# COURBURE RIEMANNIENNE DE LA MÉTRIQUE DE SASAKI

**Mémoire de DI.P.E.S II présenté par :**


**NJOMI TCHAKOUNTE BORIS KEVIN**

Matricule : 14Y412

Licencié et DI.P.E.S 1 en Mathématiques

Sous la direction de :

**Dr KOUOTCHOP WAMBA PIERRE.M**

Chargé de Cours

**Université de Yaoundé I**

**École Normale Supérieure de Yaoundé**


Année académique 2018 - 2019

# Dédicace

Je dédie ce mémoire à ma petite sœur **NJOMI NANA ANGE ROXANNE** .

# REMERCIEMENTS

Le moment est venu pour moi de remercier tous celles et ceux qui m'ont soutenu depuis mon entrée à l'ENS et particulièrement lors de la rédaction de ce mémoire.

♡ Tout d'abord mon créateur et père de mon Seigneur **JÉSUS-CHRIST** sans qui je ne suis rien.

♡ Ensuite mon encadreur et modèle le Docteur **KOUOTCHOP WAMBA PIERRE** pour ses orientations,ses encouragements et sa patience envers moi.

♡ Merci à **tous les enseignants de L'ENS de Yaoundé et particulièrement ceux du département de mathématiques** qui se sont évertués à nous façonner durant les cinq dernières années.

♡ Je remercie également mes parents **monsieur et madame Njomi** papa et maman vous êtes toujours là pour me soutenir en toutes circonstances ces mots sont peu pour exprimer ma gratitude à votre endroit. Je vous aime de tout mon cœur.

♡ Un chaleureux merci à vous mes petits frères **ABEL,TONY et BIGOR** et ma petite soeur **ANGE** vous constituez ma source de motivation.

♡ Un grand merci à mon grand père **monsieur DINGUE RAYMOND et madame** pour leur soutien constant.

♡ Merci à la **famille NKOUANWOU** de m'avoir adopté et considéré comme un fils à part entière.

♡ Mes oncles et tantes qui sont toujours présents pour moi je vous dis grandement merci du fond de mon cœur.

♡ Merci à mes cousins et cousines pour tout leur amour manifesté.

♡ Un grand merci aux familles **MBOGNING et FOUEJIO** pour leur soutien pendant toute ma formation .

♡ A mes grands frères **EWANH NZIE** et **EWANE CHRISTIAN** je dis merci pour le soutien

♡ Merci également à tous mes amis et proches **Dr Ngobe, Nkemeni, Youmbi, Nkpwek, Kentio, Akoka, Mané Ev, Kamgang, Njifendji, Ngasseu, Hitaye, Yanou et Tuatat** pour leur soutien moral oh combien important.

♡ Je ne saurai terminer sans remercier mes camarades de promotion en particulier les pleins droits avec qui nous avons eu de grands moments d'échange et de partage.

# Déclaration sur l’honneur

Le présent mémoire est une oeuvre originale du candidat et n’a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité pour une autre évaluation académique.Toutefois, les contributions externes on été dûment mentionnées en bibliographie.

Signature du candidat

.

NJOMI TCHAKOUNTÉ BORIS KÉVIN

# RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous présentons, définissons et donnons quelques propriétés des métriques naturelles sur le fibré tangent d'une variété riemannienne et dans le cas particulier de la métrique de Sasaki, nous présentons le calcul de la courbure riemannienne induite.

**Expréssions clées** : variété riemannienne, métriques naturelles, métrique de Sasaki, courbure riemannienne.

# ABSTRACT

In this dissertation, we present natural metrics on the tangent bundle of a riemannian manifold and for the particular case of the SASAKI's metric, we calculate thducted riemannian curvature.e in

**Keys expressions** : riemannian manifold, natural metrics, sasaki's metric, riemannian curvature.

# Table des matières

# Introduction

C'est en 1958 que le mathématicien Japonais S.Sasaki dans [10] utilise la métrique $g$ d'une variété riemannienne $(M,g)$ pour construire une métrique $\hat{g}$ sur le fibré tangent $TM$ de $M$ appelée la métrique de Sasaki. À sa suite dans [3] en 1962, Dombrowski calcule le crochet de Lie des champs de vecteurs de $TM$ en utilisant fortement la théorie des relèvements. En 1971, Kowalski dans l'ouvrage [8] utilise les crochets de Lie sur $TM$ pour déterminer la formule de la connexion de Lévi-Civita du fibré tangent équipé de la métrique de Sasaki puis en calcule la courbure riemannienne en fonction de la connexion de Lévi-Civita et de la courbure riemannienne associée à $g$. L'objectif de notre travail est de définir et de donner quelques propriétés des métriques naturelles sur le fibré tangent d'une variété différentiable puis de présenter dans le cas particulier de la métrique de SASAKI le calcul de la courbure riemannienne induite. Pour y parvenir, nous avons subdivisé notre travail en trois chapitres :

• Au chapitre 1 intitulé champs de tenseurs sur un fibré vectoriel, nous présentons tout d'abord les généralités sur les fibrations différentiables, puis nous étudions les fibrés vectoriels réels, ensuite nous construisons quelques fibrés vectoriels réels particuliers, et enfin nous présentons les champs de tenseurs sur un fibré vectoriel réel.

• Au chapitre 2 intitulé éléments de géométrie riemannienne, nous présentons et étudions les notions ci-après : connexion linéaire sur un fibré vectoriel réel, connexion linéaire sur une variété différentiable, variété riemannienne, connexion de Lévi-Civita et tenseur de courbure riemannienne.

• Au chapitre 3 dont le titre est courbure riemannienne induite par la métrique de Sasaki, les notions évoquées sont les suivantes : relèvements de fonctions, relèvements des champs de vecteurs, métriques naturelles, et enfin connexion de Lévi-Civita et tenseur de courbure riemannienne associé à la métrique de Sasaki. Á la fin de ce chapitre nous présentons la construction de la métrique de Sasaki dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^2$ et le calcul de la courbure riemannienne induite.

Dans ce document, différentiable signifie de classe $C^\infty$. Les notions de géometrie différentielle sont considérées comme acquises et nous utilisons fréquemment la convention de sommation d'EIN-

STEIN qui consiste à simplifier des écritures en élidant le symbole somme par exemple , nous noterons $x_iy_jz_k$ avec $i \in \{1, ..., n\}$ ; $j \in \{1, ..., m\}$ et $k \in \{1, ..., t\}$ au lieu de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{t} x_iy_jz_k$.

Chapitre Un

# CHAMPS DE TENSEURS SUR UN FIBRÉ VECTORIEL RÉEL

## 1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FIBRATIONS DIFFÉRENTIABLES

### 1.1.1 Variété fibrée différentiable

**Définition 1.1.** On appelle **variété fibrée différentiable** ou **variété fibrée**, un triplet $(Y, M, \pi)$ où $Y$ et $M$ sont des variétés différentiables et $\pi : Y \to M$ est une submersion surjective. La variété $Y$ est appelé espace total, $M$ la base et $\pi$ la projection de $Y$ sur $M$.

**Notation 1.1.1.** Pour chaque point $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ est une sous variété de $Y$ qu'on appelle fibre au dessus de $x$ et on le note habituellement par $Y_x$.

**Exemple 1.1.** Soient $M$ et $S$ deux variétés différentiables.On désigne par $pr_1 : M \times S \to M$ la première projection. Le triplet $(M \times S, M, pr_1)$ est une variété fibrée dite triviale.

**Rappel** Soit $M$ une variété différentiable et $x$ un élément de $M$ ; $C^\infty_x(\mathbb{R}, M)$ l'ensemble des courbes différentiables $\alpha$ définies dans un voisinage de zéro et vérifiant $\alpha(0) = x$. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_x$ sur $C^\infty_x(\mathbb{R}, M)$ par $\alpha \mathcal{R}_x \beta \Leftrightarrow$ il existe une carte $(U, u)$ de $M$ en $x$ telle que $\frac{d(u \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \frac{d(u \circ \beta)}{dt}|_{t=0}$. On a : $T_xM = C^\infty_x(\mathbb{R}, M)/_{\mathcal{R}_x}$.

**Exemple 1.2.** Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m > 0$, pour $x \in M$, on note par $T_xM$ l'espace vectoriel tangent de $M$ au point $x$ et par $TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM$ l'espace tangent de $M$. Soit $\pi_M : TM \to M$ l'application qui à tout couple $(x, v_x) \in TM$ (où $v_x = [\gamma] \in T_xM$) fait correspondre le point $x$ (origine du vecteur $v_x$). Il existe sur $TM$ une structure de variété différentiable telle que $\pi_M : TM \to M$ soit une submersion surjective.

En effet, soit $\{(U_i, u_i), i = 1, ..., m\}$ un atlas de $M$. Alors, $\{(\pi_M^{-1}(U_i), \varphi_i), i = 1, ..., m\}$ est un atlas de

$TM$ tel que $\forall i \in \{1, ..., m\}$ et pour tout système de coordonnées locales $(u_i^1, ..., u_i^m)$ de $(U_i, u_i)$, on ait

$$\begin{aligned} \varphi_i : \pi_M^{-1}(U_i) &\to u_i(U_i) \times \mathbb{R}^m \\ [\gamma] &\mapsto (u_i(\gamma(0)), \frac{d(u_i^1 \circ \gamma)(t)}{dt}|_{t=0}, ..., \frac{d(u_i^m \circ \gamma)(t)}{dt}|_{t=0}) \end{aligned}$$

Le triplet $(TM, M, \pi_M)$ est donc une variété fibrée. Cette variété est appelée **fibré tangent de** $M$.

### 1.1.2 Systèmes de coordonnées locales adaptés.

**Définition 1.2.** Soit $(Y, M, \pi)$ une variété fibrée telle que $dimM = m$ et $dimY = m + n$. Soit $(y^1, ..., y^{m+n})$ un système de coordonnées locales de $Y$ au dessus d'un ouvert $U \subset Y$. Le système de coordonnées $(y^1, ..., y^{m+n})$ est dit **adapté** si pour chaque $a, b \in U$ tels que $\pi(a) = \pi(b)$, on a : $y^i(a) = y^i(b)$ pour tout $i = 1, ..., m$.

Soit $h \in Y$, un système de coordonnées adapté peut être construit à partir d'un système de coordonnées de $M$ et de la structure locale de $Y$. En effet, soit $(x^1, ...., x^m)$ un système de coordonnées de $M$ au point $\pi(h)$ au dessus d'un ouvert $V_{\pi(h)} \subset M$. On choisit $V_{\pi(h)}$ de sorte que $V_{\pi(h)} \subset \pi(U_h)$. Au point $pr_2(\varphi_h(h)) \in W_h$, on fabrique un système de coordonnées $(y^1, ..., y^n)$ au dessus de $W_h$. On définit alors

$$\begin{aligned} y : \varphi_h^{-1}(V_{\pi(h)} \times W_h) &\to \mathbb{R}^{m+n} \\ a &\mapsto (x^i(\pi(a)), y^\alpha(pr_2(\varphi_h(a))))_{1\leq i, \leq m; 1\leq \alpha \leq n} \end{aligned}$$

Car $pr_1(\varphi_h(a)) = \pi(a)$. On obtient ainsi un système de coordonnées adapté qu'on note habituellement $(x^i, y^\alpha)$.

**Exemple 1.3.** En utilisant l'exemple 1.2 , on en déduit un système de coordonnées locales adaptés de $TM$ qu'on note $(x^i, \dot{x}^i)$ où $(x^1, ..., x^m)$ est un système de coordonnées locales de $M$ au dessus d'un ouvert $U$ de $M$. On a : $\begin{cases} x^i([\dot{\gamma}]) = x^i(\gamma(0)) \\ \dot{x}^i([\dot{\gamma}]) = \frac{d(x^i \circ \gamma)(t)}{dt}|_{t=0} \end{cases}$

### 1.1.3 Sections et morphismes de variétés fibrés.

Dans toute cette sous section, $(Y, M, \pi)$ est une variété fibrée.

**Définition 1.3.** On dit qu'une application différentiable $s : M \to Y$ est **une section différentiable** de $Y$ si elle vérifie la condition $\pi o s = Id_M$.

**Notation 1.1.2.** On note par $\Gamma(Y)$ l'ensemble des sections différentiables de $Y$.

**Exemple 1.4.** Pour le fibré trivial $(M \times S, M, pr_1)$, une section est le graphe d'une application différentiable $\Phi : M \to S$. Ainsi, $\Gamma(M \times S)$ s'identifie à $C^\infty(M, S)$.

**Exemple 1.5.** Une section différentiable du fibré $(TM, M, \pi_M)$ est un champ de vecteurs sur $M$. Dans ce cas, $\Gamma(TM)$ se note $\mathfrak{X}(M)$. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ , on utilise un système de coordonnées adapté $(x^i, \dot{x}^i)$ de $TM$ et en notant $X^i = \dot{x}^i oX$ on écrit : $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

**Définition 1.4.** Soit $(Y, M, \pi)$ une variété fibrée, **une section locale** est une application différentiable $s : U \to Y$ où $U$ est une sous variété ouverte de $M$ vérifiant :$\pi \mid_U os = Id_U$.

On note par $\Gamma_U(Y)$ l'ensemble de toutes les sections locales de Y au dessus $U$.

**Proposition 1.1.1.** *Soit $\Phi \in \Gamma_U(Y)$ une section locale de Y au dessus d'une sous-variété ouverte $U$. L'ensemble $\Phi(U)$ est une sous variété de $Y$. Plus précisément $\Phi : U \to Y$ est un plongement.*

*Démonstration.* Comme $\pi \mid_U o\Phi = Id_U$, on déduit que : pour tout $x \in U$, $T_{\Phi(x)}\pi oT_x\Phi = Id_{T_xM}$. Ce qui entraine que $T_x\Phi : T_xM \to T_{\Phi(x)}Y$ est injective. En effet, pour $h_x, k_x \in T_xM$,

$$\begin{aligned}
T_x\Phi(h_x) = T_x\Phi(k_x) &\Rightarrow T_{\Phi(x)}\pi oT_x\Phi(h_x) = T_{\Phi(x)}\pi oT_x\Phi(k_x) \\
&\Rightarrow Id_{T_xM}(h_x) = Id_{T_xM}(k_x) \\
&\Rightarrow h_x = k_x
\end{aligned}$$

d'où, $\Phi$ est une immersion injective.

D'autre part, $\pi \mid_U \circ\Phi = Id_U \Rightarrow \Phi o\pi \mid_U o\Phi = \Phi$. Par conséquent $\Phi$ est un homéomorphisme de $U$ sur $\Phi(U)$ car $\pi \mid_{\Phi(U)}: \Phi(U) \to U$ est continue. Donc $\Phi$ est un plongement et $\Phi(U)$ est une sous-variété de $Y$. □

**Définition 1.5.** Soit $(Y_1, M, \pi_1)$ et $(Y_2, N, \pi_2)$ deux variétés fibrées. On dit qu'une application différentiable $f : Y_1 \to Y_2$ est **un morphisme de variétés fibrées** si f envoie une fibre de $Y_1$ dans une fibre de $Y_2$.

**Remarque 1.1.** Soit $f : Y_1 \to Y_2$ un morphisme de variétés fibrées, il induit une application $\bar{f} : M \to N$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\
\pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
M & \overrightarrow{\bar{f}} & N
\end{array}$$

En effet, soit $x \in M$. $f$ envoie $Y_{1x}$ dans une fibre $Y_{2y}$ de $Y_2$. On pose $y = \bar{f}(x)$. L'application $\bar{f}$ est bien définie car si $f$ envoie une fibre de $Y_{1x}$ dans $Y_{2z}$ avec $y \neq z$, alors $Y_{2y} \cap Y_{2z} \neq \emptyset$ ; ce qui contredit

le fait que les fibres sont deux à deux disjointes. Pour $h_x \in Y_{1x}$, on a : $\pi_2 \circ f(h_x) = \bar{f}(x) = \bar{f} \circ \pi_1(h_x)$. Ainsi, $\pi_2 \circ f = \bar{f} \circ \pi_1$, il vient que $\bar{f} \circ \pi_1$ est différentiable.
On dit que $f$ est un morphisme de variétés fibrées au dessus de $\bar{f}$. On note généralement $(\bar{f}, f) : (Y_1, M, \pi_1) \to (Y_2, N, \pi_2)$. Soit $\tilde{f} : M \to N$ une autre application différentiable vérifiant $\pi_2 \circ f = \tilde{f} \circ \pi_1$ et $x \in M$. Pour tout $h_x \in Y_{1x}$, on a : $\pi_2 \circ f(h_x) = \tilde{f}(x) = \bar{f}(x)$. Donc $\tilde{f} = \bar{f}$, d'où l'unicité.

**Exemple 1.6.** Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables et $f : M \to N$ une application différentiable. Le couple $(f, Tf)$ est un morphisme de variétés fibrées de $(TM, M, \pi_M)$ vers $(TN, N, \pi_N)$. Localement, soit $(x^i)$ et $(y^j)$ des systèmes de coordonnées locaux de $M$ et $N$ au dessus des ouverts $U \subset M$ et $V \subset N$ tels que $f(U) \subset V$. L'expression locale de $Tf$ est donnée par : pour tout $X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_x \in T_xM$, $\begin{cases} y^j o T f(X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_x) & = f^j(x) \\ \dot{y}^j o T f(X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})_x) & = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} X^i \end{cases}$ où $f^j = y^j o f o u^{-1} : u(U) \to \mathbb{R}$.

### 1.1.4 Fibrations différentiables

**Définition 1.6.** On appelle **fibration différentiable** (ou simplement fibration) toute variété fibrée $(E, M, \pi)$ telle que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ dans $M$, une variété différentiable $S$ et un difféomorphisme $\varphi : U \times S \to \pi^{-1}(U)$ telle que $\pi(\varphi(y, s)) = y$ quels que soient $y \in U$ et $s \in S$.

Le couple $(U, \varphi^{-1})$ est appelé **une trivalisation locale** de $E$ tandis que $(U, \varphi)$ est **une application repère**. Pour tous $x, y \in U$, les fibres $\pi^{-1}(x)$ et $\pi^{-1}(y)$ sont difféomorphes. Lorsque toutes les fibres sont difféomorphes à une variété $S$, on dit que $(E, M, \pi)$ est une fibration de fibre type $S$.

**Lemme 1.1.** *Soit $(E, M, \pi)$ une fibration telle que la variété $M$ est connexe. Toutes les fibres de $E$ sont difféomorphes à une variété $S$.*

*Démonstration.* Soit $x_o \in M$,on désigne par $S$ la fibre de $E$ au dessus de $x_o$, on a : $S = \pi^{-1}(x_o)$. On pose : $A = \{x \in M$ tels que $E_x$ est difféomorphe à $S\}$. $A$ est non vide car $x_o \in A$. D'autre part, pour $x \in A$, il existe $(U, \varphi)$ une application repère $\varphi : U \times S \to \pi^{-1}(U)$ telle que $x \in U$. Comme $\varphi|_{\{y\}\times S} : \{y\} \times S \to E_y$ est un difféomorphisme, il vient que $U \subset A$. Donc $A$ est un ouvert de $M$. Soit $x \in \bar{A}$, pour une trivialisation locale $(U, \varphi)$ telle que $x \in U$, on a : $U \cap A \neq \emptyset$. Soit $y \in U \cap A$, $E_y$ est difféomorphe à $S$. Comme $y \in U$, $E_y$ est difféomorphe à $E_x$ et par conséquent $E_x$ est difféomorphe à $S$. Donc $x \in S$, d'où $\bar{A} = A$. Ainsi, $A$ est un ouvert fermé de M et comme $A$ est non vide et $M$ connexe, il vient que $A = M$. □

**Définition 1.7.** Soient $(E_1, M, \pi_1)$ et $(E_2, N, \pi_2)$ deux fibrations. On dit qu'un couple $(\bar{f}, f)$ est **un morphisme de fibrations** si et seulement si $(\bar{f}, f)$ est un morphisme de variétés fibrées. Si en plus $\bar{f} : M \to N$ et $f : E_1 \to E_2$ sont des difféomorphismes, on dit que $(\bar{f}, f)$ est un isomorphisme de fibrations et on a : $(\bar{f}, f)^{-1} = (\bar{f}^{-1}, f^{-1})$.

**Proposition 1.1.2.** *Soient $(\bar{f}, f)$ et $(\bar{g}, g)$ deux morphismes de fibrations. Le couple $(\bar{g}o\bar{f}, gof)$ est un morphisme de fibrations. C'est la composée de $(\bar{f}, f)$ et $(\bar{g}, g)$.*

*Démonstration.* Elle découle de la définition de morphisme de fibration. □

**Vocabulaire**

Lorsque $M = N$ et $\bar{f} = Id_M$, on dit que $f$ est **un M-morphisme** de fibrations.

**Lemme 1.2.** *Soient $\bar{f} : U_1 \to U_2$ un difféomorphisme et $g : U_1 \times S_1 \to S_2$ une application différentiable telle que pour tout $x \in M$, $g(x, .) : S_1 \to S_2$ est un difféomorphisme (resp. une submersion), alors l'application*

$$\begin{aligned} f : U_1 \times S_1 &\to U_2 \times S_2 \\ (x, s) &\mapsto (\bar{f}(x), g(x, s)) \end{aligned}$$

*est un difféomorphisme ( resp. une submersion).*

*Démonstration.* Soit $(x, s) \in U_1 \times S_1$, on a : pour tout $(h_x, h_s) \in T_xU_1 \times T_sS_1$,
$T_{(x,s)}f(h_x, h_s) = (T_x\bar{f}(h_x), T_sg(x, .)(h_s) + T_xg(., s)(h_x))$, on a :
$T_{(x,s)}f(h_x, h_s) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_x\bar{f}(h_x) = 0 \\ T_sg(x, .)(h_s) + T_xg(., s)(h_x) = 0 \end{cases}$. Comme $T_x\bar{f}$ est injective, il vient que $h_x = 0$. On obtient alors l'équation $T_sg(x, .)(h_s) = 0$.
Comme $g(x, .) : S_1 \to S_2$ est un difféomorphisme, il vient que $h_s = 0$. Donc $T_{(x,s)}f$ est bijective et par conséquent $f$ est un difféomorphisme local. D'autre part, pour $(x_1, s_1) \in U_1 \times S_1$, on a :

$$f(x, s) = f(x_1, s_1) \Rightarrow \begin{cases} \bar{f}(x) = \bar{f}(x_1) \\ g(x, s) = g(x_1, s_1) \end{cases}$$

□

comme $\bar{f}$ est bijective, il vient que $x = x_1$ et par conséquent $g(x, s) = g(x, s_1)$, donc $s = s_1$. D'où $f$ est bijective.
Soit $(y, t) \in U_2 \times S_2$, il existe $x \in U_1$ tel que $f(x) = y$. Comme $g(x, .) : S_1 \to S_2$ est un difféomorphisme, il existe $s \in S_1$ tel que $g(x, s) = t$. D'où $f$ est surjective et par conséquent bijective.
On suppose que $g(x, .) : S_1 \to S_2$ est une submersion. Soit $(k_{\bar{f}(x)}, k_{g(x,s)}) \in T_{\bar{f}(x)}U_2 \times T_{g(x,s)}S_2$.

Il existe $h_x \in T_xU_1$ tel que $T_x\bar{f}(h_x)) = k_{\bar{f}(x)}$. Comme $T_sg(x,.) : T_sS_1 \to T_{g(x,s)}S_2$ est surjective, il existe $k_s \in T_sS_1$ tel que $T_sg(x,.)(h_s) = k_{g(x,s)} - T_xg(.,s)(h_x)$. On prends le couple $(h_x, h_s) \in T_xU_1 \times T_sS_1$, on a : $T_{(x,s)}f(h_x, h_s) = (k_{\bar{f}(x)}, k_{g(x,s)})$, ce qui montre que f est une submersion.

**Théorème 1.1.** *Soient $(E_1, M_1, \pi_1)$ et $(E_2, M_2, \pi_2)$ deux fibrations, et $(\bar{f}, f)$ un morphisme de fibrations de $E_1$ vers $E_2$ tels que $\bar{f} : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme. Alors, $(\bar{f}, f)$ est un morphisme de fibration si et seulement si pour tout $x \in M_1$, l'application induite $f_x : E_{1x} \to E_{2x}$ est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* $\Leftarrow$) Soit $x \in M_1$, il existe une carte $(U_1, \varphi_1)$ de $E_1$ , $(U_2, \varphi_2)$ de $E_2$ telles que $\bar{f}(U_1) \subset U_2$. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} \varphi_2 o f o \varphi_1^{-1} : U_1 \times S_1 &\to U_2 \times S_2 \\ (x, s) &\mapsto (f(x), \bar{f}(x, s)) \end{aligned}$$

Pour $x$ fixé, l'application partielle $\bar{f}(x, .) : S_1 \to S_2$ est un difféomorphisme , donc $\varphi_2 o f o \varphi_1^{-1}$ est un difféomorphisme local. Il reste à montrer que $f$ est bijective. Soient $y_1, y_2 \in E_1$ tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Alors, $\pi_2 o f(y_2) = \pi_2 o f(y_1)$ , ie $\bar{f}(\pi_1(y_1)) = \bar{f}(\pi_2(y_2))$ , donc $\pi_1(y_1) = \pi_2(y_2) = x$ $y_1, y_2 \in E_{1x}$ et par conséquent $f_x(y_1) = f_x(y_2)$ d'où $y_1 = y_2$. Donc $f$ est injective. De plus, soit $z \in E_2$, $\pi_2(z) = x_2 \in M_2$. Il existe $x_1 \in E_1$ tel que $\bar{f}(x_1) = \pi_2(z) = x_2$. Comme $f_{x_1} : E_{1x_1} \to E_{2x_2}$ est bijective, il existe $y \in E_{1x_1}$ tel que $f_{x_1}(y) = z$. Ainsi, $f$ est surjective et par conséquent $f$ est bijective. □

### 1.1.5 Image réciproque d'une fibration

**Proposition 1.1.3.** *Soient $(E_1, M_1, \pi_1)$ et $(E_2, M_2, \pi_2)$ deux fibrations. L'application $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to M_1 \times M_2$ est une submersion et le triplet $(E_1 \times E_2, M_1 \times M_2, \pi_1 \times \pi_2)$ est une fibration.*

*Démonstration.* Soit $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$. Il existe des variétés $S_1$ et $S_2$ et des difféomorphismes $\varphi_1 : U_1 \times S_1 \to \pi_1^{-1}(U_1)$ et $\varphi_2 : U_2 \times S_2 \to \pi_2^{-1}(U_2)$ tels que $\pi_i o \varphi_i(y_i, s) = y_i$ pour tout $i = 1, 2$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi : U_1 \times U_2 \times S_1 \times S_2 &\to \pi_1^{-1}(U_1) \times \pi_2^{-1}(U_2) \\ (y_1, y_2, s_1, s_2) &\mapsto (\varphi_1(y_1, s_1), \varphi_2(y_2, s_2)) \end{aligned}$$

$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ est un difféomorphisme et pour tout $(y_1, y_2, s_1, s_2) \in U_1 \times U_2 \times S_1 \times S_2$,

$$\begin{aligned}\pi_1 \times \pi_2 o\varphi(y_1, y_2, s_1, s_2) &= (\pi_1 \times \pi_2)(\varphi_1(y_1, s_1), \varphi_2(y_2, s_2)) \\ &= (\pi_1(\varphi_1(y_1, s_1)), \pi_2(\varphi_2(y_2, s_2))) \\ &= (y_1, y_2)\end{aligned}$$

Donc $(E_1 \times E_2, M_1 \times M_2, \pi_1 \times \pi_2)$ est une fibration. □

Soient $X$ et $Y$ deux variétés différentiables et $f : X \to Y$ une application différentiable.

**Définition 1.8.** On dit que $f$ est **transversale** au dessus d'une sous-variété $Z \subset Y$ si :pour tout $x \in f^{-1}(Z)$, $T_{f(x)}Y = T_x f(T_x X)) + T_{f(x)}Z$.

**Lemme 1.3.** *Si $f : X \to Y$ est* ***transversale*** *au dessus de $Z$ alors $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété de $X$.*

*Démonstration.* Soit $x \in f^{-1}(Z)$, $f(x) \in Z$. Il existe un ouvert $V$ un ouvert de $Y$ contenant $f(x)$ et $\varphi : V \to \mathbb{R}^{m-n}$ une submersion telle que $V \cap Z = \varphi^{-1}(0)$ où $dimY = m$ et $dimZ = n$. On pose $U = f^{-1}(V)$ et $\Phi = \varphi o f : U \to \mathbb{R}^{m-n}$.
Montrons que $U \cap f^{-1}(Z) = \Phi^{-1}(0)$.
Soit $z \in U \cap f^{-1}(Z)$. On a : $f(z) \in Z$ et $f(z) \in V$ et par conséquent $\varphi(f(z)) = 0$ et donc $z \in \Phi^{-1}(0)$, on a : $\varphi(f(z)) = 0$ et $f(z) \in V$, par conséquent,$f(z) \in Z$. D'où $z \in U \cap f^{-1}(Z)$.
Montrons maintenant que $\Phi = \varphi o f : U \to \mathbb{R}^{m-n}$ est une submersion surjective.
On a : $T_y\Phi = T_{f(y)}\varphi o T_y f : T_y X \to \mathbb{R}^{m-n}$ Soit $v \in \mathbb{R}^{m-n}$, il existe $v_y \in T_{f(y)}Y$ tel que $T_{f(y)}\varphi(v_y) = v$. Comme $v_y \in T_{f(y)}Y$, $v_y = T_y f(u_y) + w_y$ où $w_y \in T_{f(y)}Z$. Il existe $\gamma : [0, 1] \to Z \cap V$ tel que $\gamma(0) = f(y)$ et $\dot{\gamma}(0) = w_y$. $T_{f(y)}\varphi(w_y) = \frac{d(\varphi o f)}{dt}(t) \mid_{t=0} = 0$ car $(\varphi o\gamma)(t) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}T_y\Phi(u_y) &= T_{f(y)}\varphi o T_y f(u_y) \\ &= T_{f(y)}\varphi(v_y - w_y) \\ &= T_{f(y)}\varphi(v_y) \\ &= v\end{aligned}$$

Ainsi, $T_y\Phi$ est surjective et par conséquent $\Phi$ est une submersion surjective. D'où $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété de $Y$. □

**Théorème 1.2.** *Soient $(E, M, \pi)$ et $f : N \to M$ une application différentiable. On désigne par $f^*E$ l'ensemble des couples $(x, e) \in N \times E$ tels que $f(x) = \pi(e)$.*

1. *$f^*E$ est une sous-variété fermée de $N \times E$.*

2. *Le triplet* $(f^*E, N, p_1)$ *est une fibration dont la fibre est difféomorphe à une fibre de Eet* $p_1$ *est la restriction de la première projection* $N \times E \to N$ *à* $f^*E$.
3. *Le couple* $(pr_2, f)$ *est un morphisme de fibration de* $(f^*E, N, p_1)$ *vers* $(E, M, \pi)$.

*Démonstration.* On pose : $f^*E = \{(x, e) \in N \times E, telque f(x) = \pi(e)\}$. On considère l'application

$$(f, \pi) : N \times E \to M \times M$$
$$(x, e) \mapsto (f(x), \pi(e))$$

Elle est transversale au dessus de la diagonale $\Delta = \{(x, x), x \in M\}$. En effet,

$$\begin{aligned} T_{(x,e)}(f, \pi)(N \times E) &= T_x f(T_x N) \times T_e \pi(T_e E) \\ &= T_x f(T_x N) \times T_{\pi(e)} M \end{aligned}$$

Soit $a \in M$ tel que $f(x) = \pi(e) = a$ et $(h_a, k_a) \in T_a M \times T_a M$, on a : $(h_a, k_a) = (0, k_a - h_a) + (h_a, h_a)$
Comme $(0, k_a - h_a) \in T_x f(T_x N) \times T_x M$, il vient que :$T_{(a,a)}(M \times M) = T_x f(T_x N) \times T_a M + T_{(a,a)}\Delta$
Donc $(f, \pi)$ est transversale au dessus de la diagonale. Ainsi, $(f, \pi)^{-1}(\Delta) = f^*E$ est une sous variété de $N \times E$. $pr_1$ désigne la première projection , pour tout $x \in N$, $f(x) \in M$. Il existe $V$ un ouvert de $M$, une sous variété $S$ et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(V) \to V \times S$ tel que $pr_1 o\varphi = \pi |_{\pi^{-1}(V)}$. On pose $U = f^{-1}(V)$ et l'application

$$\Phi : U \times S \to pr_1^{-1}(U)$$
$$(x, s) \mapsto \varphi^{-1}(f(x), s)$$

est un difféomorphisme et forme une application repère de $(U, \Phi)$. Pour tout $x \in N$, on a :

$$\begin{aligned} pr_1^{-1}(x) &= \{(y, e) \in f^*E / pr_1(y) = x\} \\ &= \{(y, e) \in f^*E / f(x) = \pi(e)\} \\ &\simeq \{e \in E / e \in \pi^{-1}(f(x))\} \\ &\simeq \pi^{-1}(f(x)) \end{aligned}$$

Donc $pr_1^{-1}(x)$ est difféomorphe à $\pi^{-1}(f(x))$. Comme le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{pr_2} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

on déduit que $(pr_2, f)$ est un morphisme de fibrations. □

**Notation 1.1.3.** On note souvent $f^*E$ par $N \times_M E$.

**Corollaire 1.1.1.** *Soient* $(E_1, M, \pi_1)$ *et* $(E_2, M, \pi_2)$ *deux fibrations. On note par* $E_1 \times_M E_2$ *l'ensemble des couples* $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ *tels que* $\pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)$*. Le triplet* $(E_1 \times_M E_2, M, \pi_1 \times_M \pi_2)$ *est une fibration.*

*Démonstration.* Comme $\pi_1$ et $\pi_2$ sont des submersions surjectives, $(\pi_1, \pi_2) : E_1 \times E_2 \to M \times M$ est une submersion. Ainsi, $(\pi_1, \pi_2)^{-1}(\Delta) = E_1 \times_M E_2$ est une sous-variété fermée de $E_1 \times E_2$.Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E_1 \times_M E_2 \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] & E_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ E_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & M \end{tikzcd}$$

□

**Définition 1.9.** La fibration $E_1 \times_M E_2$ est appelée **produit fibré de** $E_1$ **et** $E_2$ au dessus de $M$.

**Remarque 1.2.** Pour tout $x \in M$, on a $(E_1 \times_M E_2)_x = E_{1x} \times E_{2x}$

# 1.2 FIBRÉ VECTORIEL RÉEL

## 1.2.1 Définition et exemples

Soit $\lambda = (E, M, \pi)$ une fibration, on suppose que pour tout $x \in M$ la fibre $\pi^{-1}(x) = E_x$ est dotée d'une structure d'espace vectoriel réel.

**Définition 1.10.** On dit que $\lambda$ est un **fibré vectoriel réel** de fibre type un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V$ si les conditions suivantes sont réunies :

1. Pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U$ de $M$ contenant $x$ et un difféomorphisme $\varphi : U \times V \to \pi^{-1}(U)$ qui vérifie $\pi(\varphi(y, v)) = y$ pour tout $(y, v) \in U \times V$.
2. Pour tout $y \in U$, l'application partielle $\varphi(y, .) : V \to E_y$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Notation 1.2.1.** Le couple $(U, \varphi^{-1})$ est appelé une trivialisation locale de $E$ et l'application $\varphi$ est appelée application repère.

**Remarque 1.3.** Soient $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel réel de fibre type $V$ et $(e_1, , , e_n)$ une base de $V$. Soit $(U, \varphi^{-1})$ une trivialisation locale de $E$ au point $x \in M$. Pour tout $i = 1, ..., n$, on pose

$$\begin{aligned} \epsilon_i : U &\to E \\ y &\mapsto \varphi(y, e_i) \end{aligned}$$

On a : $\pi o \epsilon_i(y) = \pi(\varphi(y, e_i)) = y$. Donc $\epsilon_i$ est une section section locale de $E$ au dessus de $U$. Comme pour tout $y \in U$ $\varphi(y, .) : V \to E_y$ est un isomorphisme d'espace vectoriel réel, on en déduit que $\{\epsilon_i, i = 1, ..., n\}$ est une base de $E_y$. On dit que la famille $\{\epsilon_1(y), ..., \epsilon_n(y)\}$ est une base de sections de $E$ au dessus de $U$.

**Exemple 1.7.** Soient $M$ une variété différentiable et $V$ un espace vectoriel réel . Le triplet $(M \times V, M, pr_1)$ est un fibré vectoriel réel de fibre type $V$.

**Exemple 1.8.** Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m \geq 1$. La fibration $(TM, M, \pi_M)$ est un fibré vectoriel réel de fibre type $\mathbb{R}^m$.

**Remarque 1.4.** Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel réel de fibre type $V$ tel que $dimV = n$ et $dimM = m$. La variété différentiable $E$ (espace total) est de dimension $m + n$.
En effet, soit $\tilde{x} \in E$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$. Il existe un ouvert $U$ de $M$ contenant $x$ , un difféomorphisme $\pi : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ tel que $pr_1(\varphi(\tilde{y})) = \pi(\tilde{y})$ pour tout $\tilde{y} \in \pi^{-1}(U)$. On choisit $U$ de sorte qu'il soit inclus dans le domaine d'une carte $(U_1, u_1)$ de $M$ au point $x$. On note par $u$ la restriction de $u_1$ à $U$ et $\theta : V \to \mathbb{R}^n$ un isomorphisme. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) &\to u(U) \times \mathbb{R}^n \\ \tilde{y} &\mapsto (u(\pi(\tilde{y})), \theta(pr_2(\varphi(\tilde{y})))) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme . Ce qui montre que $dimE = m + n$. Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel réel de fibre type $V$. On définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma : E \times_M E &\to E \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) &\mapsto \tilde{x} + \tilde{y} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} \times E &\to E \\ (\lambda, \tilde{x}) &\mapsto \lambda\tilde{x} \end{aligned}$$

elles sont bien définies grâce à la structure d'espace vectoriel de $E_x$ pour tout $x \in M$.

**Théorème 1.3.** *Soit $(E, M, \pi)$ une fibration de fibre type un espace vectoriel $V$ avec $dimV = n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(E, M, \pi)$ est un fibré vectoriel réel de fibre type $V$.*
2. *Toutes les fibres de $E$ sont dotées d'une structure d'espace vectoriel et pour tout $x \in M$, il existe $U$ un ouvert de $M$ contenant $x$ et $n$ sections $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ de $E$ au dessus de $U$ telles que : pour tout $y \in M$, la famille $\{\epsilon_1(y), ..., \epsilon_n(y)\}$ forme une base de $E_y$.*

3. *Il existe des applications* $\sigma : E \times_M E \to E$ *et* $\mu : \mathbb{R} \times E \to E$ *telles que pour tout* $x \in M$, $\sigma(E_x \times E_x) \subset E_x$ , $\mu(\mathbb{R} \times E_x) \subset E_x$, *le triplet* $(E_x, \sigma|_{E_x \times E_x}, \mu|_{\mathbb{R} \times E_x})$ *est un fibré vectoriel réel et il existe une application repère* $\varphi$ *au dessus de* $U$ *telle que : pour tout* $y \in U$, *l'application partielle* $\varphi(y, .) : E_y \to V$ *est un isomorphisme d'espace vectoriels.*

### 1.2.2 Morphismes de fibrés vectoriels

Soient $(E_1, M_1, \pi_1)$ et $(E_2, M_2, \pi_2)$ deux fibrés vectoriels de fibre type $V_1$ et $V_2$ respectivement.

**Définition 1.11.** Un triplet $(\bar{f}, f, \varphi)$ est un morphisme de fibrés vectoriels de $(E_1, M_1, \pi_1)$ vers $(E_2, M_2, \pi_2)$ si :

1. $(\bar{f}, f)$ est un morphisme de fibrations de $(E_1, M_1, \pi_1)$ vers $(E_2, M_2, \pi_2)$.
2. Pour tout $x \in M_1$, l'application $f_x \equiv f|_{E_{1x}}: E_{1x} \to E_{2\bar{f}(x)}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
3. L'application $\varphi : V_1 \to V_2$ est : $\mathbb{R}$- linéaire.

**Exemple 1.9.** Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables de dimensions respectives $m$ et $n$. Soit $f : M \to N$ une application différentiable. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ définie de la manière suivante : $\varphi = Id_{\mathbb{R}^m}$ si $m = n$ ; $\varphi = pr_{m,n}$ si $m > n$ et $\varphi = j_{m,n}$ si $n > m$.

Où

$$pr_{m,n} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$(x^1, ..., x^n, ..., x^m) \mapsto (x^1, ..., x^n)$$

et

$$j_{m,n} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$(x^1, ..., x^m) \mapsto (x^1, ..., x^m, 0, ..., 0)$$

Il est clair que le triplet $(f, Tf, \varphi)$ est un morphisme de fibrés vectoriels de $(TM, M, \pi_M)$ vers $(TN, N, \pi_N)$.

**Notation 1.2.2.** Dans la suite, on omettra en général l'application $\varphi$ sauf si cela pose une confusion, de sorte qu'on notera simplement par $(\bar{f}, f)$ le morphisme de fibrés vectoriels ou par $f$ s'il n'y a pas non plus de confusion sur $\bar{f}$.

**Définition 1.12.** Si $(\bar{f}, f)$ est un morphisme de fibrés vectoriels tels que $f$ et $\bar{f}$ sont des difféomorphismes, on dit que $(\bar{f}, f)$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

# 1.3 CONSTRUCTION DES FIBRÉS VECTORIELS

Soient $(E_1, M_1, \pi_1)$ et $(E_2, M_2, \pi_2)$ deux fibrés vectoriels de fibre type $V_1$ et $V_2$ respectivement.

## 1.3.1 Le fibré vectoriel $E_1 \oplus E_2$

Pour tout $x \in M$, on définit la somme directe externe des espaces vectoriels $E_{1x}$ et$E_{2x}$ qu'on note $E_{1x} \oplus E_{2x}$, on pose $E_1 \oplus E_2 = \bigcup_{x\in M} E_{1x} \oplus E_{2x}$. On définit alors l'application

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : E_1 \oplus E_2 \to M$$
$$E_{1x} \oplus E_{2x} \ni h \mapsto x$$

Plus précisément, pour $h = h_1 \oplus h_2 \in E_{1x} \oplus E_{2x}$, on a : $\pi_1 \oplus \pi_2(h_1 \oplus h_2) = \pi_1(h_1) = \pi_2(h_2)$

**Proposition 1.3.1.** *Le triplet $(E_1 \oplus E_2, M, \pi_1 \oplus \pi_2)$ est un fibré vectoriel réel de fibre type $V_1 \oplus V_2$.*

*Démonstration.* Soit $x \in M$, pour tout $k = 1, 2$, il existe un voisinage ouvert $U_k$ de $x$ et un difféomorphisme $\varphi^k : U_k \times V_k \to \pi_k^{-1}(U_k)$ tel que $\pi_k(\varphi^k(y, v)) = y$ pour tout $(y, v) \in U_k \times V_k$. Pour tout $y \in U_k$, l'application partielle $\varphi^k(y, .) : V_k \to E_{ky}$ est un isomorphisme. On pose $U = U_1 \cap U_2$ et on considère l'application

$$\varphi^1 \oplus \varphi^2 : U \times (V_1 \oplus V_2) \to (\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(U)$$
$$(y, v_1 \oplus v_2) \mapsto \varphi^1(y, .) \oplus \varphi^2(y, .)(v_1 \oplus v_2)$$

où $\varphi^1(y, .)\oplus\varphi^2(y, .)(v_1\oplus v_2) = \varphi^1(y, v_1)\oplus\varphi^2(y, v_2)$. Il est clair que pour tout $(y, v_1\oplus v_2) \in U\times(V_1\otimes V_2)$, on a : $\pi_1 \oplus \pi_2(\varphi^1 \oplus \varphi^2(y, v_1 \oplus v_2)) = y$ puisque l'application partielle $\varphi^1 \oplus \varphi^2(y, .) = \varphi^1(y, .) \oplus \varphi^2(y, .)$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme. D'autre part, soit $U'$ un autre ouvert de $M$ et des applications
$\Phi^k : U' \times V_k \to \pi_k^{-1}(U')$. Comme précédemment on déduit l'application

$$\Phi^1 \oplus \Phi^2 : U' \times (V_1 \oplus V_2) \to (\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(U')$$
$$(y, v_1 \oplus v_2) \mapsto \Phi^1(y, .) \oplus \Phi^2(y, .)(v_1 \oplus v_2)$$

Sur l'ouvert $U \cap U'$ , on a les applications

$$(\Phi^k)^{-1} o\varphi^k : U \cap U' \times V_k \to U \cap U' \times V_k$$
$$(y, v) \mapsto (y, \gamma^k(y, v))$$

où $\gamma^k : U \cap U' \times V_k \to V_k$ est différentiable. Pour tout $(y, v_1 \oplus v_2) \in U \cap U' \times V_1 \oplus V_2$, on a :

$$\begin{aligned}(\Phi^1 \oplus \Phi^2)^{-1} o(\varphi^1 \oplus \varphi^2)(y, v_1 \oplus v_2) &= (\Phi^1 \oplus \Phi^2)^{-1}(\varphi^1(y, v_1) \oplus \varphi^2(y, v_2)) \\ &= ((\Phi^1)^{-1} o\varphi^1(y, v_1)) \oplus ((\Phi^2)^{-1} o\varphi^2(y, v_2)) \\ &= (y, \gamma^1(y, v_1)) \oplus (y, \gamma^2(y, v_2)) \\ &= (y, \gamma^1(y, v_1) \oplus \gamma^2(y, v_2)).\end{aligned}$$

En posant $\gamma^1 \oplus \gamma^2 : U \cap U' \times V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$ défini par :
$\gamma^1 \oplus \gamma^2(y, v_1 \oplus v_2) = \gamma^1(y, .) \oplus \gamma^2(y, .)(v_1 \oplus v_2) = \gamma^1(y, v_1) \oplus \gamma^2(y, v_2)$, il est clair que $(\Phi^1 \oplus \Phi^2)^{-1} o(\varphi^1 \oplus \varphi^2)$ est différentiable. On en déduit le résultat. □

**Remarque 1.5.** Soit $x \in M$. Il existe un voisinage ouvert $U_k$ de $x$ et $m_k$ sections $\epsilon_i^k : U_k \to E$ de classe $C^\infty$ telles que $\pi_k \circ \epsilon_i^k = Id_{U_k}$ pour tout $i = 1, ..., m_k$ l'application
$\varphi^k : (y, \lambda_1, ..., \lambda_{m_k}) \mapsto \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_i \epsilon_i^k(y)$ soit un difféomorphisme avec $k = 1, 2$. On pose $U = U_1 \cap U_2$ et pour tout $i = 1, ..., m_k$, on pose $\tilde{\epsilon_i^k} : U \to E_1 \oplus E_2$ défini par $\tilde{\epsilon_i^1}(y) = (\epsilon_i^1(y), 0_{E_{2y}})$ et
$\tilde{\epsilon_i^2}(y) = (0_{E_{1y}}, \epsilon_i^2(y))$. Il est clair que la famille $\{\tilde{\epsilon_i^k}, i = 1, ..., m_k\}$ forme une base de sections de $E_1 \oplus E_2$.

**Remarque 1.6.** Pour une famille de fibrés vectoriels $(E_1, M, \pi_1), ..., (E_p, M, \pi_p)$ on définit comme précédemment le fibré vectoriel $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ de base $M$. On le note parfois

$$E = \oplus_{i=1}^p E_i$$

et sa projection canonique est notée

$$\oplus_{i=1}^p \pi_i : E \to M$$

Dans le cas particulier où $E = E_1 = ... = E_p$, le fibré vectoriel $E = \oplus_{i=1}^p E_i$ est noté $\oplus^p E$ et sa projection canonique est $\oplus^p \pi : \oplus^p E \to M$

### 1.3.2 Le fibré vectoriel $E_1 \otimes E_2$

Pour tout $x \in M$, on définit le produit direct externe des espaces vectoriels $E_{1x}$ et $E_{2x}$ qu'on note $E_{1x} \otimes E_{2x}$, on pose $E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{x \in M} E_{1x} \otimes E_{2x}$. On définit alors l'application

$$\begin{aligned}\pi_1 \otimes \pi_2 : E_1 \otimes E_2 &\to M \\ E_{1x} \otimes E_{2x} \ni h &\mapsto x\end{aligned}$$

Plus précisément,pour $h = h_1 \otimes h_2 \in E_{1x} \otimes E_{2x}$, on a : $\pi_1 \otimes \pi_2(h_1 \otimes h_2) = \pi_1(h_1) = \pi_2(h_2)$

**Proposition 1.3.2.** *Le triplet $(E_1 \otimes E_2, M, \pi_1 \otimes \pi_2)$ est un fibré vectoriel réel de fibre type $V_1 \otimes V_2$.*

*Démonstration.* Soit $x \in M$, pour tout $k = 1, 2$ il existe un voisinage ouvert $U_k$ de $x$ et un difféomorphisme $\varphi^k : U_k \times V_k \to \pi_k^{-1}(U_k)$ tel que $\pi_k(\varphi^k(y, v)) = y$ pour tout $(y, v) \in U_k \times V_k$. Pour tout $y \in U_k$, l'application partielle $\varphi^k(y, .) : V_k \to E_{ky}$ est un isomorphisme. On pose $U = U_1 \cap U_2$ et on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi^1 \otimes \varphi^2 : U \times (V_1 \otimes V_2) &\to (\pi_1 \otimes \pi_2)^{-1}(U) \\ (y, v_1 \otimes v_2) &\mapsto \varphi^1(y, .) \otimes \varphi^2(y, .)(v_1 \otimes v_2) \end{aligned}$$

où $\varphi^1(y, .) \otimes \varphi^2(y, .)(v_1 \otimes v_2) = \varphi^1(y, v_1) \otimes \varphi^2(y, v_2)$. Il est clair que pour tout $(y, v_1 \otimes v_2) \in U \times (V_1 \otimes V_2)$, on a : $\pi_1 \otimes \pi_2(\varphi^1 \otimes \varphi^2(y, v_1 \otimes v_2)) = y$. Comme l'application partielle $\varphi^1 \otimes \varphi^2(y, .) = \varphi^1(y, .) \otimes \varphi^2(y, .)$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme. D'autre part, soit $U'$ un autre ouvert de $M$ et des applications $\Phi^k : U' \times V_k \to \pi_k^{-1}(U')$. Comme précédemment on déduit l'application

$$\begin{aligned} \Phi^1 \otimes \Phi^2 : U' \times (V_1 \oplus V_2) &\to (\pi_1 \otimes \pi_2)^{-1}(U') \\ (y, v_1 \otimes v_2) &\mapsto \Phi^1(y, .) \otimes \Phi^2(y, .)(v_1 \otimes v_2) \end{aligned}$$

Sur l'ouvert $U \cap U'$ , on a les applications

$$\begin{aligned} (\Phi^k)^{-1} o \varphi^k : U \cap U' \times V_k &\to U \cap U' \times V_k \\ (y, v) &\mapsto (y, \gamma^k(y, v)) \end{aligned}$$

où $\gamma^k : U \cap U' \times V_k \to V_k$ est différentiable. Pour tout $(y, v_1 \otimes v_2) \in U \cap U' \times V_1 \otimes V_2$, on a :

$$\begin{aligned} (\Phi^1 \otimes \Phi^2)^{-1} o(\varphi^1 \otimes \varphi^2)(y, v_1 \otimes v_2) &= (\Phi^1 \otimes \Phi^2)^{-1}(\varphi^1(y, v_1) \otimes \varphi^2(y, v_2)) \\ &= ((\Phi^1)^{-1} o \varphi^1(y, v_1)) \otimes ((\Phi^2)^{-1} o \varphi^2(y, v_2)) \\ &= (y, \gamma^1(y, v_1)) \otimes (y, \gamma^2(y, v_2)) \\ &= \gamma^1(y, v_1) \otimes \gamma^2(y, v_2) \end{aligned}$$

En posant $\gamma^1 \otimes \gamma^2 : U \cap U' \times V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$ défini par : $\gamma^1 \otimes \gamma^2(y, v_1 \otimes v_2) = \gamma^1(y, .) \otimes \gamma^2(y, .)(v_1 \otimes v_2) = \gamma^1(y, v_1) \otimes \gamma^2(y, v_2)$, il est clair que $(\Phi^1 \otimes \Phi^2)^{-1} o(\varphi^1 \otimes \varphi^2)$ est différentiable. On en déduit le résultat. □

**Remarque 1.7.** Soit $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $U_k$ de $x$ et $m_k$ sections $\epsilon_i^k : U_k \to E$ de classe $C^\infty$ telles que $\pi_k \circ \epsilon_i^k = Id_{U_k}$ pour tout $i = 1, ..., m_k$ l'application
$\varphi^k : (y, \lambda_1, ..., \lambda_{m_k}) \mapsto \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_i \epsilon_i^k(y)$ soit un difféomorphisme avec $k = 1, 2$. On pose $U = U_1 \cap U_2$ et pour tout $i, j = 1, ..., m_1, m_2$, on pose : $\epsilon_{ij} : U \to E_1 \otimes E_2$ tel que $\epsilon_{ij} = \epsilon_i^1 \otimes \epsilon_i^2$ définit pour tout $x \in M$ par : $\epsilon_{ij}(x) = \epsilon_i^1(x) \otimes \epsilon_i^2(x)$. Il est clair que la famille $\{\epsilon_{ij}, i, j = 1, ..., m_1, m_2\}$ forme une base

de sections de $E_1 \otimes E_2$ au dessus de$U$. De manière générale, pour deux sections $s_1$ et $s_2$ de $E_1$ et $E_2$ respectivement, on pose :

$$\begin{aligned} s_1 \otimes s_2 : M &\to E_1 \otimes E_2 \\ x &\mapsto s_1(x) \otimes s_2(x) \end{aligned}$$

Il est clair que $s_1 \otimes s_2$ est une section différentiable de $E_1 \otimes E_2$.

**Lemme 1.4.** *Soient $V_1$, $V_2$ et $W$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Pour toute application bilinéaire $f : V_1 \times V_2 \to W$, il existe un unique morphisme d'espaces vectoriels $\bar{f} : V_1 \otimes V_2 \to W$ tel que : pour toute $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$, $\bar{f}(x_1 \otimes x_2) = f(x_1, x_2)$.*

**Théorème 1.4.** *Soient $E_1$,$E_2$ et $E$ trois fibrés vectoriels de même base $M$. Pour tout $M$-morphisme de fibrations $f : E_1 \oplus E_2 \to E$ bilinéaire sur les fibres , il existe un unique $M$-morphisme de fibrés vectoriels $\bar{f} : E_1 \otimes E_2 \to E$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\bar{f}(x_1 \otimes x_2) = f(x_1 \oplus x_2)$.*

*Démonstration.* Elle se fait en utilisant les coordonées locales. □

**Corollaire 1.3.1.** *Soient $E_1$, $E_2$ et $E_3$ trois fibrés vectoriels de base $M$. On a :*

$$E_1 \otimes E_2 \cong E_2 \otimes E_1$$
$$(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \cong E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$
$$(E_1 \oplus E_2) \otimes E_3 \cong (E_1 \otimes E_3) \oplus (E_2 \otimes E_3)$$

**Remarque 1.8.** Pour une famille de fibrés vectoriels $(E_1, M, \pi_1), ..., (E_p, M, \pi_p)$ on définit comme précédemment le fibré vectoriel $E = E_1 \otimes E_2 \otimes ... \otimes E_p$ de base $M$. On le note parfois

$$E = \otimes_{i=1}^{p} E_i$$

et sa projection canonique est notée

$$\otimes_{i=1}^{p} \pi_i : E \to M$$

Dans le cas particulier où $E = E_1 = ... = E_p$, le fibré vectoriel $E = \otimes_{i=1}^{p} E_i$ est noté $\otimes^p E$ et sa projection canonique est $\otimes^p \pi : \otimes^p E \to M$.

**Proposition 1.3.3.** *Soient $u_1 : E_1 \to F_1$ et $u_2 : E_2 \to F_2$ deux morphismes de fibrés vectoriels au dessus de $M$. Il existe un $M$-morphisme $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$ telle que pour tout $e_1 \otimes e_2 \in E_1 \otimes E_2$ , $u_1 \otimes u_2(e_1 \otimes e_2) = u_1(e_1) \otimes u_2(e_2)$.*

**Remarque 1.9.** Une autre construction peut se faire à l'aide des fonctions de transition. En effet, considérons les fonctions de transition $a^1_{ij} : U^1_i \cap U^1_j \times V_1 \to GL(V_1)$ et $a^2_{ij} : U^2_i \cap U^2_j \times V_2 \to GL(V_2)$ ; on pose $U_i = U^1_i \cap U^2_i$, il est clair que $(U_i)$ est un recouvrement ouvert de $M$. On pose

$$\begin{aligned} a^1_{ij} \otimes a^2_{ij} : U_i \cap U_j &\to GL(V_1 \otimes V_2) \\ x &\mapsto a^1_{ij}(x) \otimes a^2_{ij}(x) \end{aligned}$$

où l'application linéaire $a^1_{ij}(x) \otimes a^2_{ij}(x)$ est définie par

$$\begin{aligned} a^1_{ij}(x) \otimes a^2_{ij}(x) : V_1 \otimes V_2 &\to V_1 \otimes V_2 \\ v_1 \otimes v_2 &\mapsto a^1_{ij}(x)(v_1) \otimes a^2_{ij}(x)(v_2) \end{aligned}$$

on a alors pour tout $x \in U_i$, $a^1_{ii}(x) \otimes a^2_{ii}(x) = Id_{V_1} \otimes Id_{V_2} = Id_{V_1 \otimes V_2}$. De même, pour tous $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ et $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$, on a :

$$\begin{aligned} a^1_{ij}(x) \otimes a^2_{ij}(x) \circ (a^1_{jk}(x) \otimes a^2_{jk}(x))(v_1 \otimes v_2)) &= a^1_{ij}(x) \otimes a^2_{ij}(x)(a^1_{jk}(x)(v_1) \otimes a^2_{jk}(x)(v_2)) \\ &= (a^1_{ij}(x) \circ a^1_{jk}(x)(v_1)) \otimes (a^2_{ij}(x) \circ a^2_{jk}(x)(v_2)) \\ &= a^1_{ik}(x)(v_1) \otimes a^2_{ik}(x)(v_2) \end{aligned}$$

On en déduit que $a^1_{ij}(x) \otimes a^2_{ij}(x) \circ (a^1_{jk}(x) \otimes a^2_{jk}(x)) = a^1_{ik}(x) \otimes a^2_{ik}(x)$. La famille $\{U_i, a^1_{ij} \otimes a^2_{ij}\}$ forme un cocycle du fibré vectoriel $E_1 \otimes E_2$.

### 1.3.3 Le fibré vectoriel $Hom(E_1, E_2)$

Soient $\{U_i, a^1_{ij}\}$ et $\{U_i, a^2_{ij}\}$ des fonctions de transition des fibrés vectoriels $(E_1, M, \pi_1)$ et $(E_2, M, \pi_2)$. On pose :

$$\begin{aligned} Hom(a^1_{ij}, a^2_{ij}) : U_i \cap U_j &\to GL(Hom(V_1, V_2)) \\ x &\mapsto Hom(a^1_{ij}(x), a^2_{ij}(x)) \end{aligned}$$

où l'application linéaire $Hom(a^1_{ij}(x), a^2_{ij}(x))$ est définie par :

$$\begin{aligned} Hom(a^1_{ij}(x), a^2_{ij}(x)) : Hom(V_1, V_2) &\to Hom(V_1, V_2) \\ \varphi &\mapsto a^2_{ij}(x) \circ \varphi \circ (a^2_{ij}(x))^{-1} \end{aligned}$$

Il est clair que $Hom(a^1_{ij}(x), a^2_{ij}(x) \in GL(Hom(V_1, V_2)$, l'application est donc bien définie. Ainsi, pour tout $x \in U_i$, on a : $Hom(a^1_{ii}(x), a^2_{ii})(x) = Hom(Id_{V_1}, Id_{V_2}) = Id_{Hom(V_1,V_2)}$. En effet, pour tout $\varphi \in Hom(V_1, V_2)$, $Hom(Id_{V_1}, Id_{V_2})(\varphi) = Id_{V_2} \circ \varphi \circ Id_{V_1} = \varphi$. De meme, pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ et $\varphi \in Hom(V_1, V_2)$, on a : $Hom(a^1_{ij}(x), a^2_{ij}(x)) \circ Hom(a^1_{jk}(x), a^2_{jk}(x)) = Hom(a^1_{ik}(x), a^2_{ik}(x))$.
On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 1.3.4.** *Il existe sur $Hom(E_1, E_2)$ une structure de fibré vectoriel réel de fibre type $Hom(V_1, V_2)$ et dont les fonctions de transition sont les fonctions $Hom(a^1_{ii}, a^2_{ii})$.*

**Remarque 1.10.** Pour tout $x \in M$, on désigne par $Hom(E_{1x}, E_{2x})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des morphismes d'espaces vectoriels de $E_{1x}$ vers $E_{2x}$. On a : $Hom(E_1, E_2) = \bigcup_{x\in M} Hom(E_{1x}, E_{2x})$. On note par $Hom(\pi_1, \pi_2) : Hom(E_1, E_2) \to M$ la projection naturelle telle que $Hom(\pi_1, \pi_2)^{-1}(x) = Hom(E_{1x}, E_{2x})$. Une trivialisation locale de $Hom(E_1, E_2)$ peut s'obtenir de la manière suivante : soient $(U, \varphi)$ et $(U, \Phi)$ des trivialisations locales au dessus de $y \in U$. L'application :

$$\begin{aligned} Hom(\varphi, \Phi) : Hom(\pi_1, \pi_2)^{-1}(U) &\to U \times Hom(E_1, E_2) \\ Hom(E_{1y}, E_{2y}) \ni g &\mapsto (y, \Phi_y \circ g \circ \varphi_y^{-1}) \end{aligned}$$

où $\varphi_y : E_{1y} \to V_1$ et $\Phi_y : E_{2y} \to V_2$ sont des applications partielles déduites des trivialisations locales $(U, \varphi)$ et $(U, \Phi)$ au point de $y \in U$.

**Remarque 1.11.** Dans le cas particulier où $E_2 = M \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} Hom(E_1, M \times \mathbb{R}) &= \bigcup_{x\in M} Hom(E_{1x}, \{x\} \times \mathbb{R}) \\ &\cong \bigcup_{x\in M} Hom(E_{1x}, \mathbb{R}) \\ &= \bigcup_{x\in M} E^*_{1x} \end{aligned}$$

On pose alors $E^*_1 = \bigcup_{x\in M} E^*_{1x}$ On l'appelle fibré vectoriel dual de $E_1$ et on note par : $\pi^*_1 : E_1 \to M$ sa projection canonique.

**Proposition 1.3.5.** *Soient $(E_1, M, \pi_1)$,$(E_2, M, \pi_2)$ et $(E_3, M, \pi_3)$ trois fibrés vectoriels. On a :*

$$\begin{aligned} Hom(E_1, E_2) &\cong E^*_1 \otimes E_2 \\ Hom(E_1 \otimes E_2, E_3) &\cong Hom(E_1, Hom(E_2, E_3)) \\ (E_1 \otimes E_2)^* &\cong Hom(E_1, E^*_2) \cong E^*_1 \otimes E^*_2 \\ (E^*_1)^* &= E_1 \end{aligned}$$

**Remarque 1.12.** Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel réel.Alors :$(\otimes^p E)^* = \otimes^p E^*$

**Proposition 1.3.6.** *Soient $E_1$,$E_2$,$E_3$ et $E_4$ quatre fibrés vectoriels de même base $M$. On a :*

$$\begin{aligned} Hom(E_1 \oplus E_2, E_3) &\cong Hom(E_1, E_3) \oplus Hom(E_2, E_3) \\ Hom(E_1, E_2 \oplus E_3) &\cong Hom(E_1, E_2) \oplus Hom(E_1, E_3) \\ Hom(E_1 \otimes E_2, E_3 \otimes E_4) &\cong Hom(E_1, E_3) \otimes Hom(E_2, E_3) \end{aligned}$$

**Remarque 1.13.** Pour un fibrfé vectoriel réel $E$ et pour $q \geq 2$, on construit le fibré vectoriel $\otimes^q E^*$ qu'on note souvent $\otimes^0_q E$. En posant $\otimes^1 E = E$ et $\otimes^0 E = M \times \mathbb{R}$, on pose pour tous $p, q \geq 0$, $\otimes^p_q E = (\otimes^p E) \otimes (\otimes^q E^*)$. On note par $\otimes^p_q \pi : \otimes^p_q E \to M$ la projection naturelle. On a également $(\otimes^p_q E)^* = \otimes^q_p E$.

**Proposition 1.3.7.** *Soit E un fibré vectoriel réel, on a :* $\otimes^p_q E \otimes \otimes^r_s E \cong \otimes^{p+r}_{q+s} E$.

*Démonstration.* On considère l'application $\varphi : \otimes^p_q E \otimes \otimes^r_s E \to \otimes^{p+r}_{q+s} E$ définie par : pour $s = s^*_1 \otimes ... \otimes s^*_p \otimes s_1 \otimes ... \otimes s_q$ et $t = t^*_1 \otimes ... \otimes t^*_r \otimes t_1 \otimes ... \otimes t_s$, on a :$\varphi(s, t) = s^*_1 \otimes ... \otimes s^*_p \otimes t^*_1 \otimes ... \otimes t^*_r \otimes s_1 \otimes ... \otimes s_q \otimes t_1 \otimes ... \otimes t_s$. Elle est bilinéaire sur les fibres , donc induit un $M$-morphisme de fibrés vectoriels $\bar{\varphi} : \otimes^p_q E \otimes \otimes^r_s E \to \otimes^{p+r}_{q+s} E$ qui est bijective sur les fibres. □

**Définition 1.13.** On appelle **champ de tenseur** sur un fibré vectoriel $E$, toute section différentiable du fibré $\otimes^p_q E$.

Soit $\alpha : M \to \otimes^p_q E$ un champ de tenseurs sur $E$.

1. Si $p = 0$, on dit que le champ de tenseurs $\alpha$ est $q$-fois covariant.
2. Si $q = 0$, on dit qu'il est $p$-fois contravariant.
3. Si $p \neq 0$ et $q \neq 0$, on dit que le tenseur $\alpha$ est $q$-fois covariant et $p$-fois contravariant. Dans tous les cas,on peut dire que le tenseur est de type $(p, q)$.
4. Lorsque $E = TM$, on dit que $\alpha$ est un champ de tenseur sur $M$.

**Exemple 1.10.** On prend $E = TM$, les champs de vecteurs sont des champs de tenseurs 1-fois contravariants sur $M$.

**Remarque 1.14.** Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel réel. Pour tout $x \in M$, $E_x$ est un espace vectoriel. On peut construire des espaces vectoriels $\bigwedge^p E^*_x$ et $\odot^p E^*_x$. On construit ainsi les fibrés vectoriels $\bigwedge^p E^* = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p E^*_x$ et $\odot^p E^* = \bigcup_{x \in M} \odot^p E^*_x$.

On rappelle que pour un espace vectoriel $V$ de dimension finie $m$, $\bigwedge^p V^*$ (resp.$\odot^p V^*$) désigne l'ensemble des $p$-formes linéaires alternées (resp. symétriques). En remplaçant $E$ par son dual, on a : $\bigwedge^p E = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x$ et $\odot^p E = \bigcup_{x \in M} \odot^p E_x$. Pour $s_1, s_2, ..., s_p \in E_x$, on a :
$s_1 \wedge s_2 \wedge ... \wedge s_p = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \epsilon(\sigma) s_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes s_{\sigma(p)}$ où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de $\sigma$ et $\mathfrak{S}_m$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., m\}$. En prenant $E = TM$, on forme les fibrés vectoriels $\bigwedge^p TM$ et $\bigwedge^p T^*M$. Une section de $\bigwedge^p TM$ est appelée $p$**-champ de vecteurs**, tandis qu'une section de $\bigwedge^p T^*M$ est appelée **forme différentielle** de degré $p$.

# 1.4 CHAMP DE TENSEURS SUR UN FIBRÉ VECTORIEL

Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre type $V$. On note par $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections différentiables de $E$. Lorsque $E = TM$, $\Gamma(E)$ se note $\mathfrak{X}(M)$ et lorsque $E = \bigwedge^p T^*M$, on le note $\Omega^p(M)$, avec $p \leq dimM$. Pour tous $p, q \geq 0$, on a défini le fibré vectoriel $(\otimes_q^p E, M, \otimes_q^p \pi)$.

## 1.4.1 Définitions et exemples

**Définition 1.14.** On appelle **champ de tenseur** sur $E$, toute section différentiable du fibré vectoriel $(\otimes_q^p E, M, \otimes_q^p \pi)$.

Vocabulaire : Soit $\alpha \in \Gamma(\otimes_q^p E)$.
Si $p = 0$, on dit que le champ tenseur $\alpha$ est $q$-fois covariant sur $E$.
Si $q = 0$,il est dit $p$-fois contravariant sur $E$.
Si $p \neq 0$ et $q \neq 0$, on dit que le champ tenseur $\alpha$ est $q$-fois covariant et $p$-fois contravariant.
Dans tous les cas, on dit que le champ tenseur est de type $(p, q)$.
Lorsque $E = TM$, un champ de tenseurs de type $(p, q)$ sur $TM$ est appelé champ de tenseur de type $(p, q)$ sur $M$.

**Exemple 1.11.** Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel. Une section différentiable de $E$ est un champ de tenseur 1-fois contravariant sur $E$. En particulier, pour $E = TM$, un champ de vecteurs de $M$ est un champ de tenseurs 1-fois contravariant sur $M$.

**Exemple 1.12.** Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel et $u : E \to E$ un $M$-morphisme de fibrés vectoriels. $u$ est une section différentiable de $Hom(E, E) = E^* \otimes E$. Plus précisément, $u \in \Gamma(\otimes_1^1 E)$ et par conséquent $u$ est un champ de tenseur de type $(1, 1)$.

**Proposition 1.4.1.** *Soit $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel. $(\Gamma(E), +, .)$ a une structure de $C^\infty(M)$-module.*

*Démonstration.* Pour tout $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ et $g \in C^\infty(M)$, on pose pour tout $x \in M$, $\begin{cases} (s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) \\ et \\ (g.s_1)(x) = g(x).s_1(x) \end{cases}$

Il est clair que $s_1 + s_2 \in \Gamma(E)$ et $g.s_1 \in \Gamma(E)$. On déduit ainsi les opérations :

$$+ : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$
$$(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$$

$$. : C^\infty(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$
$$(g, s) \mapsto g.s$$

Il est clair que $(\Gamma(E), +, .)$ a une structure de $C^\infty(M)-$module. □

**Remarque 1.15.** Il est clair que $\Gamma(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $U$ un ouvert de $M$, on note par $\Gamma_U(E)$ le $C^\infty(U)$-module des sections différentiables au dessus de $U$. On a : pour tout $x \in M$, il existe un ouvert $U_x$ de $M$ contenant $x$ tel que $\Gamma_{U_x}(E)$ soit fini. On dit que $\Gamma(E)$ est localement fini.

### 1.4.2 Applications $p$-linéaires sur le $C^\infty(M)$-module $\Gamma(E)$

Soient $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre type $V$ et un entier $p \geq 2$.

**Définition 1.15.** Une application $\varphi : \Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ est dite $p$-linéaire si : pour tout $s_1, ..., s_p \in \Gamma(E)$ et pour tout $i = 1, ..., p$ l'application partielle

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, ..., s_{i-1}, ., s_{i+1} ..., s_p) : \Gamma(E) &\to C^\infty(M) \\ s &\mapsto \varphi(s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_p) \end{aligned}$$

est $C^\infty(M)$-linéaire.

Soit $\alpha \in \Gamma(\otimes_p^0 E)$, pour tous $s_1, ..., s_p \in \Gamma(E)$, on pose :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p) : M &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha(x)(s_1(x), ..., s_p(x)) \end{aligned}$$

**Lemme 1.5.** *L'application $\tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p) : M \to \mathbb{R}$ est de classe $C^\infty(M)$.*

*Démonstration.* Soit $x \in M$, il existe $U$ un ouvert de $M$ contenant $x$ et une base de sections $\{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de $E$ au dessus de $U$. Donc pour tout $i = 1, ..., p$,

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} g_i^j \epsilon_j$$

où $g_i^j \in C^\infty(U)$. On note par $\{\epsilon^i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de sections de $E^*$ au dessus de $U$ tel que : pour tout $y \in U$,$\{\epsilon^i(y)\}_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale de $\{\epsilon_i(y)\}_{1 \leq i \leq n}$. On a :$\alpha \mid_U = \alpha_{i_1 ... i_p} \epsilon^{i_1} \otimes ... \otimes \epsilon^{i_p}$ où $\alpha_{j_1 ... j_p} \in C^\infty(U)$. On a : pour tout $y \in U$,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p)(y) &= \alpha(y)(g_1^{j_1} \epsilon_{j_1}, ..., g_p^{j_p} \epsilon_{j_p}) \\ &= g_1^{j_1}(y) ... g_p^{j_p}(y) \alpha(y)(\epsilon_{j_1}(y) ... \epsilon_{j_p}(y)) \\ &= g_1^{j_1}(y) ... g_p^{j_p}(y) \alpha_{i_1 ... i_p}(y) \end{aligned}$$

Donc $\tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p) \mid_U = g_1^{j_1} ... g_p^{j_p} \alpha_{j_1 ... j_p}$. Ce qui montre que $\tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p)$ est de classe $C^\infty$. □

On définit ainsi une application

$$\tilde{\alpha} : \Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E) \to C^{\infty}(M)$$
$$(s_1, ..., s_p) \mapsto \tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p)$$

**Lemme 1.6.** *L'application $\tilde{\alpha} : \Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E) \to C^{\infty}(M)$ est $p$-linéaire au sens des modules.*

*Démonstration.* Soient $s, s_1, ..., s_p \in \Gamma(E)$ et $g \in C^{\infty}(M)$, on a : pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(s + s_1, ..., s_p)(x) &= \alpha(x)(s_1(x) + s(x), ..., s_p(x)) \\ &= (\tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p) + \tilde{\alpha}(s, ..., s_p))(x)\end{aligned}$$

On en déduit que $\tilde{\alpha}(s + s_1, ..., s_p) = \tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p) + \tilde{\alpha}(s, ..., s_p)$ De même,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(g.s_1, ..., s_p)(x) &= \alpha(x)(g(x).s_1(x), ..., s_p(x)) \\ &= g(x)\alpha(x)(s_1(x), ..., s_p(x)) \\ &= (g.\tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p))(x)\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\alpha}(g.s_1, ..., s_p) = g.\tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p)$. □

**Notation 1.4.1.** On note par $\mathcal{A}^p_{C^{\infty}(M)}(\Gamma(E))$ l'ensemble des applications$p$-linéaires au sens des modules de $\Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E)$ vers $C^{\infty}(M)$.

**Proposition 1.4.2.** *$\mathcal{A}^p_{C^{\infty}(M)}(\Gamma(E))$ a une structure de $C^{\infty}(M)$-module définie pour tout $h \in \Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E)$ par :*
$$\begin{cases}(\alpha_1 + \alpha_2)(h) = \alpha_1(h) + \alpha_2(h) \\ \text{et} \\ (g.\alpha_1)(h) = g.\alpha_1(h).\end{cases}$$

On en déduit une application :

$$\Phi : \Gamma(\otimes^0_p E) \to \mathcal{A}^p_{C^{\infty}(M)}(\Gamma(E))$$
$$\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$$

**Théorème 1.5.** *L'application $\Phi : \Gamma(\otimes^0_p E) \to \mathcal{A}^p_{C^{\infty}(M)}(\Gamma(E))$ est un isomorphisme de $C^{\infty}(M)$-modules.*

Avant d'établir la preuve de ce théorème nous avons besoin des résultats suivants :

**Lemme 1.7.** *Soit $M$ une variété différentiable, $U$ et $V$ des ouverts de $M$ tels que $\bar{V} \subset U$. Il existe une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ différentiable telle que : pour tout $x \in M$, $0 \leq f(x) \leq 1$, $f\ |_V \equiv 1$ et $f_{M-U} \equiv 0$.*

*Démonstration.* admis □

**Lemme 1.8.** *Soit $x \in M$ et $h_x \in E_x$, il existe une section $s \in \Gamma(E)$ telle que $s(x) = h_x$.*

*Démonstration.* Soit $x \in M$. Il existe un ouvert $U$ de $M$ en $x$ et une famille de sections $\{s_1, ..., s_n\}$ telles que $(s_1(y), ..., s_n(y))$ soit une base de $E_y$ pour tout $y \in U$. Comme $h_x \in E_x$, on a :

$$h_x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j(x)$$

. On pose :

$$\tilde{s} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j$$

. Comme $M$ est localement fermé, il existe un fermé $F$ contenu dans $U$ qui est un voisinage de $x$. Il existe $V$ un ouvert tel que $V \subset F \subset U$ et par conséquent $V \subset \bar{V} \subset F \subset U$. Il existe $f$ une fonction vérifiant : pour tout $x \in M, 0 \leq f(x) \leq 1, f\ |_V \equiv 1$ et $f_{M-U} \equiv 0$. On pose

$$s(y) = \begin{cases} (f.\tilde{s})(y) \iff y \in V \\ \qquad 0 \iff y \notin U \end{cases}$$

Il est clair que $f.\tilde{s} \in \Gamma(E)$ et on a :$s(x) = h_x$. Soit $\alpha : \Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ une application p-linéaire. Pour tout $x \in M$ et $h_x^1, ..., h_x^p \in E_x$, on pose : $\hat{\alpha(x)}(h_x^1, ..., h_x^p) = \alpha(s_1, ..., s_p)(x)$ où $s_i(x) = h_x^i$. On obtient ainsi une application

$$\hat{\alpha(x)} : E_x \times ... \times E_x \to \mathbb{R}$$
$$(h_x^1, ..., h_x^p) \mapsto \alpha(s_1, ..., s_p)(x)$$

On va montrer que $\hat{\alpha(x)}$ est bien définie. □

**Lemme 1.9.** *Soient $s_1, ..., s_p \in \Gamma(E)$ tels qu'il existe $i \leq p$ vérifiant $s_i\ |_U \equiv 0$, alors $\alpha(s_1, ..., s_p)\ |_U \equiv 0$.*

*Démonstration.* Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $s_1\ |_U \equiv 0$. Il existe $g \in C^\infty(M)$ tel que pour tout $x \in M$, $0 \leq g(x) \leq 1$, $g\ |_V = 1$ et $g_{M-U} \equiv 0$. On a :$g.s_1 \equiv 0$. Ainsi, pour tout $y \in U$, $\alpha(g.s_1, s_2, ..., s_p)(y) = 0 = g(y).\alpha(s_1, s_2, ...s_p)(y) = \alpha(s_1, s_2, ...s_p)(y)$, ce qui montre que $\alpha(s_1, s_2, ...s_p)(y) = 0$ pour tout $y \in U$. □

**Lemme 1.10.** *Soient $s_1, s_1', ..., s_p \in \Gamma(E)$ tel qu'il existe $i \leq p$ vérifiant $s_i\ |_U \equiv s_i'\ |_U$, alors $\alpha(s_1, ..., s_p)\ |_U = \alpha(s_1', ..., s_p)\ |_U$*

*Démonstration.* On a :$s_1\ |_U \equiv s_1'\ |_U$ , ie $s_1 - s_1'\ |_U \equiv 0$. Donc $\alpha(s_1, ..., s_p)\ |_U = \alpha(s_1', ..., s_p)\ |_U$ □

**Lemme 1.11.** *Soient $s_1, s'_1, ..., s_p \in \Gamma(E)$ tel qu'il existe $i \leq p$ vérifiant $s_i(x) \equiv s'_i(x)$, alors $\alpha(s_1, ..., s_p)(x) = \alpha(s'_1, ..., s_p)(x)$.*

Ce résultat montre que l'application $\hat{\alpha(x)}$ est bien définie. On a évidement $\hat{\alpha(x)} \in \otimes^0_p E_x$. On obtient l'application

$$\hat{\alpha} : M \to \otimes^0_p E$$
$$x \mapsto \hat{\alpha(x)}$$

On a clairement, $\otimes^0_p \pi \circ \hat{\alpha} = Id_M$.

**Lemme 1.12.** *L'application*

$$\hat{\alpha} : M \to \otimes^0_p E$$
$$x \mapsto \hat{\alpha(x)}$$

*est différentiable.*

*Démonstration.* Soit $x \in M$. Il existe $U$ un ouvert de $M$ contenant $x$ et une base de sections $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ de $E$ au dessus de $U$. On a : $\hat{\alpha(y)}(\epsilon_{i1}(y), ..., \epsilon_{ip}(y)) = \alpha(\epsilon_{i1}, ..., \epsilon_{ip})(y)$ pour tout $y \in U$. Comme $\alpha(\epsilon_{i1}, ..., \epsilon_{ip})$ est différentiable, il vient que $\hat{\alpha} = \alpha(\epsilon_{i1}, ..., \epsilon_{ip})\epsilon^{i1} \otimes ... \otimes \epsilon^{ip}$, ce qui montre que $\hat{\alpha}$ est différentiable. □

**Preuve du théorème.** L'application $\Phi : \Gamma(\otimes^0_p E) \to \mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E))$ est une bijection de réciproque

$$\Phi^{-1} : \mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E)) \to \Gamma(\otimes^0_p E)$$
$$\alpha \mapsto \hat{\alpha}$$

et on a : $\begin{cases} \Phi(\alpha + \beta) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta) \\ \Phi(g.\alpha) = g.\Phi(\alpha) \end{cases}$ En effet, pour tout $x \in M$ et $s_1, ..., s_p \in \Gamma(E)$,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha + \beta)(s_1, ..., s_p)(x) &= (\alpha + \beta)(x)(s_1(x), ..., s_p(x)) \\ &= \alpha(x)(s_1(x), ..., s_p(x)) + \beta(x)(s_1(x), ..., s_p(x)) \\ &= \tilde{\alpha}(s_1, ..., s_p)(x) + \tilde{\beta}(s_1, ..., s_p)(x) \\ &= (\Phi(\alpha) + \Phi(\beta))(s_1, ..., s_p)(x). \end{aligned}$$

L'autre cas se démontre de la même façon.

**Remarque 1.16.** Au moyen de cet isomorphisme de $C^\infty(M)$-module, on identifie $\Gamma(\otimes_p^0 E)$ à $\mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E))$ de sorte que , pour $\alpha \in \Gamma(\otimes_p^0 E)$, on peut l'écrire comme une application $\Gamma(E)\times ... \times\Gamma(E) \to C^\infty(M)$ $p$-linéaire qu'on note encore $\alpha$.

Soit $\alpha \in \Gamma(\otimes_q^p E)$, pour $s_1, ..., s_q$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha(s_1, ..., s_q) : \Gamma(E^*) \times ... \times \Gamma(E^*) &\to C^\infty(M) \\ (s_1^*, ..., s_p^*) &\mapsto \langle \alpha(s_1, ..., s_q), s_1^* \otimes ... \otimes s_q^* \rangle \end{aligned}$$

où pour tout $x \in M$, $\langle \alpha(s_1, ..., s_q), s_1^* \otimes ... \otimes s_q^* \rangle(x) = \alpha(x)(s_1(x), ..., s_q(x), s_1^*(x), ..., s_q^*(x))$. Il est clair que $\alpha(s_1, ..., s_q) \in \Gamma(\otimes^p E)$, on déduit une application

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} : \Gamma(E) \times ... \times \Gamma(E) &\to \Gamma(\otimes^p E) \\ (s_1, ..., s_q) &\mapsto \alpha(s_1, ..., s_q) \end{aligned}$$

qui est $q$-linéaire à valeurs dans le $C^\infty(M)$-module $\Gamma(\otimes^p E)$. On note par $\mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(\otimes^p E))$ l'ensemble des applications $q$-linéaires à valeurs dans $\Gamma(\otimes^p E)$) ; elle a une structure canonique de $C^\infty(M)$-modules.

### 1.4.3 Image réciproque d'un champ de tenseur par un morphisme de fibrés vectoriels

**Lemme 1.13.** *Soient $(E_1, M, \pi_1)$ et $(E_2, M, \pi_2)$ deux fibrés vectoriels et $u : E_1 \to E_2$ un $M$-morphisme de fibrés vectoriels. $u$ induit l'application $C^\infty(M)$-linéaire : $\tilde{u} : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ telle que pour tout $s_1 \in \Gamma(E_1)$, $\tilde{u}(s_1) = u \circ s_1$.*

*Démonstration.* On a naturellement

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ (u \circ s_1) &= (\pi_2 \circ u) \circ s_1 \\ &= \pi_1 \circ s_1 \\ &= Id_M \end{aligned}$$

Donc $\tilde{u}(s_1) \in \Gamma(E_2)$. La $C^\infty(M)$-linéarité de $\tilde{u}$ est évidente. Réciproquement, tout morphisme $\tilde{u} : \Gamma(E_1) \to \Gamma(E_2)$ de $C^\infty(M)$-modules induit un $M$-morphisme de fibrés vectoriels. □

**Remarque 1.17.** Cette proposition montre qu'il existe un isomorphisme de $C^\infty(M)$-modules entre $\Gamma(Hom(E_1, E_2))$ et $End_{C^\infty(M)}(\Gamma(E_1), \Gamma(E_2))$. On note souvent $\tilde{u}$ par $u$.

Soient $u : E_1 \to E_2$ un $M$-morphisme de fibrés vectoriels et $\alpha \in \Gamma(\otimes_p^0 E_2)$.On définit l'application ,

$$u^*\alpha : \Gamma(E_1) \times ... \times \Gamma(E_1) \to C^\infty(M)$$
$$(s_1, ..., s_p) \mapsto \alpha(u \circ s_1, ..., u \circ s_p)$$

elle est $p$-linéaire et par conséquent $u^*\alpha \in \Gamma(\otimes_p^0 E_1)$. On déduit ainsi une application

$$u^* : \Gamma(\otimes_p^0 E_2) \to \Gamma(\otimes_p^0 E_1)$$
$$\alpha \mapsto u^*(\alpha)$$

qui est $C^\infty(M)$-linéaire. Plus précisément, pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma(\otimes_p^0 E_2)$ et $g \in C^\infty(M)$, on a : $u^*(\alpha + \beta) = u^*(\alpha) + u^*(\beta)$ et $u^*(g.\alpha) = g.u^*(\alpha)$. En particulier, on a un $M$-morphisme de fibrés vectoriels qu'on note $\otimes_p^0 u : \otimes_p^0 E_2 \to \otimes_p^0 E_1$. Lorsque $p = 1$, $\otimes_1^0 u : E_2^* \to E_1^*$ est l'application transposée.

**Proposition 1.4.3.** *Pour tous $\alpha \in \Gamma(\otimes_p^0 E_2)$ et $\beta \in \Gamma(\otimes_q^0 E_2)$, on a : $u^*(\alpha \otimes \beta) = u^*\alpha \otimes u^*\beta$.*

*Démonstration.* Soient $s_1, ..., s_p, s_{p+1}, ..., s_{p+q} \in \Gamma(E_2)$, on a :

$$\begin{aligned} u^*(\alpha \otimes \beta)(s_1, ..., s_p, s_{p+1}, ..., s_{p+q}) &= \alpha \otimes \beta(u \circ s_1, ..., u \circ s_p, u \circ s_{p+1}, ..., u \circ s_{p+q}) \\ &= \alpha(u \circ s_1, ..., u \circ s_p)\beta(u \circ s_{p+1}, ..., u \circ s_{p+q}) \\ &== u^*(\alpha)(s_1, ..., s_p).u^*(\beta)(s_{p+1}, ..., s_{p+q}) \\ &= (u^*(\alpha) \otimes u^*(\beta))(s_1, ..., s_p, s_{p+1}, ..., s_{p+q}) \end{aligned}$$

Donc $u^*(\alpha \otimes \beta) = u^*(\alpha) \otimes u^*(\beta)$. □

Chapitre Deux

# ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE.

Dans tout ce chapitre, $(E, M, \pi)$ désigne un fibré vectoriel réel.

## 2.1 CONNEXION LINÉAIRE SUR UN FIBRÉ VECTORIEL RÉEL.

### 2.1.1 Généralités.

**Définition 2.1.** On appelle **connexion linéaire** sur $E$, toute application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$$
$$(S, X) \mapsto \nabla_X S$$

Vérifiant :

1. Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X \in \Gamma(E)$, $S \in \Gamma(E)$, $\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S$.
2. Pour tous $X \in \mathfrak{X}(M)$ ; $S, T \in \Gamma(E)$, $\nabla_X (S + T) = \nabla_X S + \nabla_X T$.
3. Pour tous $X \in \mathfrak{X}(M)$, $S \in \Gamma(E)$ et $g \in C^\infty(M)$, $\nabla_{g.X} S = g.\nabla_X S$.
4. Pour tous $X \in \mathfrak{X}(M)$, $S \in \Gamma(E)$ et $g \in C^\infty(M)$,$\nabla_X (g.S) = g.\nabla_X S + X(g).S$.

Dans le cas particulier où $E = TM$, on dit que $\nabla$ est une connexion linéaire sur $M$ et que $M$ est **une variété affine**.

**Exemple 2.1.** On prend $E = T\mathbb{R}^n$, pour $X = (X_1, ..., X_n)$ et $g \in C^\infty(M)$, on sait que $X(g) = \sum_{i=1}^{n} X_i \dfrac{\partial g}{\partial x^i}$. Pour $Y = (Y_1, ..., Y_n)$, on pose $\nabla_X Y = (X(Y_1), ..., X(Y_n))$.
L'application $\nabla_X Y : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ est une connexion linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

**Définition 2.2.** Soient $\nabla$ une connexion sur une variété $M$ de dimension n et $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ (resp. $dx_1; dx_2; ...dx_n$) ) une base locale en $x \in M$ de $T_x M$ ( resp. $T_x^* M$ ). On appelle **coefficients de Christoffel** les $n^3$ fonctions $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U); i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ définies par : $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Sigma_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ c'est à dire $\Gamma_{ij}^k = dx^k (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j})$.

**Proposition 2.1.1.** *Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ tel que sur un ouvert $U$ de $M$, $X\mid_U = 0$. Pour toute section $S$ de $E$, on a $\nabla_X S \mid_U = 0$.*

*Démonstration.* Soit $x \in U$. Il existe $V$ un ouvert contenu dans $U$ tel que $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ et une fonction $g$ qui vaut 1 sur $V$ et est nulle sur $M - U$. Il est clair que $g.X = 0$. Par conséquent, $\nabla_{g.X} S = g\nabla_X S = 0$. On a de plus $(g.\nabla_X S)(x) = \nabla_X S(x) = 0$ car $g(x) = 1$. Il vient que
$\nabla_X S \mid_U = 0$. □

De ce résultat, on déduit que :

**Corollaire 2.1.1.** *Soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ tels que : $X_1 \mid_U = X_2 \mid_U$, alors pour $S \in \Gamma(E)$,*
*$\nabla_{X_1} S \mid_U = \nabla_{X_2} S \mid_U$.*

**Remarque 2.1.** De la même manière, si $S \in \Gamma(E)$ est tel que $S \mid_U = 0$ pour un ouvert $U$ de $M$, alors $\nabla_X S \mid_U = 0$. On obtient une égalité similaire au corollaire précédent. Ce résultat nous montre que $\nabla$ peut être déterminée par son expression locale.
Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur $E$. Pour une base de sections $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ au dessus d'un ouvert $U$ de $M$ qui est lui même le domaine d'une carte de système de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$, on pose $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \epsilon_j = \Gamma_{ij}^k \epsilon_k$ où $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$. Dans ce cas, pour $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $S = \sum_{j=1}^n S^j \epsilon_j$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_X S &= X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} S^j \epsilon_j = X^i (S^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \epsilon_j + \frac{\partial S^j}{\partial x^i} \epsilon_j) \\
&= X^i (\sum_{j,k=1}^n S^j \Gamma_{ij}^k \epsilon_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S^j}{\partial x^i} \epsilon_j) \\
&= X^i (\sum_{j,k=1}^n S^j \Gamma_{ij}^k \epsilon_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial S^k}{\partial x^i} \epsilon_k) \\
&= \sum_{i=1}^n X^i \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n S^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial S^k}{\partial x^i}) \epsilon_k
\end{aligned}$$

Sous forme contractée, on a :$\nabla_X S = X^i (S^j \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial S^k}{\partial x^i}) \epsilon_k$.

### 2.1.2 Courbure d'une connexion linéaire.

Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur un fibré vectoriel réel $(E, M, \pi)$. Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $S \in \Gamma(E)$, on pose $R_\nabla(X, Y)S = (\nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})S$ et on obtient ainsi l'application

$$\begin{aligned}
R_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\
(X, Y, S) &\mapsto R_\nabla(X, Y)S
\end{aligned}$$

**Lemme 2.1.** *L'application $R_\nabla$ est trilinéaire au sens des modules sur l'anneau $C^\infty(M)$.*

*Démonstration.* voir [4] page 34

□

**Définition 2.3.** L'application $R_\nabla$ est appelée **courbure de la connexion** $\nabla$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on la note $R$.

Dans un système de coordonnées locales, on a : $R = R^q_{ijk}\epsilon_q$ où $R^q_{ijk} = R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})(\epsilon_k)(\epsilon^q)$, où $(\epsilon^l)$ désigne la base duale associée à $(\epsilon_l)$.Or,

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\epsilon_k &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\Gamma^p_{jk}\epsilon_p)\\ &= \Gamma^p_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\epsilon_p + \frac{\partial\Gamma^p_{jk}}{\partial x^i}\epsilon_p\\ &= \Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{ip}\epsilon_q + \frac{\partial\Gamma^q_{jk}}{\partial x^i}\epsilon_q\end{aligned}$$

On écrit : $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\epsilon_k = (\Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{ip} + \frac{\partial\Gamma^q_{jk}}{\partial x^i})\epsilon_q$.
En permutant les rôles de $i$ et $j$, on obtient : $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\epsilon_k = (\Gamma^p_{ik}\Gamma^q_{jp} + \frac{\partial\Gamma^q_{ik}}{\partial x^j})\epsilon_q$. Comme $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, on a : $R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})(\epsilon_k) = (\Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^q_{jp} + \frac{\partial\Gamma^q_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^q_{ik}}{\partial x^j})\epsilon_q$
$R^q_{ijk} = \Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{ip} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^q_{jp} + \frac{\partial\Gamma^q_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^q_{ik}}{\partial x^j}$.

### 2.1.3 Différentielle covariante d'une forme différentielle à valeur sur un fibré vectoriel.

Soient $(E, M, \pi)$ un fibré vectoriel réel.

**Définition 2.4.** On appelle **forme différentielle** à valeur dans $E$ , toute section $\Phi$ du fibré vectoriel réel $\bigwedge^p T^*M \otimes E$.

On désigne par $\Omega^p(M, E)$ le $C^\infty(M)$-module des sections de $\bigwedge^p T^*M \otimes E$. Pour tout $\Phi \in \Omega^p(M, E)$, pour $X_1, ..., X_p \in \mathfrak{X}(M)$, on considère l'application

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(X_1, ..., X_p) : M &\to E\\ x &\mapsto \Phi(x)(X_1(x), ..., X_p(x))\end{aligned}$$

C'est une section de $E$. On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) &\to \Gamma(E)\\ (X_1, ..., X_p) &\mapsto \tilde{\Phi}(X_1, ..., X_p)\end{aligned}$$

qui est $p$-alternée au sens des modules. On désigne par $\mathcal{A}^p(\mathfrak{X}(M), \Gamma(E))$ le $C^\infty(M)$-module des $p$-formes linéaires alternées. On a :

**Théorème 2.1.** *L'application*

$$\Omega^p(M,E) \to \mathcal{A}^p(\mathfrak{X}(M),\Gamma(E))$$
$$\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$$

*est un isomorphisme de $C^\infty(M)$-module. Par conséquent, un tenseur $\Phi \in \Omega^p(M,E)$ est identifié à une application $p$-linéaire (au sens des $C^\infty(M)$-modules).*

$$\tilde{\Phi} : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$$
$$(X_1,...,X_p) \mapsto \Phi(X_1,...,X_p)$$

**Remarque 2.2.** Dans le cas particulier où $E = M \times \mathbb{R}$, $\Gamma(E)$ s'identifie à $C^\infty(M)$ et on obtient les formes différentielles ordinaires.

Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur $E$. Pour tout $X_0, X_1..., X_p$, on pose :
$$\nabla\Phi(X_o,X_1,...,X_p) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\nabla_{X_j}\Phi(X_0,X_1,...,\hat{X}_j,...,X_p)+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Phi([X_i,X_j],X_0,...,,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_p).$$
On obtient ainsi l'application

$$\nabla\Phi : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$$
$$(X_0,X_1,...,X_p) \mapsto \nabla\Phi(X_0,X_1,...,X_p)$$

**Lemme 2.2.** *L'application $\nabla\Phi$ est une forme différentielle de degré $p+1$ sur $M$ à valeurs dans $E$.*

**Définition 2.5.** On désigne par $\Omega^p(M,E)$ le $C^\infty(M)$-module des formes différentielles à valeurs dans $E$, de ce qui précède, on obtient une application

$$d_\nabla : \Omega^p(M,E) \to \Omega^{p+1}(M,E)$$
$$\Phi \mapsto \nabla\Phi$$

On l'appelle **différentielle covariante** associée à la connexion $\nabla$.

**Remarque 2.3.** Dans le cas particulier où $p = 1$, on a : $d_\nabla\Phi(X,Y) = \nabla_X\Phi(Y) - \nabla_Y\Phi(X) - \Phi([X,Y])$
Pour $p = 2$, on a :
$d_\nabla\Phi(X,Y,Z) = \nabla_X\Phi(Y,Z) - \nabla_Y\Phi(X,Z) + \nabla_Z\Phi(X,Y) - \Phi([X,Y],Z) + \Phi([X,Z],Y) - \Phi([Y,Z],X)$
Donc
$d_\nabla(d_\nabla\Phi)(X,Y,Z) = \nabla_X d_\nabla\Phi(Y,Z) - \nabla_Y d_\nabla\Phi(X,Z) + \nabla_Z d_\nabla\Phi(X,Y) - d_\nabla\Phi([X,Y],Z) + d_\nabla\Phi([X,Z],Y) -$

$d_\nabla \Phi([Y, Z], X)$. Or

$$\begin{aligned}\nabla_X d_\nabla \Phi(Y, Z) &= \nabla_X(\nabla_Y \Phi(Z) - \nabla_Z \Phi(Y) - \Phi([Y, Z])) \\ &= \nabla_X \circ \nabla_Y \Phi(Z) - \nabla_X \circ \nabla_Z \Phi(Y) - \nabla_X \Phi([Y, Z]) \\ \nabla_Y d_\nabla \Phi(X, Z) &= \nabla_Y \circ \nabla_X \Phi(Z) - \nabla_Y \circ \nabla_Z \Phi(X) - \nabla_Y \Phi([X, Z]) \\ \nabla_Z d_\nabla \Phi(X, Y) &= \nabla_Z \circ \nabla_X \Phi(Y) - \nabla_Z \circ \nabla_Y \Phi(X) - \nabla_Z \Phi([X, Y])\end{aligned}$$

En posant $\nabla_X d_\nabla \Phi(Y, Z) - \nabla_Y d_\nabla \Phi(X, Z) + \nabla_Z d_\nabla \Phi(X, Y) = m(X, Y, Z)$, on obtient :
$m(X, Y, Z) = \nabla_Z \circ \nabla_X \Phi(Y) - \nabla_X \circ \nabla_Z \Phi(Y) + \nabla_X \circ \nabla_Y \Phi(Z) - \nabla_Y \circ \nabla_X \Phi(Z) + \nabla_Y \circ \nabla_Z \Phi(X) - \nabla_Z \circ \nabla_Y \Phi(X) + (-\nabla_X \Phi([Y, Z]) + \nabla_Y \Phi([X, Z]) - \nabla_Z \Phi([X, Y]))$. D'autre part, en posant :

$$\begin{aligned}d_\nabla \Phi([[X, Y], Z]) &= \nabla_{[X,Y]} \Phi(Z) - \nabla_Z \Phi([X, Y]) - \Phi([[X, Y], Z]) \\ d_\nabla \Phi([[X, Z], Y]) &= \nabla_{[X,Z]} \Phi(Y) - \nabla_Y \Phi([X, Z]) - \Phi([[X, Z], Y]) \\ d_\nabla \Phi([[Y, Z], X]) &= \nabla_{[Y,Z]} \Phi(X) - \nabla_X \Phi([Y, Z]) - \Phi([[Y, Z], X])\end{aligned}$$

En posant $n(X, Y, Z) = -d_\nabla \Phi([X, Y], Z) + d_\nabla \Phi([X, Z], Y) - d_\nabla \Phi([Y, Z], X)$, et comme $\Phi([[X, Y], Z]) - \Phi([[X, Z], Y]) + \Phi([[Y, Z], X]) = \Phi([[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X]) = 0$, on déduit que
$n(X, Y, Z) = \nabla_{[X,Z]} \Phi(Y) - \nabla_{[Y,Z]} \Phi(X) - \nabla_{[Y,Z]} \Phi(X) + \nabla_Z \Phi([X, Y]) - \nabla_Y \Phi([X, Z]) + \nabla_X \Phi([Y, Z])$ Ainsi,
$m(X, Y, Z) + n(X, Y, Z) = \nabla_Z \circ \nabla_X \Phi(Y) - \nabla_X \circ \nabla_Z \Phi(Y) - \nabla_Y \circ \nabla_X \Phi(Z) + \nabla_X \circ \nabla_Y \Phi(Z) - \nabla_{[Z,X]} \Phi(Y) - \nabla_{[X,Y]} \Phi(Z)$ ou encore $d^2_\nabla \Phi(X, Y, Z) = R(X, Y)\Phi(Z) + R(Y, Z)\Phi(X) + R(Z, X)\Phi(Y)$, ce qui montre que l'on n'a pas toujours $d^2_\nabla \Phi = 0$.

Soit $\Phi \in \Omega^p(M, E)$ et $\omega \in \Omega^k(M)$, on définie la forme différentielle de dégré $p + k$ à valeurs dans $E$, $\omega \wedge \Phi$ de la manière suivante :
$\omega \wedge \Phi(X_1, ..., X_{p+k}) = \frac{1}{p!k!} \sum\limits_{\sigma \in S_{p+k}} \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p)})\Phi(X_{\sigma(p+1)}, ..., X_{\sigma(p+k)})$. On a

**Proposition 2.1.2.** *Pour tous $\Phi \in \Omega^p(M, E)$ et $\omega \in \Omega^k(M)$, $d_\nabla(\omega \wedge \Phi) = d\omega \wedge \Phi + (-1)^k \omega \wedge d_\nabla \Phi$.*

Soit $S \in \Gamma(E)$. Comme $d_\nabla S(X) = \nabla_X S$, on a :

$$\begin{aligned}d^2_\nabla S(X, Y) &= \nabla_X d_\nabla S(Y) - \nabla_Y d_\nabla S(X) - d_\nabla S([X, Y]) \\ &= \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X,Y]} S \\ &= R(X, Y)S\end{aligned}$$

On en déduit que $d^2_\nabla S = R_S$ où $d^2_\nabla S(X, Y) = R(X, Y)S$.

**Théorème 2.2.** *Soit $\varphi \wedge S \in \Omega^p(M, E) \approx \Omega^p(M) \wedge_{C^\infty(M)} \Gamma(E)$, on a : $d^2_\nabla(\varphi \wedge S) = \varphi \wedge R_S$.*

*Démonstration.* On rappelle que $d_\nabla(\varphi \wedge S) = d\varphi \wedge S + (-1)^p \varphi \wedge d_\nabla S$, on déduit que $d^2_\nabla(\varphi \wedge S) = d^2\varphi \wedge S + (-1)^{p+1} d\varphi \wedge d_\nabla S + (-1)^p d\varphi \wedge d_\nabla S + \varphi \wedge d^2_\nabla S$.D'où $d^2_\nabla(\varphi \wedge S) = \varphi \wedge d^2_\nabla S = \varphi \wedge R_S$. □

### 2.1.4 Identité de Bianchi

Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur un fibré vectoriel réel $E$ au dessus de $M$. On sait que $\otimes^0 E = M \times \mathbb{R}$. D'autre part, $\Gamma(\otimes^0 E) = C^\infty(M)$. L'application

$$\tilde{\nabla} : C^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$
$$(g, X) \mapsto X(g)$$

est une connexion linéaire sur $\otimes^0 E$. On désigne par $E^*$ le fibré vectoriel dual et on rappelle que $\Gamma(E^*)$ s'identifie à l'ensemble des applications $\varphi : \Gamma(E) \to C^\infty(M)$, $C^\infty(M)$-linéaires. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $\varphi \in \Gamma(E^*)$. Pour tout $S \in \Gamma(E)$, on pose $\nabla^*_X\varphi(S) = X(\varphi(S)) - \varphi(\nabla_X S)$,et on obtient ainsi une application $\nabla^*_X\varphi : \Gamma(E) \to C^\infty(M)$.

**Lemme 2.3.** $\nabla^*_X\varphi \in \Gamma(E^*)$.

*Démonstration.* Soit $g \in C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla^*_X\varphi(g.S) &= X(\varphi(g.S)) - \varphi(\nabla_X(g.S)) \\
&= X(g\varphi(S)) - \varphi(g\nabla_X S + X(g)S) \\
&= gX(\varphi(S)) - g\varphi(\nabla_X S) + X(g)\varphi(S) - X(g)\varphi(S) \\
&= gX(\varphi(S)) - g\varphi(\nabla_X S)
\end{aligned}$$

l'autre cas est évident. □

On considère alors l'application

$$\nabla^* : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*)$$
$$(X, \varphi) \mapsto \nabla^*_X\varphi$$

**Proposition 2.1.3.** *L'application : $\nabla^* : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*)$ est une connexion linéaire sur le fibré dual $E^*$. On l'appelle connexion duale associée à $\nabla$.*

**Lemme 2.4.** *Soient $\nabla^1$ et $\nabla^2$ des connexions linéaires sur les fibrés vectoriels $E_1$ et $E_2$ respectivement , de base $M$. Il existe sur $E_1 \otimes E_2$ une et une seule connexion linéaire $\nabla$ telle que : pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, pour tous $S_1 \in \Gamma(E_1)$ $S_2 \in \Gamma(E_2)$, on a : $\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = (\nabla^1_X S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes \nabla^2_X S_2$. On la note $\nabla^1 \otimes \nabla^2$.*

**Remarque 2.4.** Pour $p$ connexions $\nabla^1$,..,$\nabla^p$ sur des fibrés vectoriels $E_1$,...,$E_p$ de même base $M$, on peut définir la connexion $\nabla^1 \otimes ... \otimes \nabla^p$ sur $E_1 \otimes ... \otimes E_p$. Dans le cas particulier où $E_1 = ... = E_p$ et $\nabla^1 = ... = \nabla^p = \nabla$ , la connexion $\nabla \otimes ... \otimes \nabla$ se notera toujours $\nabla$. En l'associant avec la connexion duale, on construit une connexion linéaire sur $\otimes_q^p E$.Notons que c'est l'unique connexion qui vérifie : pour tous $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $T_1$, $T_2$ deux champs de tenseurs quelconque, on a : $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X^1 T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla_X^2 T_2$.

**Théorème 2.3.** *La courbure $R$ de la connexion linéaire $\nabla$ vérifie $\nabla R = 0$ .*

Ce théorème résulte de la sous section précédente.

## 2.2 CONNEXION LINÉAIRE SUR M

Soit $\nabla$ connexion linéaire sur $M$, on rappelle que c'est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes : pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $g \in C^\infty(M)$, on a :

$$\nabla_X(gY) = g\nabla_X Y + X(g)Y$$
$$\nabla_{gX} Y = g\nabla_X Y$$

Dans un système de coordonnées $(x_1, ...x_m)$ associé à une carte de $M$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= Y_j \nabla_X \frac{\partial}{\partial x_j} + X(Y_j)\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= X_i Y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + X(Y_k)\frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + X(Y_k)\frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= [X(Y_k) + X_i Y_j \Gamma_{ij}^k)]\frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

.

### 2.2.1 Torsion d'une connexion linéaire sur $M$

Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur $M$. En général,$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ n'est pas nul. On pose $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. $T(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$. On obtient ainsi une application

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \mapsto T(X, Y)$$

**Proposition 2.2.1.** *L'application $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ vérifie les égalités suivantes :*

1. *Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $T(X, Y) = -T(Y, X)$*

2. *Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, et $g \in C^\infty(M)$, on a : $T(gX, Y) = gT(X, Y)$.*

*Démonstration.* Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. On a :
$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = -(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y, X]) = -T(Y, X)$.
De même, comme $g[X, Y] - Y(g)X = [gX, Y]$

$$\begin{aligned} T(gX, Y) &= \nabla_{gX} Y - \nabla_Y (gX) - [gX, Y] \\ &= g\nabla_X Y - g\nabla_Y X - Y(g)X - g[X, Y] + Y(g)X \\ &= g\nabla_X Y - g\nabla_Y X - g[X, Y] \\ &= gT(X, Y). \end{aligned}$$

□

Ainsi, $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ est $C^\infty(M)$-bilinéaire et alternée. C'est donc un champ de tenseurs deux fois covariants et une fois contravariant.

**Définition 2.6.** $T$ est appelé **tenseur de torsion** de la connexion linéaire $\nabla$.

Soit $(U, u)$ une carte de $M$ de système de coordonnées $(x^1, ..., x^m)$ tel que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ on a : $\nabla_X Y = (X^i Y^j \Gamma^k_{ij} + X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k}$ et $\nabla_Y X = (X^i Y^j \Gamma^k_{ji} + Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k}$. Comme
$[X, Y] = (X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k}$, on déduit que $T(X, Y) = X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \frac{\partial}{\partial x^k}$. D'autre part, on a :
$T = T^k_{ij}(dx^i \wedge dx^j) \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$.On en déduit que $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$.Par conséquent, $T = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) dx^i \wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$.

**Définition 2.7.** La connexion linéaire $\nabla$ est dite **sans torsion** si $T = 0$.

### 2.2.2 Champ de vecteurs parallèle le long d'une courbe.

Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur $M$. On sait que pour tout $x \in M$, on a :
$\nabla_X Y(x) = [X^i(x) Y^j(x) \Gamma^k_{ij}(x) + X^i(x) \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(x)](\frac{\partial}{\partial x^k})_x$, ce qui montre que pour $Y$ fixé, $\nabla$ ne dépend que de la valeur de $X$ au point $x$.
Soient $\gamma : [0, 1] \to M$ une courbe différentiable , $t \in [0, 1]$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ de vecteurs tel que $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$. Dans un système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^m)$ de $M$ tel que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a : $\frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)(t) = X^i(\gamma(t))$. On pose $x^i \circ \gamma = \gamma^i$, on déduit que
$\nabla_X Y(\gamma(t)) = (\gamma^i)'(t)[Y^j(\gamma(t)) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) + \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(\gamma(t))](\frac{\partial}{\partial x^k})_{\gamma(t)}$.

**Définition 2.8.** Le champ de vecteurs $Y$ est **parallèle** le long de $\gamma$ si $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y = 0$ pour tout $t$.

**Définition 2.9.** L'application $t \mapsto \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y$ est appelée **dérivée de $Y$ le long de $\gamma$**.

**Remarque 2.5.** 1. Le champ de vecteurs $Y$ est parallèle le long de $\gamma$ si dans tout système de coordonnées $(x^1, ..., x^m)$ si on a : pour tout $k \leq m$, $(\gamma^i)'(t)Y^j(\gamma(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))+(\gamma^i)'(t)\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(\gamma(t)) = 0$. De plus, $(\gamma^i)'(t)\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(Y^k(\gamma(t)))$, on déduit que pour tout $k \leq m$,
$\frac{d}{dt}(Y^k(\gamma(t))) + Y^j(\gamma(t))\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0$.
Dans $\mathbb{R}^m$, on a $\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0$ et par conséquent le champ de vecteur est parallèle le long de $\gamma$ si $\frac{d}{dt}(Y^k(\gamma(t))) = 0$.

2. Soit $Y$ tel que $Y(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$, dans ce cas ,$Y^k(\gamma(t)) = \frac{d\gamma^k(t)}{dt}$. Par conséquent, $Y$ est parallèle le long de $\gamma$ si et seulement si pour tout $k \leq m$, $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t) + \frac{d\gamma^j(t)}{dt}\frac{d\gamma^i(t)}{dt}\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0$.

**Définition 2.10.** Si pour tout $k \leq m$, $\frac{d^2\gamma^k}{dt^2}(t) + \frac{d\gamma^j(t)}{dt}\frac{d\gamma^i(t)}{dt}\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0$, on dit que $\gamma$ **est une géodésique** associée à la connexion $\nabla$.

**Remarque 2.6.** On considère le système différentiel d'ordre 1
$\frac{d}{dt}(Y^k(\gamma(t))) + Y^j(\gamma(t))(\gamma^i)'(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0$. La fonction inconnue étant $Y^k$, si les fonctions $\Gamma^k_{ij}$ et $\gamma$ sont de classe $C^2$, alors $Y$ existe localement. Si on a les conditions initiales en un point $\gamma(t_0)$ et $Y(\gamma(t_0)) = u_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$,alors la solution est unique.

**Théorème d'existence de géodésiques :** *On considère le système différentiel autonome d'ordre* 2, $\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ij} = 0$. *Si les fonctions $\Gamma^k_{ij}$ sont de classe $C^1$, alors il existe une unique géodésique $\gamma$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = u_0 \in T_pM$.*

*Démonstration.* En posant $\frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i$, on obtient le système $\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i \\ \frac{d\dot{x}^k}{dt} = \dot{x}^i\dot{x}^j\Gamma^k_{ij} \end{cases}$ et on conclut grâce au théorème d'existence des systèmes différentiels autonomes d'ordre 1. □

### 2.2.3 Application : Transport parallèle le long d'une courbe.

Soit $\gamma : [0, 1] \to M$ une courbe différentiable telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Pour $u_0 \in T_pM$, il existe un et un seul champ de vecteurs $X_{u_0}$ tel que $X_{u_0}(p) = u_0$ et $X_{u_0}$ est un champ de vecteurs parallèle le long de $\gamma$. En d'autres termes, $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X_{u_0} = 0$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \tau^\gamma_{p,q} : T_pM &\to T_qM \\ u_0 &\mapsto X_{u_0}(q) \end{aligned}$$

elle est linéaire et bijective. En effet, soientt $u_0, v_0 \in T_pM$. Comme $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X_{u_0} = 0$ et $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y_{v_0} = 0$ il vient que $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(X_{u_0} + Y_{v_0}) = 0$. De plus, $(X_{u_0} + Y_{v_0})(p) = u_0 + v_0$. On a alors
$\tau^\gamma_{p,q}(u_0 + v_0) = (X_{u_0} + Y_{v_0})(q) = X_{u_0}(q) + Y_{v_0}(q)$. On fait de même pour $\lambda.u_0$ et on a : $\tau^\gamma_{p,q}(\lambda.u_0) = \lambda.\tau^\gamma_{p,q}(u_0)$. Ainsi, $\tau^\gamma_{p,q}$ est linéaire.

D'autre part, si $\tau^{\gamma}_{p,q}(u_0) = X_{u_0}(q) = 0$, comme le champ de vecteurs nul vérifie les mêmes hypothèses que $X_{u_0}$, on conclut d'après le théorème d'unicité que $X_{u_0} = 0$, par conséquent, $X_{u_0}(p) = u_0 = 0$. On en déduit que $\tau^{\gamma}_{p,q}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Définition 2.11.** L'isomorphisme $\tau^{\gamma}_{p,q}$ est appelé **transport parallèle** le long de $\gamma$.

**Remarque 2.7.** On peut étudier en particulier le transport parallèle le long d'une géodésique de la connexion canonique sur $\mathbb{R}^m$. Ce qui correspond aux translations dans $\mathbb{R}^m$.

# 2.3 VARIÉTÉ RIEMANNIÈNNE

## 2.3.1 Métrique riemannienne

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m \geq 1$. On désigne par $\Gamma(\odot^2 T^*M)$ le $C^\infty(M)$-module des sections différentiables du fibré vectoriel réel $(\Gamma(\odot^2 T^*M), M)$ des champs de tenseurs 2-fois covariants et symétriques.

**Définition 2.12.** Un champ de tenseurs $g \in \Gamma(\odot^2 T^*M)$ est dit **non dégénéré**, si pour tout $x \in M$, l'application bilinéaire symétrique $g(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ est non dégénérée.

**Remarque 2.8.** Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique, $(e_1, ..., e_n)$ une base de $V$. En posant $B(e_i, e_j) = B_{ij}$, on obtient la matrice symétrique $(B_{ij})_{1\leq i;j\leq n}$. On dit que $B$ est de rang $r$ si la matrice $(B_{ij})$ est de rang $r$. Comme la matrice est symétrique, elle est diagonalisable. Il existe une base $(u_1, ..., u_n)$ de $V$ telle que la matrice de $B$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0\cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \lambda_p & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \mu_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_q & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0\cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0\cdots & 0
\end{pmatrix}$$

où $\mu_i < 0 < \lambda_i$ pour tous $i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., q$, avec $p + q = r$. Notons que $p$ représente le nombre de valeurs propres strictement positives et $q$ le nombre de valeurs propres strictement négatives. Lorsque $B$ est non dégénérée, on a comme matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_q \end{pmatrix}$$

**Définition 2.13.** Soit $g \in \Gamma(\odot^2 T^*M)$ un tenseur covariant sur $M$ non dégénéré, on dit que $g$ est de signature $(p,q)$ si pour tout $x \in M$, $g(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ est de signature $(p,q)$ avec $p+q=m$.

**Définition 2.14.** On appelle **métrique pseudo-riemannienne** de signature $(p,q)$ sur $M$, la donnée d'un tenseur $g \in \Gamma(\odot^2 T^*M)$ non dégénéré et de signature $(p,q)$. Dans ce cas, le couple $(M,g)$ est appelé **variété pseudo-riemannienne.** Lorsqu'il n'y a pas de confusion sur $g$, on note simplement $M$.

• Si $q = 0$, c'est-à-dire que $g(x)$ est définie positive sur $T_xM$, on dit que $g$ **est une métrique riemannienne** et le couple $(M,g)$ est appelée **variété riemannienne**.

• Si $p = 1$ et $q > 0$, on dit que $g$ est **une métrique Lorentzienne** et le couple $(M,g)$ est appelé **variété Lorentzienne**.

**Remarque 2.9.** Soit $(M,g)$ une variété riemannienne. Pour tout $x \in M$, le couple $(T_xM, g(x))$ est un espace vectoriel euclidien.

**Exemple 2.2.** On note par $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{S}$ une surface de $\mathbb{R}^3$ ; image d'un plongement

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On prends $g$ la métrique induite par $\langle .,. \rangle$ sur $\mathcal{S}$. Comme les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(p) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$ forment une base de $T_p\mathcal{S}$ , on en déduit que la métrique $g$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2 & \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle & \|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2 \end{pmatrix}$. En posant $dudv = \frac{1}{2}(du \otimes dv + dv \otimes du)$ et $du^2 = du \otimes du$ , on obtient que : $g = \|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2 du^2 + \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle dudv + \|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2 dv^2$.

**Exemple 2.3.** Pour la sphère $\mathbb{S}^2$ on a : $\begin{cases} x(u,v) = cosucosv \\ y(u,v) = cosusinv \\ z(u,v) = sinu \end{cases}$ On obtient

$\frac{\partial f}{\partial u} = (-sinucosv, -sinusinv, cosu)$ et
$\frac{\partial f}{\partial v} = (-cosusinv, -cosucosv, 0)$
on a alors $\|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2 = 1$ et $\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = 0$ $\|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2 = cos^2 u$ on en déduit que $g_{\mathbb{S}^2} = du^2 + cos^2 u dv^2$ est une métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^2$.

**Remarque 2.10.** Soit $(U, u)$ une carte de $M$ de système de coordonnées $(x^1, ..., x^m)$, on a : $g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ij}$. On déduit que $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ et $g_{ij} = g_{ji}$. On désigne par $g^{ij}$ la matrice inverse de $g_{ij}$. Donc $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$

### 2.3.2 Variété riemannienne comme espace métrique.

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne. Soit $C$ une courbe tracée sur $M$ de paramétrisation $\lambda : [a, b] \to M$, on pose $\| \gamma(t) \|^2 = g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$. Le nombre réel $\int_a^b \| \gamma(t) \| dt$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie. On préfère sans risque de confusion le noter $L(\gamma)$.

**Définition 2.15.** Le nombre $L(\gamma)$ défini par $L(\gamma) = \int_a^b \| \gamma(t) \| dt$ est appelé **longueur de la courbe** $C$.

Soit $M$ une variété riemannienne connexe (donc connexe par arc), pour tout point $x, y \in M$, on désigne par $\Gamma_{x,y} = \{\gamma \in C^1([0, 1], M)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y\}$. Comme $M$ est connexe, il vient que $\Gamma_{x,y} \neq \emptyset$. On pose $d_g(x, y) = inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} L(\gamma)$. On obtient ainsi une application $d_g : M \times M \to \mathbb{R}_+$.

**Proposition 2.3.1.** *L'application $d_g : M \times M \to \mathbb{R}_+$ est une distance sur $M$.*

*Démonstration.* $*$ On débute par l'inégalité triangulaire.

Soient $x, y, z \in M$ et $\gamma_1 \in \Gamma_{x,y}$ ; $\gamma_2 \in \Gamma_{y,z}$, le chemin $\gamma_1.\gamma_2$ défini par : $\gamma_1.\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$
est un élément de $\Gamma_{x,z}$. Comme $L(\gamma_1.\gamma_2) \leq L(\gamma_2) + L(\gamma_1)$, on déduit que
$d_g(x, z) \leq L(\gamma_1.\gamma_2) \leq L(\gamma_2) + L(\gamma_1)$ pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_{x,y}$ et $\gamma_2 \in \Gamma_{y,z}$. Ceci implique que
$d_g(x, z) \leq d_g(x, y) + d_g(y, z)$.

$*$ Montrons la symétrie.

Soit $\gamma \in \Gamma_{x,y}$ alors $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(1 - t) \in \Gamma_{y,x}$, il vient que $d_g(y, x) \leq L(\gamma^{-1}) = L(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_{x,y}$. On déduit que $d_g(y, x) \leq d_g(x, y)$. En permutant $x$ et $y$ , on a : $d_g(x, y) \leq d_g(y, x)$, d'où l'égalité.

$*$ Montrons la séparation.

Soit $x, y \in M$ tels que $d_g(x, y) = 0$. On suppose que $x \neq y$, il existe un ouvert $U_x$ de $M$ contenant $x$ et un ouvert $U_y$ de $M$ contenant $y$ tels que $U_x \cap V_y \neq \emptyset$. On prends $U_x$ et $U_y$ de sorte qu'ils soient domaines de deux cartes $(U_x, u_x)$ et $(U_y, u_y)$ centrée en $x$ et $y$ respectivement dont la métrique coïncide avec la celle usuelle sur $\mathbb{R}^n$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(0, \epsilon) \subset u_x(U_x)$ et $B(0, \epsilon) \subset u_y(U_y)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_{x,y}$, on a : $L(\gamma) \geq \epsilon$. Il vient que $d_g(x, y) \geq \epsilon > 0$. □

### 2.3.3 Isométries d'une variété riemannienne

Soient $(M, g_M)$ et $(N, g_N)$ deux variétés riemanniennes de même dimension $n > 0$.

**Définition 2.16.** On dit qu'une application $\Phi : M \to N$ est **une isométrie locale** si pour tout $x \in M, T_x\Phi : T_xM \to T_{\Phi(x)}N$ est une isométrie vectorielle de $(T_xM, g_M(x))$ vers $(T_{\Phi(x)}N, g_N(\Phi(x)))$. En d'autres termes, $g_N(\Phi(x))(T_x\Phi(h_x), T_x\Phi(k_x)) = g_M(x)(h_x, k_x)$ pour tous $h_x, k_x \in T_xM$.

**Remarque 2.11.** Si $\Phi : M \to N$ est une isométrie locale, alors $T_x\Phi$ est bijective et par conséquent $\Phi$ est un difféomorphisme local.

**Proposition 2.3.2.** *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne.*

1. *L'application $Id_M$ est une isométrie.*
2. *Si $\Phi : M \to M$ et $\Psi : M \to M$ sont des isométries de $(M, g)$, alors $\Phi^{-1}$ et $\Phi \circ \Psi$ sont des isométries de $(M, g)$.*
3. *On désigne par $Isom(M)$ l'ensemble des isométries de $(M, g)$. Muni de la composition des applications,$(Isom(M), \circ)$ est un groupe appelé groupe des isométries de $(M, g)$.*
4. *Si $\gamma : [0, 1] \to M$ est une courbe et $\Phi : M \to M$ est une isométrie, alors $L(\Phi \circ \gamma) = L(\gamma)$. En particulier si $M$ est connexe,$d_g(\Phi(x), \Phi(x)) = d_g(x, y)$ pour tout $x, y \in M$.*

**Théorème 2.4.** *Soit $(M, g)$ une variété riemannienne telle que $M$ est connexe. Une application $\Phi : M \to M$ est une isométrie si et seulement si $d_g(\Phi(x), \Phi(x)) = d_g(x, y)$ pour tout $x, y \in M$.*

**Définition 2.17.** Soient $(N, g_N)$ une variété riemannienne de dimension $n > 0$ , $M$ une variété différentiable et $\Phi : M \to N$ un difféomorphisme local. On définit une métrique $g_M = \Phi_* g_N$ appelée **métrique arrière** de $g_N$ ou **pull-back** de $g_N$ en posant
$g_M(x)(h_x, k_x) = g_N(\Phi(x))(T_x\Phi(h_x), T_x\Phi(k_x))$ pour tous $x \in M$ et $h_x, k_x \in T_xM$. Pour cette métrique $g_M$, $\Phi$ est une isométrie locale.

**Corollaire 2.3.1.** $\Phi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ est une isométrie si et seulement si $g_M = \Phi_* g_N$.

## 2.4 CONNEXION DE LÉVI-CIVITA ET TENSEUR DE COURBURE RIEMANNIENNE

### 2.4.1 Connexion de Lévi-Civita

Soient $(M, g)$ une variété riemannienne et $\nabla$ une connexion linéaire sur $M$. On rappelle que $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ peut s'étendre aux champs de tenseurs suivant les règles suivantes :

- Pour tout $f \in C^\infty(M)$,$\nabla_X(f) = X(f)$
- $\nabla_X$ conserve le type de tenseur.
- Pour tous tenseurs $T$ et $S$ quelconques, $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X(T) \otimes S + T \otimes \nabla_X(S)$.

**Définition 2.18.** On dit que $\nabla$ est **une connexion riemannienne** (ou de **Levi-Civita**) sur $(M, g)$ si :

1. $\nabla_X(g) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $T(X, Y) = 0$, c'est-à-dire que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. ( torsion nulle).

**Remarque 2.12.** Soit $\nabla$ une connexion riemannienne sur $(M, g)$. L'égalité $\nabla_X(g) = 0$ traduit que pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$ ou encore $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

**Proposition 2.4.1.** ***Formule de Koszul***

*Soit $(M, g)$ une variété riemannienne et $\nabla$ la connexion de Lévi-Civita associée.*

*Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a :*

$2g(Y, \nabla_X Z) = X(g(Y, Z)) + Z(g(X, Y)) - Y(g(Z, X)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) - g([Z, Y], X)$.

*Démonstration.* voir [1] page 12. □

**Remarque 2.13.** En coordonnées locales avec $g = g_{jp} dx^j \otimes dx^p$, pour $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ et $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, on obtient : $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^p_{ik} \frac{\partial}{\partial x^p}$. On déduit que : $2\Gamma^p_{ik} g_{jp} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}$. On désigne par $g^{jp}$ les coefficients la matrice inverse de la matrice de coefficients $g_{jp}$, on a :
$\Gamma^p_{ik} = \frac{1}{2} g^{jp} (\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j})$.

Cette formule montre que pour une métrique riemannienne ou pseudo-riemannienne sur une variété différentiable $M$, on peut trouver une et une seule connexion $\nabla$ sur $M$ de coefficients de Christoffell $\Gamma^p_{ik}$ donnés par la formule ci-dessus. On a le théorème suivant :

**Théorème 2.5.** *Soit $(M, g)$ une variété pseudo-riemannienne. Il existe une et une seule connexion $\nabla$ de M de torsion nulle telle que $\nabla_X(g) = 0$ pour tous $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

*Démonstration.* voir [4] page 32 □

**Exemple 2.4.** On prends $M = \mathbb{R}^n$ avec la métrique $g_0 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2$, on constate que $\Gamma^k_{ij} = 0$ $\forall i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Par conséquent, la courbure est nulle. Dans ce cas, les équations des géodésiques sont données par $\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$. On obtient $x^k(t) = a_k t + b_k$. D'où $x(t) = at + b$ avec $a = (a_1, ..., a_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$. Ainsi,les géodésiques ici sont des droites.

Soient $(M, g_M)$ et $(N, g_N)$ deux variétés riemanniennes et $\Phi : M \to N$ une isométrie locale. Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a : $\tilde{\nabla}_{\Phi(X)}\Phi(Y) = \Phi_*(\nabla_X Y)$.

**Proposition 2.4.2.** Si $\Phi : M \to N$ est une isométrie locale et $\gamma : J \to M$ une géodésique de $(M, g_M)$, alors $\Phi \circ \gamma$ est une géodésique de $(N, g_N)$.

*Démonstration.* Elle découle de $\tilde{\nabla}_{\Phi(X)}\Phi(Y) = \Phi_*(\nabla_X Y)$ □

### 2.4.2 Tenseur de courbure d'une variété riemannienne.

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne et $\nabla$ la connexion de Lévi-Civita associée.

**Définition 2.19.** On appelle **courbure** de $\nabla$ le $(3, 1)$-tenseur $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$. En coordonnées locales on a : $R = R^p_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^p}$, avec $R^p_{ijk} = \Gamma^q_{jk}\Gamma^p_{iq} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^p_{jq} + \frac{\partial\Gamma^p_{jk}}{dx^i} - \frac{\partial\Gamma^p_{ik}}{dx^j}$.

**Proposition 2.4.3.** 1. *R vérifie l'identité de BIANCHI algébrique*

$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$

2. *R vérifie l'identité de BIANCHI différentielle .*

$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$ .

*Pour tous* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

**Définition 2.20.** On appelle **tenseur de courbure riemannienne** le tenseur $R$ de type $(4, 0)$ défini par $R(X, Y, Z, W) = g[R(X, Y)Z, W]$ pour tous $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

En coordonnées locales $(x^1, ..., x^m)$ on a : $R_{ijkl} = g(R^p_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^p}, \frac{\partial}{\partial x^l}) = R^p_{ijk}g_{pl}$, On obtient $R_{ijkl} = \sum_{p=1}^{m} R^p_{ijk}g_{pl}$.

**Proposition 2.4.4.** *Soit* $(M, g)$ *une variété riemannienne . Le tenseur de courbure riemannienne* $R$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.
2. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.

Pour tous $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

**Proposition 2.4.5.** *Pour tout* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*, on a :*

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$.
2. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.
3. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$.

4. *pour tous* $f, g, h, t \in C^{\infty}(M)$*, on a :*$R(fX, gY, hZ, tW) = fghtR(X, Y, Z, W)$.

*Démonstration.* voir [4] page 34 − 35 □

**Remarque 2.14.** Comme $R$ est un champ de tenseur de type $(4, 0)$, c'est une section du fibré vectoriel $\otimes^4 T^*M \to M$. Pour $x \in M$, $R_x \in T_x^*M$,on obtient ainsi une application
$R_x : T_xM \times T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ qui est quadri-linéaire et vérifie en outre,
$R_x(u, v, \omega, z) = -R_x(v, u, \omega, z)$ et $R_x(u, v, \omega, z) = -R_x(u, v, z, \omega)$ pour tout $u, v, \omega, z \in T_xM$.

**Proposition 2.4.6.** *Soient* $(M, g_M)$ *et* $(N, g_N)$ *deux variétés riemanniennes et* $\Phi : M \to N$ *une isométrie locale. On a :*
$R_x^{g_M}(u, v, \omega, z) = R_{\Phi(x)}^{g_N}[T_x\Phi(u), T_x\Phi(v), T_x\Phi(\omega), T_x\Phi(z)]$ *pour tous* $u, v, \omega, z \in T_xM$.

Chapitre Trois

# COURBURE RIEMANNIENNE DE LA MÉTRIQUE DE SASAKI

## 3.1 RELÈVEMENTS DES FONCTIONS

Soient $M$ une variété différentiable de dimension $m \geq 1$ et de classe $C^\infty$ , et $\pi_M : TM \to M$ la projection canonique.

### 3.1.1 Relèvement vertical des fonctions

**Définition 3.1.** Soit $f \in C^\infty(M)$. L'application $f^{(v)} = f \circ \pi_M$ est appelée **relèvement vertical** de $f$ à $TM$.

**Propriété 3.1.1.** *Soient $f; g \in C^\infty(M)$*

1. $(f+g)^{(v)} = f^{(v)} + g^{(v)}$.
2. $(f.g)^v = f^{(v)}.g^{(v)}$.

### 3.1.2 Relèvement complet des fonctions

Soit $x \in M$ et $v \in T_xM$. Il existe une courbe $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \to M$ $(\epsilon > 0)$ telle que $\alpha(0) = x$ et $[\alpha] = v$. On pose $f^{(c)}(x, v) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)|_{t=0}$ .

**Proposition 3.1.1.** *$f^{(c)}(x, v)$ ne dépend pas de la courbe $\alpha$ choisie.*

*Démonstration.* Si $\beta : ]-\epsilon, \epsilon[ \to M$ est une courbe vérifiant $\beta(0) = x$ et $v = [\beta]$, alors

$\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f\circ\beta)(t)|_{t=0}$. Ainsi, il existe une carte $(U,u)$ de $M$ en $x$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f\circ\beta)(t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(f\circ u^{-1})\circ(u\circ\beta)(t)|_{t=0}\\ &= D(f\circ u^{-1})(u(x))\frac{d}{dt}(u\circ\beta)(t)|_{t=0}\\ &= D(f\circ u^{-1})(u(x))\frac{d}{dt}(u\circ\alpha)(t)|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)|_{t=0}\end{aligned}$$

D'où $f^{(c)}(v)$ ne dépend pas de la courbe $\alpha$ choisie. □

On obtient ainsi une application

$$\begin{aligned} f^{(c)} : TM &\to \mathbb{R}\\ (x,v) &\mapsto f^{(c)}(v).\end{aligned}$$

**Proposition 3.1.2.**

1. *L'application $f^{(c)}$ est différentiable.*
2. *Soit $(U,u)$ une carte locale de $M$ de système de coordonnées $(x^1,...,x^m)$ tel que $(x^1,...,x^m,\dot{x}^1,...,\dot{x}^m)$, soit le système adapté à $TM$. $\forall f\in C^\infty(M)$, $f^{(c)} = \sum_{i=1}^{m}\dot{x}^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$.*

*Démonstration.* Soit $(x,a)\in TM$ tel que $\pi_M(x,a) = x$ et une courbe $\alpha$ telle que $[\alpha] = a$. Soit de plus $(U,u)$ une carte de $M$ en $x$ de système de coordonnées $(x^1,...,x^m)$, on désigne par $(x^i,\dot{x}^i)$ le système de coordonnées de $TM$ adapté, avec $x^i(x,a) = x^i(a)$ et $\dot{x}^i(a) = \frac{d}{dt}(x^i\circ\alpha)(t)|_{t=0}$.

$$\begin{aligned} f^{(c)}(a) &= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}(f\circ u^{-1})\circ(u\circ\alpha)(t)|_{t=0}\\ &= D(f\circ u^{-1})(u(x))\frac{d}{dt}(u\circ\alpha)(t)|_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(f\circ u^{-1})}{\partial x^i}(u(x))\frac{d}{dt}(x^i\circ\alpha)(t)|_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(f\circ u^{-1})}{\partial x^i}(u(x)).\dot{x}^i(a)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(f\circ u^{-1})}{\partial x^i}(u(\pi_M(a))).\dot{x}^i(a).\end{aligned}$$

Ainsi, $f^{(c)} = \sum_{i=1}^{m}\dot{x}^i\frac{\partial(f\circ u^{-1})}{\partial x^i}(u\circ\pi_M)$ qui est différentiable et en particulier si $f$ est de classe $C^k$, $f^{(c)}$ est de classe $C^{k-1}$. La démonstration de la deuxième proposition en découle. □

**Définition 3.2.** L'application $f^{(c)}$ est appelée **relèvement complet** de $f$.

**Proposition 3.1.3.** *Soient* $f, g \in C^\infty(M)$ et $a \in \mathbb{R}$. *Alors* :

1. $(f + g)^{(c)} = f^{(c)} + g^{(c)}$.
2. $(af)^{(c)} = af^{(c)}$.
3. $(f.g)^{(c)} = f^{(v)}.g^{(c)} + f^{(c)}.g^{(v)}$.

*Démonstration.* 1. et 2. sont évidents.

Soit $(x, v) \in TM$. Il existe $\alpha : ]-\epsilon, \epsilon[ \to M$, différentiable telle que $\alpha(0) = x$, $\pi_M(x, v) = x$ et $[\alpha] = v$.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(c)}(v) &= \frac{d}{dt}(f.g)(\alpha(t))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[f(\alpha(t)).g(\alpha(t))]|_{t=0} \\
&= f(\alpha(t))\frac{d}{dt}[g(\alpha(t))]|_{t=0} + \frac{d}{dt}[f(\alpha(t)).g(\alpha(t))]|_{t=0} \\
&= f^{(v)}.g^{(c)}(v) + f^{(c)}.g^{(v)}(v)
\end{aligned}$$

□

## 3.2 RELÈVEMENTS DES CHAMPS DE VECTEURS

### 3.2.1 Relèvement complet

Soit $X$ un champ de vecteurs sur $M$. On désigne par $Fl^X$ le flot du champ de vecteurs $X$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $X$ est complet. On pose :

$$\begin{aligned}
Fl^X : \mathbb{R} \times M &\to M \\
(t, x) &\mapsto Fl_t^X(x)
\end{aligned}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned}
\Phi_t : TM &\to TM \\
v &\mapsto T(Fl_t^X)(v)
\end{aligned}$$

$\Phi_t$ est bien définie et on a :

**Proposition 3.2.1.** $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est le flot d'un champ de vecteurs de* $TM$ *noté* $X^{(c)}$.

*Démonstration.* Soient $t, s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{t+s}(v) &= T(Fl_{t+s}^X)(v) \\
&= T(Fl_t^X \circ Fl_s^X)(v) \\
&= T(Fl_t^X) \circ T(Fl_s^X)(v) \\
&= \Phi_t \circ \Phi_s(v).
\end{aligned}$$

Et de plus : $\Phi_s(0) = T(Fl_0^X)(v) = T(Id_M)(v) = Id_{TM}(v)$. Ainsi $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot d'un champ de vecteurs sur $TM$. □

**Définition 3.3.** Le champ de vecteur $X^{(c)}$ de $TM$ est appelé **relèvement complet** de $X$ de $M$ à $TM$.

**Proposition 3.2.2.** *Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$.*
*$\forall f \in C^\infty(M)$, $X^{(c)}(f^{(c)}) = (X(f))^{(c)}$ et $X^{(c)}(f^{(v)}) = (X(f))^{(v)}$.*

**Remarque 3.1.** (expression locale de $X^{(c)}$).

Soient $(U, u)$ une carte de $M$ de système coordonnées locales $(x^1, x^2, ..., x^m)$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$ tel que $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. On se propose de déterminer l'expression de $X^{(c)}$ de coordonnées locales adaptées.
On a : $X^{(c)} = X_i^c \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{X}_i^c \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$.

$$\begin{aligned}
X^{(c)}(f^{(c)}) &= X^{(c)}(\dot{x}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) \\
&= X_j^c \frac{\partial}{\partial x^j}(\dot{x}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) + \dot{X}_j^c \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}(\dot{x}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}) \\
&= X_j^c \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) + \dot{X}_j^c \frac{\partial f}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(X(f))^{(c)} &= \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}(X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) \\
&= (\dot{x}^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^j \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j})
\end{aligned}$$

Ces relations étant vraies pour toutes fonctions $f \in C^\infty(M)$, on déduit que $X_j^c = X_j$ et
$\dot{X}_i^c = \sum_{i=1}^m \dot{x}^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}$ $\forall j \in \{1, ..., m\}$

**Exemple 3.1.** On prends $M = \mathbb{R}^2$ et $X$ un champ de vecteurs tel que :

$$\begin{aligned}
X : &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
&(x, y) \mapsto (y, x)
\end{aligned}$$

et $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. On a : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$ donc $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = x$. C'est à dire que $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ et les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = x$ sont de la forme $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$. On a $\frac{dy}{dt} = x(t)$ c'est à dire que $y(t) = Ae^t - Be^{-t}$. Or $x(0) = x$ et $y(0) = y$. Donc $\begin{cases} x(0) = A + B = x \\ y(0) = A - B = y \end{cases}$ ce qui implique que

$\begin{cases} A = \frac{x+y}{2} \\ B = \frac{x-y}{2} \end{cases}$, d'où $x(t) = \frac{x+y}{2}e^t + \frac{x-y}{2}e^{-t}$ et $y(t) = \frac{x+y}{2}e^t - \frac{x-y}{2}e^{-t}$.
Posons

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (t,(x,y)) &\mapsto (\frac{x+y}{2}e^t + \frac{x-y}{2}e^{-t}, \frac{x+y}{2}e^t - \frac{x-y}{2}e^{-t}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ ((x,y)) &\mapsto (\frac{x+y}{2}e^t + \frac{x-y}{2}e^{-t}, \frac{x+y}{2}e^t - \frac{x-y}{2}e^{-t}) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Phi_t(x,y) &= (\frac{x+y}{2}e^t + \frac{x-y}{2}e^{-t}, \frac{x+y}{2}e^t - \frac{x-y}{2}e^{-t}) \\ &= (xcht + ysht, xsht + ycht) \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de $\Phi_t$ est donc : $J(\Phi_t)=\begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}$
$|J(\Phi_t)| = ch^2(t) - sh^2(t) = 1$. On a : $T(\Phi_t)(x,y,\dot{x},\dot{y}) = (x,y,\dot{x}ch(t) + \dot{y}sh(t), \dot{x}sh(t) + \dot{y}ch(t))$

$X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + D\frac{\partial}{\partial \dot{y}}$. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}|_{t=0} = A \\ \frac{dy}{dt}|_{t=0} = B \\ \frac{d\dot{x}}{dt}|_{t=0} = C \\ \frac{d\dot{y}}{dt}|_{t=0} = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x \\ B = y \\ C = \dot{x} \\ D = \dot{y} \end{cases}$ donc $X^{(c)} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}$.

### 3.2.2 Relèvement vertical

Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} \Psi_t : TM &\to TM \\ v &\mapsto v + tX(\pi(v)) \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.3.** *$\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot global d'un champ de vecteurs noté $X^{(v)}$ sur $TM$.*

*Démonstration.* Soient $t$ et $s$ deux éléments de $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \Psi_{t+s}(v) &= v + (t+s)X(\pi(v)) \\ &= v + tX(\pi(v)) + sX(\pi(v)) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\Psi_t \circ \Psi_s(v) &= \Psi_t(\Psi_s(v))\\ &= \Psi_t(v + sX(\pi(v)))\\ &= v + sX(\pi(v)) + tX(\pi(v))\end{aligned}$$

Donc $\Psi_t \circ \Psi_s = \Psi_{t+s}$. Par ailleurs, $\Psi_0(v) = v + 0.X(\pi(v)) = v$. C'est à dire que $\Psi_0 = Id_{TM}$. Ainsi, $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot global d'un champ de vecteurs sur $TM$. □

**Définition 3.4.** Le champ de vecteurs $X^{(v)}$ de $TM$ est appelé **relèvement vertical** de $X$ de $M$ à $TM$.

**Proposition 3.2.4.** *Soit $X \in C^\infty(M)$ et $f \in C^\infty(M)$. On a : $X^{(v)}(f^{(v)}) = 0$.*

**Définition 3.5.** Un champ de vecteurs $\tilde{X}$ de $TM$ est dit vertical si $\forall f \in C^\infty(M)$, $\tilde{X}(f^{(v)}) = 0$.

**Proposition 3.2.5.** *Soit $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ dans une carte locale $(U, \varphi)$ de $M$. Alors $X^{(v)} = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$ dans le système de coordonnées locales adapté.*

*Démonstration.* voir [1] page 124 □

**Remarque 3.2.**

1. Considérons $d\pi_M : TTM \to TM$, différentielle de l'application $\pi_M$. Notons par $d_{(x,v)}\pi_M$ sa restriction à $T_{(x,v)}TM$, espace vectoriel tangent à $TM$ en $(x, v)$. Alors,

$$\begin{aligned} d_{(x,v)}\pi_M : T_{(x,v)}TM &\longrightarrow T_xM\\ \tilde{X} &\longmapsto \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned}$$

   pour $\tilde{X} = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$

2. $\mathcal{N}_{(x,v)} = Ker(d_{(x,v)}\pi_M)$ est un sous espace-vectoriel de $T_{(x,v)}TM$ appelé **sous- espace vertical.**
3. Localement, $\mathcal{N}_{(x,v)}$ est engendré par $\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$.
4. $\mathcal{N} = \bigcup_{(x,v)\in TM} \mathcal{N}_v$ est un sous-fibré vectoriel de $T(TM)$ appelé fibré vertical.

**Définition 3.6.** Soient $u \in T_xM$ et $X \in \mathfrak{X}(M)$ tel que $X_x = u$, on note : $u^{(v)} = (X^{(v)})_{(x,u)} \in T_{(x,u)}TM$ le relèvement vertical du vecteur tangent $u$ à $T_{(x,v)}TM$. Cette formule est indépendante du choix de $X$.

**Proposition 3.2.6.** *Soient $x \in M$ et $v \in T_xM$, alors l'application*

$$\begin{aligned} T_xM &\longrightarrow \mathcal{N}_{(x,v)}\\ u &\longmapsto u^{(v)}\end{aligned}$$

*est un isomorphisme.*

### 3.2.3 Relèvement horizontal

Supposons que la variété $M$ est munie d'une connexion linéaire $\nabla$ et considérons l'application

$$\gamma : \otimes_q^p M \to \otimes_{q-1}^p M$$
$$F \mapsto \gamma(F)$$

telle que pour $F = F^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$, $\gamma(F) = F^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \dot{x}^{j_1} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{i_p}} \otimes dx^{j_2} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$

**Définition 3.7.** On définit la **connexion opposée** à $\nabla$ notée $\hat{\nabla}$ par $\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

**Proposition 3.2.7.** *Les coefficients de Christoffel associés à $\hat{\nabla}$ sont notés $\hat{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.*

**Définition 3.8.** Soit $X$ un champ de vecteurs sur $M$. On définit le **relèvement horizontal** de $X$ à $TM$ par $X^{(h)} = X^{(c)} - \gamma(\hat{\nabla} X)$.

**Proposition 3.2.8.** *(coordonnées locales de $X^{(h)}$)*

*Soit $(U, u)$ une carte locale de $M$ de système de coordonnées : $(x^1, \ldots, x^m)$ et de système adapté sur $TM$ : $(x^1, \ldots, x^m, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^m)$.*

*Si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$,*

$$\nabla X = (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{jk}) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$
$$\gamma(\nabla X) = (\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma^i_{jk}) \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$$
$$X^{(c)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$$

*Ainsi $X^{(h)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \dot{x}^j X^k \Gamma^i_{kj} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$.*

**Remarque 3.3.**
1. Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a $d\pi_M o X^{(h)} = X o \pi_M$.
2. Soit $(x, v) \in TM$ . Alors, $\mathcal{H}_{(x,v)} = \{X^{(h)}_{(x,v)} ; X \in \mathfrak{X}(M)\}$ est un sous espace vectoriel de $T_{(x,v)}(TM)$ appelé espace horizontal associé à $\nabla$.
3. $\mathcal{H} = \bigcup_{(x,v) \in TM} \mathcal{H}_{(x,v)}$ est un sous fibré vectoriel de $T(TM)$ appelé fibré horizontal associé à $\nabla$.

**Proposition 3.2.9.** *$T(TM) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}$ et $T_{(x,v)}(TM) = \mathcal{H}_{(x,v)} \oplus \mathcal{N}_{(x,v)}$ avec $(x, v) \in TM$.*

En effet localement , si $v = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_x M$ et , $\tilde{X} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_k \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \in T_{(x,v)}(TM)$ , alors $\tilde{X} = (a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - a_i v_j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}) + (b_k + a_i v_j \Gamma^k_{ij}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}$ ; on pose $\tilde{X}^h = (a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - a_i v_j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}) \in \mathcal{H}_{(x,v)}$ et on nomme la partie horizontale de $\tilde{X}$ et $\tilde{X}^v = (b_k + a_i v_j \Gamma^k_{ij}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}$ est la partie verticale de $\tilde{X}$.

**Définition 3.9.** Soit $w \in T_x M$. Le relèvement horizontal de $w$ est défini par $w^{(h)} = X^{(h)}_{(x,v)}$ où $X \in \mathfrak{X}(M)$ tel que $X_x = w$.

Cette définition est indépendante du choix de $X$.

**Proposition 3.2.10.** *L'application*

$$\begin{aligned} T_xM &\longrightarrow \mathcal{H}_{(x,v)} \\ w &\longmapsto w^{(h)} \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

**Définition 3.10.** Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM)$ est dit horizontal si pour tout $(x, v) \in TM$, on a $\tilde{X}_{(x,v)} \in \mathcal{H}_{(x,v)}$.

### 3.2.4 Autres propriétés des relèvements de champs de vecteurs

**Proposition 3.2.11.** Soint $X$ et $Y$ deux champs de vecteurs sur $M$ et $f \in C^\infty(M)$. Alors,

1. $(X + Y)^{(v)} = X^{(v)} + Y^{(v)}$ ;
2. $(fX)^{(v)} = f^{(v)}X^{(v)}$ ;
3. $[X^{(v)}, Y^{(v)}] = 0$ ;
4. $(X + Y)^{(c)} = X^{(c)} + Y^{(c)}$ ;
5. $(fX)^{(c)} = f^{(c)}X^{(v)} + f^{(v)}X^{(c)}$ ;
6. $[X^{(v)}, Y^{(c)}] = [X, Y]^{(v)}$ ;
7. $[X^{(c)}, Y^{(c)}] = [X, Y]^{(c)}$ ;
8. $(X + Y)^{(h)} = X^{(h)} + Y^{(h)}$ ;
9. $(f.X)^{(h)} = (f^{(v)}).X^{(h)}$
10. $X^{(h)}(f^{(c)}) = (X(f))^{(v)}$ ;
11. $X^{(h)}(f^{(c)}) = (X(f))^{(c)} - \gamma(df \circ \nabla X)$ ;
12. $[X^{(v)}, Y^{(h)}] = [X, Y]^{(v)} - (\nabla_X Y)^{(v)} = -(\hat{\nabla}_Y X)^{(v)}$ ;
13. $[X^{(h)}, Y^{(v)}] = (\hat{\nabla}_X Y)^{(v)}$
14. $[X^{(h)}, Y^{(h)}] = [X, Y]^{(h)} - \gamma(\hat{R}(X, Y))$

    où $\hat{R}$ désigne le tenseur de courbure associé à la connexion inverse.

*Démonstration.* voir [1] page 181 □

## 3.3 MÉTRIQUES NATURELLES

**Définition 3.11.** Soit $(M, g)$ une variété Riemannienne. Une métrique Riemannienne sur le fibré tangent $TM$ de $M$ est dite **naturelle** par rapport à $g$ si :

$$\hat{g}(X^{(h)}, Y^{(h)}) = g(X, Y) \circ \pi$$

$$\hat{g}(X^{(h)}, Y^{(v)}) = 0$$

Pour tous champs de vecteurs $X$ et $Y$ de $M$ et $(p, u) \in TM$ tel que $\pi_M(u) = p$.

**Remarque 3.4.** De la définition précédente, on déduit que pour tous champs de vecteurs vertical $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(TM)$ , et $X \in \mathfrak{X}(M)$ , on a $\hat{g}(X^{(h)}, \tilde{Y}) = 0$ où $\hat{g}$ désigne une métrique naturelle sur le fibré tangent $TM$.

**Proposition 3.3.1.** *Soit $(M, g)$ une variété Riemannienne de connexion de Lévi-Civita $\nabla$. Si $\hat{g}$ est une métrique naturelle de connexion de Lévi-Civita $\hat{\nabla}$, alors :*

1. $\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(h)}, Z^{(h)}) = g((\nabla_X Y), Z) \circ \pi$
2. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(h)}, Z^{(v)}) = -\hat{g}(\{R(X, Y)u\}^{(v)}, Z^{(v)})$
3. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(v)}, Z^{(h)}) = -\hat{g}(\{R(Z, X)u\}^{(v)}, Y^{(v)})$
4. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(v)}, Z^{(v)}) = [X^{(h)}(\hat{g}(Y^{(v)}, Z^{(v)})) + \hat{g}(Z^{(v)}, (\nabla_X Y)^{(v)}) - \hat{g}(Y^{(v)}, (\nabla_X Z)^{(v)})]$
5. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(v)}} Y^{(h)}, Z^{(h)}) = \hat{g}(\{R(Y, Z)u\}^{(v)}, X^{(v)})$
6. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(v)}} Y^{(h)}, Z^{(v)}) = [Y^{(h)}(\hat{g}(X^{(v)}, Z^{(v)})) - \hat{g}(Z^{(v)}, (\nabla_Y X)^{(v)}) - \hat{g}(X^{(v)}, (\nabla_Y Z)^{(v)})]$
7. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(v)}} Y^{(v)}, Z^{(h)}) = -Z^{(h)}(\hat{g}(X^{(v)}, Y^{(v)})) + \hat{g}(Y^{(v)}, (\nabla_Z X)^{(v)}) + \hat{g}(X^{(v)}, (\nabla_Z Y)^{(v)})$
8. $2\hat{g}(\hat{\nabla}_{X^{(v)}} Y^{(v)}, Z^{(v)}) = X^{(v)}(\hat{g}(Y^{(v)}, Z^{(v)})) + Y^{(v)}\hat{g}(Z^{(v)}, X^{(v)}) - Z^{(v)}\hat{g}(X^{(v)}, Y^{(v)})$

*Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. et $(p, u) \in TM$. .*

*Démonstration.* voir [7] page 30 □

**Corollaire 3.3.1.** *Soit $(M, g)$ une variété Riemannienne muni de la connexion de Levi-Civita $\nabla$. Équipé d'une métrique naturelle $\hat{g}$, $TM$ est une variété Riemannienne et sa connexion de Lévi-Civita satisfait : $(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(h)})_{(x,u)} = (\nabla_X Y)^{(v)}_{(x,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X, Y)u)^{(v)}$ pour tous champs de vecteurs X,Y de $M$.*

*Démonstration.* voir [7] page 31 □

# 3.4 MÉTRIQUE DE SASAKI

## 3.4.1 Connexion de LÉVI-CIVITA associée à la métrique de SASAKI

**Définition 3.12.** Soit $(M, g)$ une variété Riemannienne. **La métrique de Sasaki** associée est l'unique métrique naturelle $\hat{g}$ sur le fibré tangent $TM$ telle que :

1. $\hat{g}(X^{(h)}, Y^{(h)}) = g(X, Y) \circ \pi$
2. $\hat{g}(X^{(h)}, Y^{(v)}) = 0$
3. $\hat{g}(X^{(v)}, Y^{(v)}) = g(X, Y) \circ \pi$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

**Proposition 3.4.1.** *Soient $(M, g)$ une variété Riemannienne ,$(TM, \hat{g})$ le fibré tangent équipé de la métrique de SASAKI et $\hat{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita. Alors on a :*

1. $(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(v)})_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^{(v)}_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(u, Y)X)^{(h)}$
2. $(\hat{\nabla}_{X^{(v)}} Y^{(h)}))_{(p,u)} = \frac{1}{2}(R_p(u, X)Y)^{(h)}$
3. $(\hat{\nabla}_{X^{(v)}} Y^{(v)})_{(p,u)} = 0$
4. $(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(h)})_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^{(h)}_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X, Y)u)^{(v)}$.

*Pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$* et $(p, u) \in TM$.

*Démonstration.* 1.

$$\begin{aligned}
2\hat{g}_{(p,u)}(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(v)}), Z^{(h)}) &= -\hat{g}_p((R(Z, X)u)^{(v)}, Y^{(v)}) \\
&= -g_p(R(u, Y)Z, X) \\
&= g_p(R(u, Y)X, Z) \\
&= \hat{g}_{(p,u)}((R(u, Y)X)^{(h)}, Z^{(h)}).
\end{aligned}$$

Pour la partie verticale , on a :

$$\begin{aligned}
2\hat{g}_{(p,u)}(\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(v)}), Z^{(v)}) &= X^{(h)}(\hat{g}_{(p,u)}(Y^{(v)}, Z^{(v)})) + \hat{g}_{(p,u)}(Z^{(v)}, (\nabla_X Y)^{(v)}) - \hat{g}_{(p,u)}(Y^{(v)}, (\nabla_X Z)^{(v)}) \\
&= X(g_p(Y, Z)) + g_p(Z, \nabla_X Y) - g_p(Y, \nabla_X Z) \\
&= 2\hat{g}_{(p,u)})((\nabla_X Y)^{(v)}, Z^{(v)}).
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que pour tout champ de vecteurs $Z$ sur $M$,
$2\hat{g}_{(p,u)}((\hat{\nabla}_{X^{(h)}} Y^{(v)}), Z^{(h)} + Z^{(v)}) = 2\hat{g}_{(p,u)}((R_p(u, Y)X)^{(h)} + (\nabla_X Y)^{(v)}, Z)$ D'où le résultat

Voir [7] page 33. pour les autres items. □

**Lemme 3.1.** Soient $(M, g)$ une variété Riemannienne , $(TM, \hat{g})$ le fibré tangent équipé de la métrique de SASAKI, et $\hat{\nabla}$ la connexion de Lévi-Civita . Soit $F : TM \longrightarrow TM$ un endomorphisme. Alors ,

$$(\hat{\nabla}_{X^{(v)}}(F(\eta))^{(v)} = F(X)^{(v)}$$

et

$$(\hat{\nabla}_{X^{(v)}}F(\eta))^{(h)} = F(X)^{(h)} + \frac{1}{2}(R(u, X)F(\eta))^{(h)}$$

Pour tout $\zeta = (p, u) \in TM$ et $X, \eta \in \mathfrak{X}(M)$.

### 3.4.2 Courbure Riemannienne induite par la métrique de Sasaki

Dans cette section, nous calculons la courbure Riemannienne $\hat{R}$ de $(TM, \hat{g})$ en fonction de celui de $(M, g)$. Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 3.4.2.** Soient $(M, g)$ une variété Riemannienne de courbure $R$ et de connexion de Lévi-Civita associée $\nabla$ et $(TM, \hat{g})$ la variété Riemannienne équipée de la métrique de SASAKI $\hat{g}$ ; $\hat{R}$ la courbure Riemannienne et $\hat{\nabla}$ la connexion de Lévi-Civita associée. On a :

1. $\hat{R}_{(p,u)}(X^{(v)}, Y^{(v)})Z^{(v)} = 0$
2. $\hat{R}_{(p,u)}(X^{(h)}, Y^{(v)})Z^{(v)} = -(\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(u, Y)R(u, Z)X))_p^{(h)}$,
3. $\hat{R}_{(p,u)}(X^{(v)}, Y^{(v)})Z^{(h)} = (R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, X)R(u, Y)Z) - \frac{1}{4}R(u, Y)R(u, X)Z)_p^{(h)}$
4. $\hat{R}_{(p,u)}(X^{(h)}, Y^{(v)})Z^{(h)} = (\frac{1}{4}R(R(u, Y)Z, X)u + \frac{1}{2}(R(X, Z)Y)_p^{(v)} + \frac{1}{2}((\nabla_X R)(u, Y)Z)_p^{(h)}$,
5. $\hat{R}_{(p,u)}(X^{(h)}, Y^{(h)})Z^{(v)} = (R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u, Z)Y, X)u - \frac{1}{4}(R(R(u, Z)X, Y)u)_p^{(v)} + \frac{1}{2}(\nabla_X R)(u, Z)Y - ((\nabla_Y R)(u, Z)X)_p^{(h)}$,
6. $\hat{R}_{(p,u)}(X^{(h)}, Y^{(h)})Z^{(h)} = \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X, Y)u)_p^{(v)} + (R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, R(Z, Y)u)X + \frac{1}{4}R(u, R(X, Z)u)Y + \frac{1}{2}R(u, R(X, Y)u)Z)_p^{(h)}$

Pour $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et $(p, u) \in TM$ tel que $\pi(u) = p$.

*Démonstration.* 1. $\hat{R}(X^{(v)}, Y^{(v)})Z^{(v)} = \hat{\nabla}_{X^{(v)}}\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}Z^{(v)} - \hat{\nabla}_{Y^{(v)}}\hat{\nabla}_{X^{(v)}}Z^{(v)} - \hat{\nabla}_{[X^{(v)},Y^{(v)}]}Z^{(v)} = 0$

2. On sait que $[X^{(h)}, Y^{(v)}] = (\nabla_X Y)^{(v)}$ et

$$\begin{aligned}\hat{R}(X^{(h)}, Y^{(v)})Z^{(v)} &= \hat{\nabla}_{X^{(h)}}\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}Z^{(v)} - \hat{\nabla}_{Y^{(v)}}\hat{\nabla}_{X^{(h)}}Z^{(v)} - \hat{\nabla}_{[X^{(h)},Y^{(v)}]}Z^{(v)} \\ &= -\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}\hat{\nabla}_{X^{(h)}}Z^{(v)} \\ &= -\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}((\nabla_X Z)^{(v)} + F(u)^{(h)})\end{aligned}$$

où $F : TM \longrightarrow TM$ est l'endomorphisme qui à $u \in T_pM$ associe $\frac{1}{2}R(u, Z_p)X_p$ ; avec $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Comme, $\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}(\nabla_X Z)^{(v)} = 0$ et $\hat{\nabla}_{Y^{(v)}} F(u)^{(h)} = F(Y)^{(h)} + \frac{1}{2}(R(u, Y)F(u))^{(h)}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\hat{R}(X^{(h)}, Y^{(v)})Z^{(v)} &= -\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}\hat{\nabla}_{X^{(h)}}Z^{(v)} \\
&= -\hat{\nabla}_{Y^{(v)}}(\nabla_X Z)^{(v)} + F(u)^{(h)} \\
&= -\hat{\nabla}_{Y^v} F(u)^{(h)} \\
&= -F(Y)^{(h)} - \frac{1}{2}(R(u, Y)F(u))^{(h)} \\
&= -(\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(u, Y)(R(u, Z)X)^{(h)}.
\end{aligned}$$

3. En utilisant la première identité de BIANCHI, on a : $\hat{R}(X^{(v)}, Y^{(v)})Z^{(h)} = \hat{R}(Z^{(h)}, Y^{(v)})X^{(v)} - \hat{R}(Z^{(h)}, X^{(v)})Y^{(v)}$. puis on déduit de 2. que
$\hat{R}(X^{(v)}, Y^{(v)})Z^{(h)} = (-\frac{1}{2}R(Y, X)Z + \frac{1}{4}R(u, Y)R(u, X)Z)^{(h)} + (\frac{1}{2}R(X, Y)Z - \frac{1}{4}R(u, X)R(u, Y)Z)^{(h)}$.
D'où le résultat.

Les autres items se démontrent de la même manière. voir [7] page 36

□

## 3.5 CAS DE LA SPHERE $\mathbb{S}^2$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et de sa distance.
$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = f^{-1}(\{0\})$ où $f(x, y, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Comme $Df(x, y, z) = 2(x, y, z)$, $f$ est une submersion en tout point $(x, y, z)$ de $\mathbb{S}^2$.
$T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2 = KerDf(x, y, z) = \{v \in \mathbb{R}^3 / \langle 2(x, y, z), v\rangle\} = 0$. C'est l'hyperplan orthogonal de $\{(x, y, z)\}$.
On paramétrise $\mathbb{S}_2$ par le plongement

$$\begin{aligned}
f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))
\end{aligned}$$

où $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\}$ et $\begin{cases} x(u, v) = cosucosv \\ y(u, v) = cosusinv \\ z(u, v) = sinu \end{cases}$. Comme les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(p) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$ où $p = (x, y, z)$ forment une base de $T_p\mathbb{S}_2$ , on en déduit que la métrique $g_{\mathbb{S}_2}$ induite a pour matrice $\begin{pmatrix} \|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2 & \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle \\ \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle & \|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2 \end{pmatrix}$. En posant $dudv = \frac{1}{2}(du \otimes dv + dv \otimes du)$ et $du^2 = du \otimes du$ , on obtient que : $g = \|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2 du^2 + \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\rangle dudv + \|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2 dv^2$.

On a :

$\frac{\partial f}{\partial u} = (-sinucosv, -sinusinv, cosu)$ et

$\frac{\partial f}{\partial v} = (-cosusinv, -cosucosv, 0)$

on a alors $\|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2 = 1$ et $\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \rangle = 0$ $\|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2 = cos^2u$ donc $g_{\mathbb{S}^2} = du^2 + cos^2udv^2$ est une métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^2$.

### 3.5.1 Coefficients de Christoffel et courbure Riemannienne

• **Coefficients de Christoffel**

$\Gamma^u_{vu} = \frac{1}{2}g^{uu}(\frac{\partial g_{uu}}{\partial v} + \frac{\partial g_{vu}}{\partial u} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial u}) + \frac{1}{2}g^{vu}(\frac{\partial g_{vu}}{\partial u} + \frac{\partial g_{vv}}{\partial u} - \frac{\partial g_{vv}}{\partial v}) = 0$. On calcule de même $\Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{uu} = \Gamma^v_{uu} = \Gamma^v_{vv} = 0$ , $\Gamma^u_{vv} = -sinucosu$ et $\Gamma^v_{vu} = \Gamma^v_{uv} = -tanu.$

• **courbure riemannienne** :

$R^v_{uvv} = \Gamma^u_{vv}\Gamma^v_{uu} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{vu} + \frac{\partial \Gamma^v_{vv}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^v_{uv}}{\partial v} + \Gamma^v_{vv}\Gamma^v_{uv} - \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{vv} + \frac{\partial \Gamma^v_{vv}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^v_{uv}}{\partial v} = 0$. On calcule de même $R^u_{uuu} = R^v_{uuu} = R^u_{vuu} = R^u_{uvu} = R^u_{uuv} = R^v_{uuv} = R^v_{uvv} = R^v_{vvv} = R^u_{vvu} = R^v_{vuv} = R^u_{vvv} = R^v_{vvu} = 0$, $R^v_{uvu} = -R^v_{vuu} = -1$ et $R^u_{uvv} = -R^u_{vuv} = -3cos^2u + 1$. Ainsi,

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, $R(X, Y)Z = (R^u_{uvv} + R^u_{vuv})\frac{\partial}{\partial u} + (R^v_{uvu} + R^v_{vuu})\frac{\partial}{\partial v} = 0.$

### 3.5.2 Relèvements

Soit $X_p = X_u\frac{\partial(f)}{\partial u}|_p + X_v\frac{\partial(f)}{\partial v}|_p$ un vecteur tangent de $\mathbb{S}^2$ en un point $p$. $(u, v)$ est un système de coordonnées locales de $\mathbb{S}^2$. On désigne par $(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ un système de coordonnées locales adaptées à $T\mathbb{S}^2$.

• **relèvement vertical**

$X^{(v)}_p = X_u\frac{\partial}{\partial \dot{u}} + X_v\frac{\partial}{\partial \dot{v}}$ est le relèvement vertical de $X_p$ à $T\mathbb{S}^2$ (cf.proposition 3.2.5),

• **relèvement horizontal** $X^{(h)}_p = X_p + (sinucosu)\dot{v}X_v\frac{\partial}{\partial \dot{u}} + tanu(\dot{u}X_v - \dot{v}X_u)\frac{\partial}{\partial \dot{v}}$ (cf.proposition 3.2.8)

### 3.5.3 Courbure Riemannienne induite par la métrique de Sasaki

• **La métrique de Sasaki** $\hat{g}_{\mathbb{S}_2}$ induite par $g_{\mathbb{S}_2}$ est définie comme dans la section 3.4. Plus précisément, $\forall (x, \dot{x}) \in T\mathbb{S}^2$, soient $X = X_u\frac{\partial}{\partial u} + X_v\frac{\partial}{\partial v}$ et $Y = Y_u\frac{\partial f}{\partial u} + Y_v\frac{\partial f}{\partial v}$ des éléments de $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$.

1. $\hat{g}_{\mathbb{S}_2}(X^{(h)}, Y^{(h)})(x, \dot{x}) = g(X, Y)(x) = X_u(x)Y_u(x) + cos^2uX_v(x)Y_v(x).$
2. $\hat{g}_{\mathbb{S}_2}(X^{(h)}, Y^{(v)}) = 0.$
3. $\hat{g}_{\mathbb{S}_2}(X^{(v)}, Y^{(v)})(x, \dot{x}) = g(X, Y)(x) = X_u(x)Y_u(x) + cos^2uX_v(x)Y_v(x).$

• **Courbure riemannienne induite par** $\hat{g}_{\mathbb{S}_2}$ :

Cette courbure est nulle (d'après la sous section 3.5.1 et la proposition 3.4.2).

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Pour mener à bien le travail soumis à notre étude dont le thème est « Courbure Riemannienne de la métrique de Sasaki », nous nous sommes attelés tout au long des lignes précédentes à présenter tour à tour les champs de tenseurs sur un fibré vectoriel réel et quelques éléments de géométrie Riemannienne . Ensuite, grâce aux propriétés des relèvements de fonctions et de champs de vecteurs et celles de la métrique de SASAKI, nous avons présenté les formules permettant de calculer la courbure Riemannienne induite par cette dernière métrique. Il est à noter que cette courbure s'obtient grâce à la décomposition de l'espace tangent d'ordre 2 en partie horizontale et en partie verticale. Enfin, nous avons présenté une application de ces résultats à la sphère $\mathbb{S}^2$. En guise de perspectives, il serait intéressant de nous intéresser à la métrique de SASAKI sur $TG$ lorsque $G$ est un groupe de Lie muni d'une métrique invariante $g$.

# PORTÉE PÉDAGOGIQUE

Afin de nous initier à la recherche, il nous est confié dès notre quatrième année de formation à l'ENS de Yaoundé un thème de recherche dont les résultats sont présentés dans un mémoire à soutenir publiquement devant un jury d'experts. Le thème soumis à mon travail qui s'intitule «courbure Riemannienne de la métrique de Sasaki » s'inscrit dans le grand domaine de la géométrie Riemannienne. Ce travail m'a été d'un immense apport en vue de l'exercice de ma carrière d'enseignant. Tout d'abord il a créé en moi un attrait pour la géométrie qui reste un tabout pour beaucoup d'enseignants de lycées. Ensuite, j'ai appris à utiliser le logiciel latex très pratique pour la rédaction des documents portant sur les mathématique notamment parce qu'il présente plusieurs avantages sur word notamment en terme de rapidité et de mise en forme. Je sors donc grandi de ce travail et je suis persuadé d'avoir acquis de nouveaux atouts pour le service de la nation au travers de ce noble métier.

# Bibliographie


[1] Prof.Mustapha DJAA : *Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés* 2017

[2] Prof.Mustapha DJAA : *Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés* 2018

[3] DOMBROWSKI : *On the geometry of the tangent bundles* 1962

[4] EL HENDI Hichem *Géométrie harmonique des fibrés tangents* thèse de doctorat Université d'Oran

[5] ERWANN Aubry : *Introduction à la géométrie Riemannienne* 2008

[6] Ilkka HOLOPAINEN and Tuomas SAHLSTEN : *Riemannian geometry 1* 2013

[7] Elias KAPPOS : *Natural metrics on tangent bundles* master's thesis 2001

[8] KOWALSKI : *Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold* 1971

[9] Jacques LAFONTAINE : *Introduction aux variétés différentielles* presses universitaires de Grenoble 1996.

[10] S.SASAKI : *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds* tome1 1958.

[11] Yves TALPAERT : *Leçons et applications de géométrie différentielle*.