{R}|Q^i) = (\mathcal{R}^1, ..., Q^i, ..., \mathcal{R}^n);$$

$$(\mathcal{R}|Q^1, Q^2) = (Q^1, Q^2, \mathcal{R}^3, ..., \mathcal{R}^n).$$

Plus généralement, $(\mathcal{R}|Q^S)$ désigne le profil obtenu de $\mathcal{R}$ en remplaçant uniquement chaque préférence $\mathcal{R}^i$ par Q^i pour tout $i \in S$.

Définition 1.3.1

Soient D une partie non vide de $\mathcal{B}(A)$ et f une fonction de choix social sur D.

(i) Soient $i \in N, \mathcal{R}$ un profil dans D^N et $Q^i \in D$. On dit que f est **manipulable par i de $\mathcal{R}$ à $(\mathcal{R}|Q^i)$** si

$$f(\mathcal{R}|Q^i)\mathcal{R}^i f(\mathcal{R}) \text{ et } f(\mathcal{R}|Q^i) \neq f(\mathcal{R}).$$

On dit aussi que f est manipulable en $\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}^i$ à Q^i.

(ii) On dit que f est **manipulable** s'il existe un profil $\mathcal{R}$ dans D^N, $\mathrm{i} \in N$ et $Q^i \in D$ tels que f est manipulable par i de $\mathcal{R}$ à $(\mathcal{R}|Q^i)$.

(iii) f est **non manipulable** si f n'est pas manipulable.

Interprétation : Une fonction de choix social f est dite manipulable disons par un votant i si celui-ci est incité à déclarer une préférence stratégique Q^i en lieu et place de sa préférence sincère $\mathcal{R}^i$, cette incitation étant due au fait qu'en déclarant une préférence stratégique la satisfaction de i augmente.

Voici un exemple de manipulation de la règle de Borda.

Exemple 1.3.1. Soit f la règle de Borda considérée comme une fonction de choix social avec le tie-break qui est l'ordre alphabétique.

Posons $N = \{1, 2, 3\}$; $A = \{a, b, c, d\}$ et $D = \mathcal{L}$.

Le vecteur score de Borda est $\alpha = (3, 2, 1, 0)$.

1) Considérons le profil $\mathcal{R} = (abcd, cdba, abdc)$; $Q^2 = bcda$

   $\mathrm{S}(a, \alpha, \mathcal{R}) = 6 \quad \mathrm{S}(a, \alpha, \mathcal{R}|Q^2) = 6$

   $\mathrm{S}(b, \alpha, \mathcal{R}) = 5 \quad \mathrm{S}(b, \alpha, \mathcal{R}|Q^2) = 7$

   $\mathrm{S}(c, \alpha, \mathcal{R}) = 4 \quad \mathrm{S}(c, \alpha, \mathcal{R}|Q^2) = 3$

   $\mathrm{S}(d, \alpha, \mathcal{R}) = 3 \quad \mathrm{S}(d, \alpha, \mathcal{R}|Q^2) = 2.$

   Il apparaît que $f(\mathcal{R}) = a$, $f(\mathcal{R}|Q^2) = b$ et $b\mathcal{R}^2 a$.

   Donc le votant 2 manipule f de $\mathcal{R}$ à $(\mathcal{R}|Q^2)$.

2) Considérons également le profil $\mathcal{R} = (abcd, abcd, abcd)$. On a : $S(a, \alpha, \mathcal{R}) = 9$, $S(b, \alpha, \mathcal{R}) = 6$, $S(c, \alpha, \mathcal{R}) = 3$ et $S(d, \alpha, \mathcal{R}) = 0$.

   Il apparaît que $f(\mathcal{R}) = a$ et $\forall i \in N, \forall x \in A, a\mathcal{R}^i x$

   Donc f est non manipulable en $\mathcal{R}$.

Bien que f soit manipulable, il y a des profils en lesquels f est non manipulable.

Notation 1.3.1. Pour tout $\mathcal{R} \in \mathcal{L}$, notons par $min\mathcal{R}$ le candidat classé dernier dans la préférence $\mathcal{R}$. Plus formellement,

$$min\mathcal{R} = x \Longleftrightarrow \forall y \in A, y\mathcal{R}x.$$

Exemple 1.3.2. Soit f la fonction de choix social définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{L}^N & \longrightarrow & A \\ & \mathcal{R} & \mapsto & f(\mathcal{R}) = min\mathcal{R}^1 \end{array}$$

Soit $\mathcal{R}$ un profil quelconque. Posons $\mathcal{R}^1 = a_1 a_2 ... a_m$ et $Q^1 = a_2 a_3 ... a_m a_1$

On a : $f(\mathcal{R}) = a_m$, $f(\mathcal{R}|Q^1) = a_1$ et $a_1\mathcal{R}^1 a_m$.

Ainsi le votant 1 manipule f de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}|Q^1$. Donc f est manipulable.

Il apparaît de l'exemple 1.3.2 que f est manipulable en tout profil.

Définition 1.3.2

Posons $A = \{a_1, ..., a_m\}$ et α le $m - uplet$ $(1, 0, 0, ..., 0)$.

On appelle **pluralité avec tie-break lexicographique**, la fonction de choix social f définie comme suit :

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, f(\mathcal{R}) = a_i \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., m\}, \begin{cases} S(a_i, \alpha, \mathcal{R}) > S(a_j, \alpha, \mathcal{R}) \text{ ou} \\ S(a_i, \alpha, \mathcal{R}) = S(a_j, \alpha, \mathcal{R}) \text{ et } i < j \end{cases}$$

Proposition 1.3.1

Si $m = 2$, alors la pluralité avec tie-break lexicographique est non manipulable.

Preuve. Soit f la pluralité avec tie-break lexicographique. Posons $A = \{a_1, a_2\}$, alors $\mathcal{L} = \{a_1a_2, a_2a_1\}$ et f est définie par :

$$\forall \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, f(\mathcal{R}) = \begin{cases} a_1 \text{ si } S(a_1, \alpha, \mathcal{R}) \geq S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) \\ a_2 \text{ si } S(a_1, \alpha, \mathcal{R}) < S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) \end{cases}$$

Supposons que f est manipulable.

Alors $\exists i \in N, \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$ et $Q^i \in \mathcal{L}$ tels que $f(\mathcal{R}|Q^i)\mathcal{R}^i f(\mathcal{R})$ et $f(\mathcal{R}|Q^i) \neq f(\mathcal{R})$.

Supposons sans nuire à la généralité que $f(\mathcal{R}|Q^i) = a_1$.

Alors $f(\mathcal{R}) = a_2$ et $\mathcal{R}^i = a_1a_2$

- **Si** $Q^i = a_1a_2$, alors $Q^i = \mathcal{R}^i \Longrightarrow f(\mathcal{R}|Q^i) = f(\mathcal{R})$ absurde.
- **Si** $Q^i = a_2a_1$, alors $S(a_1, \alpha, \mathcal{R}|Q^i) = S(a_1, \alpha, \mathcal{R}) - 1$ et $S(a_2, \alpha, \mathcal{R}|Q^i) = S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) + 1$

$$\begin{aligned} f(\mathcal{R}|Q^i) = a_1 \quad &\Longrightarrow \quad S(a_1, \alpha, \mathcal{R}|Q^i) \geq S(a_2, \alpha, \mathcal{R}|Q^i) \\ &\Longrightarrow \quad S(a_1, \alpha, \mathcal{R}) - 1 \geq S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) + 1 \\ &\Longrightarrow \quad S(a_1, \alpha, \mathcal{R}) \geq S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) + 2 \text{ or } S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) + 2 > S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) \\ &\Longrightarrow \quad S(a_1, \alpha, \mathcal{R}) > S(a_2, \alpha, \mathcal{R}) \\ &\Longrightarrow \quad f(\mathcal{R}) = a_1 \text{ absurde.} \end{aligned}$$

D'où f est non manipulable. ■

Remarque 1.3.1. Nous reviendrons à la pluralité avec tie-break lexicographique lorsque $\#A \geq 3$ au chapitre deux.

1.3.2. Notion de fonction de choix social collectivement manipulable

Quelques notations : Pour tout profils $\mathcal{R}$ et $Q = (Q^1, ..., Q^i, ..., Q^n)$ et toute coalition S de N, on note Q^S le profil des préférences des agents de S dans Q; $\mathcal{L}^S$ représente l'ensemble de tels profils. $(\mathcal{R}|Q^S)$ désigne le profil obtenu à partir de $\mathcal{R}$ en remplaçant simultanément les préférences $\mathcal{R}^i$ des membres i de S par Q^i.
Plus formellement, si $S \in 2^N$ avec $s = \#S$ et $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$, alors $(\mathcal{R}|Q^S) = (\mathcal{R}|Q^{i_1}, \ldots, Q^{i_s})$.

Définition 1.3.3

Soient D une partie non vide de $\mathcal{B}(A)$ et f une fonction de choix social sur D.
On dit que f est **collectivement manipulable** si :

$$\exists S \in 2^N, \exists Q^S \in \mathcal{L}^S, \exists R \in \mathcal{L}^N \text{ tels que } \forall i \in S \begin{cases} f(\mathcal{R}|Q^S)\mathcal{R}^i f(\mathcal{R}) \\ \text{et } f(\mathcal{R}|Q^S) \neq f(\mathcal{R}) \end{cases}$$

Interprétation : Une fonction de choix social f sur D est dite collectivement manipulable si l'on peut trouver une coalition d'agents S telle qu'en déclarant collectivement des préférences stratégiques Q^S au lieu de déclarer des préférences sincères $\mathcal{R}^S$, chaque membre obtient une satisfaction meilleure par rapport à la présentation des préférences sincères.

Proposition 1.3.2

Soient D une partie non vide de $\mathcal{B}(A)$ et f une fonction de choix social sur D.
Si f est manipulable, alors f est collectivement manipulable.

Preuve. Supposons que f est manipulable.
Alors $\exists i_0 \in N, \exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, \exists Q^{i_0} \in \mathcal{L}$ tels que

$$\begin{cases} f(\mathcal{R}|Q^{i_0})\mathcal{R}^{i_0} f(\mathcal{R}) \\ \text{et } f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) \neq f(\mathcal{R}) \end{cases}$$

Posons $S = \{i_0\}$ et $Q^S = Q^{i_0}$

$$\text{Alors } S \in 2^N, \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, Q^S \in \mathcal{L}^S \text{et } \forall i \in S \begin{cases} f(\mathcal{R}|Q^S)\mathcal{R}^i f(\mathcal{R}) \\ \text{et } f(\mathcal{R}|Q^S) \neq f(\mathcal{R}) \end{cases}$$

Donc f est collectivement manipulable.

■

Remarque **1.3.2.** En général, la réciproque de la proposition précédente est fausse, à moins que $D = \mathcal{L}$.

Proposition 1.3.3

Soit f une fonction de choix social sur $\mathcal{L}$.

Si f est collectivement manipulable, alors f est manipulable.

Preuve. Supposons que f est collectivement manipulable et montrons que f est manipulable.

f étant collectivement manipulable, il existe

$$\mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, S \in 2^N, Q^S \in \mathcal{L}^S / \forall i \in S, f(\mathcal{R}|Q^S) \succ_{\mathcal{R}^i} f(\mathcal{R}).$$

Posons $a = f(\mathcal{R}), b = f(\mathcal{R}|Q^S), B = \{a, b\}$ et $S = \{i_1, ..., i_s\}$ où $s = \#S$.

Considérons le profil $\overline{\mathcal{R}}$ défini par :

$$\forall i \in N, \begin{cases} \overline{\mathcal{R}}^i = \mathcal{R}^i \text{ si } i \notin S \\ \overline{\mathcal{R}}^i = \mathcal{R}^{i+}_{|B} \text{ si } i \in S \end{cases}$$

$$\text{où } \forall i \in S, \forall x, y \in A, \begin{cases} x\overline{\mathcal{R}}^{i+}_{|B} y \text{ si } x = b \text{ et } y = a \\ x\overline{\mathcal{R}}^{i+}_{|B} y \text{ si } (x = a \text{ et } y \neq b) \text{ ou } (x = b \text{ et } y \neq a) \\ x\overline{\mathcal{R}}^{i+}_{|B} y \iff x\mathcal{R}y \text{ si } x \neq a \text{ et } y \neq b \end{cases}$$

Deux cas sont possibles : (1) $f(\overline{\mathcal{R}}) \neq a$, (2) $f(\overline{\mathcal{R}}) = a$

<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : $f(\overline{\mathcal{R}}) \neq a$. Posons $f(\overline{\mathcal{R}}) = c$

Considérons la suite $(c_k)_{k=0,...,s}$ définie par :

$$c_0 = f(\mathcal{R}) = a$$

$$c_1 = f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1})$$

$$c_2 = f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, \overline{\mathcal{R}}^{i_2})$$

$$\vdots$$

$$c_s = f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, \overline{\mathcal{R}}^{i_2}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_s})$$

Alors $c_s = f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^S) = f(\overline{\mathcal{R}}) = c$. Comme $a \neq c, \exists k_0 \in \{1, ..., s\}/c_{k_0} \neq a$.

Soit k le plus petit entier naturel tel que $c_k \neq a$, alors $c_{k-1} = a$.

Si $c_k = b$, alors comme $i_k \in S$ et $b \succ_{\mathcal{R}^{i_k}} a$ c'est à dire $c_k \succ_{\mathcal{R}^{i_k}} c_{k-1}$, on obtient $f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_k}) \succ_{\mathcal{R}^{i_k}} f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_{k-1}})$.

Donc f est manipulable par l'agent i_k en $(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_{k-1}})$ de $\mathcal{R}^{i_k}$ à $\overline{\mathcal{R}}^{i_k}$.

Si $c_k \neq b$, alors par définition de $\overline{\mathcal{R}}^{i_k}$ on aura $a \succ_{\overline{\mathcal{R}}^{i_k}} c_k$ (car $c_k \neq a$), c'est à dire $c_{k-1} \succ_{\overline{\mathcal{R}}^{i_k}} c_k$, on obtient $f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_{k-1}}) \succ_{\overline{\mathcal{R}}^{i_k}} f(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_k})$.

Donc f est manipulable par i_k en $(\mathcal{R}|\overline{\mathcal{R}}^{i_1}, ..., \overline{\mathcal{R}}^{i_k})$ de $\overline{\mathcal{R}}^{i_k}$ à $\mathcal{R}^{i_k}$.

<u>2ème cas</u> : $f(\overline{\mathcal{R}}) = a$

Considérons la suite $(a_k)_{k=0,...,s}$ définie par :

$$a_0 = f(\overline{\mathcal{R}}) = a$$

$$a_1 = f(\overline{\mathcal{R}}|Q^{i_1})$$

$$a_2 = f(\overline{\mathcal{R}}|Q^{i_1}, Q^{i_2})$$

$$\vdots$$

$$a_s = f(\overline{\mathcal{R}}|Q^{i_1}, Q^{i_2}, ..., Q^{i_s})$$

Alors $a_s = f(\overline{\mathcal{R}}|Q^S) = f(\mathcal{R}|Q^S) = b$. Ainsi $\exists k_0 \in \{1, ..., s\}/a_{k_0} = b$.

Soit k le plus petit entier naturel tel que $a_k = b$, alors $a_{k-1} \neq b$ et par définition de $\overline{\mathcal{R}}^{i_k}$, on aura $b \succ_{\overline{\mathcal{R}}^{i_k}} a_{k-1}$ (car $i_k \in S$). On obtient $f(\overline{\mathcal{R}}|Q^{i_1}, Q^{i_2}, ..., Q^{i_k}) \succ_{\overline{\mathcal{R}}^{i_k}} f(\overline{\mathcal{R}}|Q^{i_1}, Q^{i_2}, ..., Q^{i_{k-1}})$.

Donc f est manipulable par l'agent i_k en $(\overline{\mathcal{R}}|Q^{i_1}, Q^{i_2}, ..., Q^{i_{k-1}})$ de $\overline{\mathcal{R}}^{i_k}$ à Q^{i_k}.

Dans tous les cas f est manipulable. $\blacksquare$

Chapitre Deux

Non manipulabilité et unimodalité

Des difficultés sont rencontrées dans le domaine du choix social quand à ce qui concerne la qualité des décisions collectives. C'est pour cela que se pose d'une part la question de recherche d'une "bonne" règle de prise de décision ; et d'autre part la question d'existence, de détermination et d'unicité d'une telle règle de prise de décision.

Parmi les propriétés "raisonnables" très souvent évoquées, il est souhaitable pour un mécanisme de prise de décision donné de satisfaire les propriétés suivantes :

- Encourager la sincérité ;
- Résister à la manipulation individuelle et collective ;
- Refléter l'opinion de la majorité et non l'opinion d'un seul individu.

Le théorème de Gibbard-Satterthwaite est un résultat d'impossibilité en choix collectif sur la manipulation en domaine universel (les préférences des individus sont des ordres totaux) qui nous apprend qu'une telle règle de prise de décision n'existe pas lorsqu'il y a au moins trois alternatives éligibles. Mais sur le domaine restreint des préférences unimodales, Moulin (1980) a établi un résultat d'existence de fonctions de choix social non manipulables. Dans ce chapitre, nous présentons brièvement le théorème de Gibbard-Satterthwaite, la notion de restriction de domaine puis nous énonçons et nous prouvons le théorème d'existence de Moulin.

2.1. Non manipulabilité

2.1.1. Non manipulabilité : cas de deux options

Dans cette section on suppose que $m = 2$ et $A = \{a, b\}$.

La proposition 1.3.1 nous permet de voir que **la pluralité avec tie-break lexicographique** est non manipulable.

Nous caractérisons à la proposition 2.1.1 ci-dessous toutes les fonctions de choix social sur A non manipulables.

Soit f une fonction de choix social sur A.

Notation 2.1.1. $\mathcal{W}_a = \{S \in 2^N : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N / N(a,b,\mathcal{R}) = S$ et $f(\mathcal{R}) = a\}$;

$\mathcal{W}_b = \{S \in 2^N : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N / N(b,a,\mathcal{R}) = S$ et $f(\mathcal{R}) = b\}$;

Imf $= \{x \in A : \exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N / f(\mathcal{R}) = x\}$ c'est-à-dire l'ensemble des alternatives éligibles par f.

Proposition 2.1.1

Une fonction de choix social f sur A non constante est non manipulable si et seulement si $(N, \mathcal{W}_a)$ est un jeu simple.

Preuve. Soit f une fonction de choix social sur A non constante.

$\Longrightarrow$) Supposons que f est non manipulable.

Alors $\mathcal{W}_a \subseteq 2^N$ par définition.

Comme f est non constante, alors $\exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$ tel que $f(\mathcal{R}) = a$, posons $S_0 = N(a,b,\mathcal{R})$; alors $S_0 \in \mathcal{W}_a$.

Donc $\mathcal{W}_a \neq \emptyset$.

Soient $S, T \in 2^N$ tels que $S \in \mathcal{W}_a$ et $S \subseteq T$, montrons que $T \in \mathcal{W}_a$.

Comme $S \in \mathcal{W}_a, \exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N / S = N(a,b,\mathcal{R})$ et $f(\mathcal{R}) = a$

Définissons le profil d'ordres $\mathcal{Q}$ par : $\forall i \in N, \begin{cases} \mathcal{Q}^i = ab \text{ si } i \in T \\ \mathcal{Q}^i = ba \text{ si } i \notin T \end{cases}$.

Montrons que $f(\mathcal{Q}) = a$.

Supposons que $f(\mathcal{Q}) \neq a$.

Alors $f(\mathcal{Q}) = b \neq f(\mathcal{R})$, donc $T \neq S$. Posons $T' = T \backslash S$.

On a : $\begin{cases} \forall i \in T', \mathcal{Q}^i = ab \text{ et } \mathcal{R}^i = ba \\ \forall i \in S,\ \mathcal{Q}^i = ab = \mathcal{R}^i \\ \forall i \in N \backslash T,\ \mathcal{Q}^i = ba = \mathcal{R}^i \end{cases}$

On a : $T' \in 2^N$ et $\forall i \in T'$, $f(\mathcal{R}|\mathcal{Q}^{T'})\mathcal{R}^i f(\mathcal{R})$ car $f(\mathcal{R}|\mathcal{Q}^{T'}) = f(\mathcal{Q})$.

Par conséquent f est collectivement manipulable via la coalition T'.

D'après la proposition 1.3.3, f est manipulable ; ce qui est absurde.

Ainsi $Q \in \mathcal{L}^N, T \in 2^N, T = N(a,b,Q)$ et $f(Q) = a$

Donc $T \in \mathcal{W}_a$

D'où $(N, \mathcal{W}_a)$ est un jeu simple.

$\Longleftarrow$) Supposons que $(N, \mathcal{W}_a)$ est un jeu simple et f est manipulable.

Alors comme f est manipulable, $\exists i_0 \in N, \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N / \begin{cases} f(\mathcal{R}|Q^{i_0})\mathcal{R}^{i_0} f(\mathcal{R}) \\ \text{et } f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) \neq f(\mathcal{R}) \end{cases}$.

- Si $f(\mathcal{R}) = a$; alors $f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) = b$ et $\mathcal{R}^{i_0} = ba$.

  Donc $Q^{i_0} = ab$.

  Posons $S = N(a,b,\mathcal{R})$ et $T = N(a,b,\mathcal{R}|Q^{i_0})$.

  On a : $S \subseteq T, S \in \mathcal{W}_a$ car $\mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, S = N(a,b,\mathcal{R})$ et $f(\mathcal{R}) = a$.

  Comme $(N, \mathcal{W}_a)$ est un jeu simple, alors $T \in \mathcal{W}_a$.

  Donc $\exists \mathcal{R}' \in \mathcal{L}^N / T = N(a,b,\mathcal{R}')$ et $f(\mathcal{R}') = a$.

  Comme $T = N(a,b,\mathcal{R}|Q^{i_0})$ et $T = N(a,b,\mathcal{R}')$, alors $\mathcal{R}' = \mathcal{R}|Q^{i_0}$ car $\mathcal{L} = \{ab, ba\}$.

  Ainsi $f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) = a$ et $f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) = b$, absurde car $a \neq b$.

- Si $f(\mathcal{R}) = b$; alors $f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) = a$ et $\mathcal{R}^{i_0} = ab$.

  Donc $Q^{i_0} = ba$.

  Posons $S = N(a,b,\mathcal{R}|Q^{i_0})$ et $T = N(a,b,\mathcal{R})$.

  On a : $S \subseteq T, S \in \mathcal{W}_a$ car $\mathcal{R}|Q^{i_0} \in \mathcal{L}^N, S = N(a,b,\mathcal{R}|Q^{i_0})$ et $f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) = a$.

  Comme $(N, \mathcal{W}_a)$ est un jeu simple, alors $T \in \mathcal{W}_a$.

  Donc $\exists \mathcal{R}' \in \mathcal{L}^N / T = N(a,b,\mathcal{R}')$ et $f(\mathcal{R}') = a$.

  Comme $T = N(a,b,\mathcal{R})$ et $T = N(a,b,\mathcal{R}')$, alors $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ car $\mathcal{L} = \{ab, ba\}$.

  Ainsi $f(\mathcal{R}) = a$ et $f(\mathcal{R}) = b$, absurde car $a \neq b$.

Donc si $(N, \mathcal{W}_a)$ est un jeu simple, alors f est non manipulable.

■

Cas particuliers

1) **Si** $(N, \mathcal{W}_a)$ **est l'unanimité**

   Alors la fonction de choix social f sur $\mathcal{L}$ définie par $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, \begin{cases} f(\mathcal{R}) = a \text{ si } \mathcal{R}^i = ab \ \forall i \in N \\ f(\mathcal{R}) = b \text{ sinon} \end{cases}$

est non manipulable.

2) **Si** $(N, \mathcal{W}_a)$ **est la dictature**

Soit i_0 le dictateur de ce jeu simple. Alors la fonction de choix social f sur $\mathcal{L}$ définie par $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, f(\mathcal{R}) = max\mathcal{R}^{i_0} = \begin{cases} a \text{ si } \mathcal{R}^{i_0} = ab \\ b \text{ si } \mathcal{R}^{i_0} = ba \end{cases}$ est non manipulable.

3) **Si** $(N, \mathcal{W}_a)$ **est le jeu simple à la majorité absolue**

Alors on obtient que la pluralité avec tie-break lexicographique est non manipulable.

Le problème de la manipulation se pose comme suit : est-ce qu'il existe des fonctions de choix social sélectionnant au moins trois options et qui sont non manipulables ?

Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) proposent une solution à ce problème à travers un théorème qui porte leurs noms : le théorème de Gibbard-Satterthwaite.

2.1.2. Le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterthwaite

Définition 2.1.1

Soit f une fonction de choix social sur $D \subseteq \mathcal{L}$.

On dit que f est dictatoriale s'il existe $i_0 \in N$ tel que : $\forall \mathcal{R} \in D^N, \forall x \in A \backslash \{f(\mathcal{R})\}, f(\mathcal{R}) \succ_{i_0} x$ (où $\succ_{i_0}$ est la partie stricte de $\mathcal{R}^{i_0}$).

Remarque 2.1.1. Lorsque f est dictatoriale sur $\mathcal{L}$, i_0 de la définition précédente est unique ; il est appelé **dictateur de** f.

Notation 2.1.2. On note alors $\forall \mathcal{R} \in D^N, f(\mathcal{R}) = max\mathcal{R}^{i_0}$.

Le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterthwaite est un résultat d'impossibilité en choix social traduisant le fait qu'il est impossible de trouver une fonction de choix social satisfaisant les conditions d'universalité, de non manipulabilité et de non dictature lorsqu'il y a au moins trois alternatives éligibles.

Proposition 2.1.2

Si $f : \mathcal{L}^N \longrightarrow A$ est une fonction de choix social dictatoriale, alors f est non manipulable.

Preuve. Supposons que $f : \mathcal{L}^N \longrightarrow A$ est une fonction de choix social dictatoriale et f est manipulable.

Soit i_0 le dictateur de f. Comme f est manipulable, $\exists i \in N, \exists \mathcal{R} \in \mathcal{L}^N, \exists Q^i \in \mathcal{L} / f(\mathcal{R}|Q^i)\mathcal{R}^i f(\mathcal{R})$ et $f(\mathcal{R}|Q^i) \neq f(\mathcal{R})$.

Si $i \neq i_0$, alors $f(\mathcal{R}|Q^i) = max\mathcal{R}^{i_0} = f(\mathcal{R})$ absurde car $f(\mathcal{R}|Q^i) \neq f(\mathcal{R})$.

Si $i = i_0$, alors on obtient $f(\mathcal{R}|Q^{i_0})\mathcal{R}^{i_0} f(\mathcal{R})$ et $f(\mathcal{R}|Q^{i_0}) \neq f(\mathcal{R})$ absurde car $f(\mathcal{R}) = max\mathcal{R}^{i_0}$.

D'où le résultat. ■

La réciproque de la proposition 2.1.2 est vraie sous la condition supplémentaire $\#Imf \geq 3$, ceci fait l'objet du théorème de Gibbard-Satterthwaite qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.1.1. ***[De Gibbard-Satterthwaite]***

Si $f : \mathcal{L}^N \longrightarrow A$ est une fonction de choix social telle que $\#Imf \geq 3$ et f est non manipulable, alors f est dictatoriale.

Preuve. Confère (Gibbard 1973, Satterthwaite 1975).

■

Remarque 2.1.2. Toutes les hypothèses du théorème de Gibbard-Satterthwaite sont nécessaires. Par exemple

1. Sur la condition $\#Imf \geq 3$
   a) Si $\#Imf = 1$, on obtient f est constante et donc est non dictatoriale et non manipulable.
   b) Si $\#Imf = 2$, nous avons montré à la proposition 1.3.1 que la pluralité avec tie-break lexicographique est non manipulable, or elle est non dictatoriale.
2. La condition du domaine universel (f est définie sur $\mathcal{L}^N$). Nous construirons à la sous-section 2.2.2 des fonctions de choix social non dictatoriales et non manipulables sur le domaine restreint des préférences unimodales.

Nous présentons à présent quelques restrictions de domaines.

2.1.3. Restriction de domaine

La relaxation des hypothèses du théorème de Gibbard-Satterthwaite dans le but d'échapper à l'impossibilité évoquée par celui-ci nous a amené à restreindre le domaine des préférences admissibles, ainsi on considère des fonctions de choix social définie non pas sur $\mathcal{L}$ mais sur une partie D de $\mathcal{B}(A)$.

Le domaine des préférences séparables

Barbera et al. (1991) considèrent un domaine différent : celui des préférences séparables.

Définition 2.1.2

Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$. On dit que :

1. la préférence $\mathcal{R}$ est 2-séparable ou dichotomique s'il existe une partition (F, E) de A telle que $\mathcal{R} = FE$;
2. la préférence $\mathcal{R}$ est 3-séparable ou trichotomique s'il existe une partition (F, N, E) de A telle que $\mathcal{R} = FNE$;
3. la préférence $\mathcal{R}$ est séparable si elle est dichotomique ou trichotomique.

Interprétation : Si $i \in N$ est un votant ayant une préférence $\mathcal{R}^i \in \mathcal{W}$,

1. La préférence $\mathcal{R}^i$ est dichotomique si elle est un préordre ayant deux classes d'ex aequo : l'ensemble des candidats amis du votant i, il s'agit des candidats que le votant i aimerait voir élu noté F_i ; l'ensemble des candidats ennemis du votant i, noté E_i c'est l'ensemble des candidats que le votant i n'aimerait jamais voir élu.
2. La préférence $\mathcal{R}^i$ est trichotomique si elle est un préordre ayant trois classes d'ex aequo : l'ensemble des candidats amis du votant i, il s'agit de F_i ; l'ensemble des candiats impartiaux pour le votant i noté N_i et l'ensemble des candidats ennemis du votant i, noté E_i.

Notation 2.1.3. Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$. On désigne par $\mathcal{D}_2^{\text{sep}}$ le domaine des préférences dichotomiques, par $\mathcal{D}_3^{\text{sep}}$ le domaine des préférences trichotomiques et par $\mathcal{D}^{\text{sep}}$ le domaine des préférences séparables. Si $\mathcal{R}$ est une préférence séparable, on note $t(\mathcal{R}) = F$ de la définition 2.1.2

Définition 2.1.3

Soit $f : (\mathcal{D}^{\text{sep}})^N \longrightarrow A$ une fonction de choix social.
On dit que f vérifie la propriété de **meilleure alternative** si $\forall \mathcal{R}, \mathcal{Q} \in (\mathcal{D}^{\text{sep}})^N$,
$(t(\mathcal{R}^i) = t(\mathcal{Q}^i)\ \forall i \in N) \Longrightarrow f(\mathcal{R}) = f(\mathcal{Q})$.

Barberà et al. (1991) ont montrés que les seules fonctions de choix social non manipulables sur le domaine des préférences séparables qui vérifient la propriété de **meilleure alternative** sont les fonctions de choix social de vote par comités.

Le domaine des préférences unimodales

Ce domaine a été évoqué à la sous-section 1.1.3. Sur ce domaine Moulin (1980) a produit une caractérisation des fonctions de choix social non manipulables.

Règle majoritaire-vainqueur de Condorcet

Nous supposons que $A = \{a_1, ..., a_m\}$.

Soient $D \subseteq \mathcal{L}$ et $\mathcal{R} = (\mathcal{R}^i)_{i\in N} \in D^N$.

Définition 2.1.4

La règle majoritaire est la procédure d'agrégation notée Maj et définie sur D^N par :
$\forall \mathcal{R} \in D^N, \forall a_i, a_j \in A, a_i \geq_{Maj(\mathcal{R})} a_j \Longleftrightarrow n(a_i, a_j, \mathcal{R}) \geq n(a_j, a_i, \mathcal{R})$

Lorsqu'on se heurte à des ex aequo avec la règle majoritaire, on utilise généralement la règle majoritaire avec tie-break lexicographique qui se définie comme suit.

Définition 2.1.5

La règle majoritaire avec tie-break lexicographique est la procédure d'agrégation notée Maj_0 et définie sur D^N par :$\forall \mathcal{R} \in D^N, \forall a_i, a_j \in A$,

$$a_i \succ_{Maj_0(\mathcal{R})} a_j \Longleftrightarrow \begin{cases} n(a_i, a_j, \mathcal{R}) > n(a_j, a_i, \mathcal{R}) \\ \text{ou } n(a_i, a_j, \mathcal{R}) = n(a_j, a_i, \mathcal{R}) \text{ et } i < j \end{cases}$$

Définition 2.1.6

On appelle vainqueur de Condorcet pour le profil $\mathcal{R}$ toute alternative $a_{i_0} \in A$ telle que : $a_{i_0} \succ_{Maj(\mathcal{R})} a_i \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., m\}$.

Exemple 2.1.1. Pour $A = \{a_1, a_2, a_3\}; N = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R} = (a_2a_1a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2)$.

On a : $n(a_2, a_1, \mathcal{R}) = 2 > n(a_1, a_2, \mathcal{R}) \Longrightarrow a_2 \succ_{Maj(\mathcal{R})} a_1$.

$n(a_2, a_3, \mathcal{R}) = 2 > n(a_3, a_2, \mathcal{R}) \Longrightarrow a_2 \succ_{Maj(\mathcal{R})} a_3$.

Donc le candidat a_2 est un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$, il est même l'unique vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$ comme nous le verrons à la proposition suivante.

Proposition 2.1.3

Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$.

S'il existe un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$, alors il est unique.

Preuve. Supposons que x et y sont deux vainqueurs de Condorcet pour $\mathcal{R}$.

Comme x est un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$ et $x \neq y$, alors $n(x, y, \mathcal{R}) > n(y, x, \mathcal{R})$ (1).

De même comme y est un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$ et $x \neq y$, alors

$n(y, x, \mathcal{R}) > n(x, y, \mathcal{R}) \quad (2)$.

(1) et (2) donnent une contradiction.

D'où lorsqu'il existe un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$, il est unique.

∎

Exemple 2.1.2. Le paradoxe de Condorcet

Pour $A = \{a_1, a_2, a_3\}; N = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R} = (a_1a_2a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2)$.

On a : $n(a_1, a_2, \mathcal{R}) = 2 > n(a_2, a_1, \mathcal{R}) \Rightarrow a_1 \succ_{Maj(\mathcal{R})} a_2 \Rightarrow a_2$ ne peut être un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$.

$n(a_2, a_3, \mathcal{R}) = 2 > n(a_3, a_2, \mathcal{R}) \Rightarrow a_2 \succ_{Maj(\mathcal{R})} a_3 \Rightarrow a_3$ ne peut être un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$.

$n(a_1, a_3, \mathcal{R}) = 1 < n(a_3, a_1, \mathcal{R}) \Rightarrow a_3 \succ_{Maj(\mathcal{R})} a_1 \Rightarrow a_1$ ne peut être un vainqueur de Condorcet pour $\mathcal{R}$.

Donc il n'y a pas de vainqueur de Condorcet pour le profil $\mathcal{R}$.

Notons que ceci est dû au fait que la partie stricte de la règle majoritaire n'est pas transitive sur le domaine universel $\mathcal{L}$; mais nous verrons que sur le domaine restreint des préférences unimodales la partie stricte de la règle majoritaire est transitive, ce qui garantit l'existence d'un vainqueur de Condorcet.

Proposition 2.1.4

Soit $\mathcal{R}^0 \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$.

Si $\mathcal{R}$ est unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$, alors la partie stricte de la règle majoritaire est transitive.

Preuve. Supposons que $\mathcal{R}$ est unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$ et la partie stricte de la règle majoritaire n'est pas transitive.

Alors $\exists a, b, c \in A$ tels que $a \succ_{Maj(\mathcal{R})} b, b \succ_{Maj(\mathcal{R})} c$ et $non(a \succ_{Maj(\mathcal{R})} c)$.

Nous pouvons supposer sans nuire à la généralité que $\mathcal{R}^0|\{a, b, c\} = abc$.

Comme $non(a \succ_{Maj(\mathcal{R})} c)$, alors $n(c, a, \mathcal{R}) \geq n(a, c, \mathcal{R})$, ce qui entraîne $n(c, a, \mathcal{R}) \geq \frac{n}{2}$ car $\mathcal{R} \in \mathcal{L}^N$.

De même $a \succ_{Maj(\mathcal{R})} b$, entraîne $n(a, b, \mathcal{R}) > n(b, a, \mathcal{R})$, ce qui donne $n(a, b, \mathcal{R}) > \frac{n}{2}$.

Or
$$\begin{aligned}
\#(\mathrm{N}(c, a, \mathcal{R}) \cap N(a, b, \mathcal{R})) &= \#N(c, a, \mathcal{R}) + \#N(a, b, \mathcal{R}) - \#(N(c, a, \mathcal{R}) \cup N(a, b, \mathcal{R})) \\
&= n(c, a, \mathcal{R}) + n(a, b, \mathcal{R}) - \#(N(c, a, \mathcal{R}) \cup N(a, b, \mathcal{R})) \\
&\geq n(c, a, \mathcal{R}) + n(a, b, \mathcal{R}) - n \text{ car } \#(N(c, a, \mathcal{R}) \cup N(a, b, \mathcal{R})) \leq n \\
&> \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - n \text{ car } n(c, a, \mathcal{R}) \geq \frac{n}{2} \text{ et } n(a, b, \mathcal{R}) > \frac{n}{2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

dotted

Donc $N(c, a, \mathcal{R}) \cap N(a, b, \mathcal{R}) \neq \emptyset$, par conséquent $\exists i_0 \in N / \mathcal{R}^{i_0}|\{a, b, c\} = cab$, ainsi b est surclassé dans $\mathcal{R}^{i_0}$ par a et c, ce qui contredit le fait que $\mathcal{R}$ est unimodal par rapport à $\mathcal{R}^0$.

D'où le résultat.

■

2.2. Résultat de caractérisation de Moulin

2.2.1. Quelques préliminaires

Considérons un ensemble $N = \{1, ..., n\}$ avec n agents $(n \in \mathbb{N}^*)$ et un ensemble A d'alternatives. Nous notons U_i l'ensemble des préférences de l'agent i (il est un sous ensemble de l'ensemble des préordres totaux sur A).

Nous identifierons les préférences aux fonctions d'utilité. En supposant que les domaines $U_1, U_2, ..., U_n$ sont tels que pour tout profil $(u_1, ..., u_n) \in U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ il existe un vainqueur de Condorcet noté $C(u_1, ..., u_n)$. Dummett et Farquharson (1961) ont montrés que la fonction de choix social $C : (u_1, ..., u_n) \mapsto C(u_1, ..., u_n)$ est non manipulable par tout agent ou toute coalition d'agents.

Dans la suite, nous nous limitons au contexte où un vainqueur de Condorcet existe toujours : nous supposons que $A = \mathbb{R}$ est la droite réelle, et que $\forall i \in N, U_i$ est l'ensemble S des préférences unimodales, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u \in S & \text{si et seulement s'il existe une alternative } a \text{ appelée meilleure alternative de } u\text{, telle que :} \\ \forall x, y \in \mathbb{R} & \begin{cases} x \leq y < a \Rightarrow u(x) \leq u(y) < u(a) \\ a < x \leq y \Rightarrow u(a) > u(x) \geq u(y). \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Nous identifions ainsi le préordre de préférence u avec toute fonction d'utilité qui lui est associée.

Soit $(u_1, ..., u_n) \in S^n$ un profil avec les meilleures alternatives correspondantes $(a_1, ..., a_n)$. Si $n = 2p + 1$, le vainqueur de Condorcet est le point médian noté $m(a_1, ..., a_n)$ et défini par :

$$m(a_1, ..., a_n) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \#\{i/a_i \leq m\} \geq p + 1 \\ et \\ \#\{i/a_i \geq m\} \geq p + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Notons que $m(a_1, ..., a_n)$ est l'un des a_i. Comme conséquence du résultat énoncé ci-dessus, nous obtenons que les fonctions de choix social correspondantes sont non manipulables et non manipulables collectivement. Une hypothèse de base du modèle est que les agents savent que leurs préférences sont unimodales : ils ne sont pas autorisés à déclarer des ordres non unimodaux. Dans ce travail, nous ajoutons une hypothèse qui implique une perte de généralité dans notre modèle : nous supposons que chaque agent déclare simplement sa meilleure alternative. En conséquence, nous définissons un mécanisme de vote comme une fonction

$$\begin{array}{rccc} \Pi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \Pi(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

Qui à tout $n-$uplet $(x_1, ..., x_n)$ de meilleures alternatives associe l'alternative sélectionnée $\Pi(x_1, ..., x_n)$. Une large classe de mécanismes est obtenue en considérant toutes les fonctions $\Pi^* : \; S^n \longrightarrow \mathbb{R}$, qui sont des mécanismes de prise de décision où la péférence de chaque agent est unimodale. À chaque mécanisme de vote Π (définit comme ci-dessus) nous pouvons évidemment associé une fonction Π^* définie par :

$\forall(u_1, ..., u_n) \in S^n, \forall(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall i = 1, ..., n \; a_i$ est la meileure alternative de u_i; $\Pi^*(u_1, ..., u_n)$
$\Pi(a_1, ..., a_n)$.

Ainsi, nos résultats caractérisant les mécanismes de vote non manipulables Π fournissent une information à propos de la non manipulabilité des mécanismes de prise de décision Π^* (puisque pour tout mécanisme de vote non manipulable Π, le mécanisme de vote associé Π^* est bien non manipulable). Mais nous ne donnons pas une caractérisation complète des mécanismes non manipulables Π^*.

Définition 2.2.1

On dit que le mécanisme de vote Π est non manipulable si :
$\forall i \in N, \forall u_i \in S$, de meilleure alternative associé $a_i, on\ a$: $\forall x_i \in \mathbb{R}, \; \forall x_{\hat{i}} \in \mathbb{R}^{n-1} \;\; u_i(\Pi(a_i, x_{\hat{i}})) \geq u_i(\Pi(x_i, x_{\hat{i}}))$
(Où $x_{\hat{i}} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ est le $(n-1)$-uplet des meilleures alternatives des autres votants en dehors du votant i).

Définition 2.2.2

On dit que Π est non manipulable par groupe si pour tout $\mathcal{S} \subseteq \{1, ..., n\}$ et pour tout profil de préférence $(u_i)_{i\in\mathcal{S}} \in S^{\mathcal{S}}$ avec les meilleures alternatives associés $a_{\mathcal{S}} = (a_i)_{i\in\mathcal{S}}$ nous avons :
$\forall x_{\mathcal{S}^C} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}^C}, \exists x_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}, \forall i \in \mathcal{S}, u_i(\Pi(x_{\mathcal{S}}, x_{\mathcal{S}^C})) > u_i(\Pi(a_{\mathcal{S}}, x_{\mathcal{S}^C})) \quad (3)$
Ici, $\mathcal{S}^C$ est le complémentaire de $\mathcal{S}$ dans N.

Le concept de non manipulabilité correspond à la notion de stabilité non coopérative de *l'équilibre de Nash* : aucun agent n'a intérêt à déclarer une alternative autre que sa meilleure alternative. Dans un mécanisme de vote non manipulable par groupe, cette propriété de stabilité est également vraie pour les coalitions : aucune coalition d'agents n'a intérêt à mentir collectivement sur leurs meilleures alternatives. La relation (3) ci-dessus est équivalente à dire que pour chaque profil $(u_1, ..., u_n) \in S^n$, le n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ de meilleures alternatives associés est un équilibre de Nash du jeu sous forme normale $\Gamma = (\{1, ..., n\}; \mathbb{R}^n; u_1 o\Pi, ..., u_n o\Pi)$.

Les exemples de mécanismes de vote non manipulables sont les mécanismes de vote de Condorcet :

$$\Pi(x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n) \; si \; n \; est \; impair \quad (4)$$

Les mécanismes de vote ci-dessus sont des membres particuliers d'une large classe de mécanismes de vote non manipulables que nous décrivons maintenant. Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$, si les nombres réels $x_1, ..., x_n$ sont ordonnés par ordre croissant de valeur, nous notons $\Pi_k(x_1, ..., x_n)$ le nombre classé au k-ième rang, alors le mécanisme de vote Π_k est non manipulable. Pour $k = 1$ et pour $k = n$, nous obtenons en particulier :

$\Pi_1(x_1, ..., x_n) = \inf(x_1, ..., x_n) \quad (5)$

$\Pi_n(x_1, ..., x_n) = \sup(x_1, ..., x_n) \quad (6).$

Le mécanisme de vote (5) est interprété comme suit : les alternatives inférieures sont socialement prisées.

Notation 2.2.1. S_N est l'ensemble des applications bijectives de N vers N.

Définition 2.2.3

Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un mécanisme de vote.

On dit que Π est anonyme si $\forall \sigma \in S_N, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \Pi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \Pi(x_1, ..., x_n)$.

Ainsi un mécanisme de vote anonyme traite les votants de façon égale.

Définition 2.2.4

Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un mécanisme de vote.

On dit que Π est efficient si $(\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in N, x_i = a) \Longrightarrow \Pi(x_1, ..., x_n) = a$.

Ainsi un mécanisme de vote efficient respecte l'opinion des votants lorsqu'ils sont unanimes.

La proposition suivante décrit une classe de mécanismes de vote non manipulables par groupe incluant tous les mécanismes précédemment décrit.

Proposition 2.2.1

Soit $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Le mécanisme de vote suivant :

$$\begin{array}{llll} \Pi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & \Pi(x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \quad (7)\ . \end{array}$$

est alors non manipulable par groupe, anonyme et efficient.

Notons que dans la définition de (7) nous faisons une extension directe à $(\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\})^{2n-1}$; alors que les valeurs de Π sont finies.

Preuve. Anonymat

Soient $\sigma \in S_N$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, montrons que $\Pi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \Pi(x_1, ..., x_n)$.

Posons $M = \{1, 2, ..., 2n-1\}; \forall i \in M, y_i = \begin{cases} x_i \text{ si } i \in N \\ \alpha_{i-n} \text{ sinon} \end{cases}$ et $\overline{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(i) \text{ si } i \in N \\ i \text{ sinon} \end{cases}$.

On a $\Pi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \Pi(x_{\overline{\sigma}(1)}, ..., x_{\overline{\sigma}(n)}); \forall a \in \mathbb{R}, \#\{i \in M/a \leq y_i\} = \#\{i \in M/a \leq y_{\overline{\sigma}(i)}\}$ et $\#\{i \in M/a \geq y_i\} = \#\{i \in M/a \geq y_{\overline{\sigma}(i)}\}$.

D'où $m(y_{\overline{\sigma}(1)}, ..., y_{\overline{\sigma}(2n-1)}) = m(y_1, ..., y_{2n-1})$ c'est à dire $\Pi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \Pi(x_1, ..., x_n)$.

Efficience

L'efficience de Π résulte du fait que $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \Pi(x_1, ..., x_n) \in [\inf_i x_i; \sup_i x_i]$.

En effet, fixons $(y_1, ..., y_{2n-1}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})^{n-1}$, alors $\#\{i/y_i \geq \inf_j y_j, j = 1, ..., n\} \geq n$.

Ainsi $m(y_1, ..., y_{2n-1}) \geq \inf_j y_j$ pour $j = 1, ..., n$

et de façon similaire $\#\{i/y_i \leq \sup_j y_j, j = 1, ..., n\} \geq n$

impliquant $m(y_1, ..., y_{2n-1}) \leq \sup_j y_j$ pour $j = 1, ..., n$.

Non manipulabilité par groupe

Supposons que Π est manipulable par groupe.

Soit $(u_i)_{i=1,...,n} \in S^n$ un profil de préférences avec les meilleures $(a_1, ..., a_n)$ tel que les agents de la coalition $\mathcal{S}$ soient inciter à déclarer $x_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ au lieu de $a_{\mathcal{S}}$:

$\forall i \in \mathcal{S} \;\; u_i(\Pi(x_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})) > u_i(\Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})) \quad (8)$

Par (8), nous avons $\Pi(x_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c}) \neq \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})$;

Supposons $\Pi(x_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c}) > \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})$ (9)

Puisque u_i est unimodale (voir (1)), les inégalités (8) *et* (9) impliquent

$\forall i \in \mathcal{S} \;\; a_i > \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})$ (10)

Par définition de Π, on a $\Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c}) = m(a_1, ..., a_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$; si nous posons $(y_1, ..., y_{2n-1}) = (a_1, ..., a_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$, nous avons : $\#\{j \in \{1, ..., 2n-1\}/y_j \leq \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})\} \geq n$

chaque y_i tel que $y_i \leq \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})$ correspond soit à un a_i avec $i \notin \mathcal{S}$ (par (10)) ou à un α_i.

Ainsi si nous posons $(z_1, ..., z_{2n-1}) = (x_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c}, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$, nous obtenons :

$\#\{j \in \{1, ..., 2n-1\}/z_j \leq \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})\} \geq n$ (11).

Notons que pour tout réel α, $n \leq \#\{j \in \{1, ..., 2n-1\}/z_j \leq \alpha\} \Rightarrow m(z_1, ..., z_{2n-1}) \leq \alpha$.

Alors (11) implique que : $\Pi(x_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c}) = m(z_1, ..., z_{2n-1}) \leq \Pi(a_{\mathcal{S}}, a_{\mathcal{S}^c})$.

Ceci est une contradiction.

■

Si aucun des nombres $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ n'est fini, alors le mécanisme de vote Π correspondant est l'un des Π_k défini plus haut, plus précisément on a :

$m(x_1, ..., x_n, -\infty, ..., -\infty) = \inf\{x_1, ..., x_n\}$;

$m(x_1, ..., x_n, +\infty, -\infty, ..., -\infty) = \Pi_2(x_1, ..., x_n)$;

$m(x_1, ..., x_n, +\infty, +\infty, -\infty, ..., -\infty) = \Pi_3(x_1, ..., x_n)$;

$m(x_1, ..., x_n, +\infty, ..., +\infty) = \sup\{x_1, ..., x_n\}$.

Considérons maintenant les mécanismes de vote (7) où $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ sont tous finis : ce qui équivaut à dire que la société a $(n-1)$ voix alors que chacun des agents a une seule voix. Ainsi les agents anonymes peuvent déclarer toute alternative arbitraire, mais dès que les préférences des agents diffèrent, les voix sociales $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ deviennent arbitraire entre-elles (par exemple si chaque x_i est plus grand que $\sup\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$, alors l'alternative sélectionnée $\inf\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ est l'alternative la plus proche de $\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$).

Nous pouvons finalement noter que les mécanismes de vote (7) contiennent aussi les mécanismes dans lesquels la société a seulement $(n-3)$ voix (prendre $\alpha_1 = +\infty, \alpha_2 = -\infty, \alpha_3, ..., \alpha_n$ finis) ou $(n-5)$ voix (prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = +\infty, \alpha_3 = \alpha_4 = -\infty, \alpha_5, ..., \alpha_n$ finis), etc...

2.2.2. Théorème de caractérisation

Théorème 2.2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le mécanisme de vote Π de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est non manipulable, anonyme et efficient ;

(ii) Il existe $(n-1)$ nombres réels $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \Pi(x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}). \quad (12)$$

Notons que pour les mécanismes de vote anonymes et efficients, la non manipulabilité est équivalente à la non manipulabilité par groupes (ceci découle de la proposition 2.2.1 et du théorème 2.2.1).

Proposition 2.2.2

Le mécanisme de vote Π de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est non manipulable et anonyme si et seulement s'il existe $(n+1)$ nombres réels $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ tels que :
$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \Pi(x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$.

En particulier un mécanisme de vote non manipulable et anonyme est non manipulable par groupes.

Preuve du théorème 2.2.1 et de la proposition 2.2.2

Etape 1

Pour chaque entier $n \geq 1$, nous notons par S_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ suivant :

$S_n = \{\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, \exists\, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} : \Pi(x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1})\}$.

Chaque élément de S_n est clairement un mécanisme de vote non manipulable par groupe et anonyme (la preuve est identique à celle de la proposition 2.2.1).

Seule l'efficience est violée puisque nous avons par exemple : $m(x_1, ..., x_n, \underbrace{\alpha, ..., \alpha}_{(n+1) \text{ fois}}) = \alpha$

Nous allons maintenant prouver que réciproquement tout mécanisme de vote non manipulable et anonyme appartient à S_n, Ce qui prouvera la proposition 2.2.2 et qui va nous rendre à montrer une implication du théorème à savoir, si $\Pi \in S_n$ et de plus est efficient, alors nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}, m(\underbrace{x, ..., x}_{n \text{ fois}}, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) = \Pi(x, ..., x) = x \quad (13)$

Ainsi, il est impossible d'avoir $\alpha_i > -\infty \quad \forall i \in \{1, ..., n+1\}$ (cela contredirait (13) pour $x < \inf \alpha_i$).

De même on ne peut avoir $\alpha_i < +\infty \quad \forall i \in \{1, ..., n+1\}$ (ceci contredirait (13) pour $x > \sup \alpha_i$).

Donc $\exists\ j, l \in \{1, ..., n+1\}$ tels que $\alpha_j = -\infty$ et $\alpha_l = +\infty$.

Comme $m(+\infty, -\infty, \beta_1, ..., \beta_{2k+1}) = m(\beta_1, ..., \beta_{2k+1})$ nous pouvons diminuer deux α_i dans $m(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$.

Ceci prouve que Π a la forme (7) désirée.

Etape 2

Nous montrons maintenant par induction sur n que tout mécanisme de vote non manipulable et anonyme entre n agents appartient à S_n .

Nous commençons par le cas trivial des mécanismes de vote entre 1 agent. Dire que $\Pi\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est non manipulable c'est dire que

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall u \in S$ (le peak de u est a) $\Rightarrow u(\Pi(a)) \geq u(\Pi(x))$

Soient $x, a \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\Pi(a) < \inf\{a, \Pi(x)\}$.

- Si $\Pi(a) < \Pi(x) \leq a$, alors considérons la fonction d'utilité unimodale associée au peak a, u définie par $\forall y \in \mathbb{R}\ \ u(y) = -|y - a|$.

  On a : $\Pi(a) < \Pi(x) \leq a \Longrightarrow \Pi(a) - a < \Pi(x) - a \leq 0 \Longrightarrow u(\Pi(a)) = \Pi(a) - a, u(\Pi(x)) = \Pi(x) - a$ et $u(\Pi(a)) < u(\Pi(x))$, ceci contredit la non manipulabilité de Π.
- Si $\Pi(a) < a < \Pi(x)$, alors considérons la fonction d'utilité unimodale associé au peak a, u définie par $\forall y \in \mathbb{R}$

$$u(y) = \begin{cases} \dfrac{\Pi(x) - \Pi(a)}{a - \Pi(a)}(y - a) & \text{si } y \leq a \\ a - y & \text{si } y \geq a. \end{cases}$$

  On a $u(\Pi(a)) = \Pi(a) - \Pi(x) < a - \Pi(x) = u(\Pi(x))$. Ce qui contredit le fait que Π est non manipulable.

Donc $\Pi(a) \geq \inf\{a, \Pi(x)\}$.

Un raisonnement similaire prouve que $\Pi(a) \leq \sup\{a, \Pi(x)\}$

Ainsi $\forall x, y \in \mathbb{R}\quad \Pi(x) \in [x, \Pi(y)]\qquad (14)$

$$\text{Posons } \begin{cases} \alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}} \Pi(x)\ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \beta = \sup_{x \in \mathbb{R}} \Pi(x)\ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

Nous déduisons de (14) que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Pi(x) \in [x, \alpha]$,

Donc pour $x \leq \alpha$(si α est fini), nous avons :

$\alpha \leq \Pi(x) \in [x, \alpha] \Longrightarrow \Pi(x) = \alpha.$

Par un raisonnement analogue, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ \Pi(x) \in [x, \beta]$

Donc pour $x \leq \beta$ (si β est fini), nous avons $\Pi(x) = \beta$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \leq x \leq \beta$ on a : $\Pi(x) \in [x, \alpha] \bigcap [x, \beta] = \{x\}$.

Notre fonction Π est définie comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Pi(x) = \begin{cases} \alpha \ \text{ si } \ x \leq \alpha \\ x \ \text{ si } \ \alpha \leq x \leq \beta \\ \beta \ \text{ si } \ x \geq \beta \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \Pi(x) = m(x, \alpha, \beta)$, ceci prouve bien que $\Pi \in S_1$.

Etape 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ nous supposons que notre résultat est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq n$ et nous le prouvons pour $n+1$. Soit

$$\begin{array}{llll} \Pi : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_0, x_1, ..., x_n) & \mapsto & \Pi(x_0, x_1, ..., x_n) \end{array}.$$

un mécanisme de vote non manipulable et anonyme entre $n+1$ agents.

- Si nous fixons x_0, alors $\psi\ :\ (x_1, ..., x_n) \mapsto \Pi(x_0, x_1, ..., x_n)$ est clairement un mécanisme de vote non manipulable et anonyme entre n agents. Par l'hypothèse d'induction, il appartient à S_n. Il existe alors $(n+1)$ fonctions $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telles que : $\forall (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \Pi(x_0, x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n, \alpha_1(x_0), ..., \alpha_{n+1}(x_0))$.
  Quitte à redéfinir les α_i, nous pouvons supposer que :
  $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \alpha_1(x_0) \leq \alpha_2(x_0) \leq ... \leq \alpha_{n+1}(x_0).$ (15)
- Si nous fixons maintenant $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $\Psi\ :\ x_0 \mapsto \Pi(x_0, x_1, ..., x_n)$ est un mécanisme de vote non manipulable et anonyme en 1 ; d'après l'étape 1, $\Psi \in S_1$ et par conséquent vérifie (14) qui se réécrit :
  $\forall x_0, x_0^{'} \in \mathbb{R},\ \Pi(x_0, x_1, ..., x_n) \in [x_0, \Pi(x_0^{'}, x_1, ..., x_n)]$ (16)

Nous fixons maintenant $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ et un indice k tel que $1 \leq k \leq n+1$

Nous pouvons remarquer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} m(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{k-1 \text{ fois}}, \underbrace{-\lambda, ..., -\lambda}_{n-k+1 \text{ fois}}, \alpha_1(x_0), ..., \alpha_{n+1}(x_0)) = \alpha_k(x_0).$$

La preuve de ce résultat est élémentaire.

En appliquant (16) pour $x_0, x_0^{'}$ fixés et avec :

$(x_1, ..., x_n) = (\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{k-1 \text{ fois}}, \underbrace{-\lambda, ..., -\lambda}_{n-k+1 \text{ fois}})$, nous obtenons pour chaque indice k :

$\forall x_0, x_0^{'} \in \mathbb{R} \;\; \alpha_k(x_0) \in [x_0, \alpha_k(x_0^{'})]$.

Cette propriété implique que $\alpha_k \in S_1$ (voir l'étape 2 : le fait que α_k prend quelques valeurs infinies n'affecte pas notre argument).

Alors α_k peut être écrit comme suit :

$\alpha_k(x_0) = m(x_0, a_k, b_k)$ où $-\infty \leq a_k \leq b_k \leq +\infty$. Et notre mécanisme de vote Π est écrit comme suit :

$\Pi(x_0, x_1, ..., x_n) = m(x_1, ..., x_n, m(x_0, a_1, b_1), ..., m(x_0, a_{n+1}, b_{n+1})$.

En utilisant la propriété d'anonymat de Π, nous prouvons que maintenant que :

$b_1 = a_2, ..., b_k = a_{k+1}, ..., b_n = a_{n+1}$ (17)

Premièrement, nous avons par (15) et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq k \leq n$

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \;\; m(x_0, a_k, b_k) \leq m(x_0, a_{k+1}, b_{k+1})$

Qui est équivalent à $a_k \leq a_{k+1}$ et $b_k \leq b_{k+1}$.

Supposons que $a_{k+1} < b_k$, nous pouvons alors choisir $(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\begin{cases} a_{k+1} \leq x_0 < x_n \leq b_k \\ x_1 = ... = x_{n-k} = \lambda < x_0 \\ x_{n-k+1} = ... = x_{n-1} = \mu > x_n. \end{cases}$$

Ceci implique que :

$\forall k^{'} \leq k-1, \; \alpha_{k'}(x_0) \leq \alpha_k(x_0) = \alpha_{k+1}(x_0) = x_0 \leq \alpha_{k''}(x_0) \;\;\; \forall k^{''} \geq k+2$

Donc $\Pi(x_0, x_1, ..., x_n) = m(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{n-k \text{ fois}}, \underbrace{\mu, ..., \mu}_{k-1 \text{ fois}}, x_n, \underbrace{\alpha_{k'}(x_0), ..., \alpha_{k'}(x_0)}_{k-1 \text{ fois}}, x_0, \underbrace{\alpha_{k''}(x_0), ..., \alpha_{k''}(x_0)}_{n-k \text{ fois}}) = x_0$

De façon similaire, nous avons $\forall k^{'} \leq k-1, \; \alpha_{k'}(x_n) \leq \alpha_k(x_n) = \alpha_{k+1}(x_n) = x_n \leq \alpha_{k''}(x_n) \;\;\; \forall k^{''} \geq k+1$

Donc $\Pi(x_0, x_1, ..., x_n) = m(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{n-k \text{ fois}}, \underbrace{\mu, ..., \mu}_{k-1 \text{ fois}}, x_0, \underbrace{\alpha_{k'}(x_n), ..., \alpha_{k'}(x_n)}_{k-1 \text{ fois}}, x_n, \underbrace{\alpha_{k''}(x_n), ..., \alpha_{k''}(x_n)}_{n-k \text{ fois}}) = x_n$

Cette hypothèse $x_0 \neq x_n$ contredit ainsi l'anonymat de Π.

Nous avons prouvés que $b_k \leq a_{k+1}$.

Supposons maintenant $b_k < a_{k+1}$, nous pouvons choisir $(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\begin{cases} b_k \leq x_0 < x_n \leq a_{k+1} \\ x_1 = ... = x_{n-k} = \lambda < x_0 \\ x_{n-k+1} = ... = x_{n-1} = \mu > x_n. \end{cases}$$

Ceci implique que :

$\forall k^{'} \leq k-1,\ \alpha_{k'}(x_0) \leq \alpha_k(x_0) = b_k < a_{k+1} = \alpha_{k+1}(x_0) =\leq \alpha_{k''}(x_0)\quad \forall k^{''} \geq k+2 \quad (18)$

Donc $\Pi(x_0, x_1, ..., x_n) = m(\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{n-k \text{ fois}}, \underbrace{\mu, ..., \mu}_{k-1 \text{ fois}}, x_n, \underbrace{\alpha_{k'}(x_0), ..., \alpha_{k'}(x_0)}_{k-1 \text{ fois}}, b_k, a_{k+1}, \underbrace{\alpha_{k''}(x_0), ..., \alpha_{k''}(x_0)}_{n-k \text{ fois}}) = x_n$

Ainsi nous avons montrés que $b_k = a_{k+1}$ qui est (17).

Si nous posons $a_{n+1} = b_{n+1}$, alors nous obtenons l'expression de Π suivante :

$\Pi(x_0, x_1, ..., x_n) \;=\; m(x_1, ..., x_n, m(x_0, a_1, a_2), ..., m(x_0, a_k, a_{k+1}), ..., m(x_0, a_{n+1}, a_{n+2}),$ avec $-\infty \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq a_{k+1} \leq ... \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \infty \quad (19)$

La dernière étape dans la preuve du théorème est d'établir que pour toute suite croissante $a_1, a_2, ..., a_{n+2}$ de ce type nous avons pour chaque $x_0, x_1, ..., x_n$:

$m(x_1, ..., x_n, m(x_0, a_1, a_2), ..., m(x_0, a_k, a_{k+1}), ..., m(x_0, a_{n+1}, a_{n+2})) = m(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_{n+2}) \quad (20).$

Etape 4

Nous prouvons la formule (20).

Premièrement, supposons $x_0 \leq a_1$. Le terme de gauche dans (20) est alors :

$m(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_{n+1}) = \theta \quad (21)$

puisque les $n+1$ agents sont majoritaires, on obtient : $a_1 \leq \theta \leq a_{n+1}$. Nous utilisons alors l'observation suivante :

Si $m(y_1, ..., y_p) = \theta$ et $y_{p+1} \leq \theta \leq y_{p+2}$, alors $m(y_1, ..., y_p, y_{p+2}) = \theta$. Ceci implique que :

$m(x_0, x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_{n+2}) = \theta.$

La preuve de (20) dans le cas $x_0 \geq a_{n+2}$ est similaire.

Supposons maintenant que pour un certain k, $1 \leq k \leq n+1$; on ait $a_k \leq x_0 \leq a_{k+1}$.

Le terme de gauche dans (20) est alors : $m(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_{k-1}, x_0, a_{k+1}, ..., a_{n+1}) = \theta^{'}$.

Puisque $a_2 \leq \theta^{'} \leq a_{n+1}$ nous obtenons $a_1 \leq \theta^{'} \leq a_{n+2}$ et par la même observation :

$m(x_0, x_1, ..., x_n, a_1, a_2, ..., a_{n+2}) = \theta^{'}$

Ceci conclut la preuve de la proposition 2.2.2 et du théorème 2.2.1 ■

Quoique les mécanismes de vote anonymes soient moins intéressant pour la théorie du choix social, il est valable de caractériser tous les mécanismes de vote non manipulables.

Proposition 2.2.3

Le mécanisme de vote Π entre n agents est non manipulable si et seulement s'il existe pour chaque sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\{1, ..., n\}$ (l'ensemble vide inclu), un réel $a_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ tel que :

$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Pi(x_1, ..., x_n) = \inf_{\mathcal{S} \subseteq \{1,...,n\}}[\sup_{i \in \mathcal{S}}\{x_i, a_{\mathcal{S}}\}] \quad (22)$

Par exemple, les mécanismes de vote non manipulables entre deux agents prennent la forme suivante :

$\Pi(x_1, x_2) = \inf\{a, \sup(x_1, b_1), \sup(x_2, b_2), \sup(x_1, x_2, c)\}$

Afin de décrire ces mécanismes de vote, supposons $c < b_i < a$ pour $i = 1, 2$

Remarque 2.2.1. Notons que $a \leq b_i \Rightarrow a \leq \sup(x_i, b_i)$ de façon que a peut être simplement retiré de l'expression de Π, et de même $b_i < c \Rightarrow \sup(x_i, b_i) \leq \sup(x_1, x_2, c)$ de façon que $\sup(x_i, b_i)$ peut être retiré dans la même expression ; ainsi ces inégalités sont vraies si et seulement si les quatres termes sont utilisés dans l'expression de Π.

En outre, en réordonnant les agents, nous pouvons supposer $b_1 \geq b_2$. Nous avons pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$c \leq \Pi(x_1, x_2) \leq a \text{ et } \begin{cases} \Pi(x_1, x_2) = a \Leftrightarrow x_1, x_2 \geq a \\ \Pi(x_1, x_2) = c \Leftrightarrow x_1, x_2 \leq c. \end{cases}$$

Ainsi l'intervalle $[a, c]$ est imposé pour l'alternative à sélectionner.

- Si pour un certain i, j tels que $x_i < a$ et $x_j > c$, alors Π est écrit comme suit :
  $\Pi(x_1, x_2) = \inf\{\sup(x_1, b_1), \sup(x_2, b_2), \sup(x_1, x_2)\}$.
- Si $b_1 = b_2$, alors $\Pi(x_1, x_2) = m(x_1, x_2, b)$.
- Sinon les deux agents ont des influences différentes sur Π . On illustrer les expressions ci-dessus de façon similaire pour les différentes positions relatives de x_1, x_2 et b_1, b_2.

Preuve de la proposition 2.2.3.

Notons que dans la formule (22) , si deux $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont tels que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ et $a_{\mathcal{T}} \leq a_{\mathcal{S}}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{i \in \mathcal{T}}\{x_i, a_{\mathcal{T}}\} \leq \sup_{i \in \mathcal{S}}\{x_i, a_{\mathcal{S}}\}$ de façon analogue que le terme de droite ne joue aucun rôle dans (22) et $a_{\mathcal{S}}$ peut être remplacé de façon équivalente par $a_{\mathcal{T}}$

Nous pouvons donc supposer :

$\forall \mathcal{S}, \mathcal{T},\ \mathcal{T} \subset \mathcal{S} \Rightarrow a_{\mathcal{S}} \leq a_{\mathcal{T}}$ (23)

Désignons par Σ_n l'ensemble des mécanismes de vote Π qui prennent la forme (22) pour une famille de $(a_{\mathcal{S}})_{\mathcal{S}\subseteq\{1,\dots,n\}}$ de paramètres vérifiant (23). Nous avons $S_1 = \Sigma_1$.

Nous prouvons la proposition 2.2.3 par induction sur n .

Supposons que la propriété reste vraie jusqu'à n, nous prenons un mécanisme de vote non manipulable

$$\begin{array}{llll} \Pi : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_0, x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{array} .$$

entre $n+1$ agents. Pour chaque x_0 fixé,

$$\begin{array}{llll} \psi : & \mathbb{R}^{n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \psi(x_1, \dots, x_n) = \Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

est un mécanisme de vote non manipulable entre n joueurs, donc appartient à Σ_n par hypothèse d'induction. Ainsi Π peut s'écrire :

$\Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \inf_{\mathcal{S}\subseteq\{1,\dots,n\}}[\sup_{i\in\mathcal{S}}\{x_i, a_{\mathcal{S}}(x_0)\}]$ (24)

construisons une coalition non vide $\mathcal{S}_0$ et deux nombres constants x_0 et x_0' tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathcal{S}_0, x_i = \mu \\ \forall i \notin \mathcal{S}_0, x_i = \lambda \end{cases}$$

Nous obtenons alors par (24) : $\lim\limits_{(\lambda,\mu)\to(+\infty,-\infty)} \Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \inf\limits_{\mathcal{S}\subseteq\mathcal{S}_0} a_{\mathcal{S}}(x_0)$

Par (23) le terme de droite est simplement $a_{\mathcal{S}_0}(x_0)$.

Ainsi nous obtenons : $\lim\limits_{(\lambda,\mu)\to(+\infty,-\infty)} \Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = a_{\mathcal{S}_0}(x_0)$.

De même $\lim\limits_{(\lambda,\mu)\to(+\infty,-\infty)} \Pi(x_0', x_1, \dots, x_n) = a_{\mathcal{S}_0}(x_0')$.

Pour les mêmes raisons, pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ fixés,

$$\begin{array}{llll} \Psi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x_0 & \mapsto & \Psi(x_0) = \Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

est un élément de Σ_1 ; il doit donc vérifier (14). Les deux conditions ci-dessus impliquent que $a_{\mathcal{S}_0}$ vérifie également (14) pour tout ensemble non vide $\mathcal{S}_0$. D'où $a_{\mathcal{S}_0} \in S_1 = \Sigma_1$ et peut s'écrire : $a_{\mathcal{S}_0} = \inf\{\alpha_{\mathcal{S}_0}, \sup(\beta_{\mathcal{S}_0}, x_0)\}$.

Un travail analogue permet de montrer qu'une fonction écrite de la forme :

$\inf_{\mathcal{S}\subseteq\{1,...,n\}}[\sup_{i\in\mathcal{S}}\{x_i, \inf\{\alpha_{\mathcal{S}}, \sup(\beta_{\mathcal{S}}, x_0)\}\}]$, peut encore s'écrire sous la forme (22).

La dernière étape de la proposition 2.2.3 est de prouver que tout mécanisme de vote du type (22) est non manipulable . On vérifie que toute fonction de la forme (22) satisfait :

$\forall i\ \forall x_i, x_i^{'} \in \mathbb{R}\ \ \forall x_{\hat{\imath}} \in \mathbb{R}^{n-1}\ \ \Pi(x_i, x_{\hat{\imath}}) \in [x_i; \Pi(x_i^{'}, x_{\hat{\imath}})]$. ■

Notons que Σ_n, l'ensemble des mécanismes de prise de décision non manipulables est stable par l'opération de supremum et d'infimum (non nécessairement fini). On prouve que Σ_n est le plus petit sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ stable par infimum et supremum et contenant les fonctions élémentaires

$$\begin{cases} \Pi^i(x_1, ..., x_n) = x_i \\ a^{\Pi^i(x_1,...,x_n)} = a \ \text{ pour } i = 1, ..., n \text{ et } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En particulier, la suite $\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_n, ...$ a la propriété suivante dite de *décentralisation* : en supposant que l'ensemble des n agents est partitionné en p coalitions avec les cardinalités respectives $n_1, ..., n_p$. Soient $\Pi_1 \in \Sigma_{n_1}, ..., \Pi_p \in \Sigma_{n_p}$ des mécanismes de vote entre les agents de la partition en coalitions. Finalement, soit $\Pi_0 \in \Sigma_p$ un mécanisme de vote non manipulable entre p joueurs.

Alors le mécanisme de vote composé Π définit par :

$\Pi(x_1, ..., x_n) = \Pi_0(\Pi_1(x_1, ..., x_{n_1}), \Pi_2(x_{n_1+1}, ..., x_{n_1+n_2}), ..., \Pi_p(x_{n-n_p+1}, ..., x_n))\ \ \forall(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

appartient à Σ_n. Ceci équivaut à dire que si la décision finale est prise à l'issue d'une procédure à deux étapes où un comité initial est partitionné en sous-comités, chaque sous-comité devant choisir un représentant, alors aucune manipulation ne pourra survenir dans la procédure entière si chaque étape est indépendamment non manipulable.

Comme résultat final nous pouvons observer qu'un mécanisme de vote non manipulable est aussi non manipulable par groupe (la preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.1).

Remarque 2.2.2. (a) Tous les résultats de notre travail sont facilement transposables à un contexte plus élémentaire où A est fini et ses éléments sont totalement ordonnés suivant un ordre de référence donné.

(b) On vérifie facilement que certains mécanismes de vote non manipulables Π^* ne provienent pas des mécanismes de vote non manipulables Π décrit ci-dessus.

Considérons par exemple le mécanisme de vote suivant concernant un seul agent :

Pour chaque $z \in S$ avec le meilleure alternative associée a, nous prenons :

$$\Pi^*(z) = \begin{cases} a \text{ si } a \leq -1 \text{ ou } a \geq 1 \\ -1 \text{ si } -1 \leq a \leq 1 \text{ et } z(-1) > z(1) \\ 1 \text{ si } -1 \leq a \leq 1 \text{ et } z(-1) \leq z(1). \end{cases}$$

Il est clair que ce mécanisme est non manipulable (le votant ne gagne rien en présentant un z de façon non sincère) mais il ne peut pas dérivé d'un mécanisme de vote du sens ci-dessus.

Chapitre Trois

Implications pédagogiques

L'opportunité de rédiger ce mémoire nous a offert l'occasion de faire nos premiers pas d'autonomie en termes d'investigations scientifiques et de déploiement de nos aptitudes à comprendre, à construire un raisonnement logique sans oublier la maîtrise indispensables des outils de nouvelles technologies de l'information et de la communication incontournables pour tout enseignant en ces moments où les apprenants sont aspirés par les téléphones androïde, ipad, tablette...

Nous nous proposons de relever dans ce chapitre quelques repères de l'impact de cet exercice sur le système éducatif.

3.1. Comprendre, mobiliser et construire des connaissances

Pour mener à terme ce travail, il a fallu puiser dans nos compétences à pouvoir comprendre une situation-problème, à proposer un formalisme et d'étudier les propriétés des objets mathématiques obtenus. Par transposition, le document de travail sur lequel porte notre compte rendu, Moulin (1980), peut être perçu comme une ressource pédagogique dont le contenu doit être partager avec des apprenants. C'est ainsi que nous avons décomposé la ressource pour en donner une reconstitution en termes de définitions des concepts à étudier ; en termes de propriétés qui vérifient les concepts et en termes de résultats qu'on peut déduire en les mettant ensemble. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien d'un enseignant de mathématiques que nous aspirons à être. Nous pensons notamment à l'élaboration de nos futurs cours à construire à partir de diverses ressources éducatives.

3.2. Aptitude à mener un raisonnement logique

Le raisonnement mathématique permet d'associer, de différencier, de catégoriser, de mesurer, d'évaluer, de tester des hypothèses, de démontrer un processus, de tirer des conclusions à partir d'informations données ou de lois générales, de retrouver des informations manquantes par logique, d'aller des causes aux conséquences et inversement, de mettre au jour les contradictions ou incohérences, de justifier un résultat,...C'est donc un type de raisonnement essentiel pour comprendre et analyser le monde mais aussi pour beaucoup d'opérations de la vie quotidienne et professionnelle nous demandant d'analyser logiquement des situations et de prendre des décisions. On pourra donc ainsi développer chez les élèves des capacités qui contribueront à l'avancement vers des nouvelles connaissances. Celles ci ont pour but d'initier l'élève à la pratique de la recherche de la vérité par le biais du raisonnement en le rendant capable d'utiliser adéquatement les ressources documentaires, les méthodes d'investigation et d'analyse appropriées. L'élève sera donc à même de développer les capacités suivantes :

☞ Réfuter une proposition lorsqu'elle est fausse en donnant un contre-exemple ;
☞ Prouver une proposition lorsqu'elle est vraie en utilisant un raisonnement logique ;
☞ La valeur et la pertinence du nouveau savoir produit par le travail ;
☞ L'aptitude à intégrer les différentes connaissances ;
☞ L'aptitude à construire une problématique ;
☞ L'aptitude à la recherche : rigueur méthodologique, logique de l'argumentation et de la démonstration ;
☞ La qualité de la présentation selon les normes d'un travail scientifique ;
☞ La qualité de la présentation matérielle et typographique.

3.3. Initiation à l'usage des nouvelles technologies de l'information et de la communication

Pendant la rédaction de ce mémoire, nous avons eu à utiliser les outils des technologies de l'information et de la communication ; il s'agit : du **micro-ordinateur**, du **vidéo-projecteur**, du logiciel **Latex** (de son compilateur Miktex, de ses éditeurs TeXnicCenter, TeXmaker, TeXstudio et Winedit) ou d'internet. L'emploi de ces outils informatiques peut nous aider à faire des recherches sur internet pour actualiser les contenus à enseigner, à préparer un cours, à saisir une épreuve et à présenter une leçon. Notons que l'usage du vidéoprojecteur peut permettre d'illustrer une définition ou une propriété lorsqu'elle est introduite.

Ce mémoire a certainement contribué au développement de nos compétences à savoir :

☞ Réaliser les supports de qualité telles que les épreuves de mathématiques ;

☞ Préparer et présenter une leçon ;

☞ Utiliser un vidéprojecteur lors d'une leçon.

✠ Conclusion et perspectives ✠

Au terme de ce travail dont le but était de rendre compte des travaux de Moulin (1980) sur la manipulation des fonctions de choix social en cas d'unimodalité des préférences individuelles, plusieurs points forts retiennent notre attention.

Pour faciliter la compréhension, nous avons commencé par des préliminaires qui nous ont amenés à présenter les relations binaires sur un ensemble qui modélisent les préférences individuelles. Avant de nous intéresser aux préférences unimodales et localement unimodales que nous avons dénombrées, nous avons proposé une formule du nombre total de préordres totaux sur un ensemble fini. À la suite de ces préalables, nous avons continué par la manipulation et l'unimodalité. Nous avons proposé une caractérisation des fonctions de choix social non manipulables lorsqu'il y a deux alternatives à l'aide des jeux simples avant de présenter le résultat de caractérisation de Moulin. Les implications pédagogiques que nous avons enfin évoquées portent sur le plus valu de cet exercice sur le plan professionnel.

Toute la contribution de Moulin (1980) se fait sur le domaine des préférences unimodales ; il serait intéressant de regarder ce que devient ses résultats sur le domaine des préférences localement unimodales que nous avons présentées.

✠ Bibliographie ✠

[1] Andjiga N. G., Mbih B., and Moyouwou I. (2005) *Strategic behavior under complete ignorance : approval and Condorcet-type voting rules* . IMHOTEP,VOL. 6, No.1 , 8 : 1-8.

[2] Andjiga N. G., Mbih B., and Moyouwou I. (2008) *Manipulation of voting schemes with restricted beliefs*. Journal of Mathematical Economics, 44 : 1232-1242.

[3] Arrow J. K. (1951) *Social choice and individual values*. new haven ct. Yale University Press.

[4] Barberà S., Sonnenschein H., Zhou L. (1991) *Voting by committees*. Econometrica, 59(3) : 595-609.

[5] Black D. (1948) *On the rationale of group decision making*. The Journal of Political Economy, 561 : 23-34.

[6] Debreu G. (1954) *Representation of a preference ordering by a numerical function*. Inthrall Editors decision processes, 561 : 23-34.

[7] Dummett and Farquharson (1961) *Stability in Voting*. Econometrica, 29 : 33-44.

[8] Gibbard A. (1973) *Manipulation of voting schemes : a general result*. Econometrica 41 : 388-410.

[9] Moulin H. (1980) *On strategy-proofness and single peakedness*. Public choice 35 :437-455.

[10] Satterthwaite M. (1975) *Strategy-proofness and Arrow's conditions : Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, volume 10*. Journal of Economic Theory 26 : 187-217.

[11] Tchantcho B. et Diffo L. (2009) *A note on the manipulation of social choice correspondence*. Mathematics and Social Sciences 47(186) : 65-75.