UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

****

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

****

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

****

HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

N

E S

UNE APPROCHE PROBABILISTE DE LA VALEUR DE SOLIDARITÉ DE NOWAK ET RADZIK

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade (DIPES II) en

Mathématiques.

Par

CHOUOLA FOKAM martial

Licencié en Mathématiques

Matricule : 11S15255

Sous la direction de

Lawrence DIFFO LAMBO

Professeur

Année académique : 2018-2019

UNE APPROCHE PROBABILISTE DE LA VALEUR DE SOLIDARITÉ DE NOWAK ET RADZIK

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Dipes II en mathématiques.

Par

CHOUOLA FOKAM martial

Licencié en mathématiques

Matricule : 11S15255

Sous la direction de

Lawrence DIFFO LAMBO

Professeur

Yaoundé, Juin 2019

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce travail à papa **FOKAM albert** qui déploie beaucoup d'efforts et de sacrifices pour nous.

✠ Remerciements ✠

J’adresse mes sincères remerciements à tous ceux qui, de près comme de loin, m’ont aidé et soutenu dans la réalisation de ce travail.

Je pense particulièrement à :

⋆ Mon directeur de mémoire le **Pr L. Diffo Lambo**, pour la confiance placée en moi en acceptant de diriger ce travail, pour la pertinence du thème proposé et pour sa disponibilité et son soutien pendant la rédaction de ce mémoire.

⋆ Tous les **enseignants de l’Ecole Normale Supérieure de Yaoundé**, en particulier ceux du département de Mathématiques pour ma formation académique et sociale.

⋆ **Serge B. NLEND OUM**, pour m’avoir suivi tout au long de mon travail, et dont les remarques et suggestions ont considérablement amélioré la qualité de ce document.

⋆ Toute ma grande famille pour son soutien moral, financier et matériel qu’elle a eu à faire jusqu’ici pour ma réussite académique. Je pense particulièrement à : papa **FOKAM albert**, maman **KENGNE marie**, à mes frères **Ghassi, Tene, Tacteu, Sah** et mes soeurs **Djoutchou, Kouche, Wagou**.

⋆ Mes amis et frères **NSIAKA le roy, SIMO armand** pour tous les moments difficiles passés ensemble et leur soutien.

Que tous ceux dont les noms ne sont pas mentionnés et qui de quelque manière que ce soit, ont contribué à la réalisation de ce travail trouvent ici l’expression de ma profonde gratitude.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a pas été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

CHOUOLA FOKAM Martial

✠ Table des matières ✠

✠ Résumé ✠

La procédure de la valeur de Shapley est basée sur deux hypothèses principales : un agent qui rejoint une coalition obtient la totalité de sa contribution marginale et tous les joueurs ont une équiprobabilité d'obtenir une admission à n'importe quelle étape de la formation de la grande coalition. Avec les valeurs probabilistes, Weber suppose que les entrées des joueurs ne se font pas nécessairement avec équiprobabilité et conserve tout le reste de la procédure de Shapley qui présente un défaut de solidarité. La valeur de solidarité de Nowak et Radzik se démarque de la valeur de Shapley uniquement sur le fait que la contribution marginale de l'entrant est partagée égalitairement entre lui et tous ses prédécesseurs. Cette approche probabiliste de Weber est appliquée dans le cadre de solidarité de Nowak et Radzik par Diffo Lambo et Nlend Oum qui définissent ainsi les valeurs de solidarité probabilistes. Dans ce travail, nous présentons de manière détaillée les valeurs de solidarité probabilistes. Nous illustrons et interprétons certains résultats obtenus par Diffo Lambo et Nlend Oum. Nous réécrivons de manière originale, et mettons en lumière des étapes de certaines preuves des résultats de ces différentes valeurs.

Mots clés : valeur de Shapley ; valeurs probabilistes ; valeur de solidarité ; valeurs de solidarité probabilistes.

✠ Abstract ✠

The Shapley value is based on two main assumptions : each player who joins in a formed coalition keeps for himself all this marginal contribution and all the players still waiting aside may join a coalition randomly with equal opportunities. probabilistic values (Weber, 1988) only differ from the Shapley value in that two different players may not have the same opportunities to join a coalition, since all the players individually assess their positions in the game. Nowak et Radzik define the solidarity value to express some solidarity among the players. So the solidarity value departs from the Shapley value just in the fact that each player in a formed coalition receives the average marginal contribution of all the players. Probabilistic solidarity values(Diffo Lambo and Nlend Oum, 2019) combine the probabilistic approach of Weber and the solidarity setting put in place by Nowak and Radzik. In this work we present in details the probabilistic solidarity values. So we illustrate and interprete some of the results obtained in probabilistic solidarity values. Also, we highlight some immportant steps in the proofs of existing results, be it in the Shapley value, probabilistic values, the solidarity value or probabilistic solidarity values.

Keys words : the Shapley value ; probabilistic values ; solidarity values ; probabilistic solidarity values.

✠ Introduction ✠

Dans les jeux coopératifs, des agents oeuvrent pour un intérêt commun ; ils ont la possibilité de s'engager de façon contractuelle sur les stratégies à adopter au cours du jeu et au cours duquel les coalitions peuvent se former. C'est le cas des jeux sous forme caractéristique avec compensation(JFCC). Nous supposons que tous les joueurs finissent par s'unir dans la grande coalition notée N . Il se pose alors le problème de la répartition entre les joueurs du fruit de cette coopération. A titre d'exemples, nous pouvons citer la répartition des coûts entre partenaires dans un projet humanitaire, ou la distribution des revenus entre une entreprise et ses employés, etc...
Sur cette question de répartition du fruit de la coopération, il existe plusieurs concepts de solution. Chaque concept de solution repose sur certains critères tels que : le critère de rationalité individuelle, celui de l'efficacité collective et celui de l'équité. Certains concepts de solution concluent sur une multiplicité d'accords possibles, c'est le cas des ensembles stables et le coeur (Gillies, 1959). D'autres optent pour un accord unique, c'est le cas de la valeur de Shapley (Shapley, 1988). La procédure de la valeur de Shapley est basée sur deux hypothèses principales : Un agent qui rejoint une coalition obtient la totalité de sa contribution marginale et tous les joueurs ont la même chance de rejoindre une coalition donnée .
Mais chaque agent de manière subjective, pour des raisons personnelles évalue individuellement sa position dans le projet et peut avoir une préférence pour rejoindre telle ou telle coalition. Ainsi, Weber(Weber, 1988) suppose que deux joueurs différents peuvent ne pas avoir la même chance d'intervenir à une étape donnée de la formation de la grande coalition N, et définit les valeurs probabilistes.
L'hypothèse de Shapley sur le fait que lorsqu'un joueur rejoint une coalition il reçoit la totalité de sa contribution marginale est jugée égoïste ou individualiste par Nowak et Radzik (Nowak et Radzik, 1994) donc un manque de solidarité entre les joueurs. ces derniers créent un cadre de solidarité où les nécessiteux et les maillons faibles seraient assistés. Ils mettent alors sur pied la valeur de solidarité. Nowak et Radzik supposent que tous les joueurs ont une équiprobabi-

lité d'obtenir une admission à n'importe quelle étape de la formation de la grande coalition N comme Shapley, mais au niveau du partage de la contribution marginale du nouvel entrant, ils supposent que lorsqu'un joueur réjoint une coalition, sa contribution marginale est partagée égalitairement entre lui et tous ses prédécesseurs.

L'approche probabiliste de Weber est appliquée dans le cadre de solidarité de Nowak et Radzik par Diffo Lambo et Nlend Oum (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018) qui définissent ainsi les valeurs de solidarité probabilistes.

Notre travail consiste avant tout à comprendre, illustrer et interpréter la valeur probabiliste de solidarité.

De ce fait, nous présentons des rappels sur les jeux sous formes caractéristiques afin d'aboutir au concept de solution d'un JFCC. La compréhension de la notion de valeurs probabilistes de Weber, nous simplifie la compréhension des valeurs de solidarité probabilistes. Nous illustrons et interprétons certains résultats obtenus par Diffo Lambo et Nlend Oum, Les propriétés rencontrées sont démontrées de manière intuitive pour une meilleure appropriation de la notion et nous allons voir comment Diffo Lambo et Nlend Oum ont caractérisé la valeur de solidarité de Nowak et Radzik comme une classe des valeurs de solidarité probabilistes,.

L'ensemble du travail est organisé en 4 chapitres ainsi qu'il suit : dans le chapitre un, nous rappelons quelques notions indispensables sur les jeux sous forme caractéristique avec compensation, nous présentons des exemples qui seront étudiés et nous revenons sur les solutions ensemblistes. Le chapitre deux est consacré d'une part à la valeur de Shapley et d'autre part à une généralisation de cette valeur qui est les valeurs probabilistes. Au chapitre 3, nous introduisons la valeur de solidarité et une généralisation de cette valeur qui est les valeurs de solidarité probabilistes de Diffo Lambo et Nlend Oum. le principal théorème est d'axiomatiser les valeurs de solidarité probabilistes symétries . Le chapitre 4 présente les implications pédagogiques de notre expérience.

Chapitre Un

DES GÉNÉRALITÉS SUR LES JEUX SOUS FORME CARACTÉRISTIQUE AVEC COMPENSATION

1.1. Exemples illustratifs de situations concrètes de jeux sous forme caractéristique avec compensation

Notre travail porte sur les jeux sous forme caractéristiques avec compensation, un domaine qui fait partir du vaste domaine des jeux coopératifs. Nous en présentons ci-dessous quelques illustrations.

illustration 1 : Trois commerçants nommés 1, 2 et 3 vendent du poisson dans un marché et ont la possibilité de coopérer pour cette vente. Le bénéfice journalier en milliers de F CFA est tel que :

- Individuellement 1, 2 et 3 gagnent chacun 10, 15, et 4 respectivement.

- Lorsqu'ils se regroupent en paires, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ou $\{2,3\}$, ces coalitions gagnent respectivement 30, 14, et 16.

- Et lorsqu'ils forment la grande coalition, ils réalisent un bénéfice de 50.

Illustration 2

Trois entreprises A, B et C produisent et commercialisent respectivement des casiers, des bouteilles et de la bière, et peuvent coopérer. Les bénéfices de la coopération sont donnés en millions de F CFA. L'état de cette coopération est donné par :

- Individuellement A, B et C obtiennent 3 , 5 et 6 respectivement.

- Lorsqu'ils se regroupent en paires, $\{A,B\}$, $\{A,C\}$ ou $\{B,C\}$, ces coalitions obtiennent respectivement 6, 9, et 15.

- Lorsqu'ils forment la grande coalition, ils obtiennent un bénéfice de 30.

Dans toute la suite, nous écrivons "JFCC" pour " Jeu sous Forme Caractéristique avec Compensation". Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N = \{1, 2, ..., n\}$ désigne l'ensemble de tous les joueurs ; $P(N) = \{ S : S \subseteq N\}$ est l'ensemble de toutes les parties de N et Γ désigne l'ensemble de tous les JFCC sur N. Nous écrivons i en lieu et place de $\{i\}$.

1.2. Formalisme d'un JFCC

La définition 1.2.1 ci-dessous présente le formalisme d'un JFCC

Définition 1.2.1

Un JFCC est tout couple (N, v) où N est l'ensemble des joueurs et v est une application définie par :

$$\begin{aligned} v : P(N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ S &\longmapsto v(S) \end{aligned}$$

telle que $v(\emptyset) = 0$.

L'application v est appelée fonction caractéristique du jeu, toute partie non vide de N est appelée coalition et nous désignons par 2^N l'ensemble de toutes les coalitions de N. Désormais, nous écrivons "v" au lieu de "(N, v)".

Par l'exemple 1.2.1, nous présentons le formalisme du jeu de l'illustration 1.

Exemple 1.2.1. Considérons le JFCC de l'illustration 1, on a $N = \{1, 2, 3\}$ et l'état de la coopération v entre les joueurs est donné par :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	10	15	4	30	14	16	50

On est en droit de se demander quelle est la problématique dans un JFCC.

De manière générale, un JFCC soulève deux problèmes : Comment les joueurs doivent - ils se regrouper ? Et comment se partager le fruit de la coopération ?

Notons que ces deux questions sont liées en ce sens que, ce qu'on obtient dépend de la coalition formée et la formation de la coalition dépend de ce qu'on va y obtenir. Il en ressort qu'on ne saurait répondre à l'une de ces questions sans s'intéresser à l'autre. Par soucis de simplification, une solution à un JFCC suppose soit résolu la question comment les joueurs doivent-ils se regrouper et résout celle du partage du fruit de la coopération ou suppose résolu la question du partage du fruit de la coopération et résout celle du regroupement des joueurs.

Nous nous intéressons aux concepts de solution d'un JFCC qui supposent que tous les joueurs se regroupent dans la grande coalition N et le problème à résoudre est celui du partage du fruit de la coopération.

Soit $v \in \Gamma$ un JFCC sur N. Un *partage possible* pour v est un $n-$uplet de nombres réels $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dont la somme des composantes est égale à $v(N)$ et où pour tout $i \in N$, x_i désigne la part du joueur i dans v. De plus, l'ensemble $R(v)$ de tous les partages possibles est donné par $R(v) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)\}$. Notons que pour un JFCC, une solution peut proposer, soit plusieurs éléments de $R(v)$: on parle de solution ensembliste, soit un unique élément de $R(v)$: on parle de solution ponctuelle ou valeur.

Remarque 1.2.1. On admet que les gains considérés sont des utilités et sont infiniment divisibles.

Comme exemple de solution ensembliste nous avons le Coeur classique (Gillies, 1959)

1.3. Le coeur classique

Soient $v \in \Gamma$ et $x \in R(v)$, pour toute coalition $S \subseteq N$, on note $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. On a besoin de la définition suivante.

Dominance classique : Soient $v \in \Gamma$, $(x, y) \in R(v) \times R(v)$ et $S \in 2^N$

• x domine y via S lorsque $\begin{cases} \forall i \in S, x_i > y_i \\ x(S) \leq v(S) \end{cases}$

• x domine y s'il existe une coalition T telle que x domine y via T

Autrement dit, x domine y via S signifie que les joueurs de S préfèrent le partage x au partage y et qu'il est légitime pour les membres de S de réclamer leur part dans x.

Définition 1.3.1

Soit $v \in \Gamma$, le coeur de v est l'ensemble des partages non dominés de v.

Nous notons le coeur de v par $C(v)$. On a la caractérisation du coeur suivante.

Théorème 1.3.1. *(**Gillies, 1959**). Soient $v \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in C(v) \Leftrightarrow x \in R(v)$ et $\forall S \in 2^N$, $x(S) \geq v(S)$.*

Il en ressort que le coeur est l'ensemble des partages individuellement et collectivement rationnels.
L'exemple suivant illustre la détermination du coeur dans un JFCC.

Exemple 1.3.1. Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et $v \in \Gamma$ tel que :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	10	15	4	30	14	16	50

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Par le théorème 1.3.1 , on a :
$x \in C(v) \Leftrightarrow x \in R(v)$ et $\forall S \in 2^N$, $x(S) \geq v(S)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1 \geq v(1), x_2 \geq v(2), x_3 \geq v(3) \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(N) \\ x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}),\ \ x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}),\ \ x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 \geq 10, x_2 \geq 15, x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ 50 - x_3 \geq 30, 50 - x_2 \geq 14, 50 - x_1 \geq 16 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_1 \geq 10, x_2 \geq 15, x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 10 \leq x_3 \leq 34, 15 \leq x_2 \leq 36, 4 \leq x_1 \leq 20 \end{cases}$$

On remarque qu'il y a un ensemble de couple (x_1, x_2, x_3) vérifiant la condition :
$10 \leq x_3 \leq 34, 15 \leq x_2 \leq 36$ et $4 \leq x_1 \leq 20$, par exemple les couples $\{(20, 15, 15), (4, 36, 10), (18, 32, 10)\}$.

Il en résulte que le coeur peut proposer plusieurs, voire une infinité de partages possibles. Dans ce cas, quel partage retenir ? De plus, notons que le coeur peut être vide. En ce moment, comment partager le fruit de la coopération entre les joueurs ? La section suivante présente le concept de valeur pour lequel les deux problèmes de choix de partage et de l'absence de partage ne se posent pas.

1.4. La notion de valeur

La définition 1.4.1 présente le concept de valeur.

Définition 1.4.1

Une valeur est une application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \Gamma &\longrightarrow R^n \\ v &\longmapsto f(v) = (f_1(v), \cdots, f_n(v)) \end{aligned}$$

telle que $v(\emptyset) = 0$.

Pour tout $i \in N$ $f_i(v)$ représente la valeur ou la part individuelle du joueur i pour avoir participé au jeu v.

Exemple 1.4.1. Pour $N = \{1, 2, 3\}$ considérons les applications f et g définies par :

$$\begin{aligned} f : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto f(v) = (1, 1, 1) \\ g : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ w &\longmapsto f(w) = (\frac{w(N)}{2}, \frac{w(N)}{4}, \frac{w(N)}{4}) \end{aligned}$$

Chacune des applications f et g est une valeur définie sur l'ensemble des JFCC à 3 joueurs. En appliquant ces deux valeurs au jeu de l'exemple 1.2.1 de l'illustration 1 , on a : $f_1(v) = f_2(v) = f_3(v) = 1$ et $g_1(v) = 25$, $g_2(v) = g_3(v) = 12.5$. Autrement dit, la valeur du joueur 1 dans le jeu de l'illustration 1 est 1 et 25 par f et g respectivement et la valeur du joueur 2 et 3 est 1 et 12.5 par f et g respectivement.

Il ressort de la définition 1.4.1 qu'il existe une infinité de valeur. Il semble naturel de se demander comment choisir une valeur parmi toutes les autres.
Le chapitre suivant présente la valeur de Shapley (Shapley, 1953) ainsi que les valeurs probabilistes (Weber, 1988) qui sont une généralisation de la valeur de Shapley.

Chapitre Deux

LA VALEUR DE SHAPLEY ET LES VALEURS PROBABILISTES

Notons que la théorie de la valeur est introduite avec la valeur de Shapley.

2.1. La valeur de Shapley (Shapley, 1953)

La procédure de la valeur de Shapley est la suivante :

• Tous les joueurs sont regroupés dans la grande coalition N.

• N se forme par entrée successive des joueurs.

• L'entrée d'un joueur est faite de manière aléatoire et équiprobable.

• Lorsque le joueur i rejoint une coalition S, il reçoit sa contribution marginale qui est donnée par $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

La procédure de Shapley est aléatoire. Par conséquent, la part d'un joueur i est une variable aléatoire. Et la valeur de Shapley d'un joueur i est l'espérance mathématique de toutes ses contributions marginales. Puisque la coalition N se forme de manière aléatoire , le nombre de formations possibles est n ! car ($|N| = n$). De plus,$\forall i \in N$; $\forall S \subseteq N \setminus \{i\}$, le nombre de formations de la coalition N où i reçoit la contribution marginale $v(S \cup i) - v(S)$ est donné par $s!(n-s-1)!$ où $|S| = s$. Dans la suite, la valeur de Shapley est notée $Shap$.

Définition 2.1.1 (Shapley, 1953)

Pour tout $v \in \Gamma$, pour tout $i \in N$ la valeur de Shapley du joueur i dans v est donnée par $Shap_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup i) - v(S)]$.

Exemple 2.1.1. Considérons l'exemple 1.2.1 , on a $N = \{1, 2, 3\}$ et v est donnée par :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	10	15	4	30	14	16	50

Le tableau ci-dessous présente les contributions marginales de chacun des joueurs, chaque fois que la coalition N se forme.

permutation	1	2	3
123	10	20	20
132	10	36	4
213	15	15	20
231	34	15	1
312	10	36	4
321	34	12	4
Total	103	134	57
$Shap_i(v)$	$\frac{113}{6}$	$\frac{134}{6}$	$\frac{53}{6}$

Donc les valeurs de Shapley des joueurs 1, 2 et 3 dans v sont respectivement données par $\frac{103}{6}$, $\frac{134}{6}$, $\frac{57}{6}$.

Nous avons besoin des définitions suivantes.

Définition 2.1.2

Soient $v \in \Gamma$ et $(i, j) \in N \times N$.

1- Deux joueurs i et j sont interchangeables ou symétriques lorsque $\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}, v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

2- Un joueur i est dummy lorsque $\forall S \subseteq N \setminus \{i\}, v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$.

3- un joueur i est nul lorsque $\forall S \subseteq N \setminus \{i\}, v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

Ayant défini une valeur (un mode de partage), on peut se poser la question quelle valeur choisir parmi toutes les autres ? Pour répondre à cette question, Shapley introduit des propriétés souhaitables que doit vérifier une valeur. Il s'agit des axiomes suivants :

• **L'efficience**

une valeur f est efficiente lorsque $\forall v \in \Gamma$, $\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$.

C'est-à-dire la totalité des biens disponibles est partagée entre tous les joueurs.

• **Joueur figurant**

Une valeur f vérifie l'axiome du joueur figurant lorsque $\forall v \in \Gamma$,$\forall i \in N$, si i est figurant dans v, alors $f_i(v) = v(\{i\})$.

Autrement dit, tout joueur figurant dans un jeu v reçoit sa contribution individuelle $v(i)$. De plus, pour $v(\{i\}) = 0$, on parle de **joueur nul**.

• **L'additivité**

Une valeur f est additive lorsque $\forall v \in \Gamma$, $\forall w \in \Gamma$, $\forall i \in N$, $f_i(v + w) = f_i(v) + f_i(w)$.

Par l'additivité, la part d'un joueur dans une somme de jeu est égale à la somme de ses parts dans ces différents jeux.

• **La symétrie**

Une valeur f est symétrique lorsque $\forall v \in \Gamma$, $\forall i \in N$,$\forall j \in N$, si i et j sont symétries, alors $f_i(v) = f_j(v)$.

C'est-à-dire dans un JFCC, des joueurs symétriques ont la même part.

Définissons le jeu " à l'unanimité " utile pour la suite.

Soient N un ensemble de joueurs et $T \in 2^N$, un jeu à l'unanimité v_T est défini par :

$$\forall S \in 2^N, v_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

Lemme 2.1.1

1-Γ est un espace vectorielle réel

2-L'ensemble $\{v_T \in \Gamma; T \in 2^N\}$ est une base de Γ.

Preuve.

Montrons que Γ a une structure d'espace vectoriel avec $\Gamma = \{v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0\}$.

Soit 0_v le jeu nul, $0_v(\emptyset) = 0$ d'où $0_v \in \Gamma$. Soient $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $(u, v) \in \Gamma \times \Gamma$, $(\alpha u + \lambda v)(\emptyset) = \alpha u(\emptyset) + \lambda v(\emptyset) = 0$. D'où, $\alpha u + \lambda v \in \Gamma$. Ainsi, Γ est un espace vectoriel réel de dimension $2^n - 1$ avec n=|N|.

Montrons que $\{v_T \in \Gamma; T \in 2^N\}$ est une base de Γ. La famille $(v_T)_{T \in 2^N}$ est de dimension $2^n - 1$ et comme Γ est de dimension $2^n - 1$, Il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure que c'est une base de Γ.

Montrons que $(v_T)_{T\in 2^N}$ **est libre** Soit $(\beta_s)_{s\in 2^N} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{s\in 2^N}\beta_s v_s = 0$ (1). Montrons que $\forall T \in 2^N, \beta_T = 0$. Raisonnons par induction sur $|T|$, avec $T \in 2^N$.

• Si $|T| = 1$ alors T est un singleton. Posons $T = \{i\}$, on a $\sum_{s\in 2^N}\beta_s v_s(T) = \beta_i$ (car seul $\{i\}$ contient $\{i\}$ dans 2^N) et d'après (1), on a donc$\sum_{s\in 2^N}\beta_s v_s(T) = \beta_i = 0$. Donc la proposition est vraie au rang 1.

• Soit $k < 2^n - 1$; supposons que pour tout $s \in 2^N$tel que $|S| \leq k$ on a $\beta_s = 0$. Soit $s' \in 2^N$, tel que |s'| =k+1. on a $\sum_{s\in 2^N}\beta_s v_s(s') = \sum_{s\in 2^N, s\subseteq s'}\beta_s v_s$ or$\sum_{s\in 2^N, s\subseteq s'}\beta_s = \sum_{s\in 2^N, s\subseteq s', s\neq s'}\beta_s v_s(s') + \beta_{s'} = 0$. (2) Or pour tout $s \subset s'$, $s \neq s'$, on a $|s| < |s'|$ et donc $|s| < k$. Ainsi par hypothèse, on a $\beta_s = 0$, $\forall s \subset s'$ et $s \neq s'$ l'égalité (2) entraine que $0 + \beta_{s'} = 0$, ce qui implique que $\beta_{s'} = 0$. D'où la propriété est vrai au rang $k+1$. Ainsi $\forall T \in 2^N, \beta_T = 0$ et la famille $(v_s)_{s\in 2^N}$ est libre, et est donc une base de Γ ■

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Théorème 2.1.1. ***(Shapley, 1953)*** *Une valeur φ sur Γ satisfait les axiomes d'efficience, de symétrie, d'additivité et du joueur nul, si et seulement si, $\varphi = shap$.*

Preuve. **Supposons que $\varphi = Shap$.**

Montrons que la valeur de Shapley satisfait l'axiome d'efficience .

Soient $i \in N$ et $v \in \Gamma$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} Shap_i(v) &= \sum_{i\in N}(\sum_{s\subseteq N/i\notin s}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(s+i) - v(s)]) \\
&= \sum_{i\in N}(\sum_{s\subseteq N/i\notin s}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(s+i) - \sum_{s\subseteq N/i\notin s}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(s)]) \\
&= \sum_{i\in N}\sum_{s\subseteq N/i\notin s}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(s+i) - \sum_{i\in N}\sum_{s\subseteq N/i\notin s}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}v(s)] \\
&= \sum_{T\subseteq N}\sum_{i\in T}\frac{(t-s)!(t-1)!}{n!}v(T) - \sum_{s\subseteq N}\sum_{i\notin s}\frac{(s)!(n-s-1)!}{n!}v(s) \text{ avec } |T| = t \\
&= \sum_{T\in 2^N}\frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}v(T) - \sum_{s\in 2^N-\{N\}}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(n-s)v(s) \\
&= \sum_{T\in 2^N}\frac{t!(n-t)!}{n!}v(T) - \sum_{s\in 2^N-\{N\}}\frac{s!(n-s)!}{n!}v(s) \\
&= \frac{n!(n-n)!}{n!}v(N) = v(N)
\end{aligned}$$

D'où la valeur de Shapley vérifie l'axiome d'efficience.

Montrons que la valeur de Shapley satisfait l'axiome d'additivité.

Soient $(u, v) \in \Gamma \times \Gamma$ et $i \in N$

$$\begin{aligned}
Shap_i(v+u) &= \sum_{s \subseteq N/i \notin s} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[(v+u)(s+i)-(v+u)(s)] \\
&= \sum_{s \subseteq N/i \notin s} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(s+i)-v(s)] + \sum_{s \subseteq N/i \notin s} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[u(s+i)-u(s)] \\
&= Shap_i(v) + Shap_i(u)
\end{aligned}$$

D'où la valeur de Shapley vérifie l'axiome d'additivité.

Montrons que la valeur de Shapley satisfait l'axiome de symétrie.

Soient $v \in \Gamma$, $(i, j) \in \Gamma \times \Gamma$ et $S \in 2^N$ tels que $i \notin S$ et $j \notin S$ avec $i \neq j$, et $v(S \cup \{i\}) = (v(S \cup \{j\})$, montrons que $Sh_i = Sh_j$

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\
&= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\
&+ \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|S|+1)!(|N|-(|S|+1)-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{j\})) \\
&= \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{j\}) - v(S)) \\
&+ \sum_{S \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|S|+1)!(|N|-(|S|+1)-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{i\})) \\
&= sh_j(v).
\end{aligned}$$

Montrons que la valeur de Shapley vérifie l'axiome du joueur nul.

Soient $v \in \Gamma$ et $i \in N$ un joueur nul dans v c'est - à - dire $\forall S \subseteq N$, $v(S+i) - v(S) = 0$, on a

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} v(S+i) - v(S) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De ce qui précède, la valeur de Shapley vérifie l'axiome de symétrie, efficience, joueur nul et d'additivité.

Réciproquement, supposons qu'il existe une autre valeur φ qui vérifie ces quatre axiomes et montrons que $\varphi = Shap$. Soit le jeu γu_T, avec $\gamma \in R$, montrons que le joueur $i \in N \setminus T$ est un joueur nul dans le jeu γv_T. C'est-à-dire $\varphi_i(\gamma v_T) = 0$. En effet, soit $i \in N \setminus T$, pour tout $S \in 2^N$ on a deux cas :

- Si $T \subseteq S$ alors $T \subseteq S+i$ et dans ce cas, $\gamma v_T(S+i) - \gamma v_T(S) = 0$

• Si $T \not\subseteq S$ alors $T \not\subseteq S + i$ car $i \notin T$ et dans ce cas $\gamma v_T(S+i) = \gamma v_T(S) = 0$

Dans tous les cas, tout joueur $i \in N \setminus T$ est figurant dans $\gamma v_T(S)$ et a une valeur individuelle nulle, et comme φ vérifie l'axiome du joueur nul, on a $\varphi_i(\gamma v_T) = 0$.

On a $\sum_{i\in T} \varphi_i(\gamma v_T) = \sum_{i\in N} \varphi_i(\gamma v_T) - \sum_{i\in N\setminus T} \varphi_i(\gamma v_T)$, comme φ est nul pour tout $i \in N \setminus T$, on a $\sum_{i\in N\setminus T} \varphi_i(\gamma v_T) = 0$. Ainsi $\sum_{i\in T} \varphi_i(\gamma v_T) = \sum_{i\in N} \varphi_i(\gamma v_T)$ et comme φ satisfait l'axiome d'efficience, $\sum_{i\in N} \varphi_i(\gamma v_T) = \gamma v_T(N)$ d'où $\sum_{i\in T} \varphi_i(\gamma v_T) = \gamma$. D'après l'axiome de symétrie

$\varphi_i(\gamma v_T) = \varphi_j(\gamma v_T)$ donc $\sum_{i\in T} \varphi_j(\gamma v_T) = \gamma$, ce qui implique que $\varphi_i(\gamma v_T) = \frac{\gamma}{|T|}$ pour tout $i \in T$ et pour tout $i \in N \setminus T$ i est un joueur nul dans γv_T. On obtient ainsi

$$\varphi_i(\gamma v_T) = \begin{cases} \frac{\gamma}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus T \end{cases}$$

Comme γ et $|T|$ sont des réels bien connus, il en résulte que φ est définie de manière unique.

Soit $v \in \Gamma$, Comme la famille $(v_T)_{T\in 2^N}$, avec $T \neq \emptyset$ est une base de Γ, le jeu v s'écrit de façon unique sous la forme $v = \sum_{T\in 2^N} \alpha_T(v) v_T$ où les $\alpha_T(v)$ sont des réels connus.

on a : $\varphi_i(v) = \varphi_i(\sum_{T\in 2^N} \alpha_T(v) v_T)$ et d'après l'axiome d'additivité, $\varphi_i(\sum_{T\in 2^N} \alpha_T(v) v_T) = \sum_{T\in 2^N} \varphi_i(\alpha_T(v) v_T)$; or d'après ce qui précède, on a

$$\varphi_i(\alpha_T(v)\gamma v_T) = \begin{cases} \frac{\alpha_T(v)}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus T \end{cases}$$

D'où

$$\varphi_i(v) = \sum_{T\in 2^N} \begin{cases} \frac{\alpha_T(v)}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus T \end{cases}$$

Ainsi, $\forall i \in N$, $\forall v \in \Gamma$, $\varphi_i(v)$ est définie par $\alpha_T(v)$ et |T| qui sont tous des réels connus donc φ est définie de manière unique. De plus φ verifie l'axiome d'efficience, d'additivité, de symétrie, et du joueur nul de même que la valeur de Shapley d'où $\varphi = Shap$ ■

Rappelons que Shapley suppose que tous les joueurs ont la même chance d'intervenir à n'importe quelle étape dans la formation de la grande coalition N. Weber reconduit la procédure de Shapley en se démarquant de Shapley sur un seul point. En effet, Weber suppose que deux joueurs différents peuvent ne pas avoir la même chance d'intervenir à une étape donnée de la formation de la grande coalition et définit les valeurs probabilistes (Weber, 1988).

2.2. Valeurs Probabilistes

Weber relève que dans un JFCC, chaque joueur peut avoir besoin d'évaluer individuellement ses différentes perspectives. Dans ce cas, chaque joueur peut faire une telle évaluation à partir d'informations privées ou personnelles, qui ne dépendent pas du jeu. Ainsi, Weber modélise un environnement où chaque joueur définit de manière subjective une distribution de probabilité sur toutes les coalitions auxquelles il n'appartient pas.

Définition 2.2.1

Soit $i \in N$: une distribution de probabilité de i est une application $p^i : N \setminus i \longrightarrow [0; 1], T \mapsto p^i_T$, $\sum_{T \subseteq N \setminus i} p^i_T = 1$.

Pour toute la suite, nous désignons par $P = \cup P^i$ avec $P^i = \{p = (p^i_T)_{T \subseteq N \setminus i}, i \in N, p^i_T > 0, \sum p^i_T = 1\}$ l'ensemble de toutes les distributions de probabilités possibles de tous les joueurs.

Exemple 2.2.1. Pour $N = \{1, 2, 3\}$ considérons les distributions de probabilités suivantes :

•Cas du joueur 1. $p^1_\emptyset = \frac{1}{2}$, $p^1_{\{2\}} = 0$, $p^1_{\{3\}} = \frac{1}{2}$, $p^1_{\{2,3\}} = 0$.

• Cas du joueur 2. $p^2_\emptyset = \frac{1}{2}$, $p^2_{\{1\}} = 0$, $p^2_{\{3\}} = \frac{1}{2}$, $p^2_{\{1,3\}} = 0$.

• Cas du joueur 3 $p^3_\emptyset = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{1\}} = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{2\}} = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{1,2\}} = \frac{1}{4}$.

La définition suivante présente les valeurs probabilistes.

Définition 2.2.2 (Weber, 1988)

Une valeur ϕ sur Γ est une valeur probabiliste lorsqu'il existe $p \in P, \forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} p^i_T (v(T \cup i) - v(T))$.

Exemple 2.2.2. En utilisant les distributions de probabilités de l'exemple 2.2.1,

Considérons le JFCC de l'illustration 1, on a $N = \{1, 2, 3\}$ et l'état de la coopération v entre les joueurs est donné par :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	10	15	4	30	14	16	50

Lorsque l'évaluation n'est pas collective comme dans Shapley, mais décrite par p, les espérances de gains des joueurs 1, 2 et 3 sont données par :

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= \sum_{T\subseteq N\setminus 1} p_T^1(v(T\cup 1)-v(T)) \\
&= p_\emptyset^1[v(1)-v(\emptyset)]+p_{\{2\}}^1[v\{1,2\}-v\{2\}]+p_{\{3\}}^1[v\{1,3\}-v\{3\}]+p_{\{2,3\}}^1[v\{1,2,3\}-v\{2,3\}] \\
&= \frac{113}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) &= \sum_{T\subseteq N\setminus 2} p_T^2(v(T\cup 2)-v(T)) \\
&= p_\emptyset^2[v\{2\}-v\{\emptyset\}]+p_{\{1\}}^2[v\{1,2\}-v\{1\}]+p_{\{3\}}^2[v\{2,3\}-v\{3\}]+p_{\{1,3\}}^2[v\{1,2,3\}-v\{1,3\}] \\
&= \frac{134}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v) &= \sum_{T\subseteq N\setminus 3} p_T^3(v(T\cup 3)-v(T)) \\
&= p_\emptyset^3[v\{3\}-v\{\emptyset\}]+p_{\{1\}}^3[v\{1,3\}-v\{1\}]+p_{\{2\}}^3[v\{2,3\}-v\{2\}]+p_{\{1,2\}}^3[v\{1,2,3\}-v\{1,2\}] \\
&= \frac{53}{6}.
\end{aligned}$$

Dans la littérature, l'axiome de linéarité est l'une des propriétés souhaitables pour une valeur. Nous le présentons ci-dessous.

• **Axiome de linéarité**.

Une valeur f est linéaire lorsque $\forall(u,v)\in\Gamma\times\Gamma$, $\forall c>0$, $f(u+v)=f(u)+f(v)$ et $f(cv)=cf(v)$. Pour caractériser les valeurs probabilistes, Weber étudie l'impact des axiomes de linéarité, et du joueur figurant pour une valeur.

Pour toute la suite, nous utilisons les bases :

• $\{u_T; \emptyset\neq T\subseteq N\}$ de Γ où pour tout $S\subseteq N$,

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T=S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

• $\{v_T; \emptyset\neq T\subseteq N\}$ de Γ où pour tout $S\subseteq N$,

$$v_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T\subseteq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

2.2.1. Impact des axiomes de linéarité et du joueur dummy pour une valeur

Proposition 2.2.1 (Weber, 1988)

Si une valeur ϕ sur Γ est linéaire, alors il existe une famille de constante $(a_T)_{T\subseteq N}$ telle que pour tout $v \in \Gamma$, pour tout $i \in N$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} a_T v(T)$.

Preuve. Soient $v \in \Gamma$ et $i \in N$; cherchons $(a_T)_{T\subseteq N}$ tel que $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} a_T v(T)$.

Comme ϕ est une valeur sur Γ et l'ensemble $\{u_T : \emptyset \neq T = N\}$ forme une base de l'espace des jeux, nous avons : Pour $v \in \Gamma$ il existe α_T des réels tels que $v = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} \alpha_T u_T$. Donc $\forall S \subseteq N,\ v(S) = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} \alpha_T u_T(S) = \alpha_S$, car $u_T(S) = 1$ si $S = T$, 0 sinon.

Nous avons ainsi le résultat suivant $\forall T \subseteq N,\ v(T) = \alpha_T$.

D'où $v = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} v(T)u_T$ et ϕ étant linéaire, on a $\phi_i(v) = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} v(T)\phi(u_T)$. Il suffit de prendre $\phi(u_T) = a_T$ pour $T \neq \emptyset$. Pour $T = \emptyset$, on sait que $\phi_i(v) = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} v(T)a_T$ ou $\phi_i(v) = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N} v(T)a_T + a_\emptyset v(\emptyset)$ (car $v(\emptyset) = 0$) ou encore $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} v(T)a_T$ avec $a_\emptyset \in \mathbb{R}$ on définit $a_\emptyset$ arbitrairement.

■

Proposition 2.2.2 (Weber, 1988)

Soit ϕ une valeur sur Γ, définie par $\forall i \in N, \forall v \in \Gamma\ \phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} a_T v(T)$. Si ϕ satisfait l'axiome du joueur figurant alors, pour tout $i \in N$, il existe une famille de réels $(P_T)_{T\subsetneq N\setminus i}$ vérifiant $\sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T = 1$, $\forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T[v(T\cup i) - v(T)]$,

Preuve.

• Montrons que pour tout $T \subseteq N \setminus i$, le joueur i est dummy dans v_T. Il suffit de montrer que $\forall S \subseteq N\setminus i$, $v_T(S\cup i) - v_T(S) = 0$. Soient $i \in N$ et $T \subseteq N \setminus i$ par définition du jeu unanime v_T on a $v_T(i) = 0$. Remarquons que $\forall S \subseteq N$, il existe deux cas possibles $T \nsubseteq S$ ou $T \subseteq S$. Pour $T \nsubseteq S$, on a $T \nsubseteq S \cup i$ car $i \notin T$ on obtient $v_T(S \cup i) = 0$ et $v_T(S) = 0$. Pour $T \subseteq S$, on a $T \subseteq S \cup i$ par définition de v_T on obtient $v_T(S \cup i) = 1$ et $v_T(S) = 1$. Comme ϕ satisfait l'axiome du joueur dummy, $\phi_i(v_T) = 0$, On obtient le résultat suivant : $\forall i \in N$, $\forall T \subseteq N \setminus i$,

$$\phi_i(v_T) = 0 \tag{2.1}$$

• Montrons que pour toute coalition $T \subseteq N \setminus i$, $a_{T\cup i} + a_T = 0$ Nous procédons par récurrence forte sur le cardinal de T. Pour $|T| = n-1$, montrons que $a_{N\setminus i} + a_N = 0$. Pour tout $v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} a_T v(T)$, en particulier, pour le jeu unanime $v_{N\setminus i}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_i(v_{N\setminus i}) &= \sum_{T\subseteq N} a_T v_{N\setminus i}(T) \\
&= \sum_{T\subseteq N, N\setminus i\subseteq T} a_T v_{N\setminus i}(T) \\
&= a_{N\setminus i} + \sum_{T\subseteq N, N\setminus i\subsetneq T} a_T v_{N\setminus i}(T) \\
&= a_{N\setminus i} + a_N.
\end{aligned}$$

D'après (2.1), $\phi_i(v_{N\setminus i}) = 0$, d'où $a_{N\setminus i} + a_N = 0$ il en résulte que $\forall T \subseteq N\setminus i$, telle que $|T| = n-1$ $a_{T\cup i} + a_T = 0$

Soit $k \in N$, $2 \le k \le n-2$, supposons que $\forall T \subseteq N \setminus i$, $|T| \ge k$ $a_{T\cup i} + a_T = 0$ et montrons que $\forall S \subseteq N \setminus i$, $|S| = k-1$, $a_{T\cup i} + a_T = 0$. Soit $S \subseteq N \setminus i$ tel que $|S| = k-1$, considérons le jeu unanime v_S. On a :

$$\begin{aligned}
\phi_i(v_S) &= \sum_{T\subseteq N} a_T v_S(T) \\
&= \sum_{T\subseteq N, S\subseteq T} a_T v_S(T) + \sum_{T\subseteq N, S\nsubseteq T} a_T v_S(T)
\end{aligned}$$

Par définition de v_S, on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi_i(v_S) &= \sum_{T\subseteq N, S\subseteq T} a_T \\
&= \sum_{T\subseteq N\setminus i, S\subseteq T} (a_T + a_{T\cup i}) \\
&= \sum_{T\subseteq N\setminus i, S\subseteq T} (a_T + a_{T\cup i}) + (a_S + a_{S\cup i}).
\end{aligned}$$

D'après (2.1), on a $\phi_i(v_S) = 0$. De plus par hypothèse de récurrence $a_T + a_{T\cup i} = 0$, on obtient $\sum_{T\subseteq N\setminus i, S\subseteq T}(a_T + a_{T\cup i}) + (a_S + a_{S\cup i}) = 0$ d'ou $a_S + a_{S\cup i} = 0$.

Donc $\forall T \subseteq N \setminus i$ avec $1 \le |T| \le n-1$, $a_T = -a_{T\cup i}$.

On sait que :

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{T\subseteq N} a_T v(T) \\
&= \sum_{T\subseteq N\setminus i} [(a_T v(T) + a_{T\cup i} v(T\cup i)]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i} [(a_T v(T) + a_{T\cup i} v(T \cup i)] + (a_\emptyset v(\emptyset) + a_i v(i))$$

$$= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i} [(-a_{T\cup i} v(T) + a_{T\cup i} v(T \cup i)] + a_i v(i)$$

$$= \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i} a_{T\cup i}[v(T \cup i) - v(T)] + a_i v(i)$$

Or on veut avoir $\phi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i} P_T[v(T \cup i) - v(T)] + P_\emptyset v(i)$ en identifiant cette expression avec $\phi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i} a_{T\cup i}[v(T \cup i) - v(T)] + a_i v(i)$, il suffit de prendre $P_T = a_{T\cup i}$, $\forall \emptyset \neq T \subseteq N \setminus i$ et $P_\emptyset = a_i$

• Montrons que $\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i} P_T = 1$. On a $\forall v \in \Gamma$, $\forall i \in N$, $\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T[v(T \cup i) - v(T)]$ en particulier, pour le jeu unanime v_i, on a $\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T[v_i(T \cup i) - v_i(T)]$. Par définition de v_i, on obtient $\phi_i(v_i) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T$. De plus i est figurant dans v_i et $v_i(i) = 1$, comme ϕ satisfait l'axiome du joueur figurant, on a $\phi_i(v_i) = 1$ donc $\sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T = 1$ ■

La monotonie est aussi un axiome généralement étudié pour une valeur.

• **Jeu monotone** : Un JFCC v est monotone lorsque $\forall S \subseteq T \subseteq N$, on a $v(S) \leq v(T)$.

• **Axiome de monotonie** : Une valeur ϕ sur Γ vérifie l'axiome de monotonie lorsque $\forall v \in \Gamma$, $\forall i \in N$, si v est monotone alors $\phi_i(v) \geq 0$.

Weber relève que dans un jeu monotone, chaque joueur sait que son arrivée dans une coalition ne diminuera pas le gain réalisé collectivement par tous ses prédécesseurs. Par conséquent, d'après l'axiome de monotonie, aucun joueur ne se verra imputer un coût.

2.2.2. L'impact de l'axiome de monotonie pour une valeur

Considérons la base $\{\hat{v}_T; \emptyset \neq T \subseteq N\}$ de Γ où pour tout $S \subseteq N$,

$$\hat{v}_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subsetneq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

Rappelons que $P = \cup P^i$ avec $P^i = \{p = (p^i_T)_{T \subseteq N \setminus i}, i \in N, p^i_T > 0, \sum p^i_T = 1\}$

Proposition 2.2.3 (Weber, 1988)

Soit ϕ une valeur sur Γ, telle qu'il existe un réel P_T, $\forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T[v(T \cup i) - v(T)]$.
Si ϕ_i est monotone, alors $P_T \geq 0$.

Preuve.

Montrons que $\hat{v}_T$ est monotone. Soit $(S_1, S_2) \subseteq N \times N$ tel que $S_1 \subseteq S_2$ montrons que $\hat{v}_T(S_1) \leq \hat{v}_T(S_2)$.

• Premier cas : pour $T \subsetneq S_1$, on a $T \subsetneq S_2$ car $S_1 \subseteq S_2$. Par définition de $\hat{v}_T$, on obtient $\hat{v}_T(S_1) = \hat{v}_T(S_2) = 1$.

• Deuxième cas : pour $T \nsubseteq S_1$ on a $\hat{v}_T(S_1) = 0$ et par définition de $\hat{v}_T$, on a $\hat{v}_T(S_1) \geq 0$. Ainsi $\hat{v}_T$ est monotone.

Soient $S \subsetneqq N \setminus i$ et $v \in \Gamma$, on a $\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} P_S[v(S \cup i) - v(S)]$. En particulier, pour le jeu $\hat{v}_T$ avec $T \subsetneqq N \setminus i$,

$$\begin{aligned}
\phi_i(\hat{v}_T) &= \sum_{S \subseteq N \setminus i} P_S[\hat{v}_T(S \cup i) - \hat{v}_T(S)] \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus i, S \neq T} P_S[\hat{v}_T(S \cup i) - \hat{v}_T(S)] + P_T[\hat{v}_T(T \cup i) - \hat{v}_T(T)] \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus i, T \subsetneqq S} P_S[\hat{v}_T(S \cup i) - \hat{v}_T(S)] + \sum_{S \subseteq N \setminus i, T \nsubseteq S} P_S[\hat{v}_T(S \cup i) - \hat{v}_T(S)] + P_T[\hat{v}_T(T \cup i) - \hat{v}_T(T)] \\
&= P_T
\end{aligned}$$

Ainsi $\phi_i(\hat{v}_T) = P_T$. Puisque $\hat{v}_T$ est monotone et ϕ satisfait l'axiome de monotonie, on a $\phi_i(\hat{v}_T) \geq 0$. D'où $\phi_i(\hat{v}_T) = P_T \geq 0$. ■

Par le théorème2.2.1 , Weber caractérise les valeurs probabilistes.

Théorème 2.2.1. *(**Weber, 1988**) Une valeur ϕ sur Γ est une valeur probabiliste, si et seulement si, ϕ est linéaire, dummy et monotone.*

Preuve. Supposons que ϕ est une valeur probabiliste et montrons que ϕ est linéaire, dummy et monotone. Comme ϕ est une valeur probabiliste, pour tout $i \in N$ il existe $(p^i_T)_{T \subseteq N \setminus i}$ une distribution de probabilité sur l'ensemble de toutes les coalitions ne contenant pas i tel que $\forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T[v(T \cup i) - v(T)]$

• **Montrons que ϕ est linéaire** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,$(u, v) \in \Gamma \times \Gamma$

$$\begin{aligned}
\phi_i(u + \alpha v) &= \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T[(u + \alpha v)(T \cup i) - (u + \alpha v)(T)] \\
&= \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T[u(T \cup i) + \alpha v(T \cup i) - (u(T) + \alpha v(T))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T[u(T\cup i)+u(T)] + \alpha \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T[v(T\cup i)+v(T)]\\&= \phi_i(u)+\alpha\phi_i(v)\end{aligned}$$

• **Montrons que ϕ est dummy** c'est-à -dire $\forall i \in N$, si i est un joueur dummy alors $\phi_i(v) = v\{i\}$. Soit $i \in N$ un joueur dummy. On a $v(T\cup i)-v(T) = v\{i\}$ donc $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T v\{i\} = v\{i\} \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T$ et comme P^i_T est une distribution de probabilité $\sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T = 1$ d'où $\phi_i(v) = v\{i\}$

• **Montrons que ϕ satisfait l'axiome de monotonie**

Soit $v \in \Gamma$ monotone , $T \subseteq N\setminus i$ tel que $T \subseteq T\cup i \Longrightarrow v(T) \leq v(T\cup i)$ donc, $v(T\cup i)-v(T) \geq 0$ et $\forall T \subseteq N\setminus i$ P^i_T est une distribution de probabilité c'est - à- dire $0 \leq P^i_T \leq 1$ d'où $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T[v(T\cup i)-v(T)] \geq 0$

Réciproquement, Supposons que ϕ satisfait l'axiome de linéarité, dummy, monotonie et montrons que ϕ est une valeur probabiliste c'est - à -dire $\forall i \in N$, $\forall v \in \Gamma$ il existe$\{P^i_T; T \subseteq N\setminus i\}$ une distribution de probabilité sur l'ensemble des coalitions T ne contenant pas i tel que $\forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T[v(T\cup i)-v(T)]$, $\sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T = 1$ et $P_T \geq 0$.

Comme ϕ satisfait l'axiome de linéarité d'après la proposition 2.2.1, il existe un ensemble de constante $\{a_T; T \subseteq N\}$ tel que$\forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} a_T v(T)$. De plus, ϕ vérifie l'axiome du joueur dummy et d'après la proposition 2.2.2, il existe un ensemble de constante $\{P^i_T; T \subseteq N\setminus i\}$ tel que $\sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T = 1$ et $\forall v \in \Gamma$,$\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_T[v(T\cup i)-v(T)]$. Comme ϕ est monotone, on a pour tout jeu v monotone, $\phi_i(v) \geq 0$ et d'après la proposition 2.2.3, pour tout $\hat{v}_T$ monotone $\phi_i(\hat{v}_T) = P_T \geq 0$. Donc ϕ est une valeur probabiliste. ■

Corollaire 2.2.1 (Weber, 1988). *La valeur de Shapley est une valeur probabiliste*

Preuve. D'après le théorème 2.2.1 une valeur ϕ est une valeur probabiliste si et seulement si ϕ satisfait l'axiome de linéarité, de monotonie et dummy. Or la valeur de shapley est additive, et dummy ; il suffit de démontrer que ϕ est monotone, et $\forall c \in \mathbb{R}$, $Shap_i(cv) = cShap_i(v)$.

• **Montrons que Shap est monotone**. Soit $v \in \Gamma$ monotone, montrons que $Shap_i(v) \geq 0$.

Soit $v \in \Gamma$ et $T \subseteq N$ $Shap_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[v(T\cup i)-v(T)]$ avec $|T| = t$.

on a $T \subset T\cup i$ et comme v est monotone $v(T) \leq v(T\cup i)$ d'où $v(T\cup i)-v(T) \geq 0$ or $\frac{t!(n-t-1)!}{n!} \geq 0$ d'ou $Shap_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[v(T\cup i)-v(T)] \geq 0$.

$Shap_i(cv) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[cv(T\cup i)-cv(T)] = c\times\sum_{T\subseteq N\setminus i} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[v(T\cup i)-v(T)] = c\times Shap_i(v)$.

■

Dans la section suivante, Weber caractérise les valeurs probabilistes symétriques.

2.2.3. Caractérisation des valeurs probabilistes symétriques

.

Dans la suite, notons par Π l'ensemble de toutes les permutations des joueurs de N.

Proposition 2.2.4 (Weber, 1988)

Soit ϕ une valeur sur Γ tel que $\forall i \in N$, $\forall p \in P, \forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N \setminus i} P_T^i[v(T \cup i) - v(T)]$. ϕ est symétrique, si et seulement si, existe une famille de réels $(p_t)_{t \in (0,1,\ldots n-1)}$ tel que $\forall i \in N$, $\forall T \subseteq N \setminus i$, $p_T^i = p_t$ avec $|T| = t$

__Preuve.__ Soient $i \in N$ et (T_1, T_2) deux coalitions ne contenant pas i tel que $0 < |T_1| = |T_2| \leq n-2$.
i Montrons que $P_{T_1}^i = P_{T_2}^i$. Soit π une permutation telle que $\pi(T_1) = T_2$ et $\pi(i) = i$. Comme $\forall v \in \Gamma$, $\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} P_S^i[v(S \cup i) - v(S)]$ posons $v = \hat{v}_{T_2}$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_i(\hat{v}_{T_2}) &= \sum_{S \subseteq N \setminus i} P_S^i[\hat{v}_{T_2}(S \cup i) - \hat{v}_{T_2}(S)] \\
&= P_{T_2}^i[\hat{v}_{T_2}(T_2 \cup i) - \hat{v}_{T_2}(T_2)] + \sum_{S \subseteq N \setminus i, S \neq T_2} P_S^i[\hat{v}_{T_2}(S \cup i) - \hat{v}_{T_2}(S)] \\
&= P_{T_2}^i[\hat{v}_{T_2}(T_2 \cup i) - \hat{v}_{T_2}(T_2)] + \sum_{S \subseteq N \setminus i, S \subsetneq T_2} P_S^i[\hat{v}_{T_2}(S \cup i) - \hat{v}_{T_2}(S)] \\
&+ \sum_{S \subseteq N \setminus i, S \nsubseteq T_2} P_S^i[\hat{v}_{T_2}(S \cup i) - \hat{v}_{T_2}(S)]
\end{aligned}$$

Notons que $T_2 \subsetneq S \implies T_2 \subsetneq S \cup i$. Ainsi, par définition de $\hat{v}_{T_2}$, on a pour tout $T_2 \subsetneq S$, $\hat{v}_{T_2}(S \cup i) = \hat{v}_{T_2}(S) = 1$ c'est-à-dire que

$$\sum_{S \subseteq N \setminus i, S \subsetneq T_2} P_S^i[\hat{v}_{T_2}(S \cup i) - v_{T_2}(S)] = 0.(2)$$

De même $T_2 \nsubseteq S \implies T_2 \nsubseteq S \cup i$ car $i \notin T_2$ et par définition de $\hat{v}_{T_2}$, on a $\hat{v}_{T_2}(S \cup i) = \hat{v}_{T_2}(S) = 0$ c'est-à-dire

$$\sum_{S \subseteq N \setminus i, S \nsubseteq T_2} P_S^i[\hat{v}_{T_2}(S \cup i) - \hat{v}_{T_2}(S)] = 0(3)$$

Les égalités (2) et (3) entrainent que $\phi_i(\hat{v}_{T_2}) = P_{T_2}^i[\hat{v}_{T_2}(T_2 \cup i) - \hat{v}_{T_2}(T_2)]$ et par définition de $\hat{v}_{T_2}$, on obtient $\phi_i(\hat{v}_{T_2}) = P_{T_2}^i$. En utilisant la même technique, on obtient $\phi_i(\hat{v}_{T_1}) = P_{T_1}^i$.

• Montrons que pour tout $S \subseteq N$, $\pi\hat{v}_{T_2}(S) = \hat{v}_{T_1}(S)$.

Comme pour tout $S \subseteq N$, $\pi\hat{v}_{T_2}(S) = \hat{v}_{T_2}(\pi S)$, on a

$$\begin{aligned}
\pi\hat{v}_{T_2}(S) &= \begin{cases} 1 & \text{si } T_2 \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } \pi T_1 \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } T_1 \subsetneq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \hat{v}_{T_1}(S).
\end{aligned}$$

D'où pour $S \subseteq N$, $\pi\hat{v}_{T_2}(S) = \hat{v}_{T_1}(S)$.

Notons que $\phi_i(\hat{v}_{T_2}) = \phi_{\pi(i)}(\hat{v}_{T_2})$, comme ϕ satisfait l'axiome de symétrie, on a $\phi_{\pi(i)}(\hat{v}_{T_2}) = \phi_i(\pi\hat{v}_{T_2})$. Or $\phi_i(\pi\hat{v}_{T_2}) = \phi_i(\hat{v}_{T_1})$. D'où $\phi(\hat{v}_{T_2}) = P^i_{T_2}$, $\phi(\hat{v}_{T_1}) = P^i_{T_1}$ et $\phi(\hat{v}_{T_2}) = \phi(\hat{v}_{T_1})$. Donc $P^i_{T_1} = P^i_{T_2}$

ii Montrons que $\forall i, j \in N$, $\forall T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ $P^i_T = P^j_T$.

Soient $(i, j) \in N^2$ et $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$. Considérons la permutation $\pi \in \Pi$ qui interchange i et j en laissant tous les autres fixes. On a pour tout $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$, $\pi T = T$. Soit $S \subseteq N$, montrons que $\pi\hat{v}_T(S) = \hat{v}_T(S)$. On a

$$\begin{aligned}
\pi\hat{v}_{T}(S) &= \begin{cases} 1 & \text{si } T \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } \pi T \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } T \subsetneq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= v_T(S).
\end{aligned}$$

Notons que $\phi_j(\hat{v}_T) = \phi_{\pi(i)}(\hat{v}_T)$ Comme ϕ satisfait l'axiome de symétrie, on a $\phi_{\pi(i)}(\hat{v}_T) = \phi_i(\pi\hat{v}_T)$ Or $\phi_i(\pi\hat{v}_T) = \phi_i(\hat{v}_T)$. Donc $\phi_i(\hat{v}_T) = P^i_T$, $\phi_j(\hat{v}_T) = P^j_T$ et $\phi_i(\hat{v}_T) = \phi_j(\hat{v}_T)$.On a ainsi $P^i_T = P^j_T$

iii - Montrons que $\forall (i, j) \in N^2$, $P^i_{N\setminus i} = P^j_{N\setminus j}$

Soient $(i, j) \in N^2$ et $\pi \in \Pi$ une permutation qui interchange i et j en laissant tous les autres joueurs fixes. On a :

$\phi_i(v) = \sum_{S\subseteq N\setminus i} P^i_S[v(S \cup i) - v(S)]$. En particulier, pour le jeu v_N,

$$\begin{aligned}\phi_i(v_N) &= \sum_{S\subseteq N\setminus i} P^i_S[v_N(S \cup i) - v_N(S)] \\ &= P^i_{N\setminus i}[v_N(N) - v_N(N \setminus i)] + \sum_{S\subsetneq N\setminus i} P^i_S[v_N(S \cup i) - v_N(S)]\end{aligned}$$

Notons que pour $T \subsetneq N \setminus i$, et par définition de v_N, on a $v_N(S \cup i) = v_N(S) = 0$. On obtient ainsi $\phi_i(v_N) = P^i_{N\setminus i}$ de même $\phi_j(v_N) = P^j_{N\setminus j}$

Comme $\pi \in \Pi$ est une bijection de N vers N, on a $\pi N = N$. De plus pour tout $S \subseteq N$ $\pi v_N(S) = v_N(\pi S)$, on obtient

$$\begin{aligned}\pi v_N(S) &= \begin{cases} 1 & \text{si } N \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \pi N \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } N \subsetneq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= v_N(S).\end{aligned}$$

Donc $\pi v_N = v_N$

Or $\phi_j(v_N) = \phi_{\pi(i)}(v_N)$ Comme ϕ satisfait l'axiome de symétrie, on a $\phi_{\pi(i)}(v_N) = \phi_i(\pi v_N)$ Or $\phi_i(\pi v_N) = \phi_i(v_N)$.Donc $\phi_i(v_N) = P^i_{N\setminus i}$, $\phi_j(v_N) = P^j_{N\setminus j}$ et $\phi_i(v_N) = \phi_j(v_N)$.On a ainsi $P^i_{N\setminus i} = P^j_{N\setminus j}$

iv - Montrons que $\forall (i, j) \in N^2, \forall T \subseteq N \setminus i, \quad j \in T, P^i_T = P^j_{(T\setminus j)\cup i}$

Soient $(i, j) \in N^2$ et $T \subseteq N \setminus i$, $j \in T$ posons $T_0 = (T \setminus j) \cup i$. Soit $\pi \in$ une permutation de tous les joueurs qui interchange i et j en laissant tous les autres fixes. Par la technique utilisée dans **(i)**, et en considérant le jeu v_T, on obtient $\phi_i(v_T) = P^i_T$.

Notons que $\pi(T_0) = \pi((T \setminus j) \cup i)$ c'est-à-dire $\pi(T_0) = \pi(T \setminus j) \cup \pi(i)$ et par définition de π, on a $\pi(T_0 = (T \setminus j) \cup j$ c'est-à-dire $\pi(T_0) = T$.

Soit $S \subseteq N$ comme $\pi\hat{v}_T(S) = \hat{v}_T(\pi S)$, on a

$$\begin{aligned}\pi\hat{v}_T(S) &= \begin{cases} 1 & \text{si } T_0 \subsetneq \pi S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(T_0) \subsetneq \pi(S) \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} 1 & \text{si } T_0 \subsetneq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \hat{v}_{T_0}(S).
\end{aligned}
$$

Donc $\pi\hat{v}_T = \hat{v}_{T_0}$. Comme $\phi_j(\hat{v}_{T_0}) = P^j_{T_0}$ et $\phi_i(\hat{v}_T) = \phi_{\pi(j)}(\hat{v}_T)$ on a par l'axiome de symétrie $\phi_{\pi(j)}(\hat{v}_T) = \phi_j(\pi\hat{v}_T)$. Or $\phi_j(\pi\hat{v}_T) = \phi_j(\hat{v}_{T_0})$. D'où $\phi_i(\hat{v}_T) = \phi_j(\hat{v}_{T_0})$. Ainsi $P^i_T = P^j_{T_0}$.

v - Montrons que $\forall (i, j) \in N^2$, $P^i_\emptyset = P^j_\emptyset$.

Soient $(i, j) \in N^2$ Soit $\pi \in \Pi$ une permutation de tous les joueurs qui interchange i et j en laissant tous les autres fixes. Soit $S \subseteq N$ comme $\pi v_T(S) = v_T(\pi S)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\pi v_j(S) &= \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \pi(S) \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(i) \in \pi(S) \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases} \\
&= v_i(S).
\end{aligned}
$$

Notons que $\phi_j(v_j) = \phi_{\pi(i)}(v_j)$ et comme ϕ satisfait l'axiome de symétrie, on a $\phi_{\pi(i)}(v_j) = \phi_i(\pi v_j)$. Or $\phi_i(\pi v_j) = \phi_i(v_i)$. D'ou $\phi_j(v_j) = \phi_i(v_i)$.

Comme $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P^i_T[v(T \cup i) - v(T)]$ $\forall v \in \Gamma$, on a pour le jeu v_i particulier

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v_i) &= \sum_{T\subseteq N\setminus i} P^i_T[v_i(T \cup i) - v_i(T)] \\
&= P^i_\emptyset[v_i(\emptyset \cup i) - v_i(\emptyset)] + \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N\setminus i} P^i_T[v_i(T \cup i) - v_i(T)] \\
&= P^i_\emptyset + \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N\setminus i} P^i_T[v_i(T \cup i) - v_i(T)]
\end{aligned}
$$

On obtient $P^i_\emptyset = \phi_i(v_i) - \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N\setminus i} P^i_T[v_i(T \cup i) - v_i(T)]$

Notons que $i \notin T$ car $T \subseteq N \setminus i$ et par définition de v_i, on a $v_i(T) = 0$. De plus $i \in (T \cup i)$ et par définition de v_i $v_i(T \cup i) = 1$ et comme $\phi_j(v_j) = \phi_i(v_i)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
P^i_\emptyset &= \phi_j(v_j) - \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N\setminus i} P^i_T \\
&= \phi_j(v_j) - \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N\setminus i, j\in T} P^i_T - \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N\setminus i, j\notin T} P^i_T
\end{aligned}
$$

Or d'après (ii) $\forall(i, j) \in N^2$, $\forall T \subseteq N \setminus \{i, j\}$ $P^i_T = P^j_T$ et d'après (iv) $\forall(i, j) \in N^2$, $\forall T \subseteq N \setminus i$, $j \in T$,$P^i_T = P_{(T\setminus j)}) \cup i$ on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
P^i_\emptyset &= \phi_j(v_j) - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i, j \notin T} P^j_T - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus i, j \in T} P^j_{(T\setminus j) \cup i} \\
&= \phi_j(v_j) - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus j, i \notin T} P^j_T - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus j, i \in T} P^j_T \\
&= \phi_j(v_j) - (\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus j, i \notin T} P^j_T + \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus j, i \in T} P^j_T) \\
&= \phi_j(v_j) - \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N \setminus j} P^j_T \\
&= P^j_\emptyset
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall(i, j) \in N^2$ $P^i_\emptyset = P^j_\emptyset$

Réciproquement, supposons qu'il existe une famille de réels $(p_t)_{t\in(0,1,\ldots n-1)}$ tel que $\forall i \in N$, $\forall T \subseteq N\setminus i$, $p^i_T = p_t$ avec $|T| = t$. Soit π une permutation sur N. On a $\phi_{\pi(i)}(v) = \sum_{T\subseteq N/i \notin T} P_T[v(T \cup \pi(i)) - v(T)]$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
\phi_{\pi(i)}(v) &= \sum_{\pi(T)/\pi(i)\notin\pi(T)} p_T[v(\pi(T) \cup \pi(i)) - v(\pi(T))] \\
&= \sum_{\pi(T)/\pi(i)\notin\pi(T)} p_T[\pi v(T \cup i) - \pi v(T)] \\
&= \sum_{T/i\notin T} p_T[\pi v(T \cup i) - \pi v(T)] \\
&= \phi_i(\pi v)
\end{aligned}$$

D'où $\phi_{\pi(i)}(v) = \phi_i(\pi v)$ ■

Exemple 2.2.3. Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et les distributions de probabilités suivantes :

•Cas du joueur 1. $p^1_\emptyset = \frac{1}{2}$, $p^1_{\{2\}} = 0$, $p^1_{\{3\}} = \frac{1}{2}$, $p^1_{\{2,3\}} = 0$

• Cas du joueur 2. $p^2_\emptyset = \frac{1}{2}$, $p^2_{\{1\}} = 0$, $p^2_{\{3\}} = \frac{1}{2}$, $p^2_{\{1,3\}} = 0$.

• Cas du joueur 3 $p^3_\emptyset = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{1\}} = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{2\}} = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{1,2\}} = \frac{1}{4}$. On a $\frac{1}{4} = p^3_\emptyset \neq p^2_\emptyset = \frac{1}{2}$. Donc cette valeur probabiliste n'est pas symétrique.

Par la proposition 2.2.4 , Weber montre que si une valeur est probabiliste, alors la probabilité de rejoindre une coalition ne dépend que du cardinal de cette coalition. Qu'en est-il des valeurs probabilistes efficientes ?

2.2.4. Caractérisation des valeurs probabilistes efficientes

On a le résultat suivant.

Proposition 2.2.5 (Weber, 1988)

Une valeur probabiliste ϕ vérifie l'axiome d'efficience, si et seulement si, $\sum_{i\in N} P^i_{N\backslash i} = 1$ et $\forall \emptyset \neq T \subsetneqq N \sum_{i\in T} P^i_{T\backslash i} = \sum_{j\notin T} P^j_T$

Preuve. Soit ϕ une valeur probabiliste et $v \in \Gamma$, il existe une famille de probabilité $(p^i_T)_{i\in N, T\subseteq N\backslash i}$ et $\forall i \in N$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\backslash i} P^i_T[v(T\cup i) - v(T)]$.

On a :

$$
\begin{aligned}
v(N) &= \sum_{i\in N} \phi_i(v) \\
&= \sum_{i\in N}\sum_{T\subseteq N\backslash i} P^i_T[v(T\cup i) - v(T)] \\
&= \sum_{i\in N}\sum_{T\subseteq N\backslash i} P^i_T v(T\cup i) - \sum_{i\in N}\sum_{T\subseteq N\backslash i} P^i_T v(T) \\
&= \sum_{S\subseteq N}\sum_{i\in S} P^i_{S\backslash i} v(S) - \sum_{S\subseteq N}\sum_{j\notin S} P^j_S v(S) \\
&= \sum_{S\subseteq N} v(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\backslash i} - \sum_{j\notin S} P^j_S)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
v(N) &= \sum_{S\subseteq N} v(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\backslash i} - \sum_{j\notin S} P^j_S) \\
&= v(\emptyset)(\sum_{i\in\emptyset} P^i_\emptyset - \sum_{j\notin\emptyset} P^j_\emptyset) + v(N)(\sum_{i\in N} P^i_{N\backslash i} - \sum_{j\notin N} P^j_N) + \sum_{S\neq N, S\neq\emptyset} v(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\backslash i} - \sum_{j\notin S} P^j_S) \\
&= v(N)(\sum_{i\in N} P^i_{N\backslash i} - \sum_{j\notin N} P^j_N) + \sum_{S\neq N, S\neq\emptyset} v(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\backslash i} - \sum_{j\notin S} P^j_S)
\end{aligned}
$$

Considérons le jeu u_T défini par $\forall S \subseteq N$

$$
u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T = S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}
$$

Avec $\emptyset \neq T \subseteq N$.

Pour le jeu (u_T), on a $u_T(N) = u_T(N)(\sum_{i\in N} P^i_{N\backslash i} - \sum_{j\notin N} P^j_N) + \sum_{S\neq N, S\neq\emptyset} u_T(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\backslash i} - \sum_{j\notin S} P^j_S)$

- Pour $T = N$,on a

$$u_N(N) = u_N(N)(\sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i} - \sum_{j\notin N} P^j_N) + \sum_{S\neq N, S\neq\emptyset} u_T(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\setminus i} - \sum_{j\notin S} P^j_S)$$

Notons que pour $S \neq N$, par definition du jeu u_N, on a $u_N(S) = 0$.

c'est-à-dire que $\sum_{S\neq N,S\neq\emptyset} u_T(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\setminus i} - \sum_{j\notin S} P^j_S) = 0$ De plus $\sum_{j\notin N} P^j_N = 0$ et $u_N(N) = 1$ d'où $1 = \sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i}$

- Pour $T \subsetneq N$, par définition de u_T, on a

$$\begin{aligned} u_T(N) &= u_T(T)(\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} - \sum_{j\notin T} P^j_T) + \sum_{\emptyset\neq S\neq N, S\neq T} u_T(S)(\sum_{i\in S} P^i_{S\setminus i} - \sum_{j\notin S} P^j_S) \\ &= u_T(T)(\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} - \sum_{j\notin T} P^j_T) \end{aligned}$$

Or par définition de u_T, $u_T(N) = 0$ et pour $T \neq S$ $u_T(S) = 0$ d'où $\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} - \sum_{j\notin T} P^j_T = 0$.

Réciproquement supposons que $\sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i} = 1$ et $\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} = \sum_{j\notin T} P^j_T$.

Soit $v \in \Gamma$ et $\emptyset \neq T \subseteq N$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} \phi_i(v) &= \sum_{i\in N}\sum_{T\subseteq N\setminus i} P^i_T[v(T\cup i) - v(T)] \\ &= \sum_{i\in N}\sum_{T\subseteq N\setminus i} P^i_T v(T\cup i) - \sum_{i\in N}\sum_{T\subseteq N\setminus i} P^i_T v(T) \\ &= \sum_{S\subseteq N}\sum_{i\in S} P^i_{S\setminus i} v(S) - \sum_{S\subseteq N}\sum_{j\notin S} P^j_S v(S) \\ &= \sum_{T\subseteq N} v(T)(\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} - \sum_{j\notin T} P^j_T) \\ &= v(N)(\sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i} - \sum_{j\notin N} P^j_N) + \sum_{T\subsetneq N} v(T)(\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} - \sum_{j\notin T} P^j_T) \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse $\sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i} = 1$ et pour toute coalition non vide T avec $T \subseteq N$ $\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} = \sum_{j\notin T} P^j_T$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} \phi_i(v) &= v(N)(1-0) + \sum_{T\subsetneq N} v(T)(0) \\ &= v(N) \end{aligned}$$

Donc ϕ est efficience. ■

Par cette caractérisation de l'axiome d'efficience sur une valeur, Weber montre que l'on peut reconnaitre une valeur efficiente en observant la famille de distribution de probabilité de tous les joueurs.

Le résultat suivant identifie la valeur de Shapley dans la classe des valeurs probabilistes.

Théorème 2.2.2. *(Weber, 1988) Une valeur probabiliste ϕ sur Γ est symétrique et efficiente, si et seulement si, $\phi = Shap$.*

Preuve. Comme ϕ satisfait l'axiome de symétrie et d'efficience, d'après les proposition 2.2.4 et 2.2.5 il existe une famille de réels $(p_t)_{t\in(0,1,...n-1)}$ tel que $\forall i \in N$, $\forall T \subseteq N \setminus i$, $p^i_T = p_t$, $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_t[v(T\cup i)-v(T)]$ avec $|T| = t$ et $\sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i} = 1$, $\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} = \sum_{j\notin T} P^j_T$ $\forall\emptyset \neq T \subsetneqq N$. Ainsi, on a $\sum_{i\in N} P^i_{N\setminus i} = \sum_{i\in N} P_{n-1} = nP_{n-1} = 1$ et $\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} = \sum_{i\in T} P_{t-1}$ or $\sum_{i\in T} P_{t-1} = tP_{t-1}$ et $\sum_{j\notin T} P^j_T = \sum_{j\notin T} P_t$ or $\sum_{j\notin T} P_t = (n-t)P_t$ et d'après la proposition2.2.5 $\sum_{i\in T} P^i_{T\setminus i} = \sum_{j\notin T} P^j_T$ d'où $tP_{t-1} = (n-t)P_t$ et $nP_{n-1} = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{P_{t-1}}{P_t} &= \frac{n-t}{t}\\
&= \frac{(n-1)!}{t!(n-1-t)!} \times \frac{(t-1)!(n-t)!}{(n-1)!}\\
&= C^t_{n-1} \times \frac{1}{C^{t-1}_{n-1}}
\end{aligned}$$

d'où $C^t_{n-1}P_t = C^{t-1}_{n-1}P_{t-1}$.

Or

$$\begin{aligned}
C^{t-1}_{n-1}P_{t-1} &= \frac{(n-1)!}{(t-1)!(n-t)!} \times \frac{(t-1)}{(n-t+1)}P_{t-2}\\
&= \frac{(n-1)!}{(t-2)!(n-t+1)!}P_{t-2}\\
&= C^{t-2}_{n-1}P_{t-2}
\end{aligned}$$

Donc, $C^t_{n-1}P_t = C^{t-1}_{n-1}P_{t-1} = ...C^{n-1}_{n-1}P_{n-1} = \frac{1}{n}$ d'où $P_t = \frac{t!(n-t-1)!}{n!}$.
comme $\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} P_t[v(T \cup i) - v(T)]$ avec $P_t = \frac{t!(n-t-1)!}{n!}$, on a :
$\phi_i(v) = \sum_{T\subseteq N\setminus i} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[v(T \cup i) - v(T)] = Shap$
Réciproquement, supposons que $\phi = Shap$. Or la valeur de Shapley étant symétrique et efficiente, il en résulte que ϕ est efficiente et symétrique. et d'après le corollaire 2.2.1 la valeur de Shapley est une valeur probabiliste. D'où le résultat ■

Le chapitre suivant présente la valeur de solidarité et les valeurs de solidarité probabilistes.

Chapitre Trois

LA VALEUR DE SOLIDARITE ET LES VALEURS DE SOLIDARITE PROBABILISTES

La valeur de Shapley modélise un environnement où il y a un défaut de solidarité, vu que dans le processus de formation de N chaque nouvel entrant conserve sa contribution marginale. Mais Nowak et Radzik modélisent un cadre beaucoup plus solidaire.

3.1. La valeur de solidarité de Nowak et Radzik

Nowak et Radzik reconduisent la procédure de la valeur de Shapley, sauf au niveau du partage de la contribution marginale du nouvel entrant. En effet, lorsqu'un joueur rejoint une coalition, sa contribution marginale est partagée égalitairement entre lui et tous ses prédécesseurs.

Il en ressort que dans une coalition S, les joueurs qui ont une contribution marginale supérieure à la moyenne arithmétique de toutes les contributions marginales des membres de S soutiennent ceux des membres qui ont une contribution inférieure à cette moyenne. Cette moyenne est donnée par :

$$\forall v \in \Gamma, \forall T \subseteq N, T \neq \emptyset, A^v(T) = \frac{1}{|T|} \sum_{k \in T} [v(T) - v(T \setminus k)].$$

Par la suite nous désignons par ψ, la valeur de solidarité et on a la définition suivante.

Définition 3.1.1 (Nowak et Radzik, 1994)

Soient $v \in \Gamma$ et $i \in N$. La valeur de solidarité du joueur i est donnée par :

$\psi_i = \sum_{i \in T} \frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!} \frac{1}{|T|} \sum_{k \in T} [v(T) - v(T \setminus k)]$

Exemple 3.1.1. Considérons le jeu suivant, $N = \{1, 2, 3\}$ et l'état de la coopération v est donné dans le tableau ci-dessous :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	0	0	0	1	0	0	1

Calculons la valeur de solidarité des trois joueurs.

Le tableau ci-dessous présente les gains de chaque joueur chaque fois que la grande coalition se forme

permutation	1	2	3
123	$0 + \frac{1}{2} + 0$	$\frac{1}{2} + 0$	0
132	$0 + 0 + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$0 + \frac{1}{3}$
213	$\frac{1}{2} + 0$	$0 + \frac{1}{2} + 0$	0
231	$\frac{1}{3}$	$0 + 0 + \frac{1}{3}$	$0 + \frac{1}{3}$
312	$0 + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$0 + 0 + \frac{1}{3}$
321	$\frac{1}{3}$	$0 + \frac{1}{3}$	$0 + 0 + \frac{1}{3}$

Donc $\psi_1(v) = \frac{7}{18}$, $\psi_2(v) = \frac{7}{18}$ et $\psi_3(v) = \frac{4}{18}$

Remarquons que le joueur 3 est un joueur nul dans le jeu v de l'exemple 3.1.1 et $\psi_3(v) \neq 0$. Il en résulte que la valeur de solidarité ne vérifie pas l'axiome du joueur nul. Nowak et Radzik définissent un nouveau type de joueur dans un jeu : le joueur A-null.

Soient $v \in \Gamma$ et $i \in N$, le joueur i est A-null dans le jeu v lorsque $\forall T \subseteq N$, $i \in T$, $A^v(T) = 0$. L'exemple suivant montre un jeu dans lequel il existe un joueur A-null.

Exemple 3.1.2. Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et $v \in \Gamma$ tel que.

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	2	0	2	1	4	1	2

Le joueur 2 est A-null. En effet, les coalitions contenant le joueur 2 sont. $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$. Pour $T = \{2\}$, $A^v(\{2\}) = v(\{2\}) = 0$.

Pour $T = \{1, 2\}$, $A^v(\{1, 2\}) = \frac{1}{2}[(v\{1, 2\} - v\{1\}) + (v\{1, 2\} - v\{2\})]$ donc $A^v(\{1, 2\}) = \frac{1}{2}[(1 - 2) + (1 - 0)] = 0$.

Pour $T = \{2, 3\}$, $A^v(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}[(v\{2, 3\} - v\{2\}) + (v\{2, 3\} - v\{3\})]$ d'où $A^v(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}[(1 - 0) + (1 - 2)] = 0$.

Pour $T = \{1, 2, 3\}$, $A^v(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}[(v\{1, 2, 3\} - v\{1, 2\}) + (v\{1, 2, 3\} - v\{1, 3\}) + (v\{1, 2, 3\} - v\{2, 3\})]$ on obtient $A^v(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}[(2 - 1) + (2 - 4) + (2 - 1)] = 0$

De plus, Nowak et Radzik (Nowak et Radzik, 1994) introduisent l'axiome du joueur *A-null*. C'est une propriété similaire à celle du joueur nul et convenable au cadre de solidarité dans la valeur de solidarité.

• **Axiome du joueur A-null** : Soient $v \in \Gamma$ et φ une valeur sur Γ. La valeur φ vérifie l'axiome du joueur A-null lorsque pour tout joueur A-null i dans v, $\varphi_i(v) = 0$.

Pour caractériser la valeur de solidarité, Nowak et Radzik définissent la famille suivante de JFCC :

$$\forall T \subseteq N, T \neq \emptyset, \forall S \subseteq N, w_T(S) = \begin{cases} \frac{1}{C_{|S|}^{|T|}} & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

Lemme 3.1.1 (Nowak et Radzik, 1994)

Pour toute coalition non vide $T \subseteq N$, le jeu w_T vérifie

(i) $w_T(T) = 1$

(ii) Si $S = T \cup E$ avec $\emptyset \neq E \subseteq N \setminus T$, alors

$w_T(S) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} w_T(S \setminus i)$ et tout joueur $i \in N \setminus T$ est A-null dans le jeu w_T

L'exemple suivant illustre le lemme 3.1.1.

Exemple 3.1.3. Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et $v \in N$

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	1	2	1	1	4	1	1

Pour $T = \{1, 2\}$, considérons le jeu $w_{\{1,2\}}$. On a $w_{\{1,2\}}(\{1, 2\}) = \frac{1}{C_2^2} = 1$ donc le **(i)** est vérifié.
Posons $S = \{1, 2, 3\}$, on a $w_{\{1,2\}}(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{C_3^2} = \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{|\{1,2,3\}|} \sum_{i \in \{1,2,3\}} w_{\{1,2\}}(\{1, 2, 3\} \setminus i) = \frac{1}{3}[w_{\{1,2\}}(\{1, 2\}) + w_{\{1,2\}}(\{2, 3\}) + w_{\{1,2\}}(\{2, 3\})]$. Or $\{1, 2\} \not\subseteq \{2, 3\}$ et $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 3\}$ d'où $w_{\{1,2\}}(\{2, 3\}) + w_{\{1,2\}}(\{2, 3\}) = 0$ et on obtient $\frac{1}{|\{1,2,3\}|} \sum_{i \in \{1,2,3\}} w_{\{1,2\}}(\{1, 2, 3\} \setminus i) = \frac{1}{3}[w_{\{1,2\}}(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$.
Montrons que le joueur 3 est A-null dans w_T car $(\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\} = 3)$.
Les coalitions contenant le joueur 3 sont $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$.
$A^{w_{\{1,3\}}}(\{3\}) = w_{\{1,2\}}\{3\} - w_{\{1,2\}}(\emptyset) = 0$.
$A^{w_{\{1,3\}}}(\{1, 3\}) = \frac{1}{2}[(w_{\{1,2\}}\{1, 3\} - w_{\{1,2\}}\{1\}) + (w_{\{1,2\}}\{1, 3\} - w_{\{1,2\}}\{3\})] = 0$.
$A^{w_{\{1,3\}}}(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}[(w_{\{1,2\}}\{2, 3\} - w_{\{1,2\}}\{2\}) + (w_{\{1,2\}}\{2, 3\} - w_{\{1,2\}}\{3\})] = 0$.
$A^{w_{\{1,3\}}}(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}[(w_{\{1,2\}}\{1, 2, 3\} - w_{\{1,2\}}\{1, 3\}) + (w_{\{1,2\}}\{1, 2, 3\} - w_{\{1,2\}}\{1, 2\}) + (w_{\{1,2\}}\{1, 2, 3\} - w_{\{1,2\}}\{2, 3\})] = \frac{1}{3}[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}] = 0$.

Le résultat 3.1.2 présente une autre base de Γ.

Lemme 3.1.2 (Nowak et Radzik, 1994)

La famille $\{w_T, T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ est une base de l'espace vectoriel réel Γ.

Preuve. Posons $k = 2^n - 1$, soit $(S_1, S_2, ..., S_k)$ une suite de coalition de N contenant tous les sous ensembles non vide de N tel que $n = |S_1| \geq |S_2| \geq ...|S_k| = 1$. (w_{s_i}), $i = 1, 2, ...k$ est une famille de $2^n - 1$ de l'espace des jeux Γ, avec Γ de dimension $2^n - 1$. Ainsi, pour montrer que la famille $\{w_T, T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ forme une base de Γ, il suffit de montrer que (w_{s_i}), $i = 1, 2, ...k$ sont libres, c'est -à-dire qu'il existe des constantes (α_i), $i = 1......k$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_{s_i} = 0$ implique que $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1......k$. Posons $W = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_{s_i} = 0$, on a

$W(s_1) = 0$, $W(s_2) = 0, ...W(s_k) = 0$. Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 w_{s_1}(s_1) + \alpha_2 w_{s_2}(s_1) + \cdots \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_1) + \alpha_k w_{s_k}(s_1) = 0 \\ \alpha_1 w_{s_1}(s_2) + \alpha_2 w_{s_2}(s_2) + \cdots \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(S_2) + \alpha_k w_{s_k}(s_2) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 w_{s_1}(s_{k-1}) + \alpha_2 w_{s_2}(s_{k-1}) + \cdots \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_{k-1}) + \alpha_k w_{s_k}(s_{k-1}) = 0 \\ \alpha_1 w_{s_1}(s_k) + \alpha_2 w_{s_2}(s_k) + \cdots \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_k) + \alpha_k w_{s_k}(s_k) = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 w_{s_1}(s_1) & \alpha_2 w_{s_2}(s_1) & \cdots & \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_1) & \alpha_k w_{s_k}(s_1) \\ \alpha_1 w_{s_1}(s_2) & \alpha_2 w_{s_2}(s_2) & \cdots & \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_2) & \alpha_k w_{s_k}(s_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 w_{s_1}(s_{k-1}) & \alpha_2 w_{s_2}(s_{k-1}) & \cdots & \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_{k-1}) & \alpha_k w_{s_k}(s_{k-1}) \\ \alpha_1 w_{s_1}(s_k) & \alpha_2 w_{s_2}(s_k) & \cdots & \alpha_{k-1} w_{s_{k-1}}(s_k) & \alpha_k w_{s_k}(s_k) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Calculons $w_{s_i}(s_j)$ avec $i, j = 1 \cdots k$

Pour $i = j$, on a $w_{s_i}(s_j) = 1$ d'après le lemme 3.1.1

Pour $i > j$, par définition de (s_i) avec $i = 1, 2 \cdots, k$, on a $|s_j| \geq |s_i|$. On a ainsi deux cas :

Si $s_i \subseteq s_j$ alors $w_{s_i}(s_j) = \frac{1}{C_{|s_j|}^{|s_i|}}$. Sinon, si $s_i \nsubseteq s_j$ alors $w_{s_i}(s_j) = 0$.Dans tous les cas pour $i > j$ on a $w_{s_i}(s_j) = a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, k$ et a_{ij} est un réel.

Pour $i < j$, avec $i, j = 1, 2, \cdots, k$ par définition de (s_i) avec $i = 1, 2 \cdots, k$, on a $|s_i| \geq |s_j|$. Comme

$$w_{s_i}(s_j) = \begin{cases} \frac{1}{C_{|s_j|}^{|s_i|}} & \text{si } s_i \subseteq s_j \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

Nous avons ainsi deux cas. Si $s_i \nsubseteq s_j$ alors $w_{s_i}(s_j) = 0$. Sinon si $s_i \subseteq s_j$ et comme $|s_i| \geq |s_j|$ alors $s_i = s_j$ qui est impossible . Donc pour tout $i < j$, $i, j = 1, \cdots k$, on a $w_{s_i}(s_j) = 0$. On obtient ainsi le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{21} & \cdots & a_{k-11} & a_{k1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{k-12} & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{kk-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

qui donne $\alpha_k = 0$, $\alpha_{k-1} + a_{kk-1}\alpha_k = 0$ implique $\alpha_{k-1} = 0$ on obtient ainsi $\alpha_k = \alpha_{k-1} = \cdots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$ D'où $\{w_{s_{i,i=1,\cdots,k}}\}$ sont libres, ainsi $(w_{s_i})_{i=1\cdots k}$ est une base de Γ. ■

Nous avons besoin des deux résultats suivants pour la caractérisation de la valeur de solidarité.

Lemme 3.1.3 (Nowak et Radzik, 1994)

Si φ est une valeur sur Γ qui satisfait les axiomes d'efficience, d'additivité, de symétrie et du joueur A-null, alors pour tout joueur $i \in N$, $\emptyset \neq E \subseteq N \setminus T$ et c un réel

$$\varphi_i(cw_T) = \begin{cases} \frac{|T|!(|n|-|T|)!}{|n|!|T|}) & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus T \end{cases}$$

Lemme 3.1.4 (Nowak et Radzik, 1994)

Soit φ une valeur sur Γ. Si φ vérifie les axiomes d'efficience, d' additivité, de symétrie et du joueur A-null, alors φ est une application linéaire.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de caractérisation de la valeur de solidarité.

Théorème **3.1.1 (Nowak et Radzik, 1994).** *Une valeur φ sur Γ vérifie les axiomes d'efficience, d'additivité, de symétrie et du joueur A-null, si et seulement si, $\varphi = \psi$.*

Preuve. Supposons que $\varphi = \psi$, avec $\psi_i = \sum_{i\in T} \frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!}\frac{1}{|T|}\sum_{k\in T}[v(T) - v(T \setminus k)]$ et montrons que φ satisfait les axiomes d'efficience, additive, symétrie et du joueur A-nul.

• **Montrons que φ vérifie l'axiome du joueur A-nul** Soit $i \in N$ un joueur A-nul dans le jeu $v \in \Gamma$ c'est-à-dire pour toute coalition T contenant i $A^v(T) = 0$. Montrons que $\varphi_i(v) = 0$. On a $\varphi_i = \sum_{i\in T} \frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!} A^v(T)$ et comme $A^v(T) = 0$, il en résulte $\varphi_i(v) = 0$

• **Montrons que φ additivité** Soient $(u, v) \in \Gamma$ montrons que $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(u+v) &= \sum_{i\in T}\frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!}\frac{1}{|T|}\sum_{k\in T}[(u+v)(T) - (u+v)(T\setminus k)]\\
&= \sum_{i\in T}\frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!}\frac{1}{|T|}\sum_{k\in T}[(u(T) - u(T\setminus k)) - (v(T) + v(T\setminus k))]\\
&= \sum_{i\in T}\frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!}[\frac{1}{|T|}\sum_{k\in T}((u(T) - u(T\setminus k))) - \frac{1}{|T|}\sum_{k\in T}(v(T) + v(T\setminus k))]\\
&= \varphi(u) + \varphi(v)
\end{aligned}$$

• **Montrons que φ est efficiente**

Montrons que φ vérifie l'axiome d'efficience c'est-à-dire $\sum_{i\in N}\varphi_i(v) = v(N)$ pour tout $v \in \Gamma$. Montrons d'abord que φ est efficience pour le jeu $(w_T)_{T\subseteq N}$ c'est-à-dire $\sum_{i\in N}\varphi_i(w_T) = w_T(N)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\varphi_i(w_T) &= \sum_{i\in N}[\sum_{i\in S, S\subseteq N}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}(w_T(S) - w_T(S\setminus k)]\\
&= \sum_{i\in N}[\frac{((|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}w_T(S\setminus k))]\\
&\quad + \sum_{i\in N}[\sum_{i\in S, S\subseteq N, T\neq S}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}w_T(S\setminus k)]\\
&= \sum_{i\in N}[\frac{((|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}w_T(S\setminus k))]\\
&\quad + \sum_{i\in N}[\sum_{i\in S, S\subseteq N, T\subsetneq S}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}w_T(S\setminus k)]\\
&\quad + \sum_{i\in N}[\sum_{i\in S, S\subseteq N, T\not\subseteq S}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}w_T(S\setminus k)]
\end{aligned}$$

Et par définition du jeu w_T, si $T \not\subseteq S$ alors $w_T(S) = w_T(S \setminus k) = 0$. Ainsi, $\sum_{i\in N}[\sum_{i\in S, S\subseteq N, T\not\subseteq S}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}w_T(S\setminus k)] = 0$. De même si $T \subsetneq S$ alors d'après le lemme 3.1.1 $w_T(S) = \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S} w_T(S\setminus k)$. Il en resulte que $\sum_{i\in N}[\sum_{i\in S, S\subseteq N, T\subsetneq S}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}w_T(S) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S} w_T(S\setminus k)] = 0$.

D'où $\sum_{i\in N}\varphi_i(w_T) = \sum_{i\in N}[\frac{((|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(w_T(T) - \frac{1}{|S|}\sum_{k\in S} w_T(S\setminus k))]$. Or d'après le lemme 3.1.1 un joueur $i\in N\setminus T$ est A-nul dans w_T et par définition de w_T, $w_T(T) = 1$ et $w_T(T\setminus k) = 0$ car $k\in T$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in T}\varphi_i(w_T) &= \sum_{i\in N}[\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}] \\ &= \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}\times|T| \\ &= w_T(N)\end{aligned}$$

Montrons que φ est linéaire. Nous avons déjà montré que φ est additive c'est-à-dire $\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$. Il suffit de montrer que $\forall c\in\mathbb{R}\ \varphi(cv) = c\varphi(v)$.

$$\begin{aligned}\varphi_i(cv) &= \sum_{i\in S, S\subseteq N}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}(cv(S) - cv(S\setminus k)) \\ &= c(\sum_{i\in S, S\subseteq N}\frac{((|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\frac{1}{|S|}\sum_{k\in S}(v(S) - v(S\setminus k)) \\ &= c\times\varphi(v)\end{aligned}$$

d'ou φ est linéaire . Soit $v\in\Gamma$ comme $(w_T)_{T\subseteq N}$ est une base de Γ, il existe λ_T, des réels avec $\emptyset\neq T\subseteq N$ tel que $v = \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N}\lambda_T w_T$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\varphi_i(v) &= \sum_{i\in N}\varphi_i(\sum_{\emptyset\neq T\subseteq N}\lambda_T w_T) \\ &= \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N}\lambda_T\sum_{i\in N}\varphi_i(w_T) \\ &= \sum_{\emptyset\neq T\subseteq N}\lambda_T w_T(N) \\ &= v(N)\end{aligned}$$

D'où φ est efficience

Réciproquement, supposons qu'il existe une autre valeur φ qui vérifie l'axiome de symétrie, d'efficience, d'additivité et joueur A-nul montrons que $\varphi = \psi$.

Comme φ vérifie l'axiome d'additivité, symétrie, d'efficience, d'additivité, et joueur A-nul on a d'àprès le lemme 3.1.3 pour tout $i\in N$, pour tout réel c

$$\varphi_i(cw_T) = \begin{cases}\frac{cw_T(N)}{|T|} & \text{si } i\in T \\ 0 & \text{si } i\in N\setminus T\end{cases}$$

Soit $v \in \Gamma$ comme la famille $\{w_T, T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ est une base de Γ, $v = \sum_{T\subseteq N} \beta_T w_T$ où les $(\beta_T)_{T\in 2^N}$ sont des réels connus. On a $\varphi_i(v) = \varphi_i(\sum_{T\subseteq N} \beta_T w_T)$ et comme φ vérifie l'axiome d'efficience et du joueur A-null alors d'après le lemme 3.1.4, φ est linéaire d'où $\varphi_i(v) = \sum_{T\subseteq N} \varphi_i(\beta_T w_T)$ et d'après le lemme 2.3

$$\varphi_i(\beta_T w_T) = \begin{cases} \frac{\beta_T w_T(N)}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus T \end{cases}$$

D'où

$$\varphi_i(v) = \sum_{T\in 2^N} \begin{cases} \frac{\beta_T w_T(N)}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \in N \setminus T \end{cases}$$

. Ainsi $\forall i \in N$, $\forall v \in \Gamma$, $\varphi_i(v)$ est définie par β_T, $w_T(N)$ et |T| qui sont tous des réels connus donc φ est définie de manière unique. De plus φ verifie l'axiome d'efficience, d'additivité, de symétrie, et du joueur A-dummy de même que la valeur de solidarité d'ou $\varphi = \psi$ avec $\psi(v) = \sum_{i\in T} \frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!} \frac{1}{|T|} \sum_{k\in T} [v(T) - v(T \setminus k)]$ ■

Dans la section suivante, l'approche probabiliste de Weber de la valeur de Shapley est appliquée à la valeur de solidarité de Nowak et Radzik.

3.2. Valeurs de solidarité probabilistes

Dans les valeurs probabilistes (Weber, 1988), il y'a le souci de permettre à chaque joueur de se faire sa propre idée de ses différentes perspectives pour avoir pris part au jeu. De plus, elles présentent un défaut de solidarité car chaque joueur reçoit sa contribution marginale. La valeur de solidarité (Nowak et Radzik, 1994), prévoit une évaluation collective des différentes perspectives des joueurs. Les valeurs de solidarité probabilistes (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018) combinent cette idée de Weber et celle du partage de la contribution marginale du nouvel entrant dans une coalition de la valeur de solidarité. La définition 3.2.1 présente les valeurs de solidarité probabilistes. Rappelons que $P = \cup P^i$ avec $P^i = \{p = (p^i_T)_{T\subseteq N\setminus i}, i \in N, p^i_T > 0, \sum p^i_T = 1\}$ l'ensemble de toutes les distributions de probabilités possibles de tous les joueurs.

Définition 3.2.1 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

Une valeur ϕ sur Γ est une valeur de solidarité probabiliste lorsqu'il existe $p \in P$ tel que $\forall v \in \Gamma, \forall i \in N, \phi_i(v) = \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(p^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)]))$.

Désormais la " valeur de solidarité probabiliste " est désignée par "ps-value".

Exemple 3.2.1. Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et $v \in \Gamma$ tel que

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	10	15	4	30	14	16	50

et les distributions de probabilités suivantes :

•Cas du joueur 1. $p^1_\emptyset = \frac{1}{2}$, $p^1_{\{2\}} = 0$, $p^1_{\{3\}} = \frac{1}{2}$, $p^1_{\{2,3\}} = 0$

• Cas du joueur 2. $p^2_\emptyset = \frac{1}{2}$, $p^2_{\{1\}} = 0$, $p^2_{\{3\}} = \frac{1}{2}$, $p^2_{\{1,3\}} = 0$

• Cas du joueur 3 $p^3_\emptyset = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{1\}} = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{2\}} = \frac{1}{4}$, $p^3_{\{1,2\}} = \frac{1}{4}$

Les valeurs probabilistes de solidarités des joueurs 1, 2 et 3 sont :

(i) **Cas du joueur 1**.

On a :

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= \sum_{T/1\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)])) \\
&= P^1_\emptyset[v(1) - v(\emptyset)] + \frac{1}{2}(P^1_2[v(1,2) - v(2)] + P^2_1[v(1,2) - v(1)]) \\
&+ \frac{1}{3}(P^1_{2,3}[v(1,2,3) - v(2,3)] + P^2_{1,3}[v(1,2,3) - v(1,3)] + P^3_{1,2}[v(1,2,3) - v(1,2)]) \\
&= \frac{29}{3}
\end{aligned}$$

Cas du joueur 2.

On a :

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) &= \sum_{T/2\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)])) \\
&= \frac{295}{24}
\end{aligned}$$

Cas du joueur 3.

On a :

$$\phi_3(v) = \sum_{T/3\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)]))$$

$$= \frac{211}{24}$$

A la suite de Weber, Diffo Lambo et Nlend Oum étudient l'impact des axiomes de symétrie. La section suivante, nous montre comment ils ont caractérisé une ps-value symétrique.

3.2.1. axiome de symétrie d'une ps-value

La proposition 3.2.1 ci-dessous montre que si une ps-value est symétrie alors la probabilité pour qu'un joueur rejoigne une coalition ne dépend que du cardinal de la coalition.

Proposition 3.2.1 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

Si une ps-value ϕ sur Γ satisfait l'axiome de symétrie , alors $\forall (i, j) \in N \times N$, $\forall T \subseteq N \setminus j$, $\forall S \subseteq N \setminus i \quad (|S| = |T|) \Longrightarrow (P^j_T = P^i_S)$.

Preuve. Pour tout $i \in N$, soient T_1 et T_2 deux coalition avec $i \notin T_1 \cup T_2$ tel que $0 < |T_1| = |T_2| < n-1$, **montrons que** $P^i_{T_1} = P^i_{T_2}$. Considérons une permutation π sur N tel que $\pi(T_2) = T_1$, $\pi(i) = i$ et le jeu v_{T_1} défini par :

$$v_{T_1}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = T_1 \text{ ou } S = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme ϕ est une ps-value, on a $\phi_i(v) = \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)]))$. En particulier, pour le jeu v_{T_1}, $\phi_i(v_{T_1}) = \sum_{T/i\in T}\left(\sum_{j\in T}(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_1}(T) - v_{T_1}(T \setminus j)])\right)$.
Mais avec $i \in T$, nous avons toujours $v_{T_1}(T) = 1$ car comme $i \in T$ et d'après hypothèses $i \notin T_1 \cup T_2$, on a $T \neq T_1$. De plus $i \in T$ implique $T \neq \emptyset$ et par définition du jeu v_{T_1}, $v_{T_1}(T) = 1$. Et $v_{T_1}(T) - v_{T_1}(T \setminus j) \neq 0$ implique $v_{T_1}(T \setminus j) = 0$ car $v_{T_1}(T) = 1$ et par définition de v_{T_1}, $T_1 = T \setminus j$ ou $T \setminus j = \emptyset$.

- Si $T \setminus j = \emptyset$ alors $T = \{i\}$ car $i \in T$ et $i = j$.
- Si $T_1 = T \setminus j$, comme $i \notin T_1$ alors $i \notin T \setminus j$ or $i \in T$ d'où $j = i$ et $T = T_1 \cup \{i\}$ par conséquent,

$$\begin{aligned}
\phi_i(v_{T_1}) &= \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_1}(T) - v_{T_1}(T \setminus j)])) \\
&= (P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_1}(T) - v_{T_1}(T \setminus j)])_{T=\{i\},j=i} + (P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_1}(T) - v_{T_1}(T \setminus j)])_{T=T_1\cup\{i\},j=i}
\end{aligned}$$

$$= P^j_\emptyset[v_{T_1}(i) - v_{T_1}(\emptyset)] + P^i_{T_1}\frac{1}{|T_1|+1}[v_{T_1}(T_1 \cup \{i\}) - v_{T_1}(T_1)],$$

Or $i \notin T_1$ donc $v_{T_1}\{i\} = 1$ de même $T_1 \neq T_1 \cup \{i\}$, donc $v_{T_1}(T_1 \cup \{i\}) = 1$ d'ou

$$\begin{aligned}\phi_i(v_{T_1}) &= P^j_\emptyset[1 - v_{T_1}(\emptyset)] + P^i_{T_1}\frac{1}{|T_1|+1}[1 - v_{T_1}(T1)] \\ &= P^j_\emptyset + P^i_{T_1}\frac{1}{|T_1|+1},\end{aligned}$$

De même

$$\phi_i(v_{T_2}) = P^j_\emptyset + P^i_{T_2}\frac{1}{|T_2|+1}$$

• Montrons que pour tout $S \subseteq N$, $\pi v_{T_2}(S) = v_{T_1}(S)$.

Comme pour tout $S \subseteq N$, $\pi v_{T_2}(S) = v_{T_2}(\pi S)$, on a :

$$\begin{aligned}\pi v_{T_2}(S) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \pi S = T_2 \text{ ou } \pi S = \emptyset \\ 1 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \pi S = \pi T_1 \text{ ou } \pi S = \emptyset \\ 1 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } S = T_1 \text{ ou } S = \emptyset \\ 1 & \text{si } sinon \end{cases} \\ &= v_{T_1}(S).\end{aligned}$$

Notons que $\phi_i(v_{T_2}) = \phi_{\pi(i)}(v_{T_2})$, comme ϕ est symétrique $\phi_{\pi(i)}(v_{T_2}) = \phi_i(\pi v_{T_2})$

donc $\phi_i(\pi v_{T_2}) = \phi_i(v_{T_1})$ d'où $\phi_i(v_{T_2}) = \phi_i(v_{T_1})$ et par conséquent $P^j_\emptyset + P^i_{T_1}\frac{1}{|T_1|+1} = P^j_\emptyset + P^i_{T_2} + \frac{1}{|T_2|+1}$ d'où $P^i_{T_1} = P^i_{T_2}$

(ii) Montrons que $\forall (i,j) \in N \times N$, $P^i_\emptyset = P^j_\emptyset$.

Soient i et j deux joueurs distincts et π une permutation qui interchange i et j et laisse les autres joueurs fixes. Considérons le jeu

$$v(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme ϕ est une ps-valeur, $\forall i \in N, \forall v \in \Gamma, \phi_i(v) = \sum_{T/i\in T}\left(\sum_{j\in T}(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)])\right)$

Mais avec $i \in T, T \neq \emptyset$ et par définition du jeu v, on a $v(T) = 1$. De plus, $v(T) - v(T \setminus j) \neq 0$ implique $v(T \setminus j) = 0$ car $v(T) = 1$ et par définition de v, $T \setminus j = \emptyset$ or $i \in T$ donc $T = \{i\}$ avec $i = j$ d'où

$$\phi_i(v) = \left(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_1}(T) - v_{T_1}(T \setminus j)]\right)_{T=\{i\},j=i}$$

$$= \quad P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_1}(\{i\}) - v_{T_1}(\emptyset)]$$
$$= \quad P^i_{\emptyset}$$

Ainsi, $\forall k \in N, \phi_k(v) = P^k_{\emptyset}$.
Notons que $\phi_{\pi(i)}(v) = \phi_j(v)$ et par l'axiome de symétrie $\phi_{\pi(i)}(v) = \phi_i(\pi v)$ or $\pi v = v$ donc $\phi_i(\pi v) = \phi_i(v)$ on obtient ainsi $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ il en résulte que $P^i_{\emptyset} = P^j_{\emptyset}$.

(ii) Montrons que $\forall (i, j) \in N \times N$, $\forall T_0 \subseteq N \setminus \{i, j\}$, $P^i_{T_0} = P^j_{T_0}$. Soient i et j deux joueurs distincts et π une permutation qui interchange i et j et laisse les autres joueurs fixes, soit $T_0 \subseteq N \setminus \{i, j\}$ une coalition non vide, considérons le jeu v_{T_0} défini par :

$$v_{T_0}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = T_0 \text{ ou } S = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme ϕ est une ps-valeur, $\forall i \in N, \forall v \in \Gamma, \phi_i(v) = \sum_{T/i\in T}\left(\sum_{j\in T}(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)])\right)$
Mais avec $i \in T$, nous avons toujours $v_{T_0}(T) = 1$, car comme $i \in T$ et d'après l'hypothèse $T_0 \subseteq N \setminus \{i, j\}$ on a $T \neq T_0$ et $T \neq \emptyset$. Donc $v_{T_0}(T) - v_{T_0}(T \setminus j) \neq 0$ implique que $v_{T_0}(T \setminus j) = 0$ ie $T_0 = T \setminus j$ ou $T \setminus j = \emptyset$ par définition du jeu v_{T_0}.
Si $T_0 = T \setminus j$, comme $i \notin T_0$ alors $i \notin T \setminus j$ or $i \in T$ d'où $i = j$ $T = T_0 \cup \{j\}$.
Si $T \setminus j = \emptyset$, comme $i \in T$ alors $T = \{i\}$ avec $i = j$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \phi_i(v_{T_0}) &= \left(P^i_{T\setminus\{j\}}\frac{1}{|T|}[v_{T_0}(T) - v_{T_0}(T \setminus j)]\right)_{T=\{i\},j=i} + \left(P^i_{T\setminus\{j\}}\frac{1}{|T|}[v_{T_0}(T) - v_{T_0}(T \setminus j)]\right)_{T=T_0\cup\{i\},j=i} \\ &= (P^i_{\emptyset}[v_{T_0}(i) - v_T(\emptyset)]) + \left(P^i_{T_0}\frac{1}{|T_0| + 1}[v_{T_0}(T_0 \cup i) - v_{T_0}(T_0)]\right) \end{aligned}$$

Or $i \notin T_0$ donc $v_{T_0}\{i\} = 1$ de même $T_0 \neq T_0 \cup \{i\}$, $v_{T_0}(T_0 \cup \{i\}) = 1$ d'où $\phi_i(v_{T_0}) = P^i_{\emptyset} + P^i_{T_0}\frac{1}{|T_0|+1}$ de même $\phi_j(v_{T_0}) = P^j_{\emptyset} + P^j_{T_0}\frac{1}{|T_0|+1}$ de plus $\phi_j(v_{T_0}) = \phi_{\pi(i)}(v_{T_0})$ et comme ϕ est symétrique, $\phi_{\pi(i)}(v_{T_0}) = \phi_i(\pi v_{T_0})$ or $\pi v_{T_0} = T_0$ d'où $\phi_i(\pi v_{T_0}) = \phi_i(v_{T_0})$ ainsi on obtient $P^i_{T_0} = P^j_{T_0}$.
(iii) Montrons que $\forall (i, j) \in N \times N$ $\forall T_3 \subseteq N \setminus j, i \in T_3$, $P^i_{T_3} = P^i_{\tilde{T}_3}$ avec $\tilde{T}_3 = (T_3 \setminus i) \cup j$.
Soient i et j deux joueurs distincts et π une permutation qui interchange i et j et laisse les autres joueurs fixes. Soit $T_3 \subseteq N \setminus j, i \in T_3$, considérons le jeu :

$$v_{T_3}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = T_3 \text{ ou } S = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_j(v_{T_3}) = \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^i_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v_{T_3}(T) - v_{T_3}(T \setminus j)]))$$

Mais avec $j \in T$ et $j \notin T_3$ on a $T_3 \neq T$ d'après la définition du jeu v_{T_3} on a $v_{T_3} = 1$ donc $v_{T_3}(T) - v_{T_3}(T \setminus i) \neq 0$ implique $v_{T_3}(T \setminus i) = 0$ et par définition de v_{T_3}, on a $T_3 = T \setminus i$ ou $T \setminus i = \emptyset$ comme $j \in T$, $T \setminus i = \emptyset$ implique $T = \{j\}$ et $j = \{i\}$ de même $T_3 = T \setminus i$ comme $j \notin T_3$, $j \notin T \setminus i$ or $j \in T$ donc $j = i$ et $T = T_3 \cup \{j\}$ par conséquent :

$$\begin{aligned}
\phi_j(v_{T_3}) &= (P^i_{T\setminus\{i\}}\frac{1}{|T|}[v_{T_3}(T) - v_{T_3}(T \setminus j)])_{T=\{j\},j=i} + (P^i_{T\setminus\{i\}}\frac{1}{|T|}[v_{T_3}(T) - v_{T_3}(T \setminus j)])_{T=T_3\cup\{i\},j=i} \\
&= (P^i_{T\setminus\{i\}}\frac{1}{|T|}[v_{T_3}(T) - v_{T_3}(T \setminus j)])_{T=\{j\},j=i} + (P^i_{T\setminus\{i\}}\frac{1}{|T|}[v_{T_3}(T) - v_{T_3}(T \setminus j)]_{T=T_3\cup\{i\},j=i} \\
&= P^i_{\emptyset}[v_{T_3}(j) - v_{T_3}(\emptyset)] + P^i_{T_3}\frac{1}{|T|+1}[v_{T_3}(T_3 \cup j) - v_{T_3}(T_3)] \\
&= P^i_{\emptyset} + P^i_{T_3}\frac{1}{|T|+1}
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{T_3} = (T_3 \setminus i) \cup j$ de même on a $\phi_j(v_{\tilde{T_3}}) = P^i_{\emptyset} + P^i_{\tilde{T_3}}\frac{1}{|T|+1}$ de plus $\phi_j(v_{\tilde{T_3}}) = \phi_{\pi i}(v_{\tilde{T_3}})$ et comme ϕ est symétrique, $\phi_{\pi(i)}(v_{\tilde{T_3}}) = \phi_i(v_{\pi\tilde{T_3}})$ or $\pi v_{\tilde{T_3}} = v_{T_3}$ d'ou $\phi_i(\pi v_{\tilde{T_3}}) = \phi_i(v_{T_3})$ on obtient ainsi $P^i_{T_3} = P^i_{\tilde{T_3}}$

(iv) Montrons que $\forall (i, j) \in N \times N$, $P^i_{N\setminus i} = P^j_{N\setminus j}$. Soient i et j deux joueurs distincts et π une permutation qui interchange i et j et laisse les autres joueurs fixes. Considérons le jeu $\hat{v}^i$ défini par :

$$\hat{v}^i(S) = \begin{cases} |S|+1 & \text{si } \; i \notin S \text{ ou } S = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\phi_i(\hat{v}^i) &= \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[\hat{v}^i(T) - \hat{v}^i(T \setminus j)])) \\
&= \sum_{T/i\in T}((P^i_{T\setminus i}\frac{1}{|T|}[\hat{v}^i(T) - \hat{v}^i(T \setminus i)])) + \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T, j\neq i}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[\hat{v}^i(T) - \hat{v}^i(T \setminus j)]))
\end{aligned}$$

Mais avec $i \in T$, on a $\hat{v}^i(T) = 0$. et $i \notin T \setminus j$ implique que $i = j$ car $i \in T$ or i et j sont deux joueurs distincts d'où $\phi_i(\hat{v}^j) = -\sum_{T/i\in T} P^i_{T\setminus i}$ de même $\phi_j(\hat{v}^j) = -\sum_{T/j\in T} P^j_{T\setminus j}$ de plus $\phi_j(\hat{v}^j) = \phi_{\pi(i)}(\tilde{v}^j)$ et comme ϕ est symétrique $\phi_{\pi(i)}(\hat{v}^j) = \phi_i(\pi\hat{v}^j)$ or $\pi\hat{v}^j = \hat{v}^i$ d'où $\phi_i(\pi\hat{v}^i) = \phi_i(\tilde{v}^i)$ on obtient ainsi $-\sum_{T/i\in T} P^i_{T\setminus i} = -\sum_{T/j\in T} P^j_{T\setminus j}$ ainsi $P^i_{N\setminus i} + \sum_{T/T\neq N, i\in T} P^i_{T\setminus i} = P^j_{N\setminus j} + \sum_{T/T\neq N, j\in T} P^j_{T\setminus j}$ or d'après (ii) $P^i_{\emptyset} = P^j_{\emptyset}$ et $P^i_{T_0} = P^j_{T_0}$ pour $T_0 \subseteq N \setminus i, j$ et d'après (4i) $P^j_{T_3} = P^i_{(T_3\setminus i)\cup j}$ avec $T_3 \subseteq N \setminus j, i \in T_3$ d'où $P^i_{N\setminus i} = P^j_{N\setminus j}$.

D'où le résultat. ■

On peut déduire le résultat suivant

Corollaire 3.2.1. *(Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018) Si une ps-value ϕ sur Γ satisfait l'axiome de symétrie, alors $\forall v \in \Gamma$, $\forall i \in N$, $\phi_i(v) = \sum_{T/i\in T} P^i_{T\setminus i} A^v(T)$.*

Preuve. • Supposons que ϕ satisfait l'axiome de symétrie, soit $v \in \Gamma$ et $i \in N$, comme ϕ est une ps-value, on a $\phi_i(v) = \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)]))$. Et $\forall j \in N$,$\forall i \in N$ $\forall T \subseteq N \setminus j$, $\forall S \subseteq N \setminus i$, $(|S| = |T|) \Longrightarrow (P^j_T = P^i_S)$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)]))\\
&= \sum_{T/i\in T}(\sum_{j\in T}(P^j_{T\setminus j}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)]))\\
&= \sum_{T/i\in T} P^j_{T\setminus j}(\sum_{j\in T}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)])\\
&= \sum_{T/i\in T} P^i_{T\setminus i}A^v(T).
\end{aligned}$$

Ainsi $\phi_i(v) = \sum_{T/i\in T} P^i_{T\setminus i}A^v(T)$. ■

Corollaire 3.2.2. *(Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018) La valeur de solidarité est une ps-value*

La proposition3.2.2 ci-dessous montre la réciproque de la proposition 3.2.1

Proposition 3.2.2 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

Soit ϕ une ps-value sur Γ. Si $\forall j \in N$, $\forall i \in N$ $\forall T \subseteq N \setminus j$, $\forall S \subseteq N \setminus i$, $(|S| = |T|) \Longrightarrow (P^i_T = P^i_S)$, alors ϕ est symétrique.

Preuve. comme$\forall j \in N$, $\forall i \in N$ $\forall T \subseteq N \setminus j$, $\forall S \subseteq N \setminus i$, $(|S| = |T|) \Longrightarrow (P^i_T = P^i_S)$, on a : $\phi_i(v) = \sum_{T/i\in T} P^j_{T\setminus j}(\sum_{j\in T}\frac{1}{|T|}[v(T) - v(T \setminus j)])$
. Soit π une permutation sur N, on a

$$\begin{aligned}
\phi_i(\pi v) &= \sum_{T/i\in T} P^j_{T\setminus j}(\sum_{j\in T}\frac{1}{|T|}[\pi v(T) - \pi v(T \setminus j)])\\
&= \sum_{\pi(T)/\pi(i)\in\pi(T)} P^j_{T\setminus j}\sum_{\pi(j)\in\pi(T)}\frac{1}{|T|}[\pi v(T) - \pi v(T \setminus j)])\\
&= \sum_{\pi(T)/\pi(i)\in\pi(T)} P^j_{T\setminus j}\sum_{\pi(j)\in\pi(T)}\frac{1}{|T|}[v(\pi T) - v(\pi(T) \setminus \pi(j))]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\pi(T)/\pi(i)\in\pi(T)} P^{j}_{T\setminus j} A^{v}(\pi(T)) \\
&= \phi_{\pi(i)}(v)
\end{aligned}
$$

D'où $\phi_i(\pi v) = \phi_{\pi(i)}(v)$ ■

D'après la proposition 3.2.1 et 3.2.2, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2.1. *(**Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018**) Une ps-value ϕ sur Γ satisfait l'axiome de symétrie si et seulement si $\forall j \in N$, $\forall i \in N$ $\forall T \subseteq N \setminus j$, $\forall S \subseteq N \setminus i$, $(|S| = |T|) \Longrightarrow (P^{i}_{T} = P^{i}_{S})$.*

Diffo Lambo et Nlend Oum introduisent deux nouvelles propriétés : *A-consistent* et *solidarity monotonous (s-monotonous)* qui, dans le cadre de la solidarité de Nowak et Radzik, sont respectivement homologues des propriétés dummy et monotonie.

Soient $v \in \Gamma$ et $i \in N$, le joueur i est A-consistent dans $v \in \Gamma$ lorsque $\exists c \in \mathbb{R}$ telque $\forall T \subseteq N$, $i \in T$, $A^{v}(T) = c$.

L'exemple suivant montre un jeu dans lequel il existe un joueur A-consistent.

Exemple 3.2.2. Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et $v \in N$ tel que.

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	0	0	2	0	3	3	4

Le joueur 3 est A-consistent. En effet, les coalitions contenant le joueur 3 sont. $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$. Pour $T = \{3\}$, $A^{v}(\{3\}) = v(\{3\}) = 2$.

Pour $T = \{1, 3\}$, $A^{v}(\{1, 3\}) = \frac{1}{2}[(v\{1, 3\} - v\{1\}) + (v\{1, 3\} - v\{3\})]$ donc $A^{v}(\{1, 3\}) = \frac{1}{2}[(3 - 0) + (3 - 2)] = 2$.

Pour $T = \{2, 3\}$, $A^{v}(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}[(v\{2, 3\} - v\{2\}) + (v\{2, 3\} - v\{3\})]$ d'où $A^{v}(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}[(3 - 0) + (3 - 2)] = 2$.

Pour $T = \{1, 2, 3\}$, $A^{v}(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}[(v\{1, 2, 3\} - v\{1, 2\}) + (v\{1, 2, 3\} - v\{1, 3\}) + (v\{1, 2, 3\} - v\{2, 3\})]$

On obtient $A^{v}(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{3}[(4 - 0) + (4 - 3) + (4 - 3)] = 2$.

• **Axiome du joueur A-consistent** : Soient $v \in \Gamma$ et f une valeur sur Γ. La valeur f vérifie l'axiome du joueur A-consistent lorsque pour tout joueur A-consistent i dans v, $f_i(v) = A^{v}(T)$.

Proposition 3.2.3 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

La valeur de solidarité est une valeur A-consistent.

Preuve. Soit $i \in N$ tel que i est un joueur A-consistent dans v c'est-à-dire $\exists c \in \mathbb{R}$ / $\forall T \subseteq N, i \in T, A^v(T) = c$. Comme φ est une valeur de solidarité, on a $\varphi_i(v) = \sum_{T/i\in T} P^j_{T\backslash j} A^v(T)$ avec $P^i_{T\backslash i} = \frac{(n-|T|)!(|T|-1)!}{n!}$ et d'après le corollaire 3.2.2, φ est une ps-value. D'où, $\forall i \in N \sum_{T/i\in T} P^i_{T\backslash i} = 1$. Donc $\varphi_i(v) = A^v(T) = c$ ■

La proposition ci-dessous montre que toute valeur qui vérifie l'axiome du joueur A-consistent vérifie celle du joueur A-nul, mais la réciproque n'est pas vrai.

Proposition 3.2.4 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

1- Si une valeur f sur Γ satisfait l'axiome du joueur A-consistent alors f satisfait l'axiome du joueur A-null.

2-Une valeur f sur Γ peut satisfaire l'axiome du joueur A-null sans toute fois satisfaire l'axiome du joueur A-consistent.

La première partie de la proposition 3.2.4 est évidente, en effet Soit f une valeur sur Γ qui vérifie l'axiome du joueur A-consistent c'est-à-dire $\exists c \in \mathbb{R}$ / $\forall T \subseteq N, i \in T, A^v(T) = c$ et $f_i(v) = c$.Pour $c = 0$, on a $A^v(T) = 0$, on obtient $f_i(v) = 0$ d'où f vérifie l'axiome du joueur A-nul.

L'exemple suivant illustre la deuxième partie de cette proposition. C'est-à-dire qu' elle montre une valeur qui vérifie l'axiome du joueur A-null mais ne vérifie pas celle du joueur A-consistent.

Exemple 3.2.3. Pour $N = \{1, 2, 3\}$, considérons pour chaque $i \in N$, une famille de réels $(a^i_T)_{T\subseteq N, i\in T}$ tel que $a^1_1 = \frac{1}{2}$, $a^1_{\{1,2,3\}} = 0$, $a^1_{\{1,3\}} = 0$, $a^1_{\{1,2\}} = 0$. Soit la valeur f sur Γ définie par : $\forall i \in N$, $f_i(v) = \sum_{T\subseteq N, i\in T} a^i_T A^v(T)$. On observe que f vérifie l'axiome du joueur A-null car pour tout JFCC v et pour tout joueur A-null i_0 dans v, on a $\forall T \subseteq N$, $i_0 \in T$, $A^v(T) = 0$. Il en résulte que $f_{i_0}(v) = 0$.

Mais f ne vérifie pas l'axiome du joueur A-consistent. En effet, considérons le jeu v suivant.

Soient $N = \{1, 2, 3\}$ et $v \in N$ tel que :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	$\frac{8}{3}$	0	2	4	5	0	$\frac{17}{3}$

Les coalitions contenant le joueur 1 sont données par : $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$. On a ,

Pour $T = \{1\}$, $A^v(\{1\}) = v(\{1\}) = \frac{8}{3}$.

Pour $T = \{1, 3\}$, $A^v(\{1, 3\}) = \frac{1}{2}[(v\{1, 3\} - v\{1\}) + (v\{1, 3\} - v\{3\})]$ donc $A^v(\{1, 3\}) = \frac{1}{2}[(5 - \frac{8}{3}) +$

$(5-2)] = \frac{8}{3}$.

Pour $T = \{1,2\}$, $A^v(\{1,2\}) = \frac{1}{2}[(v\{1,2\} - v\{2\}) + (v\{1,2\} - v\{1\})]$ d'où $A^v(\{1,2\}) = \frac{1}{2}[(4-0) + (4 - \frac{8}{3})] = \frac{8}{3}$.

Pour $T = \{1,2,3\}$, $A^v(\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}[(v\{1,2,3\}-v\{1,2\})+(v\{1,2,3\}-v\{1,3\})+(v\{1,2,3\}-v\{2,3\})]$ on obtient $A^v(\{1,2,3\}) = \frac{1}{3}[(\frac{17}{3}-0)+(\frac{17}{3}-5)+(\frac{17}{3}-4)] = \frac{8}{3}$. D'où le joueur 1 est A-consistent.

Mais,

$$\begin{aligned} f_1(v) &= \sum_{1\in T} a_T^1 A^v(T) \\ &= \sum_{1\in T} a_T^1 \frac{8}{3} \\ &= \frac{8}{3}\sum_{1\in T} a_T^1 \end{aligned}$$

D'où $f_1(v) = \frac{4}{3}$ car $\sum_{1\in T} a_T^1 = \frac{1}{2}$. Donc f ne vérifie pas l'axiome du joueur A-consistent

Le théorème3.2.2 ci-dessous détermine les coordonnées d'un jeu $v \in \Gamma$ dans la base $\{w_T, T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$.

Théorème 3.2.2. ***(Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)*** *Pour tout $v \in \Gamma$, $v = \sum_{T/T\subseteq N, T\neq\emptyset} A^v(T) w_T$ avec*

$$w_T(S) = \begin{cases} \frac{1}{C_{|S|}^{|T|}} & si\ T \subseteq S \\ 0 & si\ sinon \end{cases}$$

L'exemple suivant illustre ce théorème.

Exemple 3.2.4. Soient $N = \{1,2,3\}$ et $v \in \Gamma$ tel que

S	{1}	{2}	{3}	{1,3}	{2,3}	{1,2}	{1,2,3}
v(S)	3	2	1	2	1	4	5

Déterminons les cordonnées de v({1}), v({2}), v({3}), v({1, 2}), v({1, 3}), v({1, 2, 3})

Posons $v = \alpha_T w_T$ ou α_T est à déterminer.

$v(\{1\}) = \alpha_T w_T\{1\}$ et par définition de w_T, on a $w_T\{1\} = 1$ si $T = \{1\}$ d'où $\alpha_1 = v\{1\} = A^v\{1\}$, on obtient $v\{1\} = A^v\{1\} w_{\{1\}}\{1\}$

Par définition de w_T, on a • $w_{\{1\}}\{1\} = 1$, $w_{\{1\}}\{2\} = 0$, $w_{\{1\}}\{3\} = 0$, $w_{\{1\}}\{1,2\} = \frac{1}{2}$, $w_{\{1\}}\{1,3\} = \frac{1}{2}$, $w_{\{1\}}\{1,2,3\} = \frac{1}{3}$ $w_{\{1\}}\{2,3\} = 0$

• $w_{\{2\}}\{1\} = 0$, $w_{\{2\}}\{2\} = 1$, $w_{\{2\}}\{3\} = 0$, $w_{\{2\}}\{1,2\} = \frac{1}{2}$, $w_{\{2\}}\{2,3\} = \frac{1}{2}$, $w_{\{2\}}\{1,2,3\} = \frac{1}{3}$, $w_{\{2\}}\{1,3\} = 0$

• $w_{\{3\}}\{1\} = 0$, $w_{\{3\}}\{2\} = 0$, $w_{\{3\}}\{3\} = 0$, $w_{\{3\}}\{1,3\} = \frac{1}{2}$, $w_{\{3\}}\{2,3\} = \frac{1}{2}$, $w_{\{3\}}\{1,2,3\} = \frac{1}{3}$, $w_{\{3\}}\{1,2\} = 0$

Calculons $\sum_{T/T\subseteq N,} A^v(T)w_T(1)$.

On a, par définition de w_T, $w_T(1) \neq 0$ si $T = \{1\}$ d'où $\sum_{T/T\subseteq N,} A^v(T)w_T(1) = A^v(1)w_1(1) = A^v(1) = v(\{1\})$. De même, $v(\{2\}) = A^v(2)$ et $v(\{3\}) = A^v(3)$

la proposition 3.2.5 ci-dessous permet d'étudier l'impact de la linéarité et du joueur A-consistent sur une valeur

Proposition 3.2.5 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

Soit $v \in \Gamma$ et f une valeur sur Γ. si f vérifie l'axiome de linéarité et l'axiome du joueur A-consistent alors $\forall i \in N$, $f_i(v) = \sum_{T/i\in T} f_i(w_T)A^v(T)$ et $\sum_{T/i\in T} f_i(w_T) = 1$.

On peut maintenant présenter l'axiome de $s - monotonie$.

Définition 3.2.2 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

Un jeu $v \in \Gamma$ est s-monotone lorsque pour toute coalition T, $A^v(T) \geq 0$.

Axiom de s-monotonie Une valeur f sur Γ satisfait l'axiome de s-monotonie lorsque pour tout joueur i, pour tout v s-monotone, $f_i(v) \geq 0$.

Proposition 3.2.6 (Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)

Soit f une valeur sur Γ tel que $\forall i \in N, f_i(v) = \sum_{T/i\in T} f_i(w_T)A^v(T)$ et $\sum_{T/i\in T} f_i(w_T) = 1$. Si f vérifie l'axiome de s-monotonie, alors $\forall i \in N$, $(f_i(w_T))_{T\subseteq N, i\in T}$ est une distribution de probabilité.

Preuve. Soit $i \in N$, $\emptyset \neq T \subseteq N$, comme $\sum_{T/i\in T} f_i(w_T) = 1$, il suffit de montrer que $f_i(w_T) \geq 0$.
Montrons que $\forall T \neq \emptyset, w_T$ est un jeu s-monotone.
Cela revient à montrer que $\forall S \subseteq N$, $A^{w_T}(S) \geq 0$. On a :

$$w_T(S) = \begin{cases} \frac{1}{C_{|S|}^{|T|}} & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{si } sinon \end{cases}$$

et $A^{w_T}(S) = \sum_{k\in T} \frac{1}{|T|}[w_T(S) - w_T(S \setminus k)]$. D'après le lemme 3.1.1 (Nowak-Radwik, 1994) on a les cas suivants :

• Si $T = S$ alors $w_T(S) = 1$ et $w_T(S \setminus k) = 0$ d'où $w_T(S) \geq w_T(S \setminus k)$ et par conséquent, $A^{w_T}(S) \geq 0$.

• Si $T \subsetneq S$ alors $w_T(S) = \frac{1}{|S|} \sum_{k\in S}[w_T(S \setminus k)]$ ce qui implique $A^{w_T}(S) = 0$.

Si $T \nsubseteq S$ alors $w_T(S) = w_T(S \setminus k) = 0$.

Dans tous les cas $A^{w_T}(S) \geq 0$ et par l'axiome de s-monotonie, $f_i(w_T) \geq 0$ ■

Remarquons que la monotonie implique la s-monotonie. En effet soit $v \in \Gamma$ un jeu monotone, on a $\forall S \subseteq N, S \neq \emptyset, A^v(S) = \sum_{k\in T} \frac{1}{|T|}[v(S) - v(S \setminus k)] \geq 0$, car $\forall k \in S, v(s) - v(s \setminus k) \geq 0$

En revanche, la s-monotonie n'implique pas la monotonie. En effet, pour tout $T \subseteq N, T \neq N$ et $T \neq \emptyset$, le jeu $w_T$est s- monotone, mais n'est pas monotone. Car $\forall k \notin T$, on a $w_T(T) = 1$ et $w_T(T \cup k) < 1$, par définition de w_T.

Le résultat suivant axiomatise les valeurs qui pour lesquelles la part d'un joueur i s'écrit $\sum_{T/i\in T} P^i A^v(T)$ où p^i est une distribution de probabilité sur toutes les coalitions ne contenant pas i.

Désormais, pour tout $i \in N$, p^i désigne une distribution de probabilité sur toutes les coalitions ne contenant pas i.

Théorème 3.2.3. *(**Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018**) Une valeur f sur Γ satisfait les axiomes de linéarité, du joueur A-consistant, et de s-monotonie, si et seulement si, $\forall i \in N$, $\exists P^i$ tel que $\forall v \in \Gamma$, $f_i(v) = \sum_{T/i\in T} P^i_{T\setminus i} A^v(T)$.*

Rappelons que la valeur de solidarité est une ps-value. On est en droit de se demander quelle ps-value est la valeur de solidarité.

3.2.2. Caractérisation de la valeur de solidarité dans la classe des ps-values.

Avant d'identifier la valeur de solidarité de Nowak et Radzik parmi les ps-values, commençons par axiomatiser les ps-values symmétriques.

Théorème 3.2.4. *(**Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018**) Une valeur f sur Γ est une ps-value symétrique, si et seulement si, f vérifie les axiomes de linéarité, de joueur A-consistent , de s-monotonie, et de symétrie.*

Il en ressort que les ps-values symétriques sont clairement et uniquement identifiées par des propriétés pratiques et intuitives.

Présentons maintenant une caractérisation des ps-values efficientes.

Théorème **3.2.5.** ***(Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)*** *Une ps-value satisfait l'axiome d'efficience si et seulement* $\sum_{i\in N} P^i_{N\backslash i} = 1$ *et* $\forall T \notin \{\emptyset, N\}$, $\forall (i, j) \in N \times N$, $\sum_{i\in T} P^i_{T\backslash i} = \sum_{j\notin T} P^j_T$

Il en ressort que les ps-values sont caractérisées par les mêmes relations sur les distributions de probabilité que celles obtenues pour les valeurs probabilistes (Weber, 1988).

Théorème **3.2.6.** ***(Diffo Lambo et Nlend Oum, 2018)*** *Une ps-value* f *est la valeur de solidarité, si et seulement si,* f *est symétrique et efficiente.*

Autrement dit, une ps-value symétrique et efficiente est nécessairement additive et A-null.

✠ Implication pédagogique ✠

Rédiger ce mémoire nous a offert l'occasion de faire nos premiers pas en terme d'investigations scientifiques et de déploiements de nos aptitudes à comprendre, à connaitre un raisonnement logique et la maîtrise des outils de nouvelles technologies de l'information et de la communication.
Nous nous proposons de relever dans ce chapitre quelques repères de l'impact de cet exercice au plan pédagogique sur le système éducatif.

3.3. Aptitude à comprendre, mobiliser et construire des connaissances

Pour mener à terme ce travail, il a fallu que nous puisions dans nos compétences à pouvoir comprendre une situation-problème, en proposer un formalisme et d'étudier les propriétés des objets mathématiques obtenus. Par transposition, les documents de travail (mentionnés en bibliographie) sur lesquels sont basées nos recherches peuvent être perçus comme une ressource pédagogique dont le contenu doit être partagé avec les apprenants. C'est ainsi que nous avons décomposé la ressource pour en donner une reconstitution en termes de chapitres ; par la suite de définitions des concepts à étudier et des propriétés qui vérifient ces concepts. En mettant ainsi ces propriétés ensemble, on déduit donc des résultats. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien d'un enseignant de mathématiques que nous aspirons à être . Nous pensons notamment à l'élaboration de nos cours futurs à partir des diverses ressources éducatives.

3.4. Initiation aux nouvelles technologies de l'information et de la communication

Les outils technologiques tels que le micro-ordinateur, l'utilisation des logiciels (Word, Latex) et d'internet ont été d'un grand appui au cours de la rédaction de ce mémoire. Ces moyens de communication (en particulier internet) pourront être utiles d'une part à l'enseignant dans la mesure où il devra s'arrimer à cela pour compléter le déficit ou l'insuffisance d'informations contenus dans les manuels scolaires. Ils peuvent de même l'assister dans la préparation, la saisie et la présentation d'une leçon ou d'un sujet d'épreuve. D'autre part, ils seront utiles à l'élève pour compléter les cours qui lui ont été transmis par l'enseignant.

✠ Conclusion et Perspectives ✠

Au terme de notre travail qui a porté sur une approche probabiliste de la valeur de solidarité de Nowak et Radzik (Nowak-Radzik, 1994), plusieurs points essentiels retiennent notre attention.

Pour faciliter la compréhension de notre travail, nous avons commencé par présenter les éléments clés sur lesquels était basée notre étude. Nous avons ainsi décrit les notions telles que les jeux sous forme caractéristique avec compensation, la valeur de Shapley, les valeurs probabilistes de Weber et la valeur de solidarité de Nowak-Radzik. Suite à ces préalables, Diffo Lambo et Nlend Oum ont défini les ps-values et ils ont identifié la valeur de solidarité dans la classe des ps- values. Deux axiomes importants attirent nôtre attention : l'axiome du joueur A-consistent et l'axiome de s-monotonie. Ils ont montré qu'une valeur f sur Γ est une ps-value symétrique si et seulement f vérifie les axiomes de linéarité, de joueur A-consistent, de s-monotonie et de symétrie.
Ce dernier résultat est important dans la mesure où il permet d'axiomatiser les ps-valeurs symétriques. Les implications pédagogiques que nous avons évoquées portent sur l'intérêt de cet exercice sur le plan professionnel.

Cependant le problème d'axiomatisation (identifier clairement et uniquement par des propriétés pratiques et intuitives) des ps-values n'ayant été fait dans le présent travail que pour le cas de ps-values symétriques , nous avons en perspective d' axiomatiser de manière général les ps-values .

✠ Bibliographie ✠

[1] Diffo Lambo, L. and Nlend Oum, S. B.(2018). Probabiliste solidarity values. Submitted paper

[2] Nowak, A.S., and Radzik, T. (1994). A solidarity value for n-person transferable utility games. International journal of Game Theory, 23,43-48.

[3] Shapley, L. S., 1953 A value for n-person games. In : Contribution to the Theory of Games vol.II (H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds). Annals of mathematics Studies 28. Princeton University Press, Princeton 307-317.

[4] Weber, R. J. (1988). Probabilistic values for games, in A. E. Roth, editor, The Shapley value : Essays in honor of LIoyd S. Shapley. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 101-119.