REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE 1
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE OF YAOUNDE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

TREILLIS DES OPERATEURS POSITIFS

Mémoire de D.I.P.E.S II de Mathématiques

Présenté par :

GASSA NGOUISSINA

Matricule: 12V0311

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de:

Dr CIAKE CIAKE Fidèle

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique 2018-2019

TREILLIS DES OPÉRATEURS POSITIFS

Mémoire de D.I.P.E.S II de Mathématiques

Présenté par :

GASSA NGOUISSINA

Matricule 12V0311

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Dr CIAKE CIAKE Fidèle

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique 2018-2019

♣ DÉDICACE ♣

Nous dédions ce mémoire

À

notre maman , la regrettée Maman Maï Daï Kidari

♣ REMERCIEMENTS ♣

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements et toute notre reconnaissance

- A Dieu tout puissant pour sa grâce accordée à notre éducation depuis notre naissance.

- Au Docteur CIAKE CIAKE Fidèle qui par sa disponibilité, ses critiques, ses suggestions, ses remarques et ses orientations nous a permis d'éviter bien des écueils.

- A tous les enseignants de mathématiques de l'Université de Yaoundé I en particulier ceux de l'École Normale Supérieure du Cameroun qui nous ont formé dans ce prestigieux domaine des sciences mathématiques.

- A nos chers parents : Papa NGOUISSINA DOURAÏNA et la regrettée maman MAÏ DAÏ KIDARI qui nous ont soutenu financièrement, nous ont donné le gout du savoir, nous ont enseigné la sagesse, la tolérance et la patience.

- A toute notre famille pour leur soutien moral, matériel et financier qu'elle a eu à faire jusqu'ici pour notre réussite académique ; particulièrement nos grands frères SODGA Louis Patrice, HOUBARA Emmanuel et notre sœur ainée LADI.

- A nos chers frères et sœurs bien aimés de la communauté fraternelle en Jésus christ qui ont consenti leurs efforts à intercéder à notre égard.

- A nos chers camarades de l'École Normale Supérieure Yaoundé pour l'esprit d'équipe et de solidarité qui nous a facilité ce travail de mémoire.

- A tout ceux qui n'ont ménagé aucun effort à lire ce mémoire et en faire des critiques et suggestions importantes et ceux également de près ou de loin nous ont apporté un soutient tant morale que financier.

♣ DÉCLARATION SUR L'HONNEUR ♣

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie ;

Signature du candidat

Gassa Ngouisssina

♣ RÉSUMÉ ♣

Dans ce mémoire, nous présentons le treillis des opérateurs positifs et donnons quelques unes de ses propriétés fondamentales.

Mots clés *:Treillis et opérateur positif.*

 ©École Normale Supérieure de Yaoundé

♣ ABSTRACT ♣

In this memoir, we present the lattice of positive operators and give a few basic properties.

Key words *: Lattice and positive operators.*

♣ Sommaire ♣

♣ Introduction ♣

Les opérateurs ont commencé au début du XIX *siècle. Ils étaient liés à des opérateurs intégraux (dont l'étude avait déclenché la naissance de l'analyse fonctionnelle). Cependant les opérateurs positifs ont été examinés de manière systématique, beaucoup plus tard leur étude a suivi de près le développement des espaces de Riesz. Une adresse de F. Riesz ; en 1928 sur la décomposition des fonctions linéaires au congrès international des mathématiciens de Bologne et d'Italie marquait le début de l'étude des espaces de Riesz et des opérateurs positifs. La théorie des espaces de Riesz a été développée de manière axiomatique au milieu des années 1930 par H. Freudentha et L.V. Kantorovich. Des opérateurs positifs ont été également introduits et étudiés dans l'édition de 1940 du livre de G. Birkhoff . Sans doute, l'étude systématique des opérateurs positifs est née dans les années 1930 par F. Riesz, L.V. Kantorovich et G. Birkhoff. Dans les années 1940 à 1950 des découverts sont faites sur les opérateurs positifs . Pendant cette période beaucoup des contributions sont venues de école soviétique (L.V. Kantorovich, M.G Krein, A.G Pinsker...) et de l'école Japonaise (H. Nakano, K.Yosida Ogasawara, et leurs étudiants). En 1950 le livre de l'analyse fonctionnelle sur des espaces partiellement ordonnés par L.V. Kantorovich, B.Z.Vulikh et A.G Pinsker apparaissait dans la littérature soviétique. C'est ainsi que les opérateurs positifs ont fait leur apparition et leur évolution.*

À cet effet, il sera question pour nous dans ce mémoire de construire des opérateurs positifs, de treillis des opérateurs positifs et donner des propriétés de ce treillis. Pour y parvenir, notre travail sera structuré en quatre parties :

La première partie portera essentiellement sur les préliminaires et la notion de treillis. La deuxième partie sur les espaces de Riesz, la troisième sur le treillis des opérateurs positifs sur les espaces de Riesz et la quatrième partie quant-à elle s'appesantira sur le treillis des opérateurs positifs sur les espaces de Hilbert. Nous proposons en fin une partie portant sur les apports pédagogiques de ce travail de mémoire dans notre formation en qualité d'enseignant du lycée d'enseignement général.

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

TREILLIS

1.1 Préliminaires

Dans tout ce travail, $\mathbb{K}$ désigne un corps qui sera souvent un sous-corps de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire essentiellement $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires. Les éléments neutres de l'addition et de la multiplication sont usuellement notés 0 et 1.

Définition 1.1.1. ***(Espace vectoriel)***

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe à opérateur dans un corps , notée •;
On dit que le triplet $(\mathbf{E}, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel si :

1- $(\mathbf{E}, +)$ *est un groupe abélien.*
   $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \qquad \forall x, y \in \mathbf{E}$*;*

2- $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$ *(Distributivité par rapport à la somme des scalaires).*

3- $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$ *(Distributivité par rapport à la somme des vecteurs).*

4- $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \bullet \beta) \bullet x$ *(Associativité mixte).*

5- *1*$\bullet\mu = \mu$ *(1 est opérateur neutre).*

Dans la suite l'espace vectoriel $(\mathbf{E}, +, \bullet)$ sera noté par $\mathbf{E}$, s'il n'y a pas de confusion à craindre et $\alpha \bullet x = \alpha x$.

Définition 1.1.2. ***(Norme sur un espace vectoriel)***

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel ; on appelle norme sur $\mathbf{E}$, toute application $\mathcal{N}$:$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, telle que :

1- $\forall x \in \mathbf{E}, \mathcal{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbf{E}}$, *(séparation).*

2- $\forall \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbf{E}, \mathcal{N}(\mu x) = |\mu|\mathcal{N}(x)$, *(homogénéité).*

3- $\forall x, y \in \mathbf{E}, \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$, *(inégalité triangulaire).*

Le couplet ($\mathbf{E}, \mathcal{N}$) *est alors appelé espace vectoriel normé. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme, on dira que* $\mathbf{E}$ *est un espace vectoriel normé.*
le plus souvent une norme est notée par : $|| \bullet || : x \longrightarrow ||x||$.

Définition 1.1.3. ***(suite de Cauchy)***

Soit $\mathbf{E}$ *un espace vectoriel normé, soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{E}$*. On dit que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si :* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \mathsf{N}_\epsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq \mathsf{N}_\epsilon \implies \mathcal{N}(x_n - x_m) \leq \epsilon$.

Définition 1.1.4. ***(ensemble ordonné)***

Soit $\mathbf{A}$ *un ensemble non vide, une relation d'ordre sur* $\mathbf{A}$ *est une relation binaire* $\leq$ *définie sur* $\mathbf{A}$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

i-) $\leq$ *est réflexive* (*c'est-à-dire,* $a \leq a \quad \forall a \in \mathbf{A}$).

ii-) $\leq$ *est antisymétrique* (*c'est-à-dire,* $a \leq b$ *et* $b \leq a \implies a = b \quad \forall a, b \in \mathbf{A}$).

iii-) $\leq$ *est transitive* (*c'est-à-dire,* $a \leq b$ *et* $b \leq c \implies a \leq c \quad \forall a, b, c \in \mathbf{A}$).

$\mathbf{A}$ *muni de cette relation est un ensemble partiellement ordonné.*

Si de plus $\forall a, b \in \mathbf{A}$ *:*

iv-) $a \leq b$ *ou* $b \leq a$.

Alors l'ensemble $\mathbf{A}$ *est dit totalement ordonné.*

Exemple 1.1.1. *L'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels muni de la relation* $a \leq b$ *si et seulement si* a *divise* b $(a|b)$ *est un ensemble partiellement ordonné.*
Soit $\mathbf{G}$ *un groupe;* $(\mathbf{S}(\mathbf{G}), \subseteq)$ *l'ensemble des sous groupes de* $\mathbf{A}$ *muni de l'inclusion est un ensemble partiellement ordonné.*

Définition 1.1.5. ***(majorant d'un sous-ensemble)***

Soient $\mathbf{P}$ *un ensemble non vide et ordonné et* $\mathbf{A}$ *un sous-ensemble non vide de* $\mathbf{P}$*, un élément* $M \in \mathbf{P}$ *est un majorant de* $\mathbf{A}$ *si* $a \leq M \quad \forall a \in \mathbf{A}$*. Et un élément* $m \in \mathbf{P}$ *est un minorant de* $\mathbf{A}$ *si* $m \leq a \quad \forall a \in \mathbf{A}$.

Définition 1.1.6. ***(borne supérieure et borne inférieure)***

Soient $\mathbf{P}$ *un ensemble non vide et ordonné et* $\mathbf{A}$ *un sous-ensemble non vide de* $\mathbf{P}$*, un élément* $p \in \mathbf{P}$ *est la borne supérieure de* $\mathbf{A}$ *si p est un majorant du sous-ensemble* $\mathbf{A}$ *et est le plus petit des majorants. c'est-à-dire* $a \leq p \quad \forall a \in \mathbf{A}$ *et si* $b \in \mathbf{P}$ *tel que* $a \leq b \quad \forall a \in \mathbf{A}$*, alors* $p \leq b$*. Et un élément* $p \in \mathbf{P}$ *est la borne inférieure de* $\mathbf{A}$ *si p est un minorant du sous-ensemble* $\mathbf{A}$ *et est le plus grand des minorants. c'est-à-dire* $p \leq a \quad \forall a \in \mathbf{A}$ *et si* $b \in \mathbf{P}$ *tel que* $b \leq a \quad \forall a \in \mathbf{A}$*, alors* $b \leq p$.

Définition 1.1.7. *(Application linéaire)*

Soient $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels, une application* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *est un opérateur linéaire si* $\mathcal{T}(\alpha x + \beta y)$=$\alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y)$, $\quad \forall x, y \in \mathbf{E}$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Définition 1.1.8. *(Application sesquilinéaire)*

Soient $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{C}$ *espaces vectoriels, une application* $f : \mathbf{E}\times\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *est dite sesquilinéaire si*

$f(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + f(x_2, y), \quad \forall (x_1, y), (x_2, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *(f est linéaire par rapport à la première composante).*

$f(x, \alpha y_1+y_2) = \bar{\alpha} f(x, y_1)+f(x, y_2), \quad \forall (x; y_1), (x, y_2) \in \mathbf{E}\times\mathbf{E}$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *(f est semi-linéaire par rapport à la seconde composante).*

On note $\mathbf{SQ}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ l'ensemble des applications sesquilinéaires.
Si $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ on dit que f est une forme sesquilinéaire.

Définition 1.1.9. *(Forme hermitienne)*

Soit $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{C}$ *espaces vectoriel, une application* $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *est une forme hermitienne si*

1- f est une forme sesquilinéaire.

2- $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$*;* *(symétrie hermitienne).*

On dit qu'une forme hermitienne f est définie positive si $f(x, x) \geq 0$ et $f(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Définition 1.1.10. *(Produit hermitien)*

Soit $\mathbf{E}$ *un* $\mathbb{C}$ *espaces vectoriels, une application* $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ *est un produit hermitien si f est une forme hermitienne définie positive et est noté par :* $\langle , \rangle$.

Définition 1.1.11. ***(espace de Hilbert)***

Soit $\mathbf{H}$ *un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel, on dit que* $\mathbf{H}$ *est un espace de Hilbert, s'il est un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel complet muni d'un produit hermitien. On note* $(\mathbf{H}, \langle , \rangle)$.

Dans la suite on notera par $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert s'il n'y a pas de confusion à craindre.

1.2 Notion de treillis

Dans cette section nous allons définir la notion de treillis d'une manière générale, dont l'usage est assez varié comme nous le verrons dans la suite. Nous nous intéressons particulièrement au treillis des opérateurs positifs qui est l'objet de notre investigation .

Définition 1.2.1. ***(treillis)***

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble non vide muni de deux opérations binaires $\vee$ et $\wedge$ (on lit "ou" et "et" respectivement) ; on dit que $(\mathbf{E}, \vee, \wedge)$ est un treillis si les conditions suivantes sont satisfaites.

1- $x \vee y = y \vee x, \qquad x \wedge y = y \wedge x;$ *(commutativité des opérations).*

2- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$ *(associativité des opérations).*

3- $x \vee x = x, \qquad x \wedge x = x;$ *(idempotente des opérations).*

4- $x = x \vee (x \wedge y), \qquad x = x \wedge (x \vee y);$ *(absorption des opérations).*

Exemple 1.2.1. *Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des propositions, soient $\vee$ le connecteur logique "ou" et $\wedge$ le connecteur logique "et". Alors toutes les conditions de la définition 1.2.1. sont bien satisfaites par ces connecteurs logiques.*
Donc ($\mathbb{P}$,$\vee$,$\wedge$) est un treillis.

Exemple 1.2.2. *Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels, soient $\vee$ le plus petit commun multiple $(''ppcm'')$ et $\wedge$ le plus grand commun diviseur $(''pgcd'')$. Alors toutes les conditions de la définition 1.2.1. sont également bien satisfaites par le $ppcm$ et le $pgcd$. Donc $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$ est un treillis.*

Proposition 1.2.1. *Si $\mathbf{E}$ est un ensemble non vide et ordonné tel que $\forall a, b \in \mathbf{E}$, $\quad \sup\{a, b\}$ et $\inf\{a, b\}$ existent dans $\mathbf{E}$. Alors $\mathbf{E}$ est un treillis muni des opérations définies par : $\forall a, b \in \mathbf{E}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$ et $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.*

preuve . *Supposons que $\mathbf{E}$ est un treillis est montrons qu'il est un ensemble non vide ordonné dans le quel tout pair d'éléments possède une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbf{E}$.*
définissons l'ordre $\leq$ par $\forall a, b \in \mathbf{E}, \quad a \leq b$ si et seulement si $a = a \wedge b$.
$\mathbf{E}$ est non vide par définition. $\forall a, b \in \mathbf{E}$.
De la relation $a \wedge a = a$ on a $a \leq a$ donc $\leq$ est réflexive.
Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = a \wedge b$ et $b = b \wedge a$; ainsi $a = b$ donc $\leq$ est antisymétrique.
Et si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a = a \wedge b$ et $b = b \wedge c$ $\quad$ donc

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (b \wedge c) \\ &= (a \wedge b) \wedge c \\ &= a \wedge c; \end{aligned}$$

d'ou $a \leq c$ donc $\leq$ est transitive.

C'est qui prouve que la relation $\leq$ est un ordre partiel sur $\mathbf{E}$.

De la relation $a = a \wedge (a \vee b)$ *et* $b = b \wedge (a \vee b)$ *, il vient que* $a \leq a \vee b$ *et* $b \leq a \vee b$*; donc* $a \vee b$ *est un majorant de {a,b}.*

Cependant si $a \leq u$ *et* $b \leq u$ *alors*

$$\begin{aligned} a \vee u &= (a \wedge u) \vee u \\ &= u; \end{aligned}$$

de même.

$$\begin{aligned} b \vee u &= (b \wedge u) \vee u \\ &= u. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (a \vee u) \vee (b \vee u) &= u \vee u \\ &= u. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(a \vee b) \vee u = u$*, donnant*

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge u &= (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee u] \\ &= a \vee b \end{aligned}$$

par absorption des opérations

c'est-à-dire $a \vee b \leq u$*.*

Donc $a \vee b = \sup\{a, b\}$ *.*

De façon analogue on montre que $a \wedge b = \inf\{a, b\}$*.*

Réciproquement, si $\mathbf{E}$ *vérifie les critères de la proposition 1.2.1, définissons les opérations* $\vee$ *et* $\wedge$ *sur* $\mathbf{E}$ *par* $a \vee b = \sup\{a, b\}$ *et* $a \wedge b = \inf\{a, b\}$*.*

Les opérations ainsi définis satisfont les propriétés de la définition 1.2.1.

En effet $\forall a, b, c \in \mathbf{E}$ *on a :*

$a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\}$ *et* $a \wedge b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\}$*.*

$$a \vee (b \vee c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$$

et

$$a \wedge (b \wedge c) = \inf\{a, \inf\{b, c\}\} = \inf\{\inf\{a, b\}, c\}$$

.

$a \vee a = \sup\{a, a\} = a$ *et* $a \wedge a = \inf\{a, a\} = a$*.*

Et $a = a \vee (a \wedge b) = \sup\{a, \inf\{a, b\}\}$ *et* $a = a \wedge (a \vee b) = \inf\{a, \sup\{a, b\}\}$*.*

D'où la preuve.

1.3 Isomorphisme des treillis, sous-treillis et treillis complet

Le terme isomorphisme utilisé ici signifie que les deux treillis ont une même structure excepte la nature de leurs éléments.

Définition 1.3.1. *(Isomorphisme de treillis)*

Deux treillis $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont dits isomorphes s'il existe une bijection α de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$ telle que pour tout $a, b \in \mathbf{E}_1$, on ait les égalités suivantes :
$\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee \alpha(b)$ *et* $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$.
α est appelé isomorphisme de treillis.

Proposition 1.3.1. *Si α est un isomorphisme de treillis $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$ alors α^{-1} est un isomorphisme des treillis $\mathbf{E}_2$ dans $\mathbf{E}_1$ et si β est un isomorphisme des treillis $\mathbf{E}_2$ dans $\mathbf{E}_3$ alors $\beta \circ \alpha$ est un isomorphisme des treillis $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_3$.*

preuve . *Puisque α est un isomorphisme de treillis $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$ c'est-à-dire que α est une bijection de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$, alors α^{-1} existe.*
Ainsi $\forall x, y \in \mathbf{E}_2$ il existe $a, b \in \mathbf{E}_1$ tels que $x = \alpha(a)$ et $y = \alpha(b)$.
Donc

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(x \vee y) &= \alpha^{-1}(\alpha(a) \vee \alpha(b)) \\ &= \alpha^{-1}\alpha(a \vee b) \\ &= a \vee b \\ &= \alpha^{-1}(x) \vee \alpha^{-1}(b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(x \wedge y) &= \alpha^{-1}(\alpha(a) \wedge \alpha(b)) \\ &= \alpha^{-1}\alpha(a \wedge b) \\ &= a \wedge b \\ &= \alpha^{-1}(x) \wedge \alpha^{-1}(b) \end{aligned}$$

α^{-1} est un isomorphisme de treillis $\mathbf{E}_2$ dans $\mathbf{E}_1$.

Par ailleurs $\forall a, b \in \mathbf{E}_1$

$$\begin{aligned} \beta \circ \alpha(a \vee b) &= \beta(\alpha(a \vee b)) \\ &= \beta(\alpha(a) \vee \alpha(b)) \\ &= \beta(\alpha(a)) \vee \beta(\alpha(b)) \\ &= \beta \circ \alpha(a) \vee \beta \circ \alpha(b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta\circ\alpha(a\wedge b) &= \beta(\alpha(a\wedge b))\\ &= \beta(\alpha(a)\wedge\alpha(b))\\ &= \beta(\alpha(a))\wedge\beta(\alpha(b))\\ &= \beta\circ\alpha(a)\wedge\beta\circ\alpha(b)\end{aligned}$$

Donc $\beta\circ\alpha$ est un isomorphisme de treillis $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_3$.

On peut reformuler la définition de l'isomorphisme en terme de relation d'ordre.

Définition 1.3.2. *Si $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont deux ensembles non vides, ordonnés et α une application de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$. On dit que α préserve l'ordre si $\alpha(a)\leq\alpha(b)$ dans $\mathbf{E}_2$ lorsque $a\leq b$ dans $\mathbf{E}_1$.*

Théorème 1.3.1. *Deux treillis $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection α de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$ telle que α et α^{-1} préservent l'ordre.*

preuve . *Si α est un isomorphisme de treillis $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$ et $a\leq b$ dans $\mathbf{E}_1$ alors $a=a\wedge b$; donc*

$$\begin{aligned}\alpha(a) &= \alpha(a\wedge b)\\ &= \alpha(a)\wedge\alpha(b).\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\alpha(a)\leq\alpha(b)$.
D'où α préserve l'ordre.
Comme α^{-1} est un isomorphisme des treillis alors il préserve également l'ordre.
Réciproquement soit α une bijection de $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$ telle que α et α^{-1} préservent l'ordre. Pour tout $a,b\in\mathbf{E}_1$, on a :
$a\leq a\vee b$ et $b\leq a\vee b$ alors $\alpha(a)\leq\alpha(a\vee b)$ et $\alpha(b)\leq\alpha(a\vee b)$,
donc $\alpha(a)\vee\alpha(b)\leq\alpha(a\vee b)$.
Par ailleurs si $\alpha(a)\leq u$ et $\alpha(b)\leq u$ alors $a\leq\alpha^{-1}(u)$ et $b\leq\alpha^{-1}(u)$ car α^{-1} préserve l'ordre.
Ainsi $a\vee b\leq\alpha^{-1}(u)$; donc $\alpha(a\vee b)\leq\alpha(\alpha^{-1}(u))=u$ car α préserve l'ordre.
Donc $\alpha(a\vee b)\leq u$.
D'où $\alpha(a)\vee\alpha(b)=\alpha(a\vee b)$.
De façon analogue on montre que $\alpha(a)\wedge\alpha(b)=\alpha(a\wedge b)$.
D'où α est un isomorphisme des treillis $\mathbf{E}_1$ dans $\mathbf{E}_2$.

Proposition 1.3.2. *Toute bijection entre deux treillis préservant l'ordre n'est pas toujours un isomorphisme de treillis.*

Exemple.

Considérons les treillis $(\mathbf{Z}_4, \lesssim)$ où $\lesssim$ est la relation d'ordre sur $\mathbf{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ définie par :

$$\bar{x} \lesssim \bar{y} \Longleftrightarrow (\exists a \in \bar{x} / \quad a | y, \quad 0 \leq y \leq 3)$$

Et $(\mathbf{Z}_4, \leq)$ où $\leq$ est la restriction de l'ordre usuel de $\mathbb{R}$ sur $\mathbf{Z}_4$, (c'est -à-dire $\bar{0} \leq \bar{1} \leq \bar{2} \leq \bar{3}$) et $\alpha(\mathbf{Z}_4, \leq) \longmapsto (\mathbf{Z}_4, \lesssim)$ l'application définie par : $\alpha(\bar{0}) = \bar{1}, \alpha(\bar{1}) = \bar{2}, \alpha(\bar{2}) = \bar{3}$ et $\alpha(\bar{3}) = \bar{0}$.
α ainsi définie est une bijection sur ces deux treillis qui préserve l'ordre, mais n'est pas un isomorphisme des treillis. Car α^{-1} ne préserve pas l'ordre.
En effet $\alpha^{-1}(\bar{2}) \leq \alpha^{-1}(\bar{3})$ dans $(\mathbf{Z}_4, \leq)$ mais on n'a pas $\bar{2} \lesssim \bar{3}$ dans $(\mathbf{Z}_4, \lesssim)$.
C'est-à-dire que $\bar{1} \leq \bar{2}$ dans $(\mathbf{Z}_4, \leq)$ n'implique pas $\bar{2} \lesssim \bar{3}$.

Définition 1.3.3. *(Sous treillis)*

Soit $(\mathbf{E}, \vee, \wedge)$ est un treillis et $\mathbf{E}'$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{E}$ tel que pour tout pair d'éléments $\{a, b\}$ de $\mathbf{E}'$, $a \vee b$ et $a \wedge b$ sont dans $\mathbf{E}'$; on dit que $\mathbf{E}'$ muni de ces opérations induites est un sous-treillis de $\mathbf{E}$.

Si $(\mathbf{E}', \vee, \wedge)$ est un sous-treillis de $(\mathbf{E}, \vee, \wedge)$, alors pour tout $a, b \in \mathbf{E}$, on a :
$a \leq b$ dans $\mathbf{E}' \Longrightarrow a \leq b$ dans $\mathbf{E}$.

Définition 1.3.4. *Soit $\mathbf{E}_2$ un treillis , on dit qu'un treillis $\mathbf{E}_1$ est plongeable dans le treillis $\mathbf{E}_2$ s'il existe un sous-treillis de $\mathbf{E}_2$ isomorphe à $\mathbf{E}_1$. On dit dans ce cas que le treillis $\mathbf{E}_2$ contient une copie du treillis $\mathbf{E}_1$ comme sous-treillis.*

Définition 1.3.5. *Un ensemble non vide et ordonné $\mathbf{E}$ est complet si pour tout sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{E}$; $\sup(\mathbf{A})$ et $\inf(\mathbf{A})$ existent dans $\mathbf{E}$. on note $\sup(\mathbf{A}) = \vee\mathbf{A}$ et $\inf(\mathbf{A}) = \wedge\mathbf{A}$ respectivement. Tout ensemble non vide, ordonné et complet est un treillis et un treillis complet est un ensemble complet.*

Théorème 1.3.2. *Si $\mathbf{E}$ est un ensemble non vide et ordonné tel que $\wedge\mathbf{A}$ ou $\vee\mathbf{A}$ existe pour tout sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{E}$, alors $\mathbf{E}$ est un treillis complet.*

preuve . *Supposons $\wedge\mathbf{A}$ existe pour tout sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{E}$. Soit $\mathbf{A}^u$ l'ensemble des majorants de $\mathbf{A}$, alors $\wedge\mathbf{A}^u$ existe d'après l'hypothèse. Il est clair que $\wedge\mathbf{A}^u$ s'identifie à $\vee\mathbf{A}$.*
En effet soit $\gamma \in \mathbf{E}$ tel que $\forall a \in \mathbf{A}$, $a \leq \gamma$ alors $\gamma \in \mathbf{A}^u$ et donc $\wedge\mathbf{A}^u \leq \gamma$.

De façon analogue si $\vee\mathbf{A}$ existe pour tout sous-ensemble $\mathbf{A}$ de $\mathbf{E}$. Soit $\mathbf{A}^l$ l'ensemble des minorants de $\mathbf{A}$; alors $\vee\mathbf{A}^l$ s'identifie à $\wedge\mathbf{A}$.

Exemple 1.3.1. $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ *est un treillis complet.*
$(\mathcal{O}, \subseteq)$ *l'ensemble des ouverts d'un espace topologique* $\mathbf{E}$*, muni de l'inclusion est un treillis complet.*

Définition 1.3.6. *Un sous-treillis* $\mathbf{E}'$ *d'un treillis complet* $(\mathbf{E}, \wedge, \vee)$ *est dit, un sous-treillis complet si pour tous sous-ensemble* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{E}'$*, les éléments* $\vee\mathbf{A}$ *et* $\wedge\mathbf{A}$ *définis dans* $\mathbf{E}$ *sont dans* $\mathbf{E}'$*.*

Un treillis complet peut avoir un sous treillis non complet.

Exemple 1.3.2. $(\mathbb{R}, \leq)$ *est un sous-treillis de* $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ *qui n'est pas complet.*
Car $\mathbb{R}_+$ *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *qui n'admet pas de borne supérieure.*

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

ESPACE DE RIESZ

2.1 Structure ordonnée des espaces de Riesz

Un vecteur x d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ordonné $(\mathbf{E}, \leq)$ est dit positif si $0_{\mathbf{E}} \leq x$. L'ensemble des vecteurs positifs d'un espace vectoriel ordonné $\mathbf{E}$, est noté par $\mathbf{E}^+ = \{x \in \mathbf{E};\quad 0_{\mathbf{E}} \leq x\}$. On l'appelle le *cône* positif de $\mathbf{E}$.

On admettra dans la suite la notation $0 \leq x$ qui signifie $0_{\mathbf{E}} \leq x$ et $y \geq x$ pour dire que $x \leq y$.

Définition 2.1.1. ***(espace de Riesz)***

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel, $\mathbf{E}$ est un espace de Riesz, s'il est un espace vectoriel ordonné dans le quel tout pair des vecteurs $\{x, y\}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Dans la suite, on note $x \wedge y = inf\{x, y\}$ et $x \vee y = sup\{x, y\}$ sur un espace de Riesz.

Proposition 2.1.1. *Si $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de Riesz; en munissant $\mathbf{E}$ des opérations $\vee$ et $\wedge$ qui désignent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure. Le triplet $(\mathbf{E}, \vee, \wedge)$ est un treillis sur l'espace de Riesz $\mathbf{E}$.*

Définition 2.1.2. *Soit $\mathbf{E}$ un espace de Riesz, pour tout vecteur x de $\mathbf{E}$, on définit par :*
$x^+ = x \vee 0;\quad x^- = (-x) \vee 0\quad$ *et* $\quad |x| = x \vee (-x)$.
Les éléments x^+, x^- et $|x|$ sont respectivement appelés la partie positive, la partie négative et la valeur absolue du vecteur x.

Définition 2.1.3. *Soit (x_α) une suite d'éléments d'un espace vectoriel ordonné $\mathbf{E}$, sur un corps ordonné $\mathbb{K}$; $\quad (x_\alpha)$ est dite décroissante (on note $(x_\alpha) \downarrow$) si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \geq \beta \implies x_\alpha \leq x_\beta$.*
$(x_\alpha) \downarrow x$ signifie que $(x_\alpha) \downarrow$ et $\inf\{x_\alpha\} = x$.
La suite (x_α) est dite croissante (on note $(x_\alpha) \uparrow$) si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha \geq \beta \implies x_\alpha \geq x_\beta$.
$(x_\alpha) \uparrow x$ signifie que $(x_\alpha) \uparrow$ et $\sup\{x_\alpha\} = x$.

Propriété 2.1.1. *Sur un réel espace vectoriel; $\quad \forall x > 0$ on dit que la suite (nx) est non majorée dans $\mathbb{R}$ équivaut à dire que la suite $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition **2.1.4.** *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace vectoriel ordonné ;* ***E*** *est dit Archimèdien, si* $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ *dans* $\mathbf{E}$*,* $\forall x \in \mathbf{E}^+$.

Dans la suite, on suppose que tout espace de Riesz est Archimedien.

Définition **2.1.5.** *Dans un espace vectoriel de Riesz, deux vecteurs* x *et* y *sont dits orthogonaux (noté* $x \perp y$*) si* $|x| \wedge |y| = 0$*.*

Deux sous-ensembles **A** et **B** d'un espace de Riesz sont dits orthogonaux (on note : $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$) si $a \perp b \quad \forall a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$.
Si **A** est un sous-ensemble non vide d'un espace de Riesz, alors on note $\mathbf{A^d}$ l'orthogonale de A ; c'est-à-dire :
$\mathbf{A^d} = \{x \in \mathbf{E}; x \perp y \quad \forall y \in \mathbf{A}\}$.
On note aussi $(\mathbf{A^d})^d = \mathbf{A^{dd}}$.
On a : $\mathbf{A} \cap \mathbf{A^d} = \{0\}$

Proposition **2.1.2.** [1] *Si* $\mathbf{A}$ *est un sous-ensemble non vide d'un espace de Riesz* $\mathbf{E}$ *tel que la borne supérieure de* $\mathbf{A}$ *existe, alors le sous-ensemble noté* $-\mathbf{A} = \{-x, x \in \mathbf{A}\}$ *admet une borne inférieure et on a :* $\inf(-\mathbf{A}) = -\sup(\mathbf{A})$.

1- $\forall x \in \mathbf{E}, \quad \sup(x + \mathbf{A}) = x + \sup(\mathbf{A})$*;*

2- $\forall \alpha \geq 0, \quad \sup(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \sup(\mathbf{A})$.

2.2 Propriétés des opérateurs sur les espaces de Riesz

Théorème **2.2.1.** *Si* x, y, z *sont des éléments d'un réel espace de Riesz* $\mathbf{E}$*, alors :*

1- $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *et* $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$*;*

2- $x + y = x \vee y + x \wedge y$*;*

3- $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ *et* $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$*;*

4- $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ *et* $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y) \quad \forall \alpha \geq 0$.

preuve . *1-) On sait que* $x \leq (x \vee y)$ *alors* $-x \geq -(x \vee y)$ *et* $y \leq (x \vee y)$ *alors* $-y \geq -(x \vee y)$*; donc* $-(x) \wedge (-y) \geq -(x \vee y)$*;*
c'est-à dire $-(x \vee y)$ *est un minorant de l'ensemble* $\{-x, -y\}$.
Soit $z \in \mathbf{E}$ *tel que* $-x \geq z$ *et* $-y \geq z$*, alors*
$x \leq -z$ *et* $y \leq -z$*, donc* $x \vee y \leq -z$*, c'est -à dire* $-(x \vee y) \geq z$*.*

Donc $-(x \vee y)$ *est la le plus grand des minorants de l'ensemble* $\{-x, -y\}$ *;*

d'où $-(x \vee y) = [(-x) \wedge (-y)]$

c'est-à-dire $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$.

On sait également que $x \geq (x \wedge y)$ *alors* $-x \leq -(x \wedge y)$ *et*

$y \geq (x \wedge y)$ *alors* $-y \leq -(x \wedge y)$ *;*

donc $-(x) \vee (-y) \leq -(x \wedge y)$ *; c'est-à dire* $-(x \wedge y)$ *est un majorant de l'ensemble* $\{-x, -y\}$.

Soit $z \in \mathbf{E}$ *tel que* $-x \leq z$ *et* $-y \leq z$ *alors* $x \geq -z$ *et* $y \geq -z$,

donc $x \wedge y \geq -z$ *c'est -à dire* $-(x \wedge y) \leq z$.

Donc $-(x \wedge y)$ *est la le plus petit des majorants de l'ensemble* $\{-x, -y\}$ *;*

d'où $-(x \wedge y) = [(-x) \vee (-y)]$,

c'est-à-dire $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$.

2-) On sait que $y \leq x \vee y$ *alors* $y - (x \vee y) \leq 0$ *; donc* $x + y - (x \vee y) \leq x$.

De manière analogue on a $x + y - (x \vee y) \leq y$.

Donc $x + y - (x \vee y) \leq x \wedge y$ *; c'est-à-dire* $x + y \leq (x \vee y) + (x \wedge y)$.

Par ailleurs $y \geq (x \wedge y)$ *alors* $y - (x \wedge y) \geq 0$ *; donc* $x + y - (x \wedge y) \geq x$.

De même manière on a $x + y - (x \wedge y) \geq y$.

Donc $x + y - (x \wedge y) \geq x \vee y$. *c'est-à-dire* $x + y \geq (x \vee y) + (x \wedge y)$.

Par conséquent $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$.

3-) On sait que $y \leq y \vee z$ *alors* $x + y \leq x + (y \vee z)$ *et*

$z \leq y \vee z$ *alors* $x + z \leq x + (y \vee z)$ *;*

donc $(x + z) \vee (x + z) \leq x + (y \vee z)$.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} y &= -x + (x + y) \\ &\leq -x + (x + y) \vee (x + z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z &= -x + (x + z) \\ &\leq -x + (x + y) \vee (x + z) \end{aligned}$$

Donc $y \vee z \leq -x + (x + y) \vee (x + z)$ *; c'est-a- dire* $x + (y \vee z) \leq (x + y) \vee (x + z)$.

Par conséquent $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$.

De façon analogue on a : $y \geq y \wedge z$ *implique* $x + y \geq x + (y \wedge z)$ *et*

$z \geq y \wedge z$ *implique* $x + z \geq x + (y \wedge z)$ *;*

donc $(x + z) \wedge (y + z) \geq x + (y \vee z)$.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} y &= -x+(x+y) \\ &\geq -x+(x+y)\wedge(x+z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z &= -x+(x+z) \\ &\geq -x+(x+y)\wedge(x+z) \end{aligned}$$

Donc $y\wedge z \geq -x+(x+y)\wedge(x+z)$ *; c'est-a- dire* $x+(y\wedge z)\geq(x+y)\wedge(x+z)$.

Par conséquent $x+(y\wedge z)=(x+y)\wedge(x+z)$.

4-) On a $x\leq x\vee y$ *et* $y\leq x\vee y$ *alors* $\alpha x\leq\alpha(x\vee y)$ *et* $\alpha y\leq\alpha(x\vee y)$ *;*

donc $(\alpha x)\vee(\alpha y)\leq\alpha(x\vee y)$ *; c'est-à-dire* $\alpha(x\vee y)$ *est un majorant de l'ensemble* $\{\alpha x,\alpha y\}$.

Soit $z\in\mathbf{E}$ *tel que* $\alpha x\leq z$ *et* $\alpha y\leq z$ $\forall\alpha>0$, *alors* $x\leq\frac{1}{\alpha}z$ *et* $y\leq\frac{1}{\alpha}z$,

donc $x\vee y\leq\frac{1}{\alpha}z$ *c'est-à dire* $\alpha(x\vee y)\leq z$.

Ce dernière résultat est toujours vrai pour $\alpha=0$ *;*

donc $\alpha(x\vee y)$ *est le plus petit des majorants de l'ensemble* $\{\alpha x;\alpha y\}$.

D'où $\alpha(x\vee y)=(\alpha x)\vee(\alpha y)$ $\forall\alpha\geq 0$.

De façon analogue on a $x\geq x\wedge y$ *et* $y\geq x\wedge y$ *alors* $\alpha x\geq\alpha(x\wedge y)$ *et* $\alpha y\geq\alpha(x\wedge y)$ *;*

donc $(\alpha x)\wedge(\alpha y)\geq\alpha(x\wedge y)$ *;*

c'est-à-dire $\alpha(x\wedge y)$ *est un minorant de l'ensemble* $\{\alpha x,\alpha y\}$.

Soit $z\in\mathbf{E}$ *tel que* $\alpha x\geq z$ *et* $\alpha y\geq z$ $\forall\alpha>0$, *alors* $x\geq\frac{1}{\alpha}z$ *et* $y\geq\frac{1}{\alpha}z$,

donc $x\wedge y\geq\frac{1}{\alpha}z$ *c'est-à dire* $\alpha(x\wedge y)\geq z$.

Ce dernière résultat est toujours vrai pour $\alpha=0$ *;*

donc $\alpha(x\wedge y)$ *est le plus grand des minorants de l'ensemble* $\{\alpha x;\alpha y\}$.

D'où $\alpha(x\wedge y)=(\alpha x)\wedge(\alpha y)\quad\forall\alpha\geq 0$.

Théorème 2.2.2. *Si* $\mathbf{A}$ *est un sous-ensemble non vide d'un espace de Riesz* $\mathbf{E}$. *si la borne supérieure de* $\mathbf{A}$ *existe, alors* $\forall x\in\mathbf{E}$, *l'ensemble* $(x\wedge\mathbf{A})=\{x\wedge a;a\in\mathbf{A}\}$ *admet une borne supérieure et on a :* $\sup(x\wedge\mathbf{A})=x\wedge\sup(\mathbf{A})$.

Et si la borne inférieure de $\mathbf{A}$ *existe, alors* $\forall x\in\mathbf{E}$, *l'ensemble* $(x\vee\mathbf{A})=\{x\vee a;a\in\mathbf{A}\}$ *admet une borne inférieure et on a :* $\inf(x\vee\mathbf{A})=x\vee\inf(\mathbf{A})$.

preuve . *Supposons que* $\mathbf{A}$ *admet une borne supérieure et posons* $y=\sup(\mathbf{A})$ *et soit* $x\in\mathbf{E}$.

Il est clair que $\forall a\in\mathbf{A}$ *;* $x\wedge a\leq x\wedge y$,

donc $x\wedge y$ *est un majorant de l'ensemble* $x\wedge\mathbf{A}$.

Soit $z \in \mathbf{E}$ *tel que* $\forall a \in \mathbf{A}$, $x \wedge a \leq z$ *; d'apres le Théorème 2.2.1- 2) on a :*

$$\begin{aligned} a &= (x \wedge a) + (x \vee a) - x \\ &\leq z + (x \vee y) - x. \end{aligned}$$

En particulier $y \leq z + (x \vee y) - x$.

Ce qui implique

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x + y - (x \vee y) \\ &\leq z. \end{aligned}$$

De ce qui précède, $\sup(x \wedge \mathbf{A})$ *existe et que* $\sup(x \wedge \mathbf{A}) = x \wedge \sup(A)$.

La borne inférieure de $x \vee \mathbf{A}$ *se démontre de manière analogue.*

Lemme 2.2.1. *Si* $x, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{E}^+$, *où* $\mathbf{E}$ *est un espace de Riesz ; alors :*
$x \wedge (x_1 + x_2 + ... + x_n) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 + ... + x \wedge x_n$.

preuve. *Par récurrence sur* n.

Pour $n = 2$, *posons* $y = x \wedge (x_1 + x_2)$.

Il est clair que $y \leq x_1 + x_2$ *alors* $y - x_1 \leq x_2$ *;*

or $y - x_1 \leq y \leq x$ *donc* $y - x_1 \leq x \wedge x_2$ *;*

ce qui entraine $y - (x \wedge x_2) \leq x_1$ *;*

or $y - (x \wedge x_2) \leq y \leq x$ *alors* $y - (x \wedge x_2) \leq x \wedge x_1$ *; c'est-à-dire* $y \leq (x \wedge x_1) + (x \wedge x_2)$.

D'où $x \wedge (x_1 + x_2) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ *supposons que le résultat soit vrai au rang* n *; on a*

$$\begin{aligned} x \wedge (x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}) &= x \wedge ((x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_{n+1}) \\ &\leq (x \wedge (x_1 + x_2 + ... + x_n)) + (x \wedge x_{n+1}) \\ &\leq (x \wedge x_1 + x \wedge x_2 + ... + x \wedge x_n) + (x \wedge x_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $x \wedge (x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1}) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 + ... + x \wedge x_n + x \wedge x_{n+1}$.

C'est-à-dire le résultat est vrais au rang $n + 1$ *;*

par conséquent $\forall n \geq 2$, $\quad x \wedge (x_1 + x_2 + ... + x_n) \leq x \wedge x_1 + x \wedge x_2 + ... + x \wedge x_n$.

Théorème 2.2.3. [1] *Si x est un élément d'un espace de Riesz* $\mathbf{E}$, *alors :*

1- $x = x^+ - x^-$ *;*

2- $|x| = x^+ + x^-$ *;*

3- $x^+ \wedge x^- = 0$.

preuve . *1-) On a*

$$\begin{aligned} x^+ - x^- &= x \vee 0 - ((-x) \vee 0) \\ &= x \vee 0 + x \wedge 0 \\ &= x + 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

2-) On a

$$\begin{aligned} |x| &= x \vee (-x) \\ &= (x + x) \vee (-x + x) - x \\ &= (2x) \vee 0 - x \\ &= 2(x \vee 0) - (x^+ - x^-) \\ &= 2x^+ - x^+ + x^- \\ &= x^+ + x^-. \end{aligned}$$

3-) On a

$$\begin{aligned} x^+ \wedge x^- &= (x^+ - x^-) \wedge (x^- - x^-) + x^- \\ &= x \wedge 0 + x^- \\ &= -x^- + x^- = 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1. *Lorsque la décomposition du Théorème 2.2.2. est satisfaite , il découle que :*

1- Si $x = y - z$ avec $y, z \in \mathbf{E}^+$ alors $y \geq x^+$ et $z \geq x^-$;

2- Si $x = y - z$ avec $y \wedge z = 0$ alors $y = x^+$ et $z = x^-$.

preuve . *1-) Supposons que $x = y - z$ avec y, z des éléments positifs de **E**.*
On sait que $x = x^+ - x^-$ alors

$$\begin{aligned} x^+ &= x + x^- \\ &= y - z + x^- \\ &\leq y + x^-. \end{aligned}$$

par ailleurs

$$\begin{aligned} x^+ &= x^+ \wedge x^+ \\ &\leq x^+ \wedge (y + x^-) \\ &\leq x^+ \wedge y + x^+ \wedge x^-. \end{aligned}$$

Donc $x^+ \leq x^+ \wedge y$ car $x^+ \wedge x^- = 0$.

D'où $x^+ \leq y$.

De manière analogue on a :

$$\begin{aligned} x^- &= x^+ - x \\ &= x^+ + z - y \\ &\leq x^+ + z \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^- &= x^- \wedge x^- \\ &\leq x^- \wedge (x^+ + z) \\ &\leq x^- \wedge x^+ + x^- \wedge z \\ &= x^- \wedge z. \end{aligned}$$

Donc $x^- \leq z$.

2-) On suppose $x = y - z$ et $y \wedge z = 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^+ &= (y - z) \vee 0 \\ &= y + (-z) \vee (-y) \\ &= y - (y \wedge z) \\ &= y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^- &= -(y - z) \vee 0 \\ &= z + (-y) \vee (-z) \\ &= z - (y \wedge z) \\ &= z. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.4. [1] *Si x, y sont des éléments d'un espace de Riesz $\mathbf{E}$, alors :*

1- $x = (x - y)^+ + (x \wedge y)$*;*

2- $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$*;* *et* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$*;*

3- $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$*;*

4- $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$*;*

5- $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$*;*

6- $|x + y| \wedge |x - y| = ||x| - |y||$*;*

7- $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$.

preuve . *1) D'après le Théorème 2.2.1, on a :*

$\forall x, y \in$ ***E***, $x + y = (x \wedge y) + (x \wedge y)$ *; alors*

$$\begin{aligned} x &= (x \wedge y) + (x \vee y) - y \\ &= (x \wedge y) + ((x - y) \vee (y - y)) + y - y \\ &= (x \wedge y) + ((x - y) \vee 0) \\ &= (x - y)^+ + (x \wedge y). \end{aligned}$$

2) on a :

$$\begin{aligned} x + y + |x - y| &= x + y + ((x - y) \vee (-x + y)) \\ &= (x + y + x - y) \vee (x + y - x + y) \\ &= 2x \vee 2y \\ &= 2(x \vee y). \end{aligned}$$

D'où $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

On a aussi

$$\begin{aligned} x + y - |x - y| &= x + y - ((x - y) \vee (-x + y)) \\ &= x + y + ((x - y) \wedge (-x + y)) \\ &= (x + y + x - y) \wedge (x + y - x + y)| \\ &= (2x) \wedge (2y) \\ &= 2(x \wedge y). \end{aligned}$$

D'où $x \wedge y$=$\frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

3) On déduit de la question 2) que :

$$\begin{aligned} (x \vee y) - (x \wedge y) &= \tfrac{1}{2}(x + y + |x - y|) - \tfrac{1}{2}(x + y - |x - y|) \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

4) On a :

$$\begin{aligned} |x + y| + |x - y| &= ((x + y) \vee (-x - y)) + |x - y| \\ &= (x + y + |x - y|) \vee (-x - y + |x - y|) \\ &= 2(x \vee y) \vee 2(-x \vee -y) \\ &= 2[(x \vee -x) \vee (y \vee -y)] \\ &= 2(|x| \vee |y|). \end{aligned}$$

D'où $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$.

5) On a :

$$\begin{aligned}||x+y|-|x-y|| &= 2(|x+y|\vee|x-y|)-(|x+y|+|x-y|)\\ &= 2(|x|+|y|)-2(|x|\vee|y|)\\ &= 2(|x|+|y|-(|x|\vee|y|))\\ &= 2(|x|+|y|+(-|x|\wedge-|y|))\\ &= 2(|x|\wedge|y|).\end{aligned}$$

D'où $|x|\wedge|y|$=$\frac{1}{2}(|x+y|-|x-y|)$.

6) D'après la question 5) on a :

$$\begin{aligned}|x+y|\wedge|x-y| &= \tfrac{1}{2}||(x+y)+(x-y)|-|(x+y)-(x-y)||\\ &= \tfrac{1}{2}||2x|-|2y||\\ &= ||x|-|y||.\end{aligned}$$

7) D'après la question 4), on a :

$$\begin{aligned}|x+y|\vee|x-y| &= \tfrac{1}{2}(|(x+y)+(x-y)|+|(x+y)-(x-y)|\\ &= \tfrac{1}{2}(|2x|+|2y|)\\ &= |x|+|y|.\end{aligned}$$

En outre on a :

$$\begin{aligned}|x+y|\vee|x-y| &= ((x+y)\vee(-x-y))\vee((x-y)\vee(-x+y))\\ &= \{(x+y)\vee(x-y)\}\vee\{(-x-y)\vee(-x+y)\}\\ &= (x+(y\vee(-y)))\vee(-x+(y\vee(-y)))\\ &= (x\vee(-x))+(y\vee(-y))\\ &= |x|+|y|.\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. *D'après le Théorème 2.2.3, 5) ;* $x\perp y$ *si et seulement si* $|x+y|=|x-y|$.

Théorème 2.2.5. $\forall x,y,z$ *des éléments d'un espace de Riesz* $\mathbf{E}$*, on a*

1- $||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|$ *(inégalité triangulaire).*

2- $|x\vee z-y\vee z|\leq|x-y|$ *et* $|x\wedge z-y\wedge z|\leq|x-y|$; *(inégalité de Birkhoff).*

preuve . *1) Il est clair que* $x+y\leq|x|+|y|$ *et* $-x-y\leq|x|+|y|$ *; donc*

$$\begin{aligned}|x+y| &= (x+y)\vee-(x+y)\\ &\leq |x|+|y|.\end{aligned}$$

Nous observons que

$$\begin{aligned} |x| &= |(x+y)-y| \\ &\leq |x+y|+|y|. \end{aligned}$$

Donc $|x|-|y| \leq |x+y|$

De même $-|x|+|y| \leq |x+y|$ *;* *donc*

$$\begin{aligned} ||x|-|y|| &= (|x|-|y|) \vee (-|x|+|y|) \\ &\leq |x+y|. \end{aligned}$$

D'où $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.$

2) on a

$$\begin{aligned} (x \vee z)-(y \vee z) &= ((x-z) \vee 0+z)-((y-z) \vee 0+z) \\ &= (x-z) \vee 0-(y-z) \vee 0 \\ &= (x-z)^{+}-(y-z)^{+} \\ &= ((x-y)+(y-z))^{+}-(y-z)^{+} \\ &\leq (x-y)^{+}+(y-z)^{+}-(y-z)^{+} \\ &= (x-y)^{+} \\ &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

De manière analogue on a

$-(x \vee z)+(y \vee z) \leq |x-y|$

Donc $|(x \vee y)-(y \vee z)| \leq |x-y|$

On a également

$$\begin{aligned} (x \wedge z)-(y \wedge z) &= ((x-z) \wedge 0+z)-((y-z) \wedge 0+z) \\ &= (x-z) \wedge 0-(y-z) \wedge 0 \\ &= -((-x+z) \vee 0)+(-y+z) \vee 0 \\ &= -(-x+z)^{+}+(-y+z)^{+} \\ &= -(-x+z)^{+}+((-y+x)+(-x+z))^{+} \\ &\leq -(-x+z)^{+}+(x-y)^{+}+(-x+z)^{+} \\ &= (x-y)^{+} \\ &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

et $-(x \wedge z)+(y \wedge z) \leq |x-y|$

donc $|x \wedge z-y \wedge z| \leq |x-y|$.

En particulier, dans un espace de Riesz on a

$$|x^{+}-y^{+}| \leq |x-y|$$

et

$$|x^- - y^-| \leq |x - y|.$$

Théorème 2.2.6. *(Propriété de décomposition)* [1]

Si $|x| \leq |y_1 + y_2 + ... + y_n|$ *dans un espace de Riesz, alors il existe* $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{E}$ *tels que* $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ *et* $|x_i| \leq |y_i| \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$.
De plus si x est positif; alors $x_i \geq 0 \quad \forall i = \{1, 2, ..., n\}$.

preuve . *Par récurrence sur* n.

Pour $n = 2$ *on a*
soit $|x| \leq |y_1 + y_2|$*; posons* $x_1 = (x \vee -|y_1|) \wedge |y_1|$.
Il est clair que $|x_1| \leq |y_1|$ *et si* $x \geq 0$ *alors* $0 \leq x_1 \leq x$.
Et puis prendre $x_2 = x - x_1$.
En effet

$$\begin{aligned} x_2 &= x - ((x \vee -|y_1|) \wedge |y_1|) \\ &= [0 \wedge (x + |y_1|) \vee (x - |y_1|)]. \end{aligned}$$

Par ailleurs $|x| \leq |y_1| + |y_2|$ *ce qui implique*

$$-|y_1| - |y_2| \leq x \leq |y_1| + |y_2|.$$

Il découle de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} -|y_2| &= -|y_2| \wedge 0 \\ &\leq (x + |y_1|) \wedge 0 \\ &\leq x_2 \\ &\leq 0 \vee (x - |y_1|) \\ &\leq |y_2|; \end{aligned}$$

donc $|x_2| \leq |y_2|$.
Le résultat est vrais pour $n = 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *supposons le résultat vrai au rang* n.
Si $|z| = |y_1 + y_2 + ... + y_n + y_{n+1}|$*; posons* x_{n+1}=$(z \vee -|y_{n+1}|) \wedge |y_{n+1}|$.
Il est clair que $|x_{n+1}| \leq |y_{n+1}|$.
prendre $x = z - x_{n+1}$*;*
d'après le résultat précédant pour $n = 2$ *on a :* $|x| \leq |y_1 + y_2 + ... + y_n|$,
et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $x_1, x_2, ..., x_n$ *tels que* $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$ *et*

$|x_i| \leq |y_i| \; \forall i = 1, 2, ..., n.$

Donc le résultat est vrai au rang $n + 1$.

D'où la démonstration.

Théorème 2.2.7. *(Propriété de décomposition Riesz)* [1]

Soit $\mathbf{E}$ *un espace de Riesz; si* $x_1, x_2, ..., x_n$ *et* $y_1, y_2, ..., y_m \in \mathbf{E}^+$ *tels que* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$*; alors existe une collection finie* $\{z_{ij}; \quad i = 1, 2, ..., n \quad j = 1, 2, ..., m\}$ *des vecteurs positifs tel que* $x_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$ $\quad y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \quad \forall j = 1, 2, ..., m$ *et* $\quad x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{ij}.$

preuve. *Par récurrence sur* m.

Pour $m = 1$*, d'après le théorème 2.2.5, on a le résultat.*

Soit $m \geq 1$ *supposons que le résultat soit vrai au rang* m.

Si $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m+1} y_j$ *avec* $x_i, y_j \in \mathbf{E}^+$*, alors* $\sum_{j=1}^{m} y_j \leq \sum_{i=1}^{n} x_i.$

Il découle du théorème 2.2.5 qu'il existe $u_1, u_2, ..., u_n$ *tels que* $0 \leq u_i \leq x_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n$ *et* $\sum_{i}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{m} y_j.$

D'après l'hypothèse de récurrence il existe un ensemble fini des vecteurs positifs

$\{z_{ij} : i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m\}$ *tel que*

$u_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \quad \forall i = 1, 2, ..., n$ *et* $y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \quad \forall j = 1, 2, ..., m.$

Pour $i = 1, 2, ..., n$ *prendre* $z_{i,m+1} = x_i - u_i \geq 0.$

En outre l'ensemble $\{z_{ij} : i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m + 1\}$ *satisfait*

$x_i = \sum_{j=1}^{m+1} z_{ij} \quad \forall i = 1, 2, ..., n$ *et* $y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij}.$

Le résultat est vrai au rang $m + 1$.

D'où le résultat est vrai $\forall m \in \mathbb{N}^*$

CHAPITRE TROIS

TREILLIS DES OPÉRATEURS POSITIFS SUR DES ESPACES DE RIESZ

3.1 Construction de treillis des opérateurs positifs sur les espaces de Riesz

Définition 3.1.1. *Soient* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels ordonnés et* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *une application linéaire ; on dit que* $\mathcal{T}$ *est un opérateur positif si* $\mathcal{T}(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.
C'est-à-dire $\mathcal{T}(\mathbf{E}^+) \subseteq \mathbf{F}^+$ *et si* $x \leq y$ *alors* $\mathcal{T}(x) \leq \mathcal{T}(y)$. *On note* $\mathcal{T} \geq 0$.

Définition 3.1.2. *Soient* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels ordonnés,* $\mathbf{F}$ *un treillis,* $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *l'ensemble des fonctions définies de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$.
$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, *on définit :*
$[f \vee g](\omega)$=$max\{f(\omega), g(\omega)\}$;
$[f \wedge g](\omega)$=$min\{f(\omega), g(\omega)\}$.
$f \leq g$ *si et seulement si* $f(\omega) \leq g(\omega)$, $\forall \omega \in \mathbf{E}$.

Lemme 3.1.1. *Si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *sont deux ensembles partiellement ordonnés,* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *l'ensemble des applications de* $\mathbf{E}$ *vers* $\mathbf{F}$ *qui préservent l'ordre ; pour tout* $f, g \in \mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *on définit la relation d'ordre sur* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *par* $f \leq g$ *si et seulement si* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbf{E}$. *si* $\mathbf{F}$ *est un treillis alors* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *est un treillis.*

preuve . *Soient* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *sont deux ensembles partiellement ordonnés,* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *l'ensemble des applications de* $\mathbf{E}$ *vers* $\mathbf{F}$ *qui préservent l'ordre ; pour tout* $f, g \in \mathbf{E}^{\mathbf{F}}$, *on définit la relation d'ordre sur* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *par* $f \leq g$ *si et seulement si* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbf{E}$.
Supposons que $\mathbf{F}$ *est un treillis et montrons* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *l'est.*
Soient $f, g \in \mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *; montrons que* $\inf\{f, g\}$ *et* $\sup\{f, g\}$ *existent dans* $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$.
supposons que $f \leq g$, *alors* $\forall x \in \mathbf{E}$, $f(x) \leq g(x)$.

$x \in \mathbf{E}$, $\quad f(x), g(x) \in \mathbf{F}$ *et* $\mathbf{F}$ *est un treillis alors* $\inf\{f(x), g(x)\}$ *et* $\sup\{f(x), g(x)\}$ *existent dans* $\mathbf{F}$ *pour tout* $x \in \mathbf{E}$.

posons $a_x = \inf\{f(x), g(x)\}$ *et* $b_x = \sup\{f(x), g(x)\}$.

Soient $h : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *l'application définie par* $h(x) = a_x$ *et* $k : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ *l'application définie par* $k(x) = b_x$.

Montrons que h et k sont bien définies.

Soient $x, y \in \mathbf{E}$ *tels que* $x = y$ *alors* $f(x) = f(y)$ *et* $g(x) = g(y)$.

Alors $\inf\{f(x), g(x)\} = \inf\{f(y), g(y)\}$,

donc $a_x = a_y$ *c'est-à-dire* $h(x) = h(y)$.

De manière analogue on montre que $\sup\{f(x), g(x)\} = \sup\{f(y), g(y)\}$ *;*

donc $b_x = b_y$, *c'est-à-dire* $k(x) = k(y)$.

D'où h *et* k *sont bien définies.*

Soient $x, y \in \mathbf{E}$ *tels que* $x \leq y$ *alors* $f(x) \leq f(y)$ *et* $g(x) \leq g(y)$ *car* f *et* g *préservent l'ordre.*

Ainsi $\quad \inf\{f(x), g(x)\} \leq \inf\{f(y), g(y)\}$, $\quad$ *c'est-à-dire* $a_x \leq a_y$ *; ou encore* $h(x) \leq h(y)$

et $\sup\{f(x), g(x)\} \leq \sup\{f(y), g(y)\}$, $\quad$ *c'est-à-dire* $b_x \leq b_y$ *; ou encore* $k(x) \leq k(y)$.

Donc h *et* k *préservent l'ordre.*

D'où $h, k \in \mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *avec* $h = \inf\{f, g\}$ *et* $k = \sup\{f, g\}$.

Par conséquent $\mathbf{E}^{\mathbf{F}}$ *est un treillis.*

Si x *et* y *sont deux vecteurs d'un espace de Riesz* $\mathbf{E}$ *avec* $x \leq y$ *, alors l'intervalle* $[x, y]$ *est défini par :* $\qquad [x, y] = \{z \in \mathbf{E}, \quad x \leq z \leq y\}$.

Un sous ensemble $\mathbf{A}$ *d'un espace de Riesz* $\mathbf{E}$ *est dit majoré s'il existe un élément* $x \in \mathbf{E}$ *satisfaisant* $y \leq x \quad \forall y \in \mathbf{A}$.

$\mathbf{A}$ *est dit minoré s'il existe un élément* $x \in \mathbf{E}$ *satisfaisant* $x \leq y \quad \forall y \in \mathbf{A}$.

Et le sous ensemble $\mathbf{A}$ *d'un espace de Riesz est dit borné s'il est minoré et majoré (c'est qui équivaut à dire que* $\mathbf{A}$ *est contenu dans un intervalle borné de* $\mathbf{E}$*).*

Définition 3.1.3. *Un opérateur* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *entre deux espaces de Riesz est dit borné si l'image par* $\mathcal{T}$ *de tout sous ensemble borné de* $\mathbf{E}$ *est un sous ensemble borné de* $\mathbf{F}$.

L'ensemble des opérateurs bornés de $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$ *est noté par* $\mathcal{L}_b(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

Lemme 3.1.2. *Tout opérateur positif est borné et l'ensemble des opérateurs bornés* $\mathcal{L}_b(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *est un sous-ensemble ordonné de* $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.

preuve . *Soient* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *un opérateur positif entre deux espaces de Riesz et* $\mathbf{A}$ *un sous ensemble borné de* $\mathbf{E}$. $\mathcal{T}$ *étant un opérateur positif, il préserve l'ordre.*

En effet soient $x, y \in \mathbf{E}$ *tel que* $x \leq y$ *alors* $y - x \geq 0$*, donc* $\mathcal{T}(y - x) \geq 0$ *c'est-à-dire* $\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(x) \geq 0$ *ou mieux encore* $\mathcal{T}(y) \geq \mathcal{T}(x)$*.*
puisque $\mathbf{A}$ *est borné alors la borne inférieure et la borné supérieure de* $\mathbf{A}$ *existent et on a* $\forall a \in \mathbf{A}$ $\inf(\mathbf{A}) \leq a \leq \sup(\mathbf{A})$ *donc* $\mathcal{T}(\inf \mathbf{A}) \leq \mathcal{T}(a) \leq \mathcal{T}(\sup \mathbf{A})$*.*
D'où $\mathcal{T}$ *est borné.*

Sur l'ensemble des opérateurs bornés $\mathcal{L}_b(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *on définit la relation d'ordre par* $\forall f, g \in \mathcal{L}_b(\mathbf{E}, \mathbf{F})$*,* $f \leq g$ *si et seulement si* $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbf{E}$*.*

Corollaire 3.1.1. *Soit* $\mathbf{E}$ *un espace de Riesz;* $\mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *l'ensemble des opérateurs positifs de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{E}$*; pour tout* $f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *on définit la relation d'ordre sur* $\mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *par* $f \leq g$ *si et seulement si* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbf{E}$*. Alors* $\mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *est un treillis des opérateurs positifs sur l'espace de Riesz* $\mathbf{E}$*.*

preuve . $\mathbf{E}$ *étant un espace de Riesz alors* $\mathbf{E}$ *est un treillis.*
D'après le lemme 3.1.1, l'ensemble $\mathbf{E}^{\mathbf{E}}$ *des applications de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{E}$ *préservant l'ordre est un treillis.*
Or $\mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *l'ensemble des opérateurs positifs de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{E}$ *est contenu dans l'ensemble des opérateurs bornés de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{E}$ *qui lui est contenu* $\mathbf{E}^{\mathbf{E}}$*.*
C'est-à-dire $\mathcal{L}^+(\mathbf{E}) \subset \mathcal{L}_b(\mathbf{E}) \subset \mathbf{E}^{\mathbf{E}}$*.*
Donc $\mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *muni de l'ordre* $f \leq g$ *si et seulement si* $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbf{E}$ *est un sous-treillis de* $\mathbf{E}^{\mathbf{E}}$ *car* $\forall f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbf{E}) \quad \inf\{f, g\}$ *et* $\sup\{f, g\}$ *sont des opérateurs positifs.*
D'où $\mathcal{L}^+(\mathbf{E})$ *est un treillis des opérateurs positifs sur l'espace de Riesz* $\mathbf{E}$*.*

Lemme 3.1.3. *Si* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *est un opérateur positif entre deux espaces de Riesz, alors pour tout* $x \in \mathbf{E}$*,* $|\mathcal{T}x| \leq \mathcal{T}|x|$*.*

preuve . *On a :* $\forall x \in \mathbf{E}$*,* $+x \leq |x|$ *et* $-x \leq |x|$*; comme* $\mathcal{T}$ *est un opérateur positif (application linéaire), alors on aura* $+\mathcal{T}x \leq \mathcal{T}|x|$ *et* $-\mathcal{T}x \leq \mathcal{T}|x|$*.*
Donc $|\mathcal{T}x| \leq \mathcal{T}|x|$*.*

Définition 3.1.4. [2] *Pour tout opérateur positif* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *entre deux espaces de Riesz;* $|\mathcal{T}|$ *existe, c'est un opérateur positif et on a :*
$|\mathcal{T}|$=$\sup\{-\mathcal{T}, \mathcal{T}\}$ *dans* $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$*.*

Théorème 3.1.1. ***(Théorème de Kantorovich)***

On suppose que $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *sont deux espaces de Riesz et* $\mathbf{F}$ *Archmédien. On suppose de plus que l'application* $\mathcal{T} : \mathbf{E}^+ \to \mathbf{F}^+$ *est additive, c'est-à-dire* $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{E}^+$*.*

Alors $\mathcal{T}$ se prolonge en un opérateur positif sur $\mathbf{E}$, on note $\mathcal{T}$ et est définie par :

$\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(x^+) + \mathcal{T}(x^-) \quad \forall x \in \mathbf{E}$.

preuve . *Soit $\mathcal{T} : \mathbf{E}^+ \to \mathbf{F}^+$ une application additive ; considérons l'application $\mathcal{S} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ définie par :*

$\mathcal{S}(x)$= $\mathcal{S}(x^+) + \mathcal{S}(x^-)$.

Il est clair que $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x)$ $\forall x \in \mathbf{E}^+$ et $\mathcal{S}$ prolonge $\mathcal{T}$ sur tout $\mathbf{E}$ puisque $x = x^+ - x^-$ $\forall x \in \mathbf{E}$.

Il s'en suit que $\mathcal{S}$ est une application linéaire qui prolonge $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{E}$.

Cependant il reste à montre que $\mathcal{S}$ est additive et homogène.

***Additivité de** $\mathcal{S}$.*

Commençons par observe que $\forall x \in \mathbf{E}$, il existe $x_1, x_2 \in \mathbf{E}^+$ tel que $x = x_1 - x_2$.

Donc $\mathcal{S}(x) = \mathcal{T}(x_1) - \mathcal{T}(x_2)$.

En fixant $x \in \mathbf{E}$ et supposant que $x = x^+ - x^- = x_1 - x_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathbf{E}^+$,

on a $\quad x^+ + x_2 = x_1 + x^-$.

Par additivité de $\mathcal{T}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x^+) + \mathcal{T}(x_2) &= \mathcal{T}(x^+ + x_2) \\
&= \mathcal{T}(x_1 + x^-) \\
&= \mathcal{T}(x_1) + \mathcal{T}(x^-).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \mathcal{T}(x^+) - \mathcal{T}(x^-) \\
&= \mathcal{T}(x_1) - \mathcal{T}(x_2).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\mathcal{S}$ est bien définie.

De ce qui précède on montre que $\mathcal{S}$ est additive.

En effet soient $x, y \in \mathbf{E}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x+y) &= \mathcal{S}((x^+ + y^+) - (x^- + y^-)) \\
&= \mathcal{T}(x^+ + y^+) - \mathcal{T}(x^- + y^-) \\
&= \mathcal{T}(x^+) + \mathcal{T}(y^+) - \mathcal{T}(x^-) - \mathcal{T}(y^-) \\
&= (\mathcal{T}(x^+) - \mathcal{T}(x^-)) + (\mathcal{T}(y^+) - \mathcal{T}(y^-)) \\
&= \mathcal{S}(x) + \mathcal{S}(y).
\end{aligned}$$

En particulier l'additivité de $\mathcal{S}$ implique $\mathcal{S}(rx) = r\mathcal{S}(x)$ $\forall x \in \mathbf{E}$ et $r \in \mathbb{Q}$.

Il reste à montre que $\mathcal{S}$ est homogène.

Montrons d'abord que $\mathcal{S}$ est monotone.

On a : $\forall x, y \in \mathbf{E}$, $x \geq y$ *alors* $x - y \in \mathbf{E}^+$ *; donc*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &= \mathcal{S}((x-y)+y) \\
&= \mathcal{S}(x-y)+\mathcal{S}(y) \\
&= \mathcal{T}(x-y)+\mathcal{S}(y) \\
&\geq \mathcal{S}(y).
\end{aligned}$$

Soient $x \in \mathbf{E}^+$ *fixé* $\lambda \geq 0$ *et soient* $r_n \uparrow \lambda$ *et* $\delta_n \downarrow \lambda$ *des suites des rationnels positifs.*
On a $r_n x \leq \lambda x \leq \delta_n x$ *et par monotonicité de* $\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
r_n\mathcal{S}(x) &= \mathcal{S}(r_n x) \\
&\leq \mathcal{S}(\lambda x) \\
&\leq \mathcal{S}(\delta_n x) \\
&= \delta_n \mathcal{S}(x).
\end{aligned}$$

et comme $\mathbf{F}$ *est Archimédien alors* $\lambda\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(\lambda x)$.
Et si $x \in \mathbf{E}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\lambda x) &= \mathcal{S}((\lambda x^+)+(-\lambda x^-)) \\
&= \mathcal{S}(\lambda x^+)+\mathcal{S}(-\lambda x^-) \\
&= \lambda\mathcal{S}(x^+)-\lambda\mathcal{S}(x^-) \\
&= \lambda(\mathcal{T}(x^+)-\mathcal{T}(x^-)) \\
&= \lambda\mathcal{S}(x).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}$ *est homogène.*
D'où la preuve.

Théorème 3.1.2. *Soit* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *un opérateur positif entre deux espaces de Riesz avec* $\mathbf{F}$ *complet. Alors pour tout* $x \in \mathbf{E}^+$, *il existe un opérateur positif* $\mathcal{S} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *tel que :*

1- $0 \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ *;*

2- $\mathcal{S}(x) = \mathcal{T}(x)$ *;*

3- $\mathcal{S}(y) = 0 \quad \forall y$ *tel que* $y \perp x$.

preuve . *Soit* $x \in \mathbf{E}^+$ *fixé, définir* $\mathcal{S} : \mathbf{E}^+ \to \mathbf{F}^+$ *par* $\mathcal{S}(y) = \sup\{\mathcal{T}(y \wedge nx); n \in \mathbb{N}^*\}$.
La borne supérieure existe car $\mathbf{F}$ *est complet et la suite est majorée dans* $\mathbf{F}$ *par* $\mathcal{T}y$.
Nous constatons que $\mathcal{S}$ *est additif.*
En effet soient $x, y \in \mathbf{E}^+$, *comme* $(y+z) \wedge nx \leq (y \wedge nx) + (z \wedge nx)$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}((y+z)\wedge nx) &\leq \mathcal{T}(y\wedge nx)+\mathcal{T}(z\wedge nx) \\
&\leq \mathcal{S}(y)+\mathcal{S}(z).
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{S}(y+z) \leq \mathcal{S}(y) + \mathcal{S}(z)$.

Par ailleurs $\forall m, n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$(y \wedge nx) + (z \wedge mx) \leq (y+z) \wedge (n+m)x$ *; donc*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}(y \wedge nx) + \mathcal{T}(z \wedge mx) & \leq & \mathcal{T}((y+z) \wedge (n+m)x) \\ & \leq & \mathcal{S}(y+z) \qquad \forall n, m. \end{array}$$

Ce qui implique $\mathcal{S}(y) + \mathcal{S}(z) \leq \mathcal{S}(y+z)$.

par conséquent $\mathcal{S}(y+z) = \mathcal{S}(y) + \mathcal{S}(z)$.

C'est-à-dire $\mathcal{S}$ *est additif.*

D'où $\mathcal{S}$ *est prolongeable en un unique opérateur positif de* $\mathbf{E}$. *Et* $\mathcal{S}$ *vérifie les propriétés désirées.*

Théorème 3.1.3. [1] *Si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *sont deux espaces de Riesz avec* $\mathbf{F}$ *complet, alors pour tout* $\mathcal{T}, \mathcal{S} \in \mathcal{L}_b(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *et pour tout* $x \in \mathbf{E}^+$, *on a :*

1- $\{\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{S}(x_i) \vee \mathcal{T}(x_i)); \quad x_i \in \mathbf{E}^+, \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x\} \uparrow [\mathcal{S} \vee \mathcal{T}](x)$ *;*

2- $\{\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{S}(x_i) \wedge \mathcal{T}(x_i)); \quad x_i \in \mathbf{E}^+, \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x\} \downarrow [\mathcal{S} \wedge \mathcal{T}](x)$ *;*

3- $\{\sum_{i=1}^{n} |\mathcal{T}(x_i)|; \quad x_i \in \mathbf{E}^+, \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x\} \uparrow |\mathcal{T}|(x)$.

preuve . *Considérons la suite* $\boldsymbol{D} = \{\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{S}(x_i) \vee \mathcal{T}(x_i)); \quad x_i \in \mathbf{E}^+, \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x\}$.

Puisque $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ *avec* $\forall x_i \in \mathbf{E}^+$ *alors*

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{S}(x_i) \vee \mathcal{T}(x_i)) & \leq & \sum_{i=1}^{n}[(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})(x_i)] \vee [(\mathcal{S} \vee \mathcal{T})(x_i)] \\ & = & [\mathcal{S} \vee \mathcal{T}](x). \end{array}$$

Nous observons que $\boldsymbol{D} \leq [\mathcal{S} \vee \mathcal{T}](x)$.

En outre si $\boldsymbol{D} \leq \boldsymbol{U}$ *alors* $\forall z, y \in \mathbf{E}^+$ *avec* $y + z = x$ *nous avons :*

$\mathcal{S}(y) + \mathcal{T}(z) \leq \mathcal{S}(y) \vee \mathcal{T}(y) + \mathcal{S}(z) \vee \mathcal{T}(z) \leq \boldsymbol{U}$

par conséquent

$$\begin{array}{rcl} [\mathcal{S} \vee \mathcal{T}](x) & = & \sup\{\mathcal{S}(y) + \mathcal{T}(z) : \quad y, z \in \mathbf{E}^+ \quad et \quad y + z = x\} \\ & \leq & \boldsymbol{U}. \end{array}$$

Donc $\sup \boldsymbol{D} = [\mathcal{S} \vee \mathcal{T}](x)$. *Il reste à montrer que* $\boldsymbol{D}$ *est croissant.*

Pour cela soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j$ *avec* $x_i, y_j \in \mathbf{E}^+$.

Par le théorème 2.2.6 ; il existe une collection finie $\{z_{ij};\quad i=1,2,...,n\quad j=1,2,...,m\}$ *des vecteurs positifs tel que*
$x_i=\sum_{j=1}^{m}z_{ij}$ *pour tout* $i=1,2,...,n$ *et* $y_j=\sum_{i=1}^{n}z_{ij}$ *pour tout* $j=1,2,...,m$.
En particulier nous avons $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}z_{ij}=x$,
En utilisant l'expression $x\vee y=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ *nous avons :*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{S}(x_i)\vee\mathcal{T}(x_i)) &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\mathcal{S}(x_i)+\mathcal{T}(x_i)+|\mathcal{S}(x_i)-\mathcal{T}(x_i)|]\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m}\mathcal{S}(z_{ij})+\sum_{j=1}^{m}\mathcal{T}(z_{ij})+|\sum_{j=1}^{m}\{\mathcal{S}(z_{ij})-\mathcal{T}(z_{ij})\}|]\\
&\leq \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{m}\{\mathcal{S}(z_{ij})+\mathcal{T}(z_{ij})+|\mathcal{S}(z_{ij})-\mathcal{T}(z_{ij})|\}]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathcal{S}(z_{ij})\vee\mathcal{T}(z_{ij}).
\end{aligned}$$

De façon analogue nous obtenons $\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{S}(y_i)\vee\mathcal{T}(y_i))\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathcal{S}(z_{ij})\vee\mathcal{T}(z_{ij})$.
Donc ***D*** *est croissant.*

2) Utiliser 1) et le fait que $\mathcal{T}\wedge\mathcal{S}=-[(-\mathcal{T})\vee(-\mathcal{S})]$.

3)Utiliser 1) et la propriété $|\mathcal{T}|=\mathcal{T}\vee(-\mathcal{T})$.

Le résultat suivent présente une importante propriété d'approximation des opérateurs positifs.

Théorème 3.1.4. [1] *Si* $\mathcal{T}:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ *est un opérateur positif entre deux espaces de Riesz avec* $\mathbf{F}$ *complet, alors pour* $x\in\mathbf{E}$*, nous avons :*

1- $\mathcal{T}(x^+)=\sup\{\mathcal{S}(x):\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F});\quad 0\leq\mathcal{S}\leq\mathcal{T}\}$ *;*

2- $\mathcal{T}(x^-)=\sup\{-\mathcal{S}(x):\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F});\quad 0\leq\mathcal{S}\leq\mathcal{T}\}$ *;*

3- $\mathcal{T}(|x|)=\sup\{\mathcal{S}(x):\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F});\quad -\mathcal{T}\leq\mathcal{S}\leq\mathcal{T}\}$ *;*

preuve . *1) Soit* $x\in\mathbf{E}^+$ *fixé, il existe un opérateur positif* $\mathcal{R}:\mathbf{E}\to\mathbf{F}$ *tel que* $0\leq\mathcal{R}\leq\mathcal{T}$ *d'après le théorème 3.1.2.*
$\mathcal{R}(x^+)=\mathcal{T}(x^+)$ *et* $\mathcal{R}(x^-)=0$.
Ainsi $\mathcal{T}(x^+)=\mathcal{R}(x)$.

En outre si $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ *satisfait* $0\leq\mathcal{S}\leq\mathcal{T}$ *alors nous avons :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(x) &\leq \mathcal{S}(x^+)\\
&\leq \mathcal{T}(x^+).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) Appliquer 1) en prenant $x^- = (-x)^+$.

3) Si l'opérateur $\mathcal{S} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *satisfait* $-\mathcal{T} \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ *; alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x) &= \mathcal{S}(x^+) + \mathcal{S}(x^-) \\ &\leq \mathcal{T}(x^+) + \mathcal{T}(x^-) \\ &= \mathcal{T}(|x|). \end{aligned}$$

En outre, d'après le théorème 3.1.2, il existe deux opérateurs positifs $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$:$\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *bornés par* $\mathcal{T}$ *tel que :*

1- $\mathcal{R}_1(x^+) = \mathcal{T}(x^+)$ *et* $\mathcal{R}_1(x^-) = 0$.

2- $\mathcal{R}_2(x^-) = \mathcal{T}(x^-)$ *et* $\mathcal{R}_2(x^+) = 0$.

Donc l'opérateur $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$ *satisfait* $-\mathcal{T} \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}(|x|) = \mathcal{S}(x)$ *et le résultat désiré s'en suit.*

3.2 Extension des opérateurs positifs

Définition 3.2.1. *Une fonction* $\mathcal{P} : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ *où* $\mathbf{G}$ *est un réel espaces vectoriel et* $\mathbf{F}$ *un espace vectoriel ordonné, est dit sous-linéaire si :*

1- $\mathcal{P}(x + y) \leq \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{G}$ *et*

2- $\mathcal{P}(\lambda x) = \lambda \mathcal{P}(x) \quad \forall x, \in \mathbf{G}$ *et* $\lambda \geq 0$

Le résultat suivant est une généralisation du théorème d'extension de Hahn-Banach. Il joue un rôle fondamental dans l'analyse moderne.

Théorème 3.2.1. *Théorème de Hahn-Banach.*

Soit $\mathbf{G}$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$, $\mathbf{F}$ *un espace vectoriel complet de Riesz et* $\mathcal{P} : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ *une fonction sous linéaire. Si* $\mathbf{H}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathcal{S} : \mathbf{H} \to \mathbf{F}$ *un opérateur satisfaisant* $\mathcal{S}(x) \leq \mathcal{P}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbf{H}$*. Alors, il existe un opérateur linéaire* $\mathcal{T} : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ *tel que :*

1- $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ *sur* $\mathbf{H}$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{T}$ *est une extension linéaire de* $\mathcal{S}$ *sur tout* $\mathbf{G}$.

2- $\mathcal{T}(x) \leq \mathcal{P}(x) \quad \forall x, \in \mathbf{G}$.

preuve . *Il est question de savoir si* $\mathcal{S}$ *admet une extension linéaire qui satisfait (2), pour tout sous-espace engendre par* $\mathbf{H}$ *et son complémentaire. Si cela est vrai, le théorème de Zorn garantit* *l'existence d'une extension linéaire de $\mathcal{S}$ sur tout $\mathbf{G}$, avec les propriétés désirées.*

En effet soit $x \notin \mathbf{H}$ et soit $\mathbf{V} = \{y + \lambda x; y \in \mathbf{H}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Si $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{F}$ est une extension linéaire de $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{T}(y + \lambda x) = \mathcal{S}(y) + \lambda\mathcal{T}(x)$ doit être vrai pour tout $y \in \mathbf{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $z = \mathcal{T}(x)$; établissons l'existence de $z \in \mathbf{F}$ tel que :

$\mathcal{S}(y) + \lambda z \leq \mathcal{P}(y + \lambda z)\ \forall y \in \mathbf{H}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \qquad (\star)$.

Pour $\lambda \succ 0 \quad (\star)$ est équivalent à $\mathcal{S}(y) + z \leq \mathcal{P}(y + x)$.

Pour $\lambda \leq 0 \quad (\star)$ est équivalent à $\mathcal{S}(y) - z \leq \mathcal{P}(y - x)$.

Ces deux dernières inégalités sont satisfaites pour un $z \in \mathbf{F}$ si et seulement si

$\mathcal{S}(y) - \mathcal{P}(y - x) \leq z \leq \mathcal{P}(u + x) - \mathcal{S}(u)\ \forall u, y \in \mathbf{H} \quad (\star\star)$.

Pour voir qu'il existe un $z \in \mathbf{F}$ satisfaisant $(\star\star)$; commençons par observer que $\forall y, u \in \mathbf{H}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(y) + \mathcal{S}(u) & = & \mathcal{S}(y + u) \\ & \leq & \mathcal{P}(y + u) \\ & = & \mathcal{P}((y - x) + (x + u)) \\ & \leq & \mathcal{P}(y - x) + \mathcal{P}(u + x) \end{array}$$

car $y, u \in \mathbf{H}$ et $\mathcal{P}$ est une fonction sous-linéaire.

Donc $\mathcal{S}(y) - \mathcal{P}(y - x) \leq \mathcal{P}(u + x) - \mathcal{S}(u)\ \forall y, u \in \mathbf{H}$.

Cette dernière inégalité et de la complétude de $\mathbf{F}$ garantissent l'existence des extremums $s = \sup\{\mathcal{S}(y) - \mathcal{P}(y - x) : y \in \mathbf{H}\}$ et $t = \inf\{\mathcal{P}(u + x) - \mathcal{S}(u) : u \in \mathbf{H}\}$ dans $\mathbf{F}$ et satisfont $s \leq t$.

Ainsi tout élément $z \in \mathbf{F}$ satisfaisant $s \leq z \leq t$ en particulier $z = s$ satisfait $(\star)$ et $(\star\star)$.

Ce qui achève la preuve de ce théorème.

Comme premier utilisation du théorème d'extension des opérateurs positifs (théorème de Hahn-Banach).

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ un opérateur positif entre deux espaces de Riesz avec $\mathbf{F}$ complet. Supposons aussi que $\mathbf{G}$ soit un sous-espace de Riesz de $\mathbf{E}$ et que $\mathcal{S} : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ est un opérateur satisfaisant $0 \leq \mathcal{S}(x) \leq \mathcal{T}(x)\ \forall x \in \mathbf{G}^+$; alors $\mathcal{S}$ s'étend en un opérateur positif de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{F}$ tel que $0 \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$.*

preuve . *Définissons $\mathcal{P} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ par $\mathcal{P}(x) = \mathcal{T}(x^+)$.*

$\mathcal{P}$ ainsi définie est une fonction sous-linéaire et satisfait $\mathcal{S}(x) \leq \mathcal{P}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}$.

En effet pour tout $x, y \in \mathbf{E}$, on a : $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}((x+y)^+) &\leq \mathcal{T}(x^+ + y^+) \\ &= \mathcal{T}(x^+) + \mathcal{T}(y^+). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(x+y) \leq \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y)$.
On a $\forall x \in \mathbf{E}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x) &\leq \mathcal{T}(x) \\ &\leq \mathcal{T}(x^+) \\ &= \mathcal{P}(x). \end{aligned}$$

Par le théorème d'extension de Hahn-Banach, $\mathcal{S}$ admet une extension notée aussi par $\mathcal{S}$ satisfaisant $\mathcal{S}(x) \leq \mathcal{P}(x) \quad \forall x \in \mathbf{E}$.
Maintenant si $x \in \mathbf{E}^+$, alors

$$\begin{aligned} -\mathcal{S}(x) &= \mathcal{S}(-x) \\ &\leq \mathcal{P}(-x) \\ &= \mathcal{T}((-x)^+) \\ &= \mathcal{T}(0) = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{S}(x) &\leq \mathcal{P}(x) \\ &= \mathbf{T}(x). \end{aligned}$$

La section qui suit est consacrée aux propriétés d'extensions des opérateurs positifs. Le résultat précédent montre qu'un opérateur positif qui a pour domaine un sous-espace de Riesz s'étend en un opérateur positif si et seulement s'il est dominé par une application sous-linéaire.

Une application $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ entre deux espaces ordonnés est dite monotone si
$\forall x, y \in \mathbf{E}, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ dans $\mathbf{F}$.

Théorème 3.2.3. *Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux espaces de Riesz avec $\mathbf{F}$ complet. si $\mathbf{G}$ est un sous-espace de Riesz de $\mathbf{E}$ et $\mathcal{T} : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ un opérateur positif. Alors les déclarations suivantes sont équivalentes.*

1- $\mathcal{T}$ se prolonge en un opérateur positif de $\mathbf{E}$ sur $\mathbf{F}$.

2- $\mathcal{T}$ se prolonge en un opérateur ordonné borné de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$.

3- Il existe une application monotone sous linéaire $\mathcal{P} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ satisfaisant
$\mathcal{T}(x) \leq \mathcal{P}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}$.

preuve . 1) $\implies$ 2) *évident.*
2) $\implies$ 3) *Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{L}_b(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ satisfaisant $\mathcal{S}(x) \leq \mathcal{T}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}$;*

alors l'application $\mathcal{P} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *définie par* $\mathcal{P}(x) = \mathcal{S}(x^+)$ *est monotone sous-linéaire et satisfait :*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x) &\leq \mathcal{T}(x^+) \\ &= \mathcal{S}(x^+) \\ &\leq |\mathcal{S}|(x^+) \\ &= \mathcal{P}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

$3) \implies 1)$ *Soit* $\mathcal{P} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *une application sous-linéaire satisfaisant* $\mathcal{T}(x) \leq \mathcal{P}(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}$. *Alors la formule* $q(x) = \mathcal{P}(x^+)$ *définit une application sous-linéaire de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$ *telle que :*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x) &\leq \mathcal{T}(x^+) \\ &\leq \mathcal{P}(x^+) \\ &= q(x) \quad \forall x \in \mathbf{G}. \end{aligned}$$

Donc par le théorème d'extension de Hahn-Banach, il existe une extension $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *de* $\mathcal{T}$ *satisfaisant* $\mathcal{R}(x) \leq q(x) \quad \forall x \in \mathbf{E}$.
En particulier si $x \in \mathbf{E}^+$ *alors on a la relation*

$$\begin{aligned} -\mathcal{R}(x) &= \mathcal{R}(-x) \\ &\leq q(-x) \\ &= \mathcal{P}((-x)^+) \\ &= \mathcal{P}(0) = 0. \end{aligned}$$

C'est qui implique $\mathcal{R}(x) \geq 0$*; donc* $\mathcal{R}$ *est un extension linéaire de* $\mathcal{T}$ *sur tout* $\mathbf{E}$.

Définition 3.2.2. *Un sous-ensemble* $\mathbf{A}$ *d'un espace de Riesz est dit solide si* $|x| \leq y$ *et* $y \in \mathbf{A}$ *implique* $x \in \mathbf{A}$.

Un sous-espace vectoriel de Riesz solide renvoie à un idéal.
De l'identité des treillis $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ il découle immédiatement que tout idéal est un sous-espace de Riesz.

Théorème 3.2.4. [2] *Soit* $\mathcal{T} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *un opérateur positif entre deux espaces de Riesz avec* $\mathbf{F}$ *complet. Alors pour tout idéal* $\mathbf{A}$ *de* $\mathbf{E}$*; la formule* $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x) = \sup\{\mathcal{T}(y) : y \in \mathbf{A}, 0 \leq x \leq y\}$ *pour* $x \in \mathbf{A}$ *définit un opérateur positif de* $\mathbf{E}$ *sur* $\mathbf{F}$.
De plus nous avons :

1- $0 \leq \mathcal{T}_{\mathbf{A}} \leq \mathcal{T}$.

2- $\mathcal{T}_{\mathbf{A}} = \mathcal{T}$ *sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathcal{T}_A = 0$ *sur* $\mathbf{A}^d$.

3- Si $\mathbf{B}$ *est un idéal contenant* $\mathbf{A}$*, alors* $\mathcal{T}_{\mathbf{A}} \leq \mathcal{T}_{\mathbf{B}}$.

preuve . *Notons premièrement que* $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x) = \sup\{\mathcal{T}(x \wedge y) : y \in \mathbf{A}^+\}$ *pour tout* $x \in \mathbf{E}^+$.
Selon le théorème 2.3.2 il suffit de montre que $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ *est additif sur* $\mathbf{E}^+$.
À cet effet , soient $x, y \in \mathbf{E}^+$ *si* $z \in \mathbf{A}^+$.
Alors l'inégalité $(x+y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z)$ *implique*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}((x+y) \wedge z) &\leq \mathcal{T}(x \wedge z) + \mathcal{T}(y \wedge z) \\ &\leq \mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x) + \mathcal{T}_{\mathbf{A}}(y). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x+y) \leq \mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x) + \mathcal{T}_{\mathbf{A}}(y)$.
Par ailleurs l'inégalité $(x \wedge u) + (y \wedge v) \leq (x+y) \wedge (u+v)$ *implique*
$\mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x) + \mathcal{T}_{\mathbf{A}}(y) \leq \mathcal{T}_{\mathbf{A}}(x+y)$.
Par conséquent $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$ *est additif sur* $\mathbf{E}^+$.
Les propriétés 2) et 3) sont des conséquences de la formule définissant l'opérateur $\mathcal{T}_{\mathbf{A}}$.

★ ★ CHAPITRE QUATRE ★ ★

TREILLIS DES OPÉRATEURS POSITIFS SUR LES ESPACES DE HILBERT

4.1 Propriétés des opérateurs positifs sur des espaces Hilbertiens

Définition 4.1.1. ***(Opérateurs linéaires positifs)***

Soit $\mathcal{T}$ un opérateur défini sur un espace de Hilbert $(\mathbf{H}, \langle , \rangle)$ dans lui même, on dit que $\mathcal{T}$ est un opérateur positif, on note $\mathcal{T} \geq 0$, si $\forall x \in \mathbf{H}$, on a :

$$\langle \mathcal{T}x, x\rangle \geq 0$$

Les espaces vectoriels de Hilbert étant des espaces vectoriels complets munis d'un produit hermitien sont des treillis (complets) .
Sous les hypothèses du Lemme 2.2.1 ; $\mathcal{L}^+(\mathbf{H})$ l'ensemble des opérateurs positifs sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même muni de la relation d'ordre définie par : $\forall f, g \in \mathcal{L}^+(\mathbf{H})$, $f \leq g$ si et seulement si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbf{H}$ est un treillis des opérateurs positifs sur l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$.

Proposition 4.1.1. *Toute combinaison linéaire finie à coefficients réels positifs des opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même est un opérateur positif.*

preuve . *Soient n un entier naturel non nul, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, ..., \mathcal{T}_n$ des opérateurs positifs sur un espace de Hilbert **H** et $\alpha_1, \alpha_2, ...; \alpha_n$ des réels positifs ; par linéarité du produit scalaire hermitien, on a :*
$\langle(\alpha_1\mathcal{T}_1 + \alpha_2\mathcal{T}_2 + ... + \alpha_n\mathcal{T}_n)x, x\rangle = \alpha_1\langle\mathcal{T}_1x, x\rangle + \alpha_2\langle\mathcal{T}_2x, x\rangle + ... + \alpha_n\langle\mathcal{T}_nx, x\rangle \geq 0.$

Définition 4.1.2. *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur définie sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, $\mathcal{T}$ admet un adjoint s'il existe un opérateur $\mathcal{S}$ sur $\mathbf{H}$ tel que $\forall x, y \in \mathbf{H}$, on a :*

$$\langle \mathcal{T}(x), y\rangle = \langle x, \mathcal{S}(y)\rangle$$

. et on note $\mathcal{S} = \mathcal{T}^*$.

Si $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, alors l'opérateur $\mathcal{T}$ est dit autoadjoint.

Proposition 4.1.2. [6] *Si $\mathcal{T}$ est un opérateur linéaire positif sur un espace de Hilbert dans lui même ; alors $\mathcal{T}$ est un opérateur auto adjoint.*

preuve . $\forall x \in \mathbf{H}$ *on a $\langle \mathcal{T}x, x\rangle$ est un réel positif ; d'où $\mathcal{T}$ est auto adjoint.*

Comparaison des opérateurs positifs.

Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ deux opérateurs positifs définis sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même ; on dit que $\mathcal{T} \geq \mathcal{S}$ si $\mathcal{T} - \mathcal{S}$ est un opérateur positif .
En outre $\forall x \in \mathbf{H}$; $\langle(\mathcal{T} - \mathcal{S})x, x\rangle$=$\langle \mathcal{T}x, x\rangle - \langle \mathcal{S}x, x\rangle \geq 0$.

Théorème 4.1.1. *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur positif définie sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même , alors les opérateurs $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ et $\mathcal{T}^*\mathcal{T}$ sont des opérateurs positifs.*

preuve . *Nous observons que $\forall x \in \mathbf{H}$, an a :*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}\mathcal{T}^*x, x\rangle &= \langle \mathcal{T}^*x, \mathcal{T}^*x\rangle \\ &= ||\mathcal{T}^*x||^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x, x\rangle &= \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle \\ &= ||\mathcal{T}x||^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème 4.1.2. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{T}$ un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même, alors l'opérateur $\mathcal{T}^n$ est un opérateur positif.*

preuve . *Puisque $\mathcal{T}$ est un opérateur linéaire positif, alors il est auto adjoint et par conséquent $\mathcal{T}^n$ est auto adjoint ; donc $\forall x \in \mathbf{H}$*
Si $n = 2m$, c'est-à-dire n est pair avec m un entier naturel non nul , on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}^n xx\rangle &= \langle \mathcal{T}^m\mathcal{T}^m x, x\rangle \\ &= \langle \mathcal{T}^m x, (\mathcal{T}^m)^* x\rangle \\ &= \langle \mathcal{T}^m x, \mathcal{T}^m x\rangle \\ &= ||\mathcal{T}^m x||^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Sinon n est impair, c'est-à-dire $n = 2m + 1$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}^n x x\rangle &= \langle \mathcal{T}^m \mathcal{T}\mathcal{T}^m x, x\rangle \\ &= \langle \mathcal{T}(\mathcal{T}^m x), (\mathcal{T}^m)^* x\rangle \\ &= \langle \mathcal{T}(\mathcal{T}^m x), \mathcal{T}^m x\rangle \\ &= \langle \mathcal{T}\varphi, \varphi\rangle \\ &\geq 0;\end{aligned}$$

où $\varphi = \mathcal{T}^m x$.

Proposition 4.1.3. *Soit $\mathcal{T}$ un opérateur positif défini sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même. Alors tout polynôme en $\mathcal{T}$ de degré n et à coefficients réels positifs est un opérateur positif.*

preuve . *La preuve découle immédiatement de la proposition 4.1.1 et du théorème 4 .1.2.*

Théorème 4.1.3. [6] *(théorème de Cauchy Schwarz)*
Soit $\mathcal{T}$ un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même, alors $\forall x, y \in \mathbf{H}$ on a : $|\langle \mathcal{T}x, y\rangle|^2 \leq \langle \mathcal{T}x, x\rangle\langle \mathcal{T}y; y\rangle$

preuve . *Soient $x, y \in \mathbf{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\langle \mathcal{T}(x - \lambda y), x - \lambda y\rangle \geq 0.$$

Or $\langle \mathcal{T}(x - \lambda y), x - \lambda y\rangle = \langle \mathcal{T}x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle \mathcal{T}x, y\rangle - \lambda\langle \mathcal{T}y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle \mathcal{T}y, y\rangle$.
Comme $\mathcal{T}$ est auto adjoint, on a :
$\langle \mathcal{T}(x - \lambda y), x - \lambda y\rangle = \langle \mathcal{T}x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle \mathcal{T}x, y\rangle - \lambda\langle y, \mathcal{T}x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle \mathcal{T}y, y\rangle$.
C'est-à-dire
$\langle \mathcal{T}(x - \lambda y), x - \lambda y\rangle = \langle \mathcal{T}x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle \mathcal{T}x, y\rangle - \lambda\overline{\langle \mathcal{T}x, y\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\langle \mathcal{T}y, y\rangle$.
En prenant $\lambda = \dfrac{\langle \mathcal{T}x, y\rangle}{\langle \mathcal{T}y, y\rangle}$, on obtient :
$\langle \mathcal{T}x, x\rangle - \dfrac{|\langle \mathcal{T}x, y\rangle|^2}{\langle \mathcal{T}y, y\rangle} - \dfrac{|\langle \mathcal{T}x, y\rangle|^2}{\langle \mathcal{T}y, y\rangle} + \dfrac{|\langle \mathcal{T}x, y\rangle|^2}{(\langle \mathcal{T}y, y\rangle)^2}\langle \mathcal{T}y, y\rangle \geq 0.$
Donc $\langle \mathcal{T}x, x\rangle - \dfrac{|\langle \mathcal{T}x, y\rangle|^2}{\langle \mathcal{T}y, y\rangle} \geq 0.$
On obtient le résultat

$$|\langle \mathcal{T}x, y\rangle|^2 \leq \langle \mathcal{T}x, x\rangle\langle \mathcal{T}y; y\rangle.$$

Théorème 4.1.4. [7] *Soit $\mathcal{T}_n$ une suite croissante d'opérateurs linéaires auto adjoints définis sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ dans lui même ; si la norme $||\mathcal{T}_n||$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur linéaire continu $\mathcal{T}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{H}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_n x = \mathcal{T}x.$$

En d'autre termes , $\forall n \in \mathbb{N}$*, il existe un réel positif* M *tel que* $||\mathcal{T}_n|| \leq M$ *, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_n x = \mathcal{T}x.$$

Avec $||\mathcal{T}|| \leq M$*.*

preuve . *Puisque la suite* $(\mathcal{T}_n)$ *est croissante, alors* $\forall x \in \mathbf{H}$*,* $\forall n, m \in \mathbb{N}$ *tels que* $m \geq n$ *l'opérateur*

$\langle (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_n)x, x\rangle \geq 0$

C'est-à-dire $\langle \mathcal{T}_m x, x\rangle - \langle \mathcal{T}_n x, x\rangle \geq 0$*.*

Or

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_n x, x\rangle| &\leq ||\mathcal{T}_n x||||x|| \\ &\leq ||\mathcal{T}_n||||x||^2 \\ &\leq M||x||^2. \end{aligned}$$

Donc la suite numérique $\langle \mathcal{T}_n x, x\rangle$ *est croissante et bornée, donc convergente.*

D'après le théorème de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_m x - \mathcal{T}_n x, y\rangle|^2 &= |\langle (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_n)x, y\rangle|^2 \\ &\leq \langle (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_n)x, x\rangle\langle (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_n)y, y\rangle \\ &= (\langle \mathcal{T}_m x, x\rangle - \langle \mathcal{T}_n x, x\rangle)(\langle\langle (\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_n)y, y\rangle) \\ &\leq (||\mathcal{T}_m - \mathcal{T}_n||||y||^2)(\langle \mathcal{T}_m x, x\rangle - \langle \mathcal{T}_n x, x\rangle) \\ &\leq 2M||y||^2(2\varepsilon). \end{aligned}$$

En particulier pour $y = \mathcal{T}_m x - \mathcal{T}_n x$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}_m x - \mathcal{T}_n x, y\rangle|^2 &= ||\mathcal{T}_m x - \mathcal{T}_n x||^4 \\ &\leq 2M||\mathcal{T}_m x - \mathcal{T}_n x||^2(2\varepsilon). \end{aligned}$$

Donc $||\mathcal{T}_m x - \mathcal{T}_n x||^2 \leq 4M\varepsilon$*.*

D'où la suite $\mathcal{T}_n$ *est de Cauchy dans l'espace de Hilbert* $\mathbf{H}$*.*

Donc elle converge vers un opérateur $\mathcal{T}$*.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_n x = \mathcal{T}x$$

. On voit facilement que l'opérateur $\mathcal{T}$ *est linéaire et continu.*

En effet :

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}_n x|| &\leq ||\mathcal{T}_n||||x|| \\ &\leq M||x||; \end{aligned}$$

en passant à la limite, il vient que :

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{T}_n x|| = ||\mathcal{T}x|| \leq M||x||.$$

Donc $||\mathcal{T}|| \leq M$.

Lemme 4.1.1. *Soit* $\mathcal{T}$ *un opérateur positif défini sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui même et de norme* $||\mathcal{T}|| \leq 1$*; alors l'opérateur* $\mathcal{S} = \mathcal{I} - \mathcal{T}$ *est un opérateur positif de norme* $||\mathcal{S}|| \leq 1$.

preuve . *En effet soit* $x \in \mathbf{H}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{S}x, x\rangle &= \langle (\mathcal{I} - \mathcal{T})x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle \mathcal{T}x, x\rangle \\
&\geq ||x||^2 - ||\mathcal{T}x||||x|| \\
&= ||x||^2 - ||\mathcal{T}||||x||^2 \\
&= (1 - ||\mathcal{T}||)||x||^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}$ *est un opérateur positif.*
De plus d'après le théorème de Cauchy-Schwarz, $\forall x, y \in \mathbf{H}$ *on a :*

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{S}x, y\rangle|^2 &\leq \langle \mathcal{S}x, x\rangle\langle \mathcal{S}y, y\rangle \\
&= (\langle x, x\rangle - \langle \mathcal{T}x, x\rangle)(\langle x, x\rangle - \langle \mathcal{T}y, y\rangle) \\
&\leq (\langle x, x\rangle)(\langle y, y\rangle) \\
&= ||x||^2||y||^2.
\end{aligned}$$

En particulier pour $y = \mathcal{S}x$*, on a :*

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{S}x, y\rangle|^2 &= ||\mathcal{S}x||^4 \\
&\leq ||x||^2||\mathcal{S}x||^2;
\end{aligned}$$

En simplifiant, il vient que
$||\mathcal{S}x|| \leq ||x||$.
Donc $||\mathcal{S}|| \leq 1$.

Lemme 4.1.2. [7] *Soit* $\mathcal{T}$ *un opérateur positif défini sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui même de norme* $||\mathcal{T}|| \leq 1$*, alors la suite récurrente* $(\mathcal{U}_n)$ *définie par :*
$\mathcal{U}_0 = 0; \qquad \mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathcal{I} - \mathcal{T} + \mathcal{U}_n^2) = \frac{1}{2}(\mathcal{S} + \mathcal{U}_n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
converge vers un opérateur linéaire continu $\mathcal{U}$ *de norme* $||\mathcal{U}|| \leq 1$ *ou encore* $\forall x \in \mathbf{H}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n x = \mathcal{U}x \qquad tel \quad que \quad ||\mathcal{U}|| \leq 1.$$

preuve . *D'après le théorème 4.1.4 , il suffit de montre que la suite* $(\mathcal{U}_n)$ *est croissante et de normes bornées* $||\mathcal{U}_n|| \leq M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Compte tenu du lemme 4.2.1 , l'opérateur $\mathcal{S} = \mathcal{I} - \mathcal{T}$ *est positif, de norme* $||\mathcal{S}|| \leq 1$.
D'où, par récurrence on vérifie que $||\mathcal{U}_n|| \leq 1$. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
En autre termes, supposons que $||\mathcal{U}_n|| \leq 1$, *alors on a :*

$$\begin{aligned} ||\mathcal{U}_{n+1}|| &= \tfrac{1}{2}||\mathcal{S} + \mathcal{U}_n^2|| \\ &\leq \tfrac{1}{2}(||\mathcal{S}|| + ||\mathcal{U}_n^2||) \\ &\leq \tfrac{1}{2}(||\mathcal{S}|| + ||\mathcal{U}_n||^2) \\ &\leq \tfrac{1}{2}(1 + 1^2) = 1. \end{aligned}$$

Il est à rappeler que d'après la proposition 4.2.1, les éléments $\mathcal{U}_n$ *sont positifs comme suite de polynôme d'opérateurs positifs en* $\mathcal{S}$ *à coefficients positifs. Ainsi on montre par récurrence que la suite* $\mathcal{U}_n$ *est croissante, c'est-à-dire que l'opérateur* $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$ *est un opérateur positif pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
En effet supposons que l'on a $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n \geq 0$, *alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{n+2} - \mathcal{U}_{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathcal{S} + \mathcal{U}_{n+1}^2) - \frac{1}{2}(\mathcal{S} + \mathcal{U}_n^2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{n+1}^2 - \mathcal{U}_n^2) \end{aligned}$$

Comme la suite $\mathcal{U}_n$ *est une suite de polynômes d'opérateurs positifs à coefficients positifs, alors les termes de cette suite commutent entre eux.*
C'est-à-dire $\mathcal{U}_p\mathcal{U}_q = \mathcal{U}_q\mathcal{U}_p \ \forall p, q \in \mathbb{N}$.
Donc , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{n+2} - \mathcal{U}_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{U}_{n+1}^2 - \mathcal{U}_n^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{U}_n)(\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n) \geq 0. \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{U}_{n+2} - \mathcal{U}_{n+1}$ *est positif comme produit de deux opérateurs positifs , car la somme des opérateurs positifs* $\frac{1}{2}\mathcal{U}_{n+1}$ *et* $\frac{1}{2}\mathcal{U}_n$ *d'une part et la différence* $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n$ *d'autre part sont des opérateurs positifs .*
Donc il existe un opérateur linéaire $\mathcal{U}$ *tel que :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n x = \mathcal{U}x; \quad avec \quad ||\mathcal{U}|| \leq 1$$

Lemme 4.1.3. *Soit* $\mathcal{T}$ *un opérateur positif défini sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui même de norme* $||\mathcal{T}|| \leq 1$ *, alors tout opérateur linéaire borné* $\mathcal{V}$ *commutant avec* $\mathcal{T}$*, commute aussi avec* *la suite d'opérateurs*

$\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathcal{I} - \mathcal{T} + \mathcal{U}_n^2)$, $\quad \mathcal{U}_1 = 0$ *et commute également avec l'opérateur* $\mathcal{U}$ *limite de la suite* $\mathcal{U}_n$.
En outre $\mathcal{T}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{U}_n\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{U}_n$ *et* $\mathcal{U}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{U}$ *avec*

$$\mathcal{U}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n x \qquad \forall x \in \mathbf{H}$$

preuve . *Soit* $\mathcal{V}$ *un opérateur linéaire commutant avec* $\mathcal{T}$, *alors il commute aussi avec* $\mathcal{S} = \mathcal{I} - \mathcal{T}$ *, c'est-à-dire*
$\mathcal{T}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{S}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{S}$.
Par récurrence, on vérifie que $\mathcal{V}$ *commute avec* $\mathcal{U}_n$
En effet supposons que $\mathcal{V}\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n\mathcal{V}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}\mathcal{U}_{n+1} &= \tfrac{1}{2}\mathcal{V}(\mathcal{S} + \mathcal{U}_n^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{V}\mathcal{S} + \mathcal{V}\mathcal{U}_n^2) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{S}\mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{U}_n\mathcal{U}_n) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{S}\mathcal{V} + \mathcal{U}_n\mathcal{V}\mathcal{U}_n) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{S}\mathcal{V} + \mathcal{U}_n^2\mathcal{V}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathcal{S} + \mathcal{U}_n^2)\mathcal{V} \\
&= \mathcal{U}_{n+1}\mathcal{V}.
\end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in \mathbf{H}$ *on a*

$$\mathcal{V}\mathcal{U}(x) = \mathcal{V}(\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}\mathcal{U}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n\mathcal{V}(x) = \mathcal{U}\mathcal{V}(x).$$

4.2 Opérateur racine carrée

Définition 4.2.1. *Soit* $\mathcal{T}$ *un opérateur linéaire positif sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui même, un opérateur positif* $\mathcal{R}$ *est dit racine carrée de l'opérateur* $\mathcal{T}$ *si on a la relation*
$\mathcal{T} = \mathcal{R}^2$ *ou encore* $\mathcal{R} = \sqrt{\mathcal{T}}$

Théorème 4.2.1. [6] *Soit* $\mathcal{T}$ *un opérateur linéaire positif sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui même, alors l'opérateur positif* $\mathcal{T}$ *admet une racine carrée positif unique* $\mathcal{T} = \sqrt{\mathcal{R}}$. *de plus l'opérateur* $\mathcal{R}$ *commute avec tout opérateur commutant avec l'opérateur* $\mathcal{T}$. *En outre pour tout opérateur linéaire* $\mathcal{S}$ *tel que* $\mathcal{T}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{T}$ *on a*
$\mathcal{R}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{R}$ *ou mieux encore* $\sqrt{\mathcal{T}}\mathcal{S} = \mathcal{S}\sqrt{\mathcal{T}}$

preuve . *Existence.*

On peut suppose que la norme de $||\mathcal{T}|| \leq 1$.

Il est évident que l'opérateur $\mathcal{T}$ *commute avec lui même. Alors* $\mathcal{T}$ *commute avec les éléments de la suite* $\mathbf{U}_n$ *telle que*

$\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathcal{I} - \mathcal{T} + \mathcal{U}_n), \quad \mathcal{U}_1 = 0.$

En prenant $\mathcal{S} = \mathcal{U}_n$ *; compte tenu du lemme 4.1.3 , l'opérateur* $\mathcal{U}_n$ *commute avec l'opérateur limite*

$$\mathcal{U}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(x) \qquad \forall x \in \mathbf{H}.$$

C'est-à-dire $\quad \mathcal{U}_n\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}_n$ *où* $||\mathcal{U}_n|| \leq 1$ *et* $||\mathcal{U}|| \leq 1$.

Il vient donc que

$$\begin{aligned} ||\mathcal{U}_n^2(x) - \mathcal{U}^2(x)|| &= ||((\mathcal{U}_n + \mathcal{U})(\mathcal{U}_n - \mathcal{U}))(x)|| \\ &= ||\mathcal{U}_n + \mathcal{U}||||\mathcal{U}_n(x) - \mathcal{U}(x)|| \\ &= 2||\mathcal{U}_n(x) - \mathcal{U})(x)|| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est-à-dire la suit $\mathcal{U}_n^2(x)$ *converge vers* $\mathcal{U}^2(x)$.

D'où pour tout $x \in \mathbf{H}$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}((\mathcal{I} - \mathcal{T} + \mathcal{U}_n^2)(x)).$$

Donc

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}((\mathcal{I} - \mathcal{T} + \mathcal{U}^2)(x)).$$

Où encore $\mathcal{T} = (\mathcal{I} - 2\mathcal{U} + \mathcal{U}^2)(x)$.

L'opérateur $\mathcal{R} = \mathcal{I} - \mathcal{U}$ *est un opérateur linéaire positif racine carrée de l'opérateur* $\mathcal{T}$.

En effet $\mathcal{R}^2 = (\mathcal{I} - \mathcal{U})^2 = \mathcal{T}$.

D'où l'existence de l'opérateur positif racine carrée de $\mathcal{T}$.

Unicité.

Soient $\mathcal{R}_1$ *et* $\mathcal{R}_2$ *deux racines carrées de l'opérateur positif* $\mathcal{T}$.

Ils commutent avec $\mathcal{T}$ *et entre eux.*

Étant des opérateurs positifs ils admettent des racines $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ *respectivement.*

De plus $\forall x, y \in \mathbf{H}$ *on a*

$$\begin{aligned} ||\mathcal{S}_1(y)||^2 + ||\mathcal{S}_2(y)||^2 &= \langle \mathcal{S}_1(y), \mathcal{S}_1(y)\rangle + \langle \mathcal{S}_2(y), \mathcal{S}_2(y)\rangle \\ &= \langle \mathcal{S}_1^2(y), y\rangle + \langle \mathcal{S}_2^2(y), y\rangle \\ &= \langle \mathcal{R}_1(y), y\rangle + \langle \mathcal{R}_2(y), y\rangle \\ &= \langle (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)(y), y\rangle \end{aligned}$$

pour $y = (\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x)$*, on aura*

$$\begin{aligned}
||\mathcal{S}_1(y)||^2 + ||\mathcal{S}_2)(y)||^2 &= \langle(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)(y), y\rangle \\
&= \langle(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x), y\rangle \\
&= \langle(\mathcal{R}_1^2 - \mathcal{R}_2^2)(x), y\rangle \\
&= \langle(\mathcal{T} - \mathcal{T})(x), y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc on obtient $\quad \mathcal{S}_1(y) = \mathcal{S}_2(y) = 0$
alors $\quad \mathcal{S}_1^2(y) = \mathcal{S}_2^2(y) = 0$
c'est-à-dire $\quad \mathcal{R}_1(y) = \mathcal{R}_2(y) = 0$
ou encre $(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(y) = 0$
Donc, $\forall x \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned}
||(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x)||^2 &= \langle(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x), (\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x)\rangle \\
&= \langle(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x), x\rangle \\
&= \langle(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(y), x\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On obtient $\quad ||(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x)|| = 0$
c'est -à-dire $\quad (\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)(x) = 0,$
ou encore $\quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$
D'où l'unicité de l'opérateur racine carrée de $\mathcal{T}$*.*

Théorème 4.2.2. *Soient* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{S}$ *deux opérateurs positifs définis sur un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *dans lui même, alors pour que l'opérateur produit* $\mathcal{T}\mathcal{S}$ *soit un opérateur positif il faut et il suffit qu'ils commutent.*

preuve . *D'après le théorème précèdent, l'opérateur* $\sqrt{\mathcal{T}}$ *commute avec l'opérateur* $\mathcal{S}$*.*
D'où $\forall x \in \mathbf{H}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{T}\mathcal{S}(x), x\rangle &= \langle(\sqrt{\mathcal{T}})^2\mathcal{S}(x), x\rangle \\
&= \langle\sqrt{\mathcal{T}}\mathcal{S}(x), \sqrt{\mathcal{T}}(x)\rangle \\
&= \langle\mathcal{S}(\sqrt{\mathcal{T}}(x)), \sqrt{\mathcal{T}}(x)\rangle \\
&= \langle\mathcal{S}(y), y\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

D'où $\quad \mathcal{T}\mathcal{S} \geq 0.$

♣ INTÉRÊT DIDACTIQUE ♣

L'opportunité de rédiger ce mémoire nous a donné l'occasion de faire nos premiers pas d'autonomie en termes investigation scientifiques et de déploiement des nos aptitudes à comprendre, à produire un raisonnement logique et de maitriser les outils des nouvelles technologies de l'information et de la communication indispensables pour les futures enseignants que nous sommes. Dans cette partie, nous nous proposons de relever les contributions de ce travail de mémoire dans notre formation en qualité d'enseignants du lycée d'enseignement général. Ainsi nous allons relever ses apports sur le plan des savoirs théoriques et sur le plan pratique des enseignements des mathématiques.

4.3 Apport sur le plan des savoirs théoriques

Pour mener à terme ce travail , il a fallu puiser des compétences dans plusieurs ressources pour appréhender la notion de treillis. Ainsi cette notion de treillis des opérateurs positifs repose plus généralement sur la structure ordonnée des ensembles et en particulier sur l'existence de minimum et de maximum d'un ensemble ou d'un sous-ensemble ordonné. Nous avons notamment l'ensemble des nombres réels qui est un treillis.

Ce travail nous permet également de donner aux élèves une motivation pour l'apprentissage des mathématiques en leur présentant la théorie des ensembles ordonnés et l'utilisation des opérateurs positifs dans le domaine des sciences physiques et des sciences économiques.

4.4 Apport sur le plan pratique des enseignements des mathématiques

Sur le plan pratique des enseignements des mathématiques, ce travail nous permet de :

• être mieux outillé pour l'enseignement des structures ordonnées des ensembles au lycée. Nous avons notamment l'enseignement : des nombres entiers naturels et nombres entiers relatifs en sixième ; les nombres décimaux en cinquième ; les nombres rationnels en quatrième ; l'ensemble des nombres réels en troisième et seconde qui sont des treillis.

• Pouvoir être capable de saisir les documents de mathématiques de qualité en utilisant les outils des technologies de l'information et de la communication tels que : de micro-ordinateur, de vidéo projecteur, de logiciel LaTeX *(de son compilateur Miktex, des éditeurs TeXnic Center, TeXmaker, TeXstudio et Winedit) ou d'internet. En effet l'emploie de ces outils informatiques peut nous être utile au lycée dans la mesure où nous allons saisir des cours, des fiches des travaux dirigés et des épreuves d'évaluation et présenter des cours au lycée via de vidéo projecteur.*

• Savoir rassembler des ressources , les organiser et pouvoir juger la pertinence et l'utilité de ces ressources. Au lycée nous serons appelés à préparer des cours et nous utiliserons les ressources tels que les livres au programmes, les anciens cours et des cours téléchargés ; il est important que nous soyons capable d'apprécier le document utilisé afin d'éviter le copiage.

1. *Ce mémoire a fortement contribuer au développement de nos compétences à savoir : réaliser les supports de qualités telles que les épreuves de mathématiques ; Préparer et présenter une leçon.*

♣ CONCLUSION ♣

Au terme de notre travail qui portait sur le treillis des opérateurs positifs, nous nous sommes intéressés premièrement à définir d'une manière générale la notion de treillis, il ressort dont qu'un treillis est tout ensemble non vide et ordonné dans le quel tout pair d'éléments y possède une borne inférieure et une borne supérieure. Le deuxième axe est centré sur le treillis des opérateurs positifs sur les espaces de Riesz, dans cette partie nous avons mis en évidence des structures ordonnées des opérateurs sur les espaces de Riesz, une construction de treillis des opérateurs positifs qui est l'objet de notre recherche et des propriétés d'extension des opérateurs positifs sur les espaces de Riesz et le troisième axe est centré sur le treillis des opérateurs positifs sur les espaces Hilbertiens où nous avons construit des opérateurs positifs et des propriétés de ces derniers. Et nous avons donné l'intérêt didactique de ce travail de mémoire dans notre formation en qualité d'enseignant du lycée d'enseignement général. En bref une contribution considérable sur le plan théorique et sur le plan pratique des enseignements des mathématiques. Cependant, le treillis des opérateurs positifs offre un grand intérêt en analyse fonctionnelle dans ce sens qu'il facilite l'optimisation des opérateurs positifs. Conscient que l'œuvre humaine est imparfaite, nous comptons améliorer ce travail dans les prochaines temps par les remarques et suggestions qui seront apportées.

♣ Bibliographie ♣

[1] *CHARALAMBOS D. ALIPRANTIS and OWEN BURKINSHAW (1985). Positive operators, Springer.*

[2] *CHARALAMBOS D. ALIPRANTIS and OWEN BURKINSHAW (1983). Positive order continuous operators, indag. Math. 45, 1-6 MR 84e :47039.*

[3] *Philippe BARBE, Michel LEDOUX (2007). EDP science.*

[4] *STANLEY Burris and H. P. SANKAPPANAVAR (1981). A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag.*

[5] *Charles J. K. BATTY and DEREK W. Robinson (1983). Positive One-Parameter semigroups on Ordered Banach Spaces. Departement of Mathematics, Intitute of Advanced Studies, Australian National University Canberrra, Australia.*

[6] *L. KANTOROVICH, D. AKILOV (1981). Analyse fonctionnelle Tome1, Tome2. Éditions Mir Moscou.*

[7] *W. RUDIN (1973). Functional analysis. Mc Graw-Hill New York.*