UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE YAOUNDÉ

Département de Mathématiques

Spécialité : MODÉLISATION

Mémoire de DIPES 2

OPTIMISATION D'INVESTISSEMENT D'UN PORTEFEUILLE D'ACTIONS AVEC CONTRAINTES

Soutenu et présenté par :

TCHELIMBO TAMO GILLES VIVIEN

Matricule : **04Y498**

Licence en Mathématiques

Sous la direction de :

DR. NGONGO Isidore Séraphin

École Normale Supérieure, Université de Yaoundé 1

Année Académique : **2018-2019**

♣ Dédicace ♣

Je dédie ce travail

À

mon Feu père TAMO Bonaventure

♣ Remerciements ♣

Tout d'adord , Nous remercions l'Eternel de nous avoir donné la santé et la volonté pour vernir à bout de ce modeste travail.

- ✓ Mes sincères remerciements vont à l 'endroit de mon encadreur Dr. NGONGO Isidore Séraphin pour l'accompagnement dans cette lourde tâche, à tous les enseignants du département de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé , aussi au Prof. JIMBO Henri Claver et monsieur NGA Pierre Clacer pour tous leurs conseils et l'aide apportés.

- ✓ A ma tendre épouse, aux camarades de promotion et à mes chers amis qui ont contribué de près ou de loin à l'édification de cette œuvre.

- ✓ Je ne finirai pas sans dire un grand merci à ma maman et mes frères et sœurs qui ont toujours été à mes côtés.

♣ Résumé ♣

La recherche optimale d'investissement d'un portefeuille d'action avec contrainte est un problème fondamental et complexe dans un marché financier. Il est important ici, pour l'investisseur de trouver la proportion optimale à allouer à chaque action dans un portefeuille.

C'est ainsi plusieurs modèles d'optimisation de portefeuilles ont été proposés parmi lesquels nous pouvons citer :

- Le modèle moyenne-variance élaboré par MARKOWITZ en 1952, dans ce modèle, le rendement d'un actif est une variable aléatoire et un portefeuille est une combinaison linéaire pondérée d'actifs. Par conséquent, le rendement d'un portefeuille est également une variable aléatoire et possède une espérance et une variance, qui sont considérer comme le rendement et le risque respectivement.
- Le modèle Black-Litterman, C'est un modèle d'optimisation de portefeuille sous contraintes mis au point par Fischer Black et Robert Litterman en 1992. Il a été développé pour pallier le manque de fiabilité et de souplesse des modèles quantitatifs d'allocation d'actifs. Le modèle combine l'équilibre de marché avec les anticipations des investisseurs pour produire une allocation pertinente et qui reflète les prévisions des investisseurs.
- Le modèle GARCH(Generalized Autoregressive conditional Heterosckedasticity) introduit par BOLLERSLEV, c'est un modèle qui tient compte du niveau de varriance des rendements des pérodesprécédentet de chocs aléatoire pour modéliser les rendements futurs.

  Dans ce mémoire, nous proposons une méthode de recherche d'un portefeuille efficient c'est-à-dire bien diversifié à l'aide du modèle de MARKOWITZ et plus loin nous essayons de l'appliquer à un portefeuille de deux actifs puis à un exemple de portefeuille à trois actifs risqués.

♣ Abstract ♣

The optimal search for portfolio investment with constraint is a fundamental and complex problem in a financial market. It is important here for the investor to find the optimal proportion to allocate to each share in a portfolio .

Thus, several models of portfolio optimization have been proposed among which we can mention :

- The moyenne-variance model developed by MARKOWITZ in 1952, in this model, the return on an asset is a random variable and a portfolio is a weighted linear combination of assets. As a result, a portfolio's return is also a random variable and has expectation and variance, which are considered as return and risk respectively.
- The Black-Litterman Model, This is a constrained portfolio optimization model developed by Fischer Black and Robert Litterman in 1992. It was developed to overcome the lack of reliability and flexibility of quantitative allocation models. assets. The model combines market equilibrium with investor expectations to produce a relevant allocation that reflects investors' expectations.
- The Generalized Autoregressive Conditional Heterosckedasticity (GARCH) model introduced by BOLLERSLEV is a model that takes into account the level of variance in yields of the previous perodes and random shocks to model future returns.

  In this thesis, we propose a method of looking for an efficient portfolio that is to say well diversified using the MARKOWITZ model and later we try to apply it to a portfolio of two assets then to a example of a portfolio with three risky assets.

♣ Table des matières ♣

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Résumé **iii**

Abstract **iv**

Introduction **1**

1 OPTIMISATION DU PORTEFEUILLE **3**

1.1 Historique 3

1.2 Éléments d'optimisation du portefeuille 4

1.2.1 Un actif financier 4

1.2.2 Un portefeuille 4

1.2.3 Le rendement 4

1.2.4 Analyse du risque 5

1.3 La théorie moderne du portefeuille(Modèle de Markowitz) : 9

1.3.1 Principe du modèle de Markowitz : 9

1.3.2 Critères du choix d'un portefeuille optimal : 10

1.3.3 Hypothèses du modèle : 10

1.3.4 Présentation mathématique du modèle : 11

2 problème d'optimisation de portefeuille **14**

2.1 Formulation du problème 14

2.2 Portefeuille de variance minimale 17

2.3 Portefeuille efficient 18

3 Exemples de résolution de problèmes d'optimisation de portefeuille **20**

3.1 Portefeuille de deux actifs risqués 20

3.1.1 Le lien entre le risque et le rendement 20

3.1.2 Portefeuille de variance minimale 23

3.1.3 Effet du coefficient de corrélation des deux actifs 24

3.2 Exemple de trois actifs 26

Implication pédagogique **29**

Conclusion **30**

bibiographie31

♣ Introduction ♣

Le marché financier est un emplacement de compétition entre l'offre et la demande des actifs économiques, dans lequel les investisseurs interviennent et ce par le biais de leurs portefeuilles. Un problème classique en mathématiques financières est celui d'un agent économique pouvant investir son argent dans un marché financier, choisissant entre un actif non risqué,communément appelé compte en banque, et un actif risqué, tel qu'une action. L'ensemble d'actifs financiers détenus par des investisseurs est appelé portefeuille ou encore stratégie d'investissement, et qui représente la richesse investie dans l'actif risqué. La sélection d'un portefeuille de projets est donc importante. Le processus de sélection vise à choisir un sous-ensemble de projets qui permettent de maximiser les bénéfices. l'investisseur doit suivre une stratégie qui lui assurera un meilleur rendement avec un minimum de risque. Plusieurs théoriciens se sont penchés sur l'analyse et la modélisation de ces deux grands paramètres de mesure de performance de portefeuille, et dont plusieurs modèles d'optimisation de portefeuille ont été proposés. Parmi les modèles développés à cet effet, figure le modèle moyenne-variance élaboré au début des années cinquante par l'économiste américain Harry Markowitz. C'est pour la première fois que Markowitz et ses successeurs s'attaquaient à une rationalisation complète de tous les problèmes de sélection de portefeuille et construisaient une théorie globale. C'est ce modèle qui est classé comme la première modélisation mathématique de la relation *risque-rendement*. Ainsi, selon la théorie moderne de portefeuille de Markowitz, les agents ont pour but ultime de combiner un ensemble d'actifs, ayant un rendement maximum avec un niveau de risque donné ; ou ce qui revient de même un risque minimum pour un niveau de rendement donné. Ce modèle est limité, car repose sur un marché parfait. Un investisseur qui dispose d'un capital et qui a l'opportunité d'investir dans un certain nombre d'actifs financiers, doit prendre une décision importante. Comment répartir son capital parmi les actifs ? La gestion de portefeuille nous apporte la réponse. Nous nous intéressons aux problèmes de choix d'actifs financiers en présence de risque. En d'autres termes nous essaierons de résoudre le problème d'optimisation d'un portefeuilles d'actions avec contraintes. Pour y arriver, nous allons structurer notre mémoire en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter un historique de l'optimisation de portefeuilles, nous faison un rappel de quelques définitions et concepts de base, que nous pensons nécessaires pour la suite de notre travail.

Le deuxième chapitre expose le modèle initial du portefeuille (La théorie moderne du portefeuille), puis le problème d'optimisation du portefeuille.

Dans le troisième chapitre, nous traiterons quelques exemples de résolution des problèmes d'optimisation du portefeuille.

CHAPITRE UN

OPTIMISATION DU PORTEFEUILLE

1.1 Historique

Depuis le milieu du siècle dernier, la gestion de portefeuille a subi une profonde mutation. Il est loin, en effet, le temps où le gestionnaire pouvait se contenter d'appliquer quelques règles de bon sens et de bien connaître les sociétés cotées. Ce sont les travaux de Markowitz qui, au cours des années 1950, ont marqué le point de départ des développements théoriques modernes relatifs à la gestion des investissements en actifs financiers et au fonctionnement des marchés financiers. Si la notion de diversification était connue bien avant Markowitz, c'est ce dernier qui l'a conceptualisée et quantifiée, rendant ainsi possible la détermination des proportions optimales à investir dans les différents actifs financiers pris en considération par l'investisseur ou le gestionnaire de fortune.
C'est toutefois depuis le milieu des années 1960, avec les travaux de Sharpe, Lintner et Mossin (sur les conditions d'équilibre des marchés financiers) et de Fama (sur l'efficience de ces mêmes marchés), que la littérature relative à la gestion de portefeuille connaît un extraordinaire développement qui semble encore loin de son terme. Les développements théoriques de la gestion de portefeuille ont trouvé de nombreuses applications pratiques : que l'on songe par exemple à l'optimisation des portefeuilles, au Dividend Discount Model, aux modèles multi-factoriels, à l'évaluation des options, aux stratégies actives en actions et obligations, aux stratégies alternatives... Qui plus est, ces applications pratiques ont, ce qui est rare, suivi d'assez près l'élaboration des concepts théoriques dont elles sont issues.

Dans la pratique, le problème d'optimisation de portefeuille doit prendre en compte des caractéristiques réelles tels que les coûts de transaction, contrainte de cardinalité qui impose une limite sur le nombre d'actifs dans le portefeuille, les contraintes de quantité limitant la proportion de chaque actif dans le portefeuille entre une borne inférieure et une borne supérieure et la transaction des lots minimums. Il arrive que, les attentes des investisseurs, au sujet des paramètres financiers, la base sur laquelle ils choisissent leurs portefeuilles, sont souvent vaguement précisées, alors les décisions deviendraient floues, les algorithmes hybrides, les algorithmes génétiques, PSO ont été utilisés pour la résolution du problème d'optimisation du portefeuille.

1.2 Éléments d’optimisation du portefeuille

1.2.1 Un actif financier

Définition 1.2.1. *Les actifs financiers sont des droits de créance ou des droits d’associés émis par une entité qui opère dans la sphère dite de l’économie réelle, celle de la production de biens ou de services marchands, ou tout simplement des titres ou des contrats produisant à son propriétaire des revenus ou un gain en capital sur le marché financier.*

Ces actifs financiers sont des promesses de revenu différé. Pour assigner à celles-ci une valeur monétaire qu’ils pourront comparer au prix qui leur est demandé, les investisseurs doivent être à même de déterminer, ou à tout le moins d’estimer avec une précision suffisante la capacité de l’émetteur de générer par ses opérations de production et de commercialisation des revenus qui suffiront à effectuer le service de sa dette et à rémunérer sur le surplus ses actionnaires d’une manière conforme aux attentes de ceux-ci, tout en constituant une épargne interne qu’on appelle l’ autofinancement. Pour ce faire, ils doivent disposer d’un modèle, c’est-à-dire d’une représentation formalisée permettant une quantification de leur situation décisionnelle. Cette représentation doit être à la fois aussi réaliste que « maniable » dans la mesure du possible. Une bonne modélisation est, en effet, un compromis bien conçu entre ces deux exigences au moins partiellement contradictoires.

1.2.2 Un portefeuille

Définition 1.2.2. *C’est un ensemble d’actifs financiers détenus par un investisseur. Ces actifs peuvent provenir de différents horizons : actions, obligations, produits dérivés, matières premières, fonds, cash, etc.*

L’investisseur, pour diminuer son risque, procède souvent à une diversification de ses actifs. Ces derniers possèdent chacun une volatilité qui leur est propre et sont plus ou moins corrélés entre eux. La détention de plusieurs actifs différents tend donc, généralement, à diminuer la volatilité globale du portefeuille. Le degré de risque (nature des titres détenus, volatilité historique, diversification), le dynamisme de la stratégie (fréquence de réajustement de l’allocation) et le rendement obtenu sont des caractéristiques importantes, servant à comparer les portefeuilles boursiers entre eux.

1.2.3 Le rendement

Le rendement d’un actif est une variable aléatoire et, le rendement d’un portefeuille est une combinaison linéaire pondérée des actifs qui le composent. Ces variables aléatoires peuvent être décrites statistiquement à partir du moment où l'on connaît leur distribution par des caractéristiques de tendance centrale et par des caractéristiques de dispersion en particulier. A titre d'exemple, une caractéristique de tendance centrale peut être l'espérance mathématique de la variable, assimilée en finance à l'espérance de rendement d'un titre ; de même, un exemple de caractéristique de dispersion peut être la variance ou l'écart-type de la variable, assimilé en finance au risque du titre *(Le risque en finance est le plus souvent représenté par sa volatilité, c'est-à-dire l'amplitude des fluctuations autour d'une tendance centrale, ce qui explique pourquoi la variance peut être considérée comme un instrument de mesure du risque)*. En d'autres termes, si nous connaissons la distribution des rendements d'un titre, nous pouvons aisi définir le risque et le rendement espéré. En finance a considéré la distribution « normale » (Laplace-Gauss) pour représenter la réalité pour différentes raisons liées notamment à l'efficience des marchés. L'actif financier suivrait donc une Loi Normale définie par ses deux paramètres qui sont l'espérance mathématique et l'écart type, ou, traduits en termes financiers, deux paramètres qui sont le rendement espéré du titre et son risque.

1.2.4 Analyse du risque

La mesure du risque est devenue systématique et les professionnels ont développé des instruments très sophistiqués. Néanmoins, il existe bon nombre d'outils constituant la base de la gestion du risque, à la portée de tous les investisseurs et ayant démontré leur efficacité. Nous abordons ici les plus célèbres et utilisés d'entre eux :

a) **La variance**

Selon la définition classique, la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne. En termes plus mathématiques elle peut être considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon.

$$\begin{aligned} var(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n} \end{aligned}$$

avec

x_i : le cours de l'actif à l'instant i

$\overline{X}$: moyenne du cours de l'actif x

n : nombre de périodes

Cette formule intègre des carrés dans le but d'éviter que les écarts positifs et les écarts négatifs par rapport à la moyenne ne s'annulent.

La dimension de cette mesure étant le carré de la dimension de la moyenne, on utilise plus souvent l'écart-type qui n'est rien d'autre que la racine de la variance.

Propriétés de la variance :

P1) Étant calculée comme l'espérance d'un nombre au carré, la variance est toujours positive ou nulle,

P2) Si la variance est nulle, cela signifie que la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne est nulle et donc que la variable aléatoire est une constante,

P3) Plus la variance est proche de 0 cela signifie que les variables ne s'écartent pas énormément de la moyenne et donc que les variations ne sont pas trop importantes. Ainsi on dit que la variance traduit la notion d'incertitude. Plus la variance est élevée, plus la variable est susceptible de s'éloigner de la moyenne.

P4) $var(aX) = a^2 var(X)$

– $var(X+Y) = var(X) + var(Y) + cov(X,Y)$

b) **La covariance**

La covariance est légèrement différente. Si la variance permet d'étudier les variations d'une variable par rapport à elle-même, la covariance va permettre d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leur moyenne respective. Mathématiquement, la formule est la suivante :

$$cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$$

ou bien

$$cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \overline{XY}$$

avec

x_i : le cours de l'actif à l'instant i ; y_j : le cours de l'actif à l'instant j

$\overline{X}$: moyenne du cours de l'actif x ; $\overline{Y}$: moyenne du cours de l'actif Y

n : nombre de périodes

c) **La volatilité et l'écart-type**

Définition 1.2.3. *La volatilité est par définition une mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier.*

Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée, plus l'investissement dans ce portefeuille sera considéré comme risqué et par conséquent plus l'espérance de gain (ou risque de perte) sera important. A l'inverse, un portefeuille sans risque ou très peu risqué aura une volatilité très faible.
La notion de volatilité concerne tous les horizons (court, moyen et long terme) et ne se soucie pas du sens du mouvement (seule l'amplitude des mouvements est prise en compte).

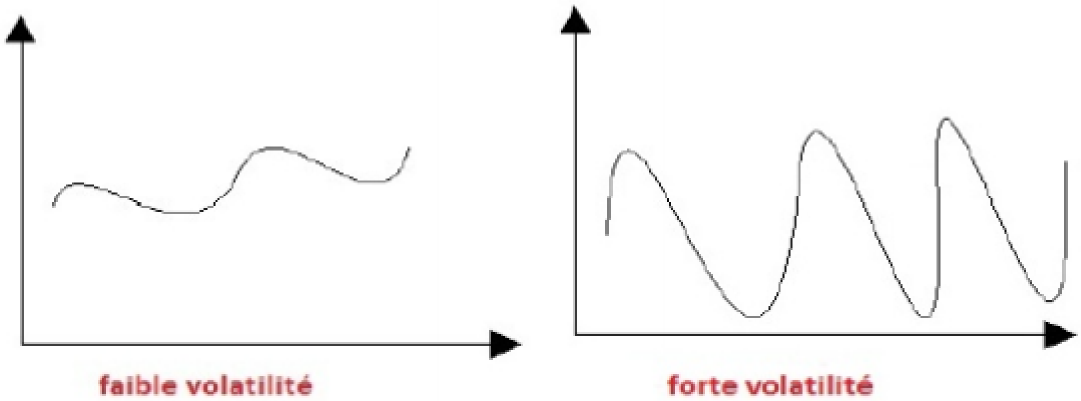


FIGURE 1.1 – Faible et forte volatilités

Alors que cette notion tient aujourd'hui une place primordiale dans l'étude des marchés, elle est également énormément utilisée pour diversifier les portefeuilles, gérer le risque, calculer les prix des options.
Les périodes de forte volatilité se traduisent souvent par des cours relativement bas ; ce qui permet aux investisseurs d'anticiper une rentabilité plus élevée.

Ecart-type

Utilisé pour déterminer la volatilité, l'écart type est relativement simple à comprendre et à appliquer. Il s'obtient en calculant la racine carré de la variance. La variance étant calculée en faisant la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{var(X)}\\ &= \sqrt{E((X-E(X))^2)}\\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n}}\end{aligned}$$

avec,

x_i : le cours de l'actif à l'instant i

$\overline{X}$: moyenne du cours de l'actif x ; n : nombre de périodes

Frontière efficiente :

Définition 1.2.4. *On définit comme efficients les portefeuilles caractérisés par une espérance de rentabilité maximale à variance donnée (ou par une variance minimale à espérance de rentabilité donnée, sachant que cette dernière doit être supérieure ou égale à celle du portefeuille à variance minimale). La frontière efficiente est l’ensemble de tous les portefeuilles efficients.*
La frontière qui caractérise le polygone ou la courbe des contraintes s’appelle dans cette situation la "frontière efficiente de Markowitz" et dans la courbe se situent tous les portefeuilles à rejeter dits "portefeuilles dominés" (confère figure 1.2). Une autre manière de formuler ceci consiste à dire que les combinaisons (rendement, risque) de cette frontière forment un ensemble d’optima de Pareto, c’est-à-dire que si l’un des éléments augmente, l’autre doit augmenter aussi.

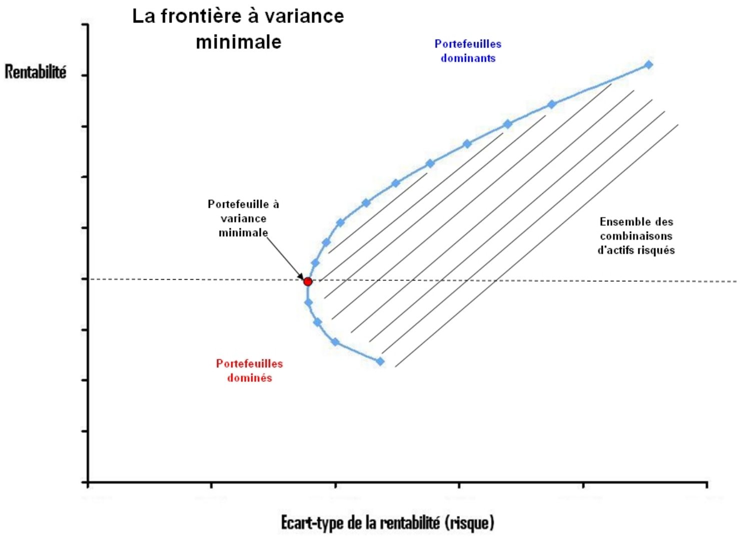


FIGURE 1.2 – Frontière efficiente

En observant la figure 1.2, chaque point sur la courbe bleue à partir du point rouge "Portefeuille à variance minimale" correspond à un portefeuille efficient ; c’est ce que l’on appelle la frontière d’efficience ou frontière de Markowitz. Si un portefeuille se trouve dans la zone hachurée, il n’est pas efficient car il existe :

1. un autre portefeuille apportant ce même niveau de rendement mais avec un risque plus faible,
2. un autre portefeuille apportant un rendement supérieur pour le niveau de risque considéré.

Chaque investisseur peut ensuite choisir n’importe quel portefeuille sur la demi-courbe bleue, en fonction du niveau de risque qu’il est prêt à supporter ou bien du rendement qu’il espère (maximisation de l’utilité de l’investisseur)

1.3 La théorie moderne du portefeuille(Modèle de Markowitz) :

Même si le concept de gestion du portefeuille était utilisé bien avant le milieu du siècle dernier, la théorie du portefeuille est véritablement née au début des années cinquante à la suite des travaux de Markowitz qui peut être considéré comme le Père de la Théorie Moderne du Portefeuille. Avant lui, les investisseurs avaient comme objectif de maximiser le rendement de leur portefeuille, tout en sachant qu'il existait un risque. L'apport principal de Markowitz (1952) a été de modéliser le risque, mesuré par l'écart type des taux de rendement des titres, et de l'intégrer dans le choix des titres d'un portefeuille.

Celui-ci s'opère dans le cadre d'un marché parfait, c'est-à-dire sur la base de certaines hypothèses concernant : la divisibilité des titres, l'absence de coût de transaction et de taxes, l'accès au prêt et à l'emprunt sans limites, au même taux et, sans aucune influence d'un investisseur sur les prix. Les principes fondamentaux de la constitution d'un portefeuille reposent donc constamment sur un arbitrage entre le risque de celui-ci et sa rentabilité. Tout investisseur rationnel se doit de choisir le portefeuille de risque minimum pour un niveau de rendement espéré.

Ce choix est lié au concept de la diversification qui consiste simplement pour un investisseur à ne pas investir tout dans un seul titre, mais à répartir ses investissements sur plusieurs titres, ce qui lui permet d'atteindre un meilleur rapport rendement/risque.

1.3.1 Principe du modèle de Markowitz :

En comparant deux portefeuilles par leurs rendements (supposés aléatoires), on retient :

- à risque identique, celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée (gain maximal),
- à espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible (aversion au risque).

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres.

La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficients s'appelle la frontière efficiente.

En dessous de cette courbe, tous les portefeuilles rejetés sont dits dominés. Il est possible de diminuer le risque prévisionnel en diversifiant son portefeuille, si les actifs sont parfaitement corrélés, en supposant un grand nombre d'actifs financiers et toutes les combinaisons possibles, il est donc possible de calculer l'espérance et la variance du rendement prévisionnel d'un très grand nombre de portefeuilles.

Chaque portefeuille aura donc des caractéristiques d'espérance et de variance différentes, en fonction du choix des actifs, des pondérations et des corrélations entre les actifs. Il est alors possible d'obtenir un graphique représentant le risque et le rendement de chaque portefeuille, et de déterminer une frontière d'efficience à partir des portefeuilles dominants/dominés.

1.3.2 Critères du choix d'un portefeuille optimal :

Structuration du modèle de gestion du portefeuille :

La structure fondamentale du modèle de gestion du portefeuille se différencie de la forme idéale de résolution d'un problème de décision dans l'incertitude.

- Les événements qui peuvent influencer la distribution de probabilité de rendement de chacun des actifs financiers sur le marché (l'état de l'économie, du marché. . . etc.).
- La ligne d'action c'est-à-dire le budget d'investissement prédéterminé à allouer entre les différents actifs financiers négociables $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$

Si X_i est la part du budget consacrée à l'achat de l'actif i $(i = 1, 2, ..., n)$ chaque ligne d'action peut être caractérisée par un vecteur X_i répondant aux conditions suivantes :

$$0 < X_i < 1 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

1.3.3 Hypothèses du modèle :

Les hypothèses relatives aux actifs financiers :

H.1 :" Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque; le rendement d'un actif financier pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale ".

C'est-à-dire une distribution symétrique stable entièrement définie par les deux paramètres :

- $\mathbb{E}(R_i) = \mu$: espérance mathématique de rendement.
- $\sigma(R_i) = \sigma$: écart-type de la distribution de probabilité du rendement.

Tel que le " return on investment " (ROI) " Return " c'est l'accroissement de la fortune initiale que l'investisseur cherche à maximiser.

$$r_t = (P_t - P_{t-1}) + C_t$$

Où :

- $r_t =$ rendement de l'actif financier pour la période (se terminant au temps) t,
- $P_t =$ prix de marche au temps t de l'actif financier.
- $C_t =$ revenu liquide attaché à la détention de l'actif financier durant la période (se terminant au temps) t.

La distribution de probabilité du rendement est :

- Soit une distribution de probabilité objective, établie à partir des fréquences relatives des rendements observés dans le passé.

– Soit une distribution de probabilité subjective.

Ainsi, à partir de cette relation (du rendement) on peut déduire le taux de rentabilité de chaque action calculé comme suit :

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}}$$

H.2 : " Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles ".

– Les hypothèses relatives au comportement des investisseurs :

H.3 : " Le comportement de tous les investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de probabilité du rendement ".

H.4 : " Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs ".

H.5 : " Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période ".

A partir des 5 hypothèses, Markowitz propose un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

1.3.4 Présentation mathématique du modèle :

Soit R_P le rendement du portefeuille composé de n actifs caractérisés par leur rendement respectif $R_1, R_2, ..., R_n$. On suppose, en outre, que chaque actif i entre pour une proportion X_i dans la composition du portefeuille P.

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i$$

L'espérance de rentabilité d'un portefeuille est donnée par :

$$\mathbb{E}(R_P) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{E}(R_i)$$

Et le risque est mesuré par la variance de rentabilité d'un portefeuille :

$$V(R_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j cov(R_i, R_j)$$

Sélectionner un portefeuille revient à choisir celui qui :

– maximise $\mathbb{E}(R_P)$

– minimise $V(R_P)$

– sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$

Il s'agit donc d'un problème de maximisation d'une fonction économique sous contrainte. Soit f cette fonction économique :

$$f(R_P) = \Phi\mathbb{E}(R_P) - V(R_P)$$

Qui doit être maximisée sous la contrainte que : $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$ Où Φ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs.

En d'autres termes, il s'agit du taux marginal de substitution du rendement et du risque qui exprime dans quelle mesure l'investisseur est d'accord pour supporter un risque accru en contrepartie d'un accroissement de son espérance de rendement.

En utilisant le Lagrangien de cette expression, le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction f définie par :

$$f = \Phi \sum_{i=1}^{n} X_i\mathbb{E}(R_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_iX_jcov(R_i, R_j) + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n} X_i)$$

Cette fonction de $n+1$ variables $(X_1, X_2, ..., X_n, \lambda)$ est maximisée si sa dérivée partielle par rapport à chacune de ces variables est nulle, ce qui revient à poser le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial X_1} = \Phi\mathbb{E}(R_1) - 2X_1Var(R_1) - 2X_2cov(R_1, R_2) \dots - 2X_ncov(R_1, R_n) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial X_2} = \Phi\mathbb{E}(R_2) - 2X_1cov(R_2, R_1) - 2X_2Var(R_2) \dots - 2X_ncov(R_2, R_n) - \lambda = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial X_n} = \Phi\mathbb{E}(R_n) - 2X_1cov(R_n, R_1) - 2X_2cov(R_n, R_2) \dots - 2X_nVar(R_n) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 1 - X_1 - X_2 - \dots X_n = 0 \end{cases}$$

Posons $cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \Phi\mathbb{E}(R_1) = 2X_1\sigma_{11} + 2X_2\sigma_{12} \dots + 2X_n\sigma_{1n} + \lambda \\ \Phi\mathbb{E}(R_2) = 2X_1\sigma_{21} + 2X_2\sigma_{22} \dots + 2X_n\sigma_{2n} + \lambda \\ \quad\vdots \\ \Phi\mathbb{E}(R_n) = 2X_1\sigma_{n1} + 2X_2\sigma_{n2} \dots + 2X_n\sigma_{nn} + \lambda \\ \quad 1 = X_1 + X_2 + \dots X_n \end{cases}$$

L'écriture matricielle sera alors :

$$\begin{pmatrix} \Phi\mathbb{E}(R_1) \\ \Phi\mathbb{E}(R_2) \\ \vdots \\ \Phi\mathbb{E}(R_n) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \dots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \dots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \dots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \Phi\mathbb{E}(R_1) \\ \Phi\mathbb{E}(R_2) \\ \vdots \\ \Phi\mathbb{E}(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système d'équations à résoudre peut se résumer sous la forme $A.X = B$. Par conséquent : $X = A^{-1}B$.

La détermination du poids de chacun des n actifs susceptibles d'entrer dans la composition d'un portefeuille passe donc par l'inversion d'une matrice carrée de $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes. Compte tenu de la lourdeur des calculs nécessaires à l'inversion de la matrice A, Sharpe a proposé un modèle simplifié, et qui trouve par ailleurs une application pratique dans le cadre de la détermination du coût des capitaux propres.

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

PROBLÈME D'OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE

2.1 Formulation du problème

Considérons le cas d'un marché financier composé uniquement d'actifs risqués, l'univers d'investissement contient N titres financiers risqués indexés par $(i = 1; \ldots; N)$. Nous adaptons les notations suivantes :

- $X \in \mathbb{R}^N$ un vecteur représentant les poids d'un portefeuille P.
- $R \in \mathbb{R}^N$ un vecteur représentant les rentabilités aléatoires des actifs financiers de l'univers d'investissement. $\mathbb{E}(R)$ désigne son espérance.
- $e \in \mathbb{R}^N$ un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.
- $V \in M_N(\mathbb{R})$ la matrice des variances-covariances des rentabilités des actifs financiers. On suppose que cette matrice est inversible.

$\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \sigma^2(R_i)$: variance de la rentabilité du ième actif financier.

$\sigma_{ij} = Cov(R_i; R_j)$: covariance entre le taux de rendement du ième actif financier et le taux de rendement du jème actif financier. Soit en notation matricielle :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, E[R] = \begin{pmatrix} E[R_1] \\ \vdots \\ E[R_N] \end{pmatrix}, \text{et } V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \ldots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}.$$

Il faut également noter que notre matrice des variances-covariances est symétrique c'est-à-dire que $(V = {}^tV)$. Il s'agit d'obtenir l'ensemble des portefeuilles qui, pour chaque niveau donné d'espérance de rentabilité, ont une variance minimale. De façon alternative, on peut chercher l'ensemble des portefeuilles qui, pour chaque niveau donné de variance, exhibent l'espérance de rentabilité maximale. La rentabilité espérée d'un portefeuille P est égale à :

$$E_P = \sum_{i=1}^{N} X_i E\left[R_i\right] = {}^tXE\left[R\right]$$

La variance de la rentabilité du portefeuille P est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_P) &= {}^tXVX \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \\ &= 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$

Cette dernière expression de la variance permet de distinguer les termes de variance. Cette relation met en évidence le fait que la contribution marginale d'un titre financier au risque d'un portefeuille qui le contient ne se mesure pas uniquement par la variance de la rentabilité de ce titre mais aussi par la covariance de la rentabilité de ce titre avec celle du portefeuille. L'intuition derrière ce résultat réside bien entendu dans l'effet de la diversification. A partir de l'expression de la variance du portefeuille ci-dessus, la dérivée partielle de cette variance par rapport au poids du titre i s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma^2(R_P)}{\partial X_i} = 2\sum_{j=1}^{N} X_j \sigma_{ij}$$

En utilisant les relations :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} X_j \sigma_{ij} &= \sum_{j=1}^{N} X_j cov(R_i, R_j) \\ &= cov(R_i, \sum_{j=1}^{N} X_j R_j) \\ &= cov(R_i, R_P) = \sigma_{iP} \end{aligned}$$

nous obtenons finalement l'égalité :

$$\frac{\partial \sigma^2(R_P)}{\partial X_i} = 2\sigma_{iP}$$

Ainsi, la contribution marginale d'un titre au risque total d'un portefeuille se mesure par la covariance entre la rentabilité de ce titre et celle du portefeuille. Pour comprendre cette assertion fondamentale, considérons un titre i négativement corrélé avec le portefeuille P : quand les performances de i sont bonnes (respectivement, mauvaises), celles de P ont une forte chance d'être mauvaises (respectivement, bonnes), et réciproquement. Le titre i tend par conséquent à tirer la rentabilité globale du portefeuille vers sa moyenne et donc à réduire l'amplitude de ses variations. Il réduit ainsi le risque global, bien qu'il puisse avoir une variance très élevée. Au contraire, si i est fortement et positivement corrélé avec P, les fluctuations de sa rentabilité sont en général du même signe que celles des autres titres et sa détention augmente la variance globale (ou l'écart-type) du portefeuille, même si sa variance (ou écart-type) est faible.

Ces considérations intuitives conduisent donc à apprécier le risque induit par un titre individuel par la covariance de sa rentabilité avec celle du portefeuille ($cov(R_i, R_P) = \sigma_{iP}$). C'est, plus précisément, le ratio σ_{iP}/σ_P (en prenant comme mesure de risque pour le portefeuille son écart-type) qui mesure la contribution marginale de l'actif i au risque total du portefeuille. De ce résultat découlent deux conséquences cruciales :

- Bien que la variance d'un titre risqué soit par définition positive, le risque (marginal) d'un tel actif est négatif (respectivement, positif) si sa covariance avec le portefeuille dans lequel il est englobé est négative (respectivement, positive) ;
- Comme tous les portefeuilles des investisseurs sont a priori différents, il n'est pas possible a priori de répondre à la question de savoir quel est le risque encouru par l'investisseur s'il achète le titre i. En effet, la réponse dépend du portefeuille P dans lequel i est plongé.

Considérons un portefeuille composé de N titres détenus dans la même proportion $\frac{1}{N}$, l'expression de sa variance est :

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2}\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sigma_{ij}.$$

Elle peut se réécrire sous la forme :

$$\sigma^2(R_P) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\sigma_i^2 + \frac{N-1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)}\sigma_{ij}.$$

On constate de nouveau que la contribution de la variance d'un titre individuel à variance du portefeuille tend vers zéro lorsque le nombre des titres du portefeuille devient plus grand.

Cependant, la contribution des termes de covariance tend vers la covariance moyenne lorsque N devient grand.

En conclusion, seule la covariance joue un rôle dans un portefeuille bien diversifié.

2.2 Portefeuille de variance minimale

La première question que se pose un investisseur est évidemment de savoir : Quel portefeuille efficient, offre le niveau de risque le plus faible ? Il s'agit d'optimiser le programme quadratique suivant :

$$\begin{cases} \min({}^{t}XVX) \\ s.c \\ {}^{t}Xe = 1 \end{cases}$$

La contrainte est simplement une contrainte de budget indiquant que la somme des poids est égale à 1 , c'est-à dire 100%. Signalons toutefois que les poids peuvent être négatifs, ce qui signifie que les ventes à découvert sont autorisées. Pour résoudre ce programme, nous allons recourir à la méthode du multiplicateur de Lagrange :

$$L(X,\lambda) = {}^{t}XVX - \lambda({}^{t}Xe - 1)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange.

Les conditions nécessaires du premier ordre sont :

$$\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial X_i} = 2VX - \lambda e = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial L(X,\lambda)}{\partial \lambda} = 1 - {}^{t}Xe = 0 \tag{2.2}$$

Nous allons d'abord tirer X dans l'équation (2.1), après quoi nous allons le remplacer dans l'équation (2.2) par son expression :

$$\begin{aligned} (2.1) &\iff 2VX = \lambda e \\ &\iff X = \frac{1}{2}\lambda V^{-1}e. \end{aligned}$$

$$(2.1),(2.2) \iff \lambda = \frac{2}{{}^{t}eV^{-1}e}$$

Nous allons mettre cette dernière expression de λ dans l'expression de X on obtient :

$$X = \frac{V^{-1}e}{{}^{t}eV^{-1}e}$$

On obtient finalement un portefeuille d'espérance de rentabilité(rendement) :

$$E_P = \frac{A}{C}$$

Et de variance de rentabilité(risque) :

$$\sigma^2(R_P) = \frac{1}{C}$$

Où : $A = {}^{t}eV^{-1}E[R]$ et $C = {}^{t}eV^{-1}e$.

2.3 Portefeuille efficient

Un portefeuille efficient est un portefeuille dont la rentabilité moyenne est maximale pour un niveau de risque donné, ou dont le risque est minimal pour une rentabilité donnée.

Les portefeuilles efficients sont sur la « frontière efficiente » de l'ensemble des portefeuilles dans le plan (σ_p^2, E_P).

Notre objectif est de pouvoir déterminer cette frontière efficiente ou du moins exprimer une fonction qui permet de déterminer le portefeuille pour un niveau de rendement cible E_P. Ce problème peut se formuler comme ci-dessous :

$$\begin{cases} Min(\,^tXVX) \\ s.c \quad ^tXE\left[R\right] = E_P \\ \quad ^tXe = 1 \end{cases}$$

La première contrainte porte sur la rentabilité espérée du portefeuille alors que la seconde est simplement une contrainte de budget indiquant que la somme des poids est égale à 1, c'est-à dire 100%. Le lagrangien de ce problème d'optimisation s'écrit :

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2) = \,^tXVX + \lambda_1(E_P - \,^tXE\left[R\right]) + \lambda_2(1 - \,^tXe)$$

Où λ_1 et λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange.

Les conditions nécessaires du premier ordre sont :

$$\frac{\partial L(X, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial X} = 2VX - \lambda_1 E\left[R\right] - \lambda_2 e = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial L(X, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = E_p - \,^tXE\left[R\right] = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L(X, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 1 - \,^tXe = 0 \quad (2.5)$$

L'équation (2 :3) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} (2.3) \iff & 2VX = \lambda_1 E\left[R\right] + \lambda_2 e \\ \iff & X = \frac{1}{2}(\lambda_1 V^{-1} E\left[R\right] + \lambda_2 V^{-1} e) \end{aligned}$$

Remplaçons X dans l'équation (2.4) et (2.5), on obtient :

$$\begin{aligned} (2.4) \iff & E_P = \,^tXE\left[R\right] \\ \iff & E_P = \frac{1}{2}(\lambda_1 \,^tE\left[R\right] V^{-1} E\left[R\right] + \lambda_2 \,^tE\left[R\right] V^{-1} e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.5) \iff & \,^tXe = 1 \\ \iff & 1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \,^tE\left[R\right] V^{-1} e + \lambda_2 \,^teV^{-1} e) \end{aligned}$$

Notons : $A = {}^{t}eV^{-1}E\left[R\right]$, $B = {}^{t}E\left[R\right]V^{-1}E\left[R\right]$, $C = {}^{t}eV^{-1}e$ et $d = BC - A^2$ ces quantités sont des nombres réels.

On doit donc résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues (λ_1, λ_2).

$$\begin{cases} E_P &= \frac{1}{2}(B\lambda_1 + A\lambda_2) \\ 1 &= \frac{1}{2}(A\lambda_1 + C\lambda_2 \end{cases}$$

qui a pour solution :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= \dfrac{2(CE_P - A)}{d} \\ \lambda_2 &= \dfrac{2(B - AE_P)}{d} \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs de λ_1 et λ_2 par ces valeurs dans l'expression de X, on obtient finalement la composition des portefeuilles de variance minimale pour chaque niveau d'espérance de rentabilité E_P :

$$X = \frac{1}{d}\left((CE_P - A)V^{-1} + (B - AE_P)V^{-1}e\right).$$

On peut le réécrire de la manière suivante :

$$X = \frac{1}{d}(Bv^{-1}e - AV^{-1}E\left[R\right]) + E_P\frac{1}{d}(CV^{-1}E\left[R\right] - AV^{-1}e)$$

Notons :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{d}(Bv^{-1}e - AV^{-1}E\left[R\right]), \\ X_2 &= \frac{1}{d}(CV^{-1}E\left[R\right] - AV^{-1}e) \end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression du portefeuille optimal en fonction de la rentabilité E_P fixée :

$$X = X_1 + E_PX_2$$

Nous pouvons exprimer notre fonction de frontière efficiente qui n'est en fait qu'une expression de $\sigma^2(R_P)$ en fonction de E_P.

$$\sigma^2(R_P) = {}^{t}(X_1 + E_PX_2)V^{-1}(X_1 + E_PX_2)$$

Chapitre Trois

Exemples de résolution de problèmes d'optimisation de portefeuille

3.1 Portefeuille de deux actifs risqués

On se place dans un marché où il y a deux actifs risqués 1 et 2, on essaie de construire le portefeuille qui intéresse les investisseurs autrement dit celui qui a la rentabilité anticipée la plus élevée. Un tel portefeuille peut s'écrire de cette façon : $P_x = \{(1; x); (2; 1-x)\}$.

- x et $1-x$ sont les proportions à investir du capital de détenteur de portefeuille respectivement sur les deux actifs 1 et 2. Elles peuvent varier entre 0 et 1.
- Les rentabilités aléatoires notées R_1 et R_2, les rentabilités espérées de chacun des deux actifs $E(R_1)$ et $E(R_2)$, tel que $E(R_1) \neq E(R_2)$.
- Les variances de ces rentabilités sont notées σ_1^2 et σ_2^2 . Et σ_{12} la covariance entre la rentabilité de ces deux actifs .

$$\sigma_{12} = Cov(R_1, R_2) = \varphi_{12}\sigma_1\sigma_2$$

Où φ_{12} ($\varphi_{12} \in [-1, 1]$) désigne le coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux actifs.

3.1.1 Le lien entre le risque et le rendement

Notre portefeuille a une rentabilité aléatoire R_P :

$$R_P = xR_1 + (1-x)R_2$$

On peut même écrire l'égalité au dessus en utilisant les rentabilités éspréees :

$$E(R_P) = xE(R_1) + (1-x)E(R_2)$$

Ce qui donne l'expression suivante :

$$x = \frac{E(R_P) - E(R_2)}{E(R_1) - E(R_2))}$$

La variance du portefeuille est donnée ainsi :

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)cov(R_1, R_2) \\
&= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\varphi_{12}\sigma_1\sigma_2 \\
&= x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}
\end{aligned}$$

En remplaçant x par $\dfrac{E(R_P) - E(R_2)}{E(R_1 - E(R_2))}$.
On obtient la relation entre σ_P^2 et $E(R_P)$.

$$\begin{aligned}
f(E(R_P)) &= \left(\frac{E(R_P) - E(R_2)}{E(R_1 - E(R_2))}\right)^2 \sigma_1^2 + (\frac{E(R_1) - E(R_P)}{E(R_1 - E(R_2))})^2\sigma_2^2 \\
&+ 2\left(\frac{E(R_P) - E(R_2)}{E(R_1 - E(R_2))}\right)\left(\frac{E(R_1) - E(R_P)}{E(R_1 - E(R_2))}\right)\sigma_{12}.
\end{aligned}$$

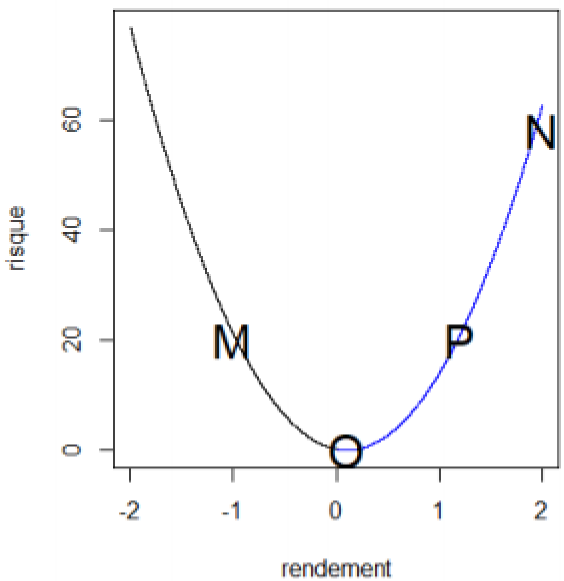
En développant les calculs, on trouve bien une fonction quadratique en $E(R_P)$:

$$\begin{aligned}
f(E(R_P)) &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}{E(R_1) - E(R_2)} E(R_P)^2 \\
&+ \left(\frac{4E(R_2)\sigma_{12}}{(E(R_1) - E(R_2))^2} + \frac{2\sigma_{12}}{(E(R_1) - E(R_2))^2} - \frac{2E(R_2)\sigma_{12}}{E(R_1) - E(R_2)}\right) E(R_P) \\
&- \frac{2E(R_2)\sigma_{12}}{(R_1) - E(R_2)} - \frac{2E(R_2)^2\sigma_{12}^2}{(E(R_1) - E(R_2))^2}.
\end{aligned}$$

Donc on a une fonction qui s'écrit sous forme :

$$f(E(R_P)) = aE(R_P)^2 + bE(R_P) + c$$

On peut visualiser notre situation, en traçant la courbe de σ_p^2 en fonction de $E(R_P)$:



La partie en bleu s'appelle la frontière efficiente ou bien de Markowitz, elle représente l'ensemble de tous les points qui intéressent les détenteurs du portefeuille. Le point M a le même risque que le point P mais M ne se situe pas sur la frontière efficiente, on remarque clairement cela en projetant sur l'axe des abscisses, on voit que le rendement du point P est supérieur à celui du point M. Les points O ; P et N sont tous sur la frontière efficiente, on remarque bien que la fonction est croissante une fois que le rendement dépasse 0, du coup le rendement et le risque varient dans le même sens.

On peut même inverser la fonction au dessus en écrivant le rendement en fonction du risque.

Pour cela on utilise la forme canonique :

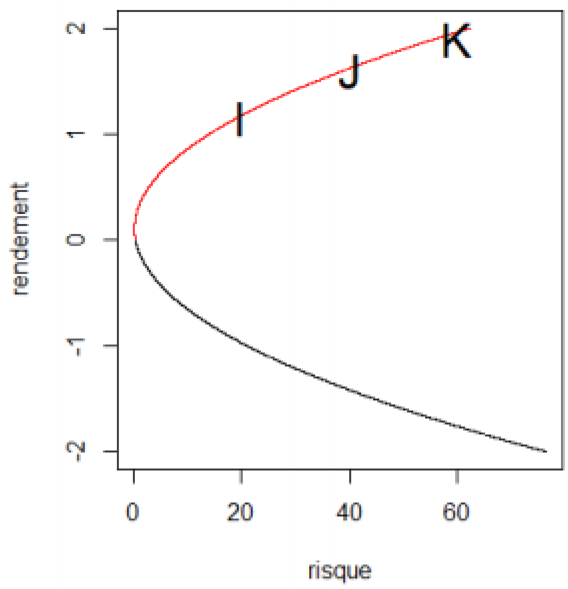
$$\sigma_P^2 - c = aE(R_P)^2 = bE(R_P) = a\left[\left(E(R_P) + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

Ce qui donne :

$$E(R_P) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{a}(\sigma_P^2 - c) + \frac{b^2}{4a^2}} - \frac{b}{2a}\right)$$

Donc on a bien l'expression suivante :

$$E(R_P) = \pm\sqrt{z_1\sigma_P^2 + z_2} + z_3$$



La frontière efficiente en rouge comporte une infinité des points, chaque point est un portefeuille c'est à dire une combinaison des deux actifs 1 et 2 considérés au début. En cherchant le portefeuille qui attire les investisseurs, on place aléatoirement les trois points I ; J et K pour exposer des cas aux quels les investisseurs font face :

– Au point I supposons qu'on est dans la situation suivante : $P_1 = \{(1;1);(2;0)\}$. C'est-à-dire les investisseurs ne diversifient pas le portefeuille, ils investissent la totalité de leurs capitaux dans l'achat de l'actif 1.

- Au point J, on trouve la même chose avec une proportion nulle de l'actif 1, c'est le portefeuille P_0.
- Au point K, on choisit un portefeuille diversifié avec un rendement R_k et un niveau de risque σ_k.

$E(R_k) = xE(R_1) - (1-x)E(R_2) \implies E(R_k) - E(R_2) = x\,(E(R_1) - E(R_2))$.

On obtient :

$$x = \frac{E(R_k) - E(R_2)}{E(R_1) - E(R_2)}$$

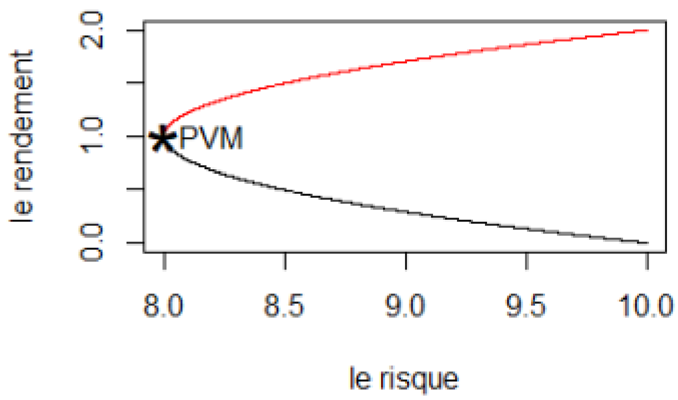
Et

$$\sigma_k^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}$$

En fait, il y'a plusieurs types de portefeuilles , on parlera dans ce chapitre du portefeuille de variance minimale, et on abordera les calculs détaillés pour les autres portefeuilles dans le chapitre suivant.

3.1.2 Portefeuille de variance minimale

Un détenteur d'un portefeuille à variance minimale cherche à minimiser le risque autant que possible.



Posons le portefeuille suivant :

$$P_x = \{(1, x), (2, 1-x)\}$$

Sa volatilité s'écrit ainsi : $\sigma_p^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}$

On a bien une fonction quadratique qui atteint son minimum en x vérifiant : $\dfrac{\partial \sigma_P^2}{\partial x} = 0$.

Cherchons alors la proportion qu'il faut investir pour avoir un risque minimal.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} &= 2x\sigma_1^2 - 2(1-x)\sigma_2^2 + (2-4x)\sigma_{12} \\ &= 2x\sigma_1^2 + 2x\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 + 2\sigma_{12} - 4x\sigma_{12}\end{aligned}$$

Après les calculs effectués, la proportion du capital qu'il faut investir dans l'actif 1 pour avoir le portefeuille qui a le plus petit risque est :

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial x} = 0 \iff x_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

Et pour la proportion qu'il faut investir dans l'actif 2 vaut :

$$x_2^* = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

Pour un portefeuille ayant les parts trouvées au dessus que l'on note x_1^* et x_2^* le rendement suivant :

$$E(R_P) = x_1^* E(R_1) + x_2^* E(R_2)$$

Et un risque de

$$\sigma_P = \sqrt{(x_1^*)^2\sigma_1^2 + (x^*)^2\sigma_2^2 + 2x_2^* x_1^* \sigma_{12}}$$

On sait que le coefficient de la corrélation s'écrit ainsi :

$$\varphi_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} \implies \sigma_{12} = \varphi_{12}\sigma_1\sigma_2$$

En remplaçant dans la formule du risque trouvée, on aura le risque minimal suivant :

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\varphi_{12}^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\varphi_{12}\sigma_1\sigma_2}}$$

Et le rendement suivant :

$$E(R_P) = \frac{E(R_1)\sigma_2^2 + E(R_2)\sigma_1^2 - (E(R_1) + E(R_2))\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

3.1.3 Effet du coefficient de corrélation des deux actifs

Le coefficient de corrélation est une mesure de la corrélation. Il permet de déterminer le lien entre deux actifs sur une période donnée. Un coefficient positif signifie que les deux actifs évoluent dans le même sens. A l'inverse, un coefficient négatif signifie que les actifs évoluent dans le sens opposé. Le coefficient de corrélation peut être plus ou moins fort et varie entre -1 et 1.

- -1 signifie que les deux variables sont corrélées négativement de façon parfaite. Elles ont tendance à évoluer dans le sens contraire à chaque mouvement de marché.
- 1 signifie qu'il y a corrélation positive parfaite. Les deux variables aléatoires ont tendance à évoluer dans le même sens et avec la même intensité.
- 0 signifie qu'il n'existe aucun lien entre les mouvements des deux variables aléatoires. Elles sont non corrélées. Toutefois, cela ne veut pas dire que les variables sont indépendantes. Deux variables indépendantes sont forcement non corrélées mais l'inverse n'est pas forcement vrai.

Sur un marché financier composé de 2 actifs risqués 1 et 2, on a vu dans la section 3 :1 :2 comment constituer le portefeuille de variance minimale. Mais on peut toujours se demander comment le niveau de risque de ce portefeuille est affecté par le coefficient de corrélation entre les rendements des deux titres ?

Pour répondre à la question posée, on va traiter tout les cas possibles.

Rappelons des proportions du capital qu'il faut investir dans les deux actifs 1 et 2 respectivement :

$$\frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \quad et \quad \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

Supposons que $\sigma_1 < \sigma_2$

Nous allons analyser l'impact du coefficient de corrélation φ_{12}

Cas 1 Corrélation positive parfaite $\varphi_{12} = 1$

Dans ce cas, on remplace φ_{12} par 1 dans les proportions au dessus pour trouver les formules cherchées.

Pour l'actif 1, on aura : $\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1}$ et pour l'actif 2, on trouvera $\frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$

Si les titres 1 et 2 qui composent le portefeuille sont parfaitement positivement corrélés , la part du titre 2 est négative, l'investisseur vend à découvert (Short selling) le titre 2 pour acquérir plus d'unités du titre 1.

Cas 2 $\varphi_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Dans ce cas , pour trouver les nouvelles proportions on remplace φ_{12} par $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

Après les calculs, on trouve dans ce cas que l'investisseur alloue la totalité de son capital pour l'actif 1,et la variance du portefeuille est égale à la variance de l'actif le moins risqué σ_1, c'est le seul cas où la diversification ne joue pas .

Cas 3 $\varphi_{12} \in \left]\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, 1\right[$:

En prenant un coefficient de corrélation sur l'intervalle $\left]\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, 1\right[$, on aura cette inégalité :

$$\sigma_2(1 - \varphi_{12}\sigma_1) > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\varphi_{12}$$

Alors la proportion à investir dans l'actif 1 est supérieure à 1, l'investisseur fait une position courte sur l'actif 2, et une longue position sur l'actif 1, en empruntant alors des unités de l'actif 2 pour financer l'achat de l'actif 1.

Cas 1 $\varphi_{12} = 0$

Dans ce cas, on trouve les proportions des deux actifs 1 et 2 respectivement :

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad et \quad \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Lorsque les rendements des titres 1 et 2, sont parfaitement indépendants ($\varphi_{12} = 0$), les parts à investir sont positives, l'investisseur se positionne sur les 2 actifs du marché, il diversifie son portefeuille pour atteindre le portefeuille de variance minimale.

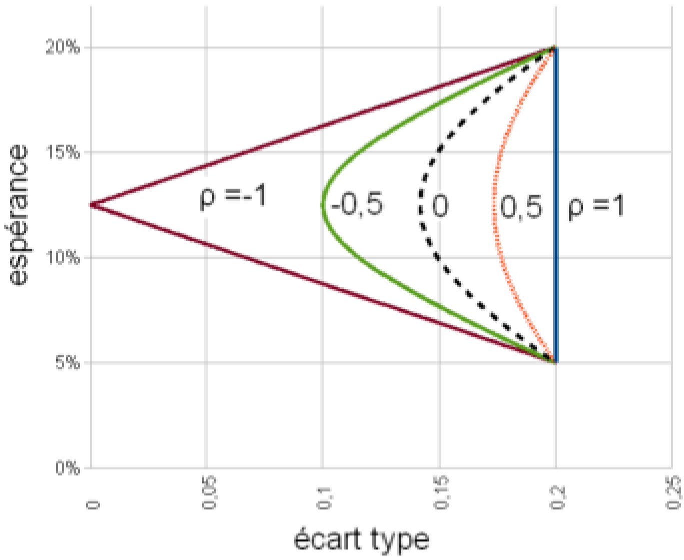
Cas 5 Corrélation négative parfaite $\varphi_{12} = -1$

En remplaçant φ_{12} par -1, on aura un portefeuille sans risque avec les proportions des actifs 1 et 2 suivantes

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_2+\sigma_1}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2+\sigma_1}$$

Lorsque les rendements des titres 1 et 2, sont parfaitement corrélés en sens inverse ($\varphi_{12}=-1$), les parts à investir sont positives, l'investisseur se positionne sur les 2 actifs du marché, il diversifie son portefeuille pour atteindre le portefeuille de variance nulle. Le portefeuille est semblable à un bon du trésor d'Etat.

On peut visualiser le graphique qui représente la rentabilité en fonction de l'écart-type d'un portefeuille à deux actifs pour diverses valeurs du coefficient de corrélation.



On peut clairement remarquer qu'en diversifiant un portefeuille, il faut rechercher autant que possible des actifs qui ont un coefficient de corrélation négative et proche de -1, (des actifs qui évoluent dans le sens inverse).

3.2 Exemple de trois actifs

On considère un univers de titres constitué de trois titres risqués dont les rendements espérés et les volatilités (écart-types) sont les suivants :

titres	rendement espéré en %	volatilité en %
titre 1	12	20
titre 2	10	16
titre 3	6	6

La matrice des corrélations est la suivante :

titres	titre 1	titre 2	titre 3
titre 1	1	0.6	-0.2
titre 2	0.6	1	-0.1
titre 3	-0.2	-0.2	1

On va déterminer le portefeuille le moins risqué de cet univers :
Pour cela , on commence par le calcul de la matrice de covariance V en utilisant la relation :

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij} \times \sigma_i \times \sigma_j \quad (*)$$

Or les covariances sont symétriques $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, on a dans notre cas 3 variables à calculer 3 covariances (entre 2 titres différents). On peut donc se contenter d'appliquer successivement 3 fois la relation au dessus $(*)$ pour trouver les variables souhaitées. En introduisant la matrice diagonale suivante des volatilités :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

La matrice des covariances V est alors donnée par le produit suivant :

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 1 & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Numériquement dans notre cas, on a donc :

$$V = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & -0.2 \\ 0.6 & 1 & -0.1 \\ -0.02 & -0.01 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.0192 & -0.0024 \\ 0.0192 & 0.0256 & -0.00096 \\ -0.0024 & -0.00096 & 0.0036 \end{pmatrix}$$

Donc l'inverse est égale à :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 40.309 & -29.520 & 19.001 \\ -29.520 & 61.075 & -3.3931 \\ 19.001 & -3.3931 & 289.54 \end{pmatrix}$$

Le portefeuille le moins risqué de cet univers va être la solution du programme suivant :

$$\begin{cases} \min \sigma_P^2 & \\ X_1 + X_2 + X_3 & = 1 \end{cases}$$

avec

$$\sigma_P^2 = (X_1\ X_2\ X_3) \begin{pmatrix} 0.04 & 0.0192 & -0.0024 \\ 0.0192 & 0.0256 & -0.00096 \\ -0.0024 & -0.00096 & 0.0036 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

D'aprés (2.2) le vecteur des proportions du portefeuille de variance minimale s'écrit :

$$X = \frac{V^{-1}e}{{}^t e V^{-1} e}$$

Numériquement dans notre cas :

$$V^{-1}e = \begin{pmatrix} 40.309 & -29.520 & 19.001 \\ -29.520 & 61.075 & -3.3931 \\ 19.001 & -3.3931 & 289.54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et donc on trouve le vecteur des poids suivant :

$$X = \frac{1}{363.1} \begin{pmatrix} 29.79 \\ 28.162 \\ 305.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.20 \times 10^{-2} \\ 7.76 \times 10^{-2} \\ 84.04 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

En utilisant les formules de la section (2 :2), les performances de ce portefeuille (rendements espérés, risque) peuvent s'écrire :

$$E_P = (0.12 \quad 0.1 \quad 0.06) \begin{pmatrix} 8.20 \times 10^{-2} \\ 7.76 \times 10^{-2} \\ 84.04 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \simeq 6.8024 \times 10^{-2}$$

$$\sigma^2(R_P) = (0.082\ 0.077\ 0.084) \begin{pmatrix} 0.04 & 0.0192 & -0.0024 \\ 0.0192 & 0.0256 & -0.00096 \\ -0.0024 & -0.00096 & 0.0036 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.20 \times 10^{-2} \\ 7.76 \times 10^{-2} \\ 84.04 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2(R_P) \simeq 2.574 \times 10^{-2}.$$

♣ Implication pédagogique ♣

Le lien que nous pouvons établir entre ce mémoire et le métier que nous sommes appelés à exercer ; à savoir le métier d'enseignant, est articulé sur deux plans :

– Ce travail nous a permis de maîtriser l'usage de certains outils numériques en occurrence les logiciels tels que : *latex, geogebra, excel, R*...Ces outils sont très importants dans la pratique enseignante des mathématiques dans la mesure où nous les utilisons pour la saisie des épreuves, des leçons et même l'analyse des données statistiques à la fin des séquences d'évaluation.

– Nous notons que ce travail est d'un apport considérable dans la consolidation des acquis de la partie des mathématiques qui se nomme STATISTIQUES, partie de la mathématique qui revient dans presque toutes les classes du secondaire, ce chef d'œuvre a été d'une utilité particulière pour comprendre un peu mieux la nouvelle approche pédagogique APC/ESV en ce sens que la modélisation mathématique est la branche de la mathématique qui formalise un problème de vie concrète en problème mathématique.

♣ Conclusion ♣

Au terme de notre mémoire dont le problème abordé était le choix entre obtenir une rentabilité certaine mais faible, ou bien prendre un risque contrebalancé par une rentabilité espérée plus élevée. Nous avons démontré qu'une combinaison judicieuse de nombreux actifs dans un portefeuille permet de réduire considérablement le risque total pour un taux espéré de rentabilité donné. L'espérance des rentabilités est évidemment la moyenne pondérée des espérances de rentabilités de chacun des titres entrant dans sa composition. Quant au risque, nous avons mesuré celui d'un portefeuille par variance ou l'écart type de sa rentabilité.

Dans un travail prochain nous souhaiterons réaliser des simulations grâce à l'Algorithme Génétique (G.A) qui représente graphiquement les Zones efficientes où l'acteur peut estimer son risque sur une longue durée.

♣ Bibliographie ♣

[1] M.C. Chan, C.C. Wong, B. Cheung et G. *Tang, Genetic Algorithms in multi-stage portfolio optimization systeme* [online] (2012)

[2] T. J. Chang, N. Meade et J. E. Beasley, *heuristics for cardinality constrained portfolio optinisation* comp. oper-. res. 27(2000). pp 1271-1302

[3] M. Abbas et M. Moulaï. *"Solving multiple objective integer linear programming"*. Dans : Journal of the Italian Operations Research Society - Ricerca Operativa Volume 29.89 (1999)

[4] E. J. Elton *portofolio theory and investment analysis*, Wiley, new York USA, 1995.

[5] H.C. Jimbo, M. J. Gaven, S.I. Ngongo and T. Suzuki, *portofolio Optinisation Under cardinality contraints : A comparative study submitted to J. Nonlinear Analysis and optim.*

[6] H. Jimbo, A quentcheu and R. E. Bozerman, *portofolio Optinisation with the Growth model, in Nonlinear Analysis and convex Analysis* 2003, W. Takahashi, T. Tanaka(eds), Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, pp 131-141

[7]] Philippe BERTRAND et Jean-Luc PRIGENT, *Gestionde Portfeuille, Economica*, 2012

[8] H.Jimbo, A.Ouentcheu and R.E.Bozeman, *portofolio Optimizationwith the growth model, in Nonlinear Analysis* 2003, W.Takahashi, Z. Tanaka(eds), Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, pp131-141

[9] D. Maringer, *Portfolio management with Heuristic Optimisation*, Springer-Verlag, New York, USA, 2005

[10] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, J finance 7(1952), 77-91

[11] David RUPPERT, *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*, Springer Science+Business Media, 2011.

[12] K. P. Anagnostopoulos et G. Mamanis. *"A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables"*. Dans : Computers Operations Research Volume 37.7 (July. 2010), p. 1285–1297. doi : 10.1016/j.cor.2009.09.009.