Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline- Travail

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

N° 425

UFR des Sciences Fondamentales et Appliquées (SFA)

THESE

Présentée à l'UFR des Sciences Fondamentales et Appliquées (SFA)

Pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

Spécialité ALGEBRE COMMUTATIVE

Par

IDRISSA Yaya

TITRE

ETUDE DE QUELQUES CLASSES DE BIFILTRATIONS D'ANNEAUX ET DE QUELQUES ANNEAUX BIGRADUES ASSOCIES A UNE BIFILTRATION. CLASSIFICATION DES BIFILTRATIONS

Soutenue publiquement le 24 juillet 2018

Devant le jury composé de :

Président : **FOFANA Ibrahim**, Professeur titulaire, Université Félix Houphouet Boigny de Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire, **Président**

Membres :

1. **SANGARE Daouda**, Professeur titulaire, Université Nangui Abrogoua, Abidjan, Côte d'Ivoire, **Directeur de la thèse**
2. **DIAGANA Youssouf**, Maître de Conférences, Université Nangui Abrogoua, Abidjan, Côte d'Ivoire, **Examinateur**
3. **KOUAKOU Konan Mathias**, Maître de Conférences, Université Félix Houphouet Boigny Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire, **rapporteur**
4. **YORO Gozo**, Maître de Conférences, Université Nangui Abrogoua, Abidjan, Côte d'Ivoire, **Examinateur**

Table des matières

REMERCIEMENTS

Je suis heureux de remercier ceux et celles qui étaient avec moi tout au long de ces années soit en m'aidant vraiment soit simplement en me demandant de temps en temps « ça se passe bien avec ta thèse ? ».

D'abord je remercie Dieu le créateur des cieux et de la terre de m'avoir donné la vie et la santé.

Ensuite ma gratitude va à l'endroit de mon Directeur de thèse le Professeur Daouda SANGARE, Directeur du Laboratoire de Mathématiques et Informatiques, qui a cru en moi et m'a donné un sujet de thèse. Ses conseils, ses directives, ses encouragements, sa disponibilité pour la correction de mes travaux et ses documents mis à ma disposition m'ont permis d'avancer dans ce travail.

Il s'est toujours comporté, à mon égard, en véritable père de famille.

Sa patience, son humilité et sa ponctualité font de lui un modèle pour moi .

C'est vraiment un grand honneur pour moi d'avoir pour Directeur de thèse le Professeur Daouda SANGARE.

Je le remercie également de m'avoir appris à " pêcher ".

Je remercie très chaleureusement nos enseignants qui sont :

- Le Docteur Youssouf DIAGANA, Maître de Conférences
- Le Docteur YORO Gozo, Maître de Conférences
- Le Docteur Abdoulaye ASSANE
- Le Docteur MÉTÉ Gbéssi Sylvain

Je remercie tous les rapporteurs de ma thèse, notamment :

- KOUAKOU Konan Mathias, Maître de Conférences, Université Félix Houphouet Boigny Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire,
- EL YACOUBI Nouzha, Professeur Titulaire, Université Mohammed V de Rabat, Maroc

- DICHI Henri, Maître de Conférences de classe exceptionnelle, Université de Clermont Ferrand 1, France.

Je remercie aussi mon président de jury :

FOFANA Ibrahim, Professeur Titulaire, Université Félix Houphouet Boigny de Cocody, Abidjan, Côte d'Ivoire.

Je ne pourrai terminer sans exprimer ma reconnaissance au Professeur KRE Doyen de l'UFR-SFA et à tout le personnel administratif de l'UFR-SFA.

J'adresse mes remerciements au Président de l'Université Nangui Abrogoua.

Je remercie aussi le Vice-président de l'Université Nangui Abrogoua.

Je remercie ma famille à commencer par ma mère qui a lutté jusqu'au bout pour ma scolarisation. Merci à mon père qui a finalement accepté de m'inscrire à l'école et qui s'est occupé de moi, sans oublier les autres membres de la famille.

Enfin je remercie chaleureusement tous mes amis dont j'ai ressenti la présence d'une façon ou d'une autre. Je ne pourrai pas les citer un par un mais j'aimerais qu'ils sachent que je ne les ai pas oubliés. Notamment merci à Dr Brou Kouadjo Pierre pour ses encouragements et aussi ses conseils allant jusqu'à ma vie privée. Je n'oublierai jamais les moments qu'on a passés ensemble sur les pelouses, au séminaire, au téléphone. . . .

A tous une fois encore merci !

Introduction

Les filtrations sont les généralisations des puissances d'un idéal. L'étude des filtrations a fait l'objet de nombreux travaux (Voir [3] , [7] , [8] ,...).

Cette étude est étroitement liée à celle de réduction, de dépendance intégrale, de fonction de Hilbert pour lesquelles elle est devenue un outil efficace d'étude.

Les concepts de bifiltration sur les anneaux et modules ont été introduits par Dr Monzon Traoré.

Le concept de réduction d'un idéal a été introduit pour la première fois en 1953 par Northcott et Rees.

Ce concept de réduction d'un idéal a des applications importantes en Algèbre Commutative (notamment en théorie asymptotique des idéaux, et dans l'étude de la dépendance intégrale sur un anneau), en Géométrie Algébrique etc...

La notion de réduction d'un idéal peut se généraliser aux filtrations d'un anneau de plusieurs façons différentes.

L'objectif de ma thèse est de définir d'une part quelques classes de bifiltrations afin d'établir une classification des bifiltrations et d'autre part de donner les analogues de certaines propriétés des filtrations pour les bigraduations et les bifiltrations.

Dans le chapitre 1, nous rappelons la définition et quelques propriétés des bigraduations et des bifiltrations.

Dans le chapitre 2, nous introduisons le concept de sous anneaux de Véronèse d'un anneau bigradué puis nous généralisons quelques propriétés de sous-anneau de Véronèse aux bigraduations et aux bifiltrations.

Dans le chapitre 3, nous donnons quelques propriétés des anneaux et modules bigradués associés à une bifiltration.

Dans le chapitre 4, nous définissons quelques classes de bifiltrations puis nous faisons leur classification.

Dans le chapitre 5, nous donnons les analogues de quelques propriétés de réduction des idéaux et des filtrations pour les bifiltrations .

Chapitre 1

GRADUATIONS ET FILTRATIONS

Dans tout ce qui suit A est un anneau commutatif unitaire.

1.1 Anneaux gradués

Définition 1.1

Soit A un anneau commutatif unitaire.

On appelle $\mathbb{Z}-$**graduation de** $\boldsymbol{A}$, toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-groupes de A telle que :

(i) $A = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_n$

(ii) $A_p A_q \subseteq A_{p+q} \quad \forall\ p, q \in \mathbb{Z}$

Les éléments du sous-groupe A_n sont dits homogènes de degré n.

Tout élément a de A s'écrit de manière unique $a = \sum\limits_n a_n$, où $a_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, avec la convention que $a_n = 0$ pour tout n sauf pour un nombre fini.

a_n est la composante homogène de degré n de a. Un anneau muni d'une

$\mathbb{Z}$-graduation est dit **$\mathbb{Z}$-gradué**.

1.2 L'anneau $\underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_n$ est dit gradué de type $\mathbb{N}$ ou positivement gradué si $A_n = (0) \ \ \forall \ n < 0$.

1.2 Modules gradués

Définition 1.2

Soit $A = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_n$ un anneau gradué.

On appelle $A-$**module gradué**, tout $A-$module M muni d'une famille $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-groupes de A telle que :

(i) $M = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} M_n$

(ii) $A_p M_q \subseteq M_{p,q} \quad \forall \ p, q \in \mathbb{Z}$

Les éléments du sous-groupe M_n sont dits homogènes de degré n.

Tout élément x de M s'écrit de manière unique $x = \sum_n x_n$, où $x_n \in M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $M = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} M_n$ un A-Module $\mathbb{Z}$-gradué et soit N un sous-module de M.

N est appelé **sous -module gradué** de M si $N = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} (N \cap A_n)$

En particulier si I est un idéal de l'anneau gradué $A = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_n$, I est appelé idéal gradué de A si c'est un sous A-module gradué du A-module A ;

donc si $I = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} (I \cap A_n)$.

Proposition 1.2.1

Soit $A = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_n$ *un anneau gradué à degrés positifs et soit*

$A_+ = \underset{n \geq 1}{\oplus} A_n$

Alors $\dfrac{A}{A_+} \simeq A_0$.

Preuve

Soit $I = A_+ = \underset{n \geq 1}{\oplus} A_n$ alors I est un idéal gradué de A.

Soit $\varphi : A \longrightarrow A_0$ tel que $\varphi \left(\sum_n a_n \right) = a_0$ alors φ est un morphisme d'anneau surjectif.

Donc Im $\varphi = A_0$

De plus Ker $\varphi = A_+$

D'après le théorème d'isomorphisme, on a $\dfrac{A}{A_+} \simeq A_0$.

Remarque 1.2

Toute algèbre de type fini sur un anneau noethérien est un anneau noethérien.

Proposition 1.2.2

Soit $A = \underset{n \geq 0}{\oplus} A_n$ *un anneau gradué à degrés positifs. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

$i)$ *L'anneau* A *est noethérien.*

ii) L'anneau A_0 est noethérien et A est une A_0-Algèbre de type fini.

Preuve

Voir [12] page 27

1.3 Filtrations

1.3.1 Filtrations d'un anneau

Définition 1.3.1

Soit A un anneau commutatif et unitaire.

On appelle filtration de A toute famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'idéaux de A

vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) $I_0 = A$

(ii) $I_{n+1} \subseteq I_n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

(iii) $I_p I_q \subseteq I_{p+q} \quad \forall\, p, q \in \mathbb{Z}$

Conséquence 1.3.1 : pour tout $n \leq 0$, $I_n = A$

1.3.2 Filtrations d'un module

Définition 1.3.2

Soit M un A-module.

On appelle filtration de M, toute famille $\Phi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-modules de M vérifiant :

(i) $M_0 = A$

(ii) $M_{n+1} \subseteq M_n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

Les filtrations $f = (I_n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ de l'anneau A et $\Phi = (M_n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ du

A-module M sont dites compatibles si et seulement si $\forall\, p, q \in \mathbb{Z}$, on a

(iii) $I_p M_q \subseteq M_{p+q}$

Exemples

1$-$Soit I un idéal de l'anneau A. On considère la famille $f = (I^n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ avec la convention $I^n = A \;\; \forall n \leq 0$.

$f_I = (..., A, A, I, I^2, I^3, ..., I^n, ...)$.

f_I est une filtration de A appellée filtration $I-$adique de A.

De même si M est un A-module, alors on pose $\Phi_I = (I^n M)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$, Φ_I est

une filtration de M appelée la filtration I-adique de M.

Les deux filtrations f_I et Φ_I sont compatibles.

2$-$Soit k un entier naturel supérieur où égale à 1. On pose

$f^{(k)} = (I_{nk})_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$

$f^{(k)}$ est appelée filtration extraite de f d'ordre k.

1.4 Anneaux et modules gradués associés à une filtration

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.

On considère le groupe

$$G_f(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{I_n}{I_{n+1}} \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{I_n}{I_{n+1}}$$

$G_f(A)$ est un anneau commutatif unitaire gradué appelé **l'anneau gradué associé à la filtration f.**

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de A, $G_f(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{I_n}{I_{n+1}}$ l'anneau gradué associé à la filtration f .

Soit M un A-module, $\Phi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de M.

On suppose que f et Φ sont compatibles

Considérons $G_\Phi(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{M_n}{M_{n+1}}$

$G_\Phi(M)$ est un $G_f(A)-$module gradué appelé module gradué associé à la filtration Φ de M.

Cas particulier de la filtration I-adique

Soit I un idéal de A.

On note $f = (I^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la filtration $I-$adique de A.

On note

$G_{f_I}(A) = G_I(A) = \bigoplus\limits_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{I^{n+1}}$ s'appelle l'anneau gradué associé à l'idéal I.

Soit M un A-module et soit $\Phi_I(M) = (I^n M)_{n\geq 0}$ la filtration $I-$adique de M.

On note

$$G_{\Phi_I}(M) = G_I(M) = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{I^n M}{I^{n+1}M}$$

1.5 Anneau de Rees d'une filtration d'anneau

Définition 1.5

Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.

On appelle **anneau de Rees de** f , l'anneau gradué

$R(A,f) = \underset{n\geq 0}{\oplus} I_n X^n$ où X est une indéterminée.

C'est un sous-anneau gradué de l'anneau $A[X]$ des polynômes sur A à une indéterminée.

Un élément arbitraire de $R(A,f)$ s'écrit $z = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_q X^q$ où $a_j \in I_j \ \ \forall j$

Remarque 1.5

$R(A,f) = A[I_1 X, I_2 X^2, ..., I_n X^n, ...]$

1.6 Anneau de Rees généralisé d'une filtration

Définition 1.6

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.

On appelle anneau de Rees généralisé de f , l'anneau gradué $\Re(A, f) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} I_n X^n$.

C'est un sous-anneau gradué de $A\,[X, u]$ où $u = X^{-1}$

Un élément de $\Re(A, f)$ s'écrit :

$z = a_{-p}X^{-p} + a_{-p+1}X^{-p+1} + ... + a_{-1}X^{-1} + a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_qX^q$ où $a_j \in I_j \quad \forall j$

Remarque 1.6

$\Re(A, f) = A\,[u, I_1X, I_2X^2, ..., I_nX^n, ...]$ où $u = X^{-1}$

$\Re(A, f) = R(A, f)\,[u]$

1.7 Sous anneau de Véronèse d'un anneau gradué

Définition 1.7

Soit $A = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_n$ un anneau gradué

Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ fixé

On pose $A^{(k)} = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} A_{nk}$

$A^{(k)} = \cdots \oplus A_{-2k} \oplus A_{-k} \oplus A_0 \oplus A_k \oplus A_{2k} \oplus \cdots \oplus A_{nk} \oplus \cdots$, $A^{(k)}$ est

un sous-anneau gradué de A et est appelé le k-ième sous-anneau de Véronèse de A.

1.7.1 Cas de l'anneau de Rees généralisé d'une filtration

$\Re(A, f) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} I_n X^n$. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$ fixé.

Soit $(\Re(A, f))^{(k)}$ le k-ième sous-anneau de Véronèse de $\Re(A, f)$.

Par définition $(\Re(A, f))^{(k)} = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} I_{nk} X^{nk}$

Considérons la filtration $f^{(k)} = (I_{nk})_{n \in \mathbb{Z}}$ alors $\Re(A, f^{(k)}) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} I_{nk} X^n$

Proposition 1.7.1

Soit A un anneau , k un entier non nul et $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de A. Alors
$(\Re(A, f))^{(k)} \simeq \Re(A, f^{(k)})$.

Preuve

Soit $\varphi : \quad \Re(A, f^{(k)}) \longrightarrow \big(\Re(A, f)\big)^{(k)}$

telle que $\forall \ z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n$ avec $a_n \in I_{nk} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$,

$\varphi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^{nk}$ avec $a_n X^{nk} \in I_{nk} \ X^{nk} \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$,

$*$ $\quad \varphi(1_{\Re(A, f^{(k)})}) = \varphi(1_A) = 1_A = 1_{\big(\Re(A, f)\big)^{(k)}}$

$**$ Soient $z, z' \in \Re(A, f^{(k)})$, alors $z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n$ où $a_n \in I_{nk} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$,

et $\quad z' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n X^n$ où $b_n \in I_{nk} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\varphi(z+z') &= \varphi\Big(\sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} a_n X^n + \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} b_n X^n\Big) \\ &= \varphi\left[\sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} (a_n+\ b_n) X^n\right] \\ &= \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} (a_n+\ b_n) X^{nk} \\ &= \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} a_n X^{nk} + \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} b_n X^{nk}\end{aligned}$$

donc $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$

$***$ Soitent $a_p X^p$ et $b_q X^q$ où $a_p \in I_{pk}$ et

$b_q \in I_{qk}$ $\forall p, q \in \mathbb{Z}$.

On a
$$\begin{aligned}\varphi\left[(a_p X^p)(b_q X^q)\right] &= \varphi(a_p b_q X^{p+q}) \\ &= a_P b_q X^{(p+q)k} \\ &= (a_p X^{pk})(b_q X^{qk}) \\ &= \varphi(a_p X^p) \times \varphi(b_q X^q)\end{aligned}$$

Soient $z = \sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} a_n X^n$ et $z' = \sum_{m\,\in\,\mathbb{Z}} b_m X^m$ où $a_n \in I_{nk}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$,

et $b_m \in I_{mk}$ $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

$$\varphi(zz') = \varphi\left[\left(\sum_{n\,\in\,\mathbb{Z}} a_n X^n\right)\left(\sum_{m\,\in\,\mathbb{Z}} b_m X^m\right)\right]$$

$$= \varphi\left(\sum_k c_k X^k\right) \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

$$= \sum_k \varphi(c_k X^k)$$

$$= \sum_k \left(\varphi(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} X^k) \right)$$

$$= \sum_k \sum_{i=0}^{k} \varphi(\ a_i b_{k-i} X^k)$$

$$= \sum_k \sum_{i=0}^{k} \varphi(\ a_i X^i) \varphi(\ b_{k-i} X^{k-i}) = \varphi(z)\varphi(z')$$

donc $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$.

D'après $*, **, ***$ φ est un morphisme d'anneau .

· φ est surjectif par construction donc $Im \ \varphi = \left(\Re(A, f \ )\right)^{(k)}$

· $Ker \ \varphi = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \ / \ \varphi(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n) = 0, \text{avec } a_n \in \ I_{nk} \right\}$

$$= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \ / \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^{nk} = 0, \text{avec } a_n \in \ I_{nk} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n \ / \ \ a_n = 0, \text{avec } \ a_n \in \ I_{nk} \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

donc $Ker \ \varphi = \{(0)\}$

Par conséquent φ est injectif.

φ étant injectif et surjectif alors φ est bijectif.

D'où $\left(\Re(A, f \ )\right)^{(k)} \ \simeq \ \Re(A, f^{(k)})$

Remarque 1.7.1

En particulier nous avons $\left(R(A, f \ )\right)^{(k)} \ \simeq \ R(A, f^{(k)})$

Chapitre 2

CLASSIFICATION DES FILTRATIONS

Dans tout ce qui suit A est un anneau commutatif unitaire.

2.1 Les filtrations I−bonnes

Définition 2.1

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration de A et I un idéal de A. La filtration f est I**-bonne**
si :

$$(i)\ II_n \subseteq I_{n+1} \quad \forall\, n$$

$$(ii)\ \text{Il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad \forall\, n \geq k,\ II_n = I_{n+1}$$

Exemple 2.1.1

Pour un idéal I d'un anneau A , on pose $I^n = A$ pour tout $n \leq 0$. Alors la famille $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de A appelée la filtration I-adique de A.

Voir [1] page 15

Exemple 2.1.2

Soit I un idéal d'un anneau A, M un A-module. On pose $I^n M = M$ pour tout $n \leq 0$. Alors la famille $\phi_I = (I^n M)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration du A-module M appelée la filtration I-adique de M.

Voir [1] page 15
Exemple 2.1.3

Soit $A = \frac{\mathbb{Z}[X]}{\langle X^2 \rangle}$ et soit $x = X + \langle X^2 \rangle$.
Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la famille d'ideaux suivantes :
$I_0 = A$, $I_1 = I_2 = \langle x \rangle$, $I_n = 0 \forall n \geq 3$
alors f est une filtrations I_1-bonne mais pas I_1-adique.
Voir thèse Dr ASSANE

Conséquence 2.1.1

(i) f est I-bonne si et seulement si f est I_1-bonne.

En effet comme f est $I-$bonne, on a ;

$II_0 \subseteq I_1$ or $I_0 = A$, donc $I \subseteq I_1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_1 I_n \subseteq I_{n+1}$ et $\forall\ n \geq k$, $II_n \subseteq I_1 I_n \subseteq I_{n+1}$

Or $II_n = I_{n+1}$, $\forall\ n \geq k$

Donc $I_1 I_n = I_{n+1}$

Par conséquent f est I_1-bonne.

Réciproquement il suffit de prendre $I = I_1$.

(ii) Comme f est I-bonne, on a

$II_k = I_{k+1} \Longrightarrow I^2 I_k = I(II_k) = II_{k+1} = I_{k+2}$

$I^3 I_k = I^2 I_{k+1} = II_{k+2} = I_{k+3}$

Par récurrenece

$I^n I_k = I_{k+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conséquence 2.1.2

Soit I un idéal de A et soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration I–bonne du module M.

Soit l'entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $IM_n = M_{n+1}$

Alors $\dfrac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}} = \left(\dfrac{I^n}{I^{n+1}}\right)\left(\dfrac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}\right)$.

En effet , soit $\alpha_n \in \dfrac{I^n}{I^{n+1}}$ et $z_{n_0} \in \dfrac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}$

$\alpha_n \in \dfrac{I^n}{I^{n+1}} \Longrightarrow$ il existe $a_n \in I^n$ tel que $\alpha_n = a_n + I^{n+1}$

$z_{n_0} \in \dfrac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}} \Longrightarrow$il existe $x_{n_0} \in M_{n_0}$ tel que $z_{n_0} = x_{n_0} + M_{n_0+1}$

On sait que la filtration $\Phi = (M_n)_{n\ \geq 0}$ et la filtration $I-$adique $f = (I^n)_{n \geq 0}$ sont compatibles. Ce qui implique que

$\alpha_n z_{n_0} = (a_n + I^{n+1})(x_{n_0} + M_{n_0+1}) = a_n x_{n_0} + M_{n_0+n+1}$

Comme $a_n x_{n_0} \in I^n M_{n_0} = M_{n_0+n}\ \forall n$,

donc $\alpha_n z_{n_0} \in \dfrac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}}$.

D'où $\left(\dfrac{I^n}{I^{n+1}}\right)\left(\dfrac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}\right) \subseteq \dfrac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}}$

Réciproquement

Soit $z_{n_0+n} \in \dfrac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}}$ alors il existe $x_{n_0+n} \in M_{n_0+n}$ tel que $z_{n_0+n} = x_{n_0+n} + M_{n_0+n+1}$

Comme la filtration $\Phi = (M_n)_{n\ \geq 0}$ est $I-$bonne alors $I^n M_{n_0} = M_{n_0+n}$.

Etant donné que $x_{n_0+n} \in M_{n_0+n} = I^n M_{n_0}$

Alors il existe $a_n \in I^n$ et $x_{n_0} \in M_{n_0}$ tel que $x_{n_0+n} = a_n x_{n_0}$

On a

$z_{n_0+n} = a_n x_{n_0} + M_{n_0+n+1} = (a_n + I^{n+1})(x_{n_0} + M_{n_0+1})$

Donc $z_{n_0+n} \in \left(\frac{I^n}{I^{n+1}}\right)\left(\frac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}\right)$

D'où $\frac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}} \subseteq \left(\frac{I^n}{I^{n+1}}\right)\left(\frac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}\right)$.

Conclusion

$$\frac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}} = \left(\frac{I^n}{I^{n+1}}\right)\left(\frac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Filtrations AP

Définition 2.2

Une filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A est dite **approximable par des puissances d'idéaux (**AP) s'il existe une suite d'entiers naturels $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

(i) $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $I_{k_n m} \subseteq I_n^m$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 1$

Exemple 2.2
Soit $A = k[X]$ où k est un corps et X une indeterminée.
Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $I_0 = A$ et $I_n = (X^{n+1})$ $\forall n \geq 1$
alors f est une filtration de A qui est AP.
(Henri DICHI)

2.3 Filtrations fortement AP

Définition 2.3

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A est dite **fortement AP** s'il existe

un entier $k \geq 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{nk} = I_k^n$.

2.4 Filtrations EP

Définition 2.4

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A est dite **Essentiellement puissance d'idéaux (EP)**s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p$.

2.5 Filtrations Noethériennes

Définition 2.5

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A est dite n**oethérienne** si son anneau de Rees généralisé $\Re(A, f) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} I_n X^n$ est un anneau noethérien.

Dans ce cas l'anneau A est noethérien.

2.6 Filtrations fortement noethériennes

Définition 2.6

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A est dite **fortement noethérienne** si l'anneau A est noethérien et s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$\forall m, n \geq k$, $I_m I_n = I_{n+m}$.

Exemple 2.6
Soit $A = k[X]$ où k est un corps et X une indeterminée.
Soit $p \geq 2$ un entier et $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $I_0 = A$ et $\begin{cases} (X^n) \text{ si } n \geq p+1 \\ (X^p) \text{ si } 1 \leq n \leq p \end{cases}$
alors f est une filtration fortement noethérienne d'où fortement AP.
(Henri DICHI)

2.7 Comparaison des classes de filtrations

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de A,

alors :

$f \;\; I-$adique $\Longrightarrow f \;\; I-$bonne $\Longrightarrow f$ fortement AP $\Longrightarrow f$ AP

Si en plus l'anneau A est noethérien.

Alors :

$f \;\; I-$bonne $\Longrightarrow f$ fortement noethérienne $\Longrightarrow f$ noethérienne $\Longleftrightarrow f$ fortement AP.

$$\begin{array}{ccccccc}
f \;\; I\text{-adique} & \Longrightarrow & f \;\; I\text{-bonne} & \Longrightarrow & f \;\; \text{fortement AP} & \Longrightarrow & f \;\; \text{AP} \\
 & & \Downarrow & & \Updownarrow & & \\
 & & f \;\; \text{fortement noethérienne} & \Longrightarrow & f \;\; \text{noethérienne} & &
\end{array}$$

2.8 Filtrations fortement EP

Définition 2.8

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de A est dite **fortement EP** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$I_p I_q = I_{p+q}$, $\forall p, q \geq k$,

Proposition 2.8.1

Si la filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est fortement EP alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$I_{n+k} = I_n I_k$,$\forall n \geq k$,

Preuve

Supposons que f est fortement EP, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall p, q \geq k, \; I_{p+q} = I_p I_q$

En particulier pour $p = n$ et $q = k$, on a :

$I_{n+k} = I_n I_k \, , \forall n \geq k$

Proposition 2.8.2

Si la filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *est fortement EP alors :*

(i) f *est EP*

(ii) f *est fortement AP.*

Preuve

Si f est fortement EP alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$I_{p+q} = I_p I_q, \; \forall p, q \geq k,$

Alors :

(i) $\forall n \geq 2k$, on a $I_n = I_{n-k} I_k$

Donc $I_n \subseteq \sum\limits_{j=1}^{2k} I_{n-j} I_j \subseteq I_n$

D'où $I_n = \sum\limits_{j=1}^{2k} I_{n-j} I_j \; \forall n \geq 2k$ (1)

Pour $1 \leq n < 2k$, on a $I_n = I_{n-n} I_n$

Donc $I_n \subseteq \sum\limits_{j=1}^{2k} I_{n-j} I_j \subseteq \sum\limits_{j=1}^{2k} I_n = I_n$

D'où $I_n = \sum\limits_{j=1}^{2k} I_{n-j} I_j \; \forall \; 1 \leq n < 2k$ (2)

D'après (1) et (2), il existe $N = 2k > 1$ tel que $n \geq 1$,

$$I_n = \sum_{j=1}^{2k} I_{n-j} I_j$$

Donc f est EP

(ii) Comme f est EP alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{p+q} = I_p I_q$, $\forall p, q \geq k$,

En posant $p = k$, on obtient

$I_{k+q} = I_k I_q$, $\forall p, q \geq k$

D'où $I_{nk} = I_k^n \quad n \geq 1$.

Donc f est fortement AP.

Proposition 2.8.3

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *une filtration de l'anneau* A *:*

Si f *est* I_1-*bonne alors* f *est fortement EP.*

Preuve

Si f est I_1-bonne alors il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a

$I_1 I_n = I_{n+1}$ ce qui implique que

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \;\; I_1^p I_n = I_{n+p}$

En effet pour $p = 1$ on a $I_1 I_n = I_{n+1}$

Supposons que $I_1^p I_n = I_{n+p}$ est vraie à l'ordre $p = k$.

Montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k + 1$.

Pour ce faire, nous avons $I_1^{k+1}I_n = I_1 I_1^k I_n = I_1 I_{n+k} = I_{n+k+1}$

Donc $I_1^{k+1}I_n = I_{n+k+1}$

D'où est vraie $I_1^p I_n = I_{n+p}, \forall p \in \mathbb{N}^*$

Partant de cette égalité, on obtient

$I_{n+p} = I_1^p I_n \subseteq I_p I_n \subseteq I_{n+p}$

D'où $I_{n+p} = I_p I_n \ \forall n, p \geq n_0$.

Donc f est fortement EP.

Proposition 2.8.4

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *une filtration sur un anneau noethérien* A.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f *est fortement EP*

(ii) f *est fortement noethérienne*

Preuve

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

Si f est fortement EP alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_{m+n} = I_m I_n \ \forall m, n \geq k$, et comme l'anneau A est noethérien, alors on obtient le résultat suivant :

$\left\{ \begin{array}{c} A \text{ noethèrien} \\ f \ \text{ fortement EP} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A \text{ noethèrien} \\ \text{il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tei que} \\ I_{m+n} = I_m I_n \ \forall m, n \geq k \end{array} \right. \Longleftrightarrow$ f est fortement noethérienne.

Conséquence 2.8

D'après les trois propositions précédentes, on a les relations suivantes

$$\begin{array}{ccccc} f \;\; I\text{-bonne} & \stackrel{(1)}{\Rightarrow} & f \quad \text{fortement EP} & \stackrel{(1)}{\Rightarrow} & f \;\; \text{EP} \\ & & \Updownarrow (2) & & \Updownarrow (2) \\ f \; I\text{-bonne} & \stackrel{(2)}{\Rightarrow} & f \quad \text{fortement noethérienne} & \stackrel{(2)}{\Rightarrow} & f \; I\text{-noethérienne} \end{array}$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} (1) \; : A \;\; \text{quelconque} \\ (2) : A \;\; \text{noethérien} \end{cases}$$

2.9 Réduction des idéaux

Définition 2.9

Soient I et J deux idéaux de l'anneau A.

I est appelé réduction de J si :

(i) $\quad I \subseteq J$

(ii) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $J^{r+1} = IJ^r$ (Northcott et Rees)

Remarque 2.9

Si I est une réduction de J, soit $r \geq 1$ tel que $J^{r+1} = IJ^r$ alors

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^{r+n} = I^n J^r$.

2.10 Réduction de filtrations

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux filtrations de A.

On dira que $f \leq g$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $I_n \subseteq J_n$.

(C'est une relation d'ordre dans l'ensemble des filtrations de A.)

Définition 2.10.1

On suppose que $f \leq g$.

Alors on dira que f est une $\alpha-$**réduction de** g s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que

$\forall\ n \geq 1,\ J_n = \sum_{p=0}^{r} I_{n-p} J_p.$

Remarque 2.10.1
Pour toute filtration $f = (I_n)_{n\,\in\,\mathbb{Z}}$ de A, f est une $\alpha-$**réduction de** f.
Il suffit de prendre $r = 1$.

Définition 2.10.2

On suppose que $f = (I_n)_{n\,\in\,\mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n\,\in\,\mathbb{Z}}$ deux filtrations de A tel que $f \leq g$.

On dira que f est une $\beta-$**réduction de** g s'il existe un entier $k \geq 1$ tel

que $\forall\ n \geq k,\ J_{n+k} = I_n J_k.$

Conséquence 2.10

Si f est une $\beta-$réduction de g alors

$\forall n \geq k,\ J_{n+k} = I_n J_k \subseteq J_n J_k \subseteq J_{n+k}.$

Donc $\forall n \geq k,\ J_{n+k} = I_n J_k = J_n J_k = J_{n+k}.$

En particulier si $n = k$.

$J_{2k} = I_k J_k \subseteq J_k^2$

$J_{3k} = J_{2k} J_k \subseteq J_k^2 J_k = J_k^3$

$\vdots$

$J_{nk} = J_k^n$

Donc g est fortement AP.

Remarque 2.10.1

(i) Si $f = (I_n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ est une $\beta-$réduction de g, alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que

$\forall n \geq k,\ J_{n+k} \subseteq I_n \subseteq J_n$

En effet, il existe $k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k\ \forall\ n \geq k$,

Donc $\forall n \geq k,\ J_{n+k} \subseteq I_n \subseteq J_n$.

(ii) Pour toute filtration $f = (I_n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ de A, f est une $\alpha-$réduction de f.

En effet existe-t-il $r \geq 1$ tel que $\forall\ n \geq 1,\ I_n = \sum\limits_{p=0}^{r} I_{n-p} I_p$

Posons $r = 1$

$\forall n \geq 1,\ I_n = \sum\limits_{p=0}^{1} I_{n-p} I_p = I_n + I_{n-1} I_1 = I_n$ car $I_{n-1} I_1 \subseteq I_n$.

Définition 2.10.3

Soient $f = (I_n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \,\in\, \mathbb{Z}}$ deux filtrations de A telle que $f \leq g$.

La filtration g est dite $f-$**bonne** s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$\forall n \geq N$ on a $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p$

La filtration g est dite $f-$**fine** s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$\forall n \geq N$ on a $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p J_{n-p}$

Remarque 2.10.2
(i) Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de A.

Alors :

f est $f-$ bonne $\Longleftrightarrow f$ est EP $\Longleftrightarrow f$ est $f-$ fine.

En effet, supposons que f est $f-$bonne alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p \Longleftrightarrow f$ est EP.

Comme $I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p I_{n-p} \Longleftrightarrow f$ est $f-$ fine.

(ii) Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux filtrations de A telle que $f \leq g$.

On suppose que g est $f-$ bonne. Alors :

a) g est $g-$ bonne donc EP

b) f est une $\alpha-$réduction de g

a) En effet, si g est $f-$ bonne alors il existe un entier $N \geq 1$

tel que $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p$

or $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p \subseteq \sum\limits_{p=1}^{N} J_{n-p} J_p \subseteq J_n$

Donc $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} J_{n-p} J_p$

D'où g est $g-$ bonne donc EP.

b) Comme g est supposée $f-$bonne. Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que

$$N \geq 1 \ , \ J_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}J_p$$

Or $J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p = I_n + \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}J_p = I_n + J_n = J_n$ car $I_n \subseteq J_n$.

Donc f est une $\alpha-$réduction de g.

(iii) Si g est $f-$ fine alors g est $f-$ bonne donc EP.

En effet il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, \ J_n = \sum_{p=1}^{N} I_p J_{n-p}$

On a $J_{N+1} = \sum_{p=1}^{N} I_p J_{N+1-p}$

On pose $N + 1 - P = q \Longrightarrow P = N + 1 - q$

Alors $J_{N+1} = \sum_{q=1}^{N} I_{N+1-q} J_q$

A-t-on $\forall n \geq N, \ J_n = \sum_{q=1}^{N} I_{n-q} J_q$

Vrai pour $n = N + 1$

Supposons que $\forall j$ tel que $1 \leq j < m$, on ait $J_{N+j} = \sum_{q=1}^{N} I_{N+j-q} J_q$ alors

$$\begin{aligned}
J_{N+m} &= \sum_{p=1}^{N} I_p J_{N+m-p} \\
&= \sum_{p=1}^{N} I_p \sum_{q=1}^{N} I_{N+m-p-q} J_q \\
&= \sum_{q=m}^{m+N-1} I_{N+m-q} J_q \\
&= \sum_{q=m}^{N} I_{N+m-q} J_q + \sum_{q=N+1}^{m+N-1} I_{N+m-q} \left(\sum_{p=1}^{N} I_{q-p} J_p \right)
\end{aligned}$$

Nous avons

$\sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q}J_q \subseteq \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p}J_p$ et

$$\sum_{q=N+1}^{m+N-1} I_{N+m-q}\left(\sum_{p=1}^{N} I_{q-p}J_p\right) \subseteq \sum_{p=1}^{N}\left(\sum_{q=N+1}^{m+N-1} I_{N+m-p}\right) J_p = \sum_{p=1}^{N} I_{N+m-p}J_p$$

Donc $\quad J_{N+m} \subseteq \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p}J_p$

Or $\sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p}J_p \subseteq J_{N+m}$

Donc $J_{N+m} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p}J_p$

D'où g est $f-$ bonne.

(iv) Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux filtrations de A.

Alors :

g est $f-$ fine $\Longrightarrow$ g est $f-$ bonne donc EP $\Longrightarrow$ f est une $\alpha-$réduction de g.

En outre si f est EP alors

g est $f-$ fine$\Longleftrightarrow$ g est $f-$ bonne $\Longleftrightarrow$ f est une $\alpha-$réduction de g.

En effet il suffit de montrer que si f est une $\alpha-$réduction de g alors g est $f-$ fine (s'il est EP).

Soit N tel que $n \geq N$ on ait $J_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$ ($\alpha-$réduction) et $I_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p$ (f est EP)

Alors pour $n \geq 2N$ on a

$J_n = \sum\limits_{p=0}^{N} \left(\sum\limits_{q=1}^{N} I_{n-p-q} I_q \right) J_q = \sum\limits_{q=1}^{N} I_q \left(\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p-q} J_q \right)$ car c'est une somme finie.

Or $\sum\limits_{q=1}^{N} I_q \left(\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p-q} J_q \right) \subseteq \sum\limits_{q=1}^{N} I_q J_{n-q} \subseteq \sum\limits_{q=0}^{N} I_q J_{n-q} \subseteq J_n$

Donc $\forall n \geq 2N, \;\; J_n = \sum\limits_{q=1}^{N} I_q J_{n-q}$

D'où g est $f-$ fine.

Donc si f est EP alors

g est $f-$ fine $\Longleftrightarrow$ g est $f-$ bonne $\Longleftrightarrow$ f est une $\alpha-$réduction de g.

(v) Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux filtrations de A tel que $f \leq g$.

On suppose que f est $\beta-$ réduction de g.

Alors g est $f-$ bonne et f est une $\alpha-$réduction de g.

En outre f est AP, g est fortement AP et g est EP.

En effet, on a vu que g est fortement AP

Montrons que f est AP

Comme f est une $\beta-$ réduction de g alors $\forall k \geq 1$ tel que $\forall n \geq k$, $J_{n+k} = I_n J_k$

Pour tout $n \in N$, posons

$N = q_n k + r_n$ où $0 \leq r_n < k$ et $k_n = (q_n + 1)k$.

Alors $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{k_n}{n} = 1$ (en effet, on a $n - r_n = q_n k \Longrightarrow n - r_n + k = q_n k + k$

donc $\frac{k_n}{n} = 1 + \frac{k - r_n}{n}$), De plus

$J_{k_n m} = J^m_{k(q_n+1)} \subseteq J^m_n$ pour tout m et $n \in \mathbb{N}^*$.

En prenant $k'_n = k_{2k+n}$ alors $I_{k'_n m} \subseteq J_{k'_n m} \subseteq J^m_{2k+n} = J^m_k I^m_{k+n} \subseteq I^m_n$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k'_n}{n} = 1$,

donc f est AP

Montrons que si f est une $\beta-$ réduction de g alors g est $f-$bonne ce

qui va impliquer que f est une $\alpha-$réduction de g.

Supposons que f est une $\beta-$ réduction de g. Alors il existe un entier

$k \geq 1$ tel que $\forall n \geq k$, $J_{n+k} = I_n J_k$.

Prenons $N = 2k$.

$n \geq 2k$ donc $n - k \geq k$

$$J_n = J_{n-k+k} = I_{n-k} J_k \subseteq \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p \subseteq J_n$$

Donc $\sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p = J_n \ \forall n \geq N$.

Donc g est $f-$ bonne.

D'où le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} f \text{ est une } \beta-\text{ réduction de } g \arrow[r] \arrow[dr] & g \text{ est } f-\text{bonne} \arrow[d] \\ & f \text{ est une } \alpha-\text{réduction de } g \end{tikzcd}$$

2.11 Longueur d'un module,dimension de Krull d'un module

Définition 2.11.1

Un $A-$module $M \neq (0)$ est dit simple si ses seuls sous-modules sont (0) et M lui même.

On appelle chaîne de sous-modules de longueur $n \in \mathbb{N}$ du $A-$module M toute suite finie de la forme

$(*)$ $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = (0)$ où M_i est un sous-module de M, $\forall i = 0, \cdots, n$.

Lorsque dans la chaîne $(*)$, $\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$ est un $A-$module simple $\forall i = 0, \cdots, n$,

alors une telle chaîne est appelée une suite de Jordan Hölder de M.

Lorsque M admet une suite de Jordan Hölder alors toutes les suites de Jordan Hölder ont la même longueur applelée la longueur du $A-$module M notée $l_A(M)$ ou $l(M)$.

Lorsque M n'admet pas de suite de Jordan Hölder, on pose $l_A(M) = +\infty$.

Exemple

Si M est un $A-$module, on a :

- $l_A(M) = 0 \Longleftrightarrow M = (0)$,
- $l_A(M) = 1 \Longleftrightarrow M$ est simple.

En particulier si K est un corps alors $l_A(M) = 1$.

Définition 2.11.2

On appelle chaîne d'ideaux premier de A de longueur n , toute suite finie strictement croissante d'ideaux premier P_i, $i = 0, \cdots, n$, de A de la forme

$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$.

On appelle dimension de Krull ou dimension de A , la borne supérieure des longueurs des chaîne d'ideaux premiers de A.On la note dim A.

Définition 2.11.3

Soit P un idéal premier de A. On appelle hauteur de P , le nombre $ht\ P$ $=$ dim A_p où A_p est le localisé de A en P , c'est-à-dire l'anneau de fractions de A associé à la partie multiplicative $S = A - P$. Donc $ht\ P$ est la borne supérieure des longueurs des chaîne d'ideaux premiers d'extrémité P c'est-à-dire de la forme $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$.

Soit $I \neq A$, un idéal de A. On note :

$V(I) = \{P \text{ idéal prémier de } A,\ P \supseteq I\}$; $V(I)$ est appelé la variété de I,

$Min\ I$ l'ensemble des éléments minimaux de $V(I)$ c'est-à-dire l'ensemble

des idéaux premiers minimaux sur I.

On appelle hauteur de I le nombre $ht\ I = \inf\{htP,\ P \in V(I)\}$

L'altitude de I est $altI = \sup\{htP,\ P \in Min\ I\}$

La cohauteur de I $cohI = \dim \dfrac{A}{I}$.

Définition 2.11.4

On appelle dimension de Krull ou dimension d'un $A-$module M, le nombre

$\dim M = \dim\left(\dfrac{A}{AnnM}\right)$ où $AnnM = \{a \in A,\ \forall x \in M,\ ax = 0\}$.

2.12 Support d'un module

2.12 Rappel sur localisation d'anneaux et de modules
2.12.1 Partie multiplicative
Une partie $S \subset A$ est multiplicative lorsque :
(i) $0 \notin S$
(ii) $1 \in S$
(iii) $\forall x \in S, \forall y \in S,\ x \times y \in S$

2.12.2 Définition (Localisation d'un anneau par rapport à une partie multiplicative) Soit $S \subset A$ une partie multiplicative.
On note $S^{-1}A = (A \times S)/\sim$ où $\sim$ est définie par
$(a, s) \sim (a\prime, s\prime)$ ssi $\exists r \in S$, tel que $r(as\prime - a\prime s) = 0$
alors $\sim$ est une relation d'équivalence.
La classe d'un élément (a, s) est notée $\dfrac{a}{s}$
L'ensemble des classes d'équivalence $A \times S/\sim = S^{-1}A = \left\{\dfrac{a}{s}, a \in A, s \in S\right\}$
$S^{-1}A$ est muni d'une structure d'anneau.
L'addition est définie par

$\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t} = \dfrac{ta + sb}{st}$
La multiplication
$\dfrac{a}{s}\dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$
2.12.3 Remarque
Si M est un $A-$module et S une partie multiplicative, on a $S^{-1}M = \left\{\dfrac{x}{s}, x \in M, s \in S\right\}$
$S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$-module.
Le morphisme canonique de M dans $S^{-1}M$ est noté $i_S^M : M \longrightarrow S^{-1}M$, $x \longmapsto \frac{x}{1}$
Si $p \in spec(A)$ et $S = A \setminus P$, on note $M_P = S^{-1}M$
M_P est appelé le **localisé de M en P**.
Définition 2.12.1

Soit M un $A-$module. Le support de M est l'ensemble $Supp\ (M) = \{P \in specA,\ M_P \neq (0)\}$ où $specA$ est l'ensemble des idéaux premiers de A,

M_p est le localisé de M en P c'est-à-dire le module de fractions de M associé à la partie multiplicative $S = A - P$ avec P un idéal premier de A.

Conséquence

$Supp\ (M) = \varnothing \Longleftrightarrow M = (0)$.

2.13 Produit tensoriel

Définition 2.13.1

Le produit tensoriel de M et N est le $A-$module T muni d'une application bilinéaire θ de $M \times N$ dans T, possedant la propriété universelle suivante : pour tout $A-$module G et pour toute application bilinéaire f de $M \times N$ dans G,il existe une application linéaire $\bar{f} : T \longrightarrow G$ et une seule telle que $f = \bar{f} \circ \theta$.

Notation : Le module T se note $M \otimes_A N$, ou simplement $M \otimes N$.

L'application θ se note $(x, y) \longrightarrow x \otimes y$.

Proposition 2.13

Si M et M' sont des $A-$modules de type fini, alors $Supp\ M \otimes_A M' = Supp\ M \cap Supp\ M'$

Preuve

Pour tout idéal premier P de $A, (M \otimes_A M')_P \simeq M_P \otimes_{A_P} M'_P$

La proposition est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemme 2.13

Soit $(A, \mathcal{M})$ un anneau local et soient M et M' deux $A-$modules de type fini. Alors

$M \otimes_A M' = (0) \Longleftrightarrow M = (0)$ ou $M' = (0)$

Corollaire 2.13.1

Soit M un $A-$modules de type fini. Alors pour tout idéal I de A,on a $Supp\left(\dfrac{M}{IM}\right) = V(I) \cap Supp\ (M) = V(I + AnnM)$.

Car $\dfrac{M}{IM} \simeq \dfrac{A}{I} \otimes_A M$

Définition 2.13.2

Soit M un $A-$module. Un idéal premier P de A est dit associé à M

s'il existe $x \in M$ tel que $P = Ann(x)$. On note $AssM$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

Théorème 2.13

Soient A un anneau noethérien, M un $A-$module de type fini different de (0). Alors

(i) il existe des sous-modules M_i de M et des ideaux premiers P_i de A

pour $i = 0, \cdots, n-1$ tels que :

$(*)$ $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = (0)$ *avec* $\dfrac{M_i}{M_{i+1}}$ *isomorphe à* $\frac{A}{P_i}$ $\forall\ i = 0, \cdots, n-1$,

(ii) pour une telle chaîne on a $AssM \subseteq \{P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}\} \subseteq Supp\ (M)$.

Corollaire 2.13.2

Soient A un anneau noethérien, M un $A-$module de type fini different de (0).

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $l_A(M) < +\infty$;

(ii) $AssM \subseteq MaxA$ où $MaxA$ est l'ensemble des ideaux maximaux de A.

(iii) *Supp* $(M) \subseteq MaxA$;

(iv) $\dim M = 0$.

2.14 Fonctions de Hilbert-Samuel

Lemme 2.13.1

Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A, M un $A-$module de type fini, $(M_n)_{n\geq 0}$ une filtration $I-$bonne de M.

Si $\dfrac{M}{IM}$ est de longueur finie, alors

$\dfrac{M}{M_n}$ *et* $\dfrac{M_n}{M_{n+1}}$ *sont de longueurs finie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Preuve

Comme $IM_n \subseteq M_n$ $\forall n$

Alors $l_A\left(\dfrac{M}{M_n}\right) \leq l_A\left(\dfrac{M}{I^nM}\right)$

Il suffit donc de montrer que $l_A\left(\dfrac{M}{I^nM}\right) < +\infty$

Supp $\left(\dfrac{M}{I^nM}\right) = V\ (I^n) \cap$ Supp M

$= V(I)\cap$ Supp M $=$ Supp $\left(\dfrac{M}{IM}\right) \subseteq$ Max A (par hypothèse)

Par conséquent $l_A\left(\dfrac{M}{I^nM}\right) < +\infty$

Comme $l_A\left(\dfrac{M_n}{M_n}\right) \leq l_A\left(\dfrac{M}{I^nM}\right) < +\infty$

Donc $l_A\left(\frac{M}{M_n}\right) < +\infty$

On a $\frac{M_n}{M_{n+1}}$ est un sous –module de $\frac{M}{M_{n+1}}$

Donc $l_A\left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right) < +\infty$

Lemme 2.13.2

Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A, M un $A-$module de type fini,

$\Phi = (M_n)_{n\geq 0}$ *une filtration $I-$bonne de M,* $G_I(A) = \bigoplus\limits_{n\ \geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}}$ *l'anneau gradué associé à l'idéal I, $G_\Phi(M)$ le $G_I(A)-$module gradué associé à Φ.*

Alors $G_\Phi(M)$ est un $G_I(A)-$module gradué de type fini.

Preuve

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n$,

$$\frac{M_{n_0+n}}{M_{n_0+n+1}} = \left(\frac{I^n}{I^{n+1}}\right)\left(\frac{M_{n_0}}{M_{n_0+1}}\right)$$

Donc $G_\Phi(M)$ est engendré sur $G_I(A)$ par les $\frac{M_n}{M_{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots, n_0$.

Chacun de ces modules est de type fini car M est noethérien

Donc $G_\Phi(M)$ est un $G_I(A)-$module gradué de type fini.

Chapitre 3

BIGRADUATIONS ET BIFILTRATIONS

3.1 Anneaux bigradués

Définition 3.1

On appelle **bigraduation** de A, toute famille $(A_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes de A telle que :

(i) $A = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$

(ii) $A_{m,n}A_{p,q} \subseteq A_{m+p,n+q} \quad \forall m,n,\, p,q \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas l'anneau $A = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$ est dit bigradué.

Les éléments de $A_{m,n}$ sont dit **homogènes** de degré (m,n) .

Pour tout $x \in A$, x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum\limits_{m,n} x_{m,n}$ et où les $x_{m,n}$ sont presque tous nuls.

$x_{m,n}$ est la composante homogène de degré (m,n) de x .

L'idéal I de $A = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$ est dit bigruadé si $I = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} (I \cap A_{m,n})$.

Proposition 3.1

Soit $A = \underset{m,n \, \in \, \mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$ *un anneau bigruadé, on a :*

(i) *L'élément unité 1 de* A *appartient à* $A_{0,0}$

(ii) $A_{0,0}$ *est un sous anneau de* A

(iii) $A_{m,n}$ *est un* $A_{0,0}-$*module,* $\forall (m,n)$

(iv) A *est une* $A_{0,0}-$*algèbre*

Preuve **Voir** [12] p 26

3.2 Modules bigradués

Définition 3.2.1

Soit $A = \underset{m,n \, \in \, \mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$ un anneau bigradué. Un $A-$module M est dit bigradué s'il existe une famille $(M_{m,n})_{m,n \, \in \, \mathbb{Z}}$ de sous groupes de M telle que :

(i) $M = \underset{m,n \, \in \, \mathbb{Z}}{\oplus} M_{m,n}$

(ii) $A_{m,n}M_{p,q} \subseteq M_{m+p,n+q}$ $\forall m,n,p,q \in \mathbb{Z}$

Les éléments de $M_{m,n}$ sont dits homogènes de degré (m,n). Pour tout

$x \in M$, x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum\limits_{m,n} x_{m,n}$ où $x_{m,n} \in M_{m,n}$ où les $x_{m,n}$ sont presque tous nuls.

$x_{m,n}$ est la composante homogène de degré (m,n) de x.

Le sous –modules N de $M = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} M_{m,n}$ est dit **bigradué** si $N = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} (N \cap M_{m,n})$.

Remarque 3.2

Soient $A = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$ un anneau bigradué et $M = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} M_{m,n}$ un $A-$module bigradué.

$M_{m,n}$ est un $A_{0,0}-$module pour tout (m,n) car $A_{0,0}M_{m,n} \subseteq M_{m,n}$ pour tout (m,n).

Définition 3.2.2

Un sous $A-$module bigradué de l'anneau bigradué $A = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{N}^2}{\oplus} A_{m,n}$ est un idéal bigradué de A.

L'idéal bigradué A_+ de l'anneau bigradué à degrés positifs $A = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{N}^2}{\oplus} A_{m,n}$ est par définition engendré par les éléments homogènes de degré different de $(0,0)$: $A_+ = \underset{(m,n)\,\neq(0,0)}{\oplus} A_{m,n}$.

Proposition 3.2

Soient $A = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2}{\oplus} A_{m,n}$ *un anneau bigradué à degrés positifs et soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments homogènes de* A *de degré* $degx_i = (m_i, n_i) \neq (0,0)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'idéal de A *engendré par la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est égal à* A_+.

b) La famille $(x_i)_{i\in I}$ *est un système générateur de la* $A_{0,0}-$*algèbre* A.

c) Pour tout $(m,n) \neq (0,0)$ *le* $A_{0,0}-$*module* $A_{m,n}$ *est engendré par les éléments de la forme* $\prod_{i\in I} x_i^{r_i}$ *qui sont de degré* (m,n).

Preuve **Voir** [1] p 41

3.3 Bifiltrations

Ici, on définit dans $\mathbb{Z}^2$ une relation d'ordre partiel notée $\prec$, par $\forall \alpha = (m,n),\ \ \alpha' = (m',n') \in \mathbb{Z}$; et $\alpha \preceq \alpha'$ si et seulement si $m \leq m$' et $n \leq n$'.

Définition 3.3.1

(3.3.1.1) On appelle **bifiltration** de l'anneau commutatif unitaire A, toute famille $F = (I_{m,n})_{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A telle que :

(i) $I_{0,0} = A$

(ii) $\forall\ (m,n) \preceq (p,q),\ I_{p,q} \subseteq I_{m,n}$ équivaut à
pour tous $m,n \in \mathbb{Z}$, $I_{m+1,n} \subseteq I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subseteq I_{m,n}$

(iii) $I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q} \quad \forall m,n,p,q \in \mathbb{Z}$

Il s'en suit que si $m \leq 0$, alors $(m,0) \preceq (0,0)$, d'où $A = I_{0,0} \subseteq I_{m,0}$, donc $I_{m,0} = A$.

De même si $n \leq 0$, alors $I_{0,n} = A$.

En particulier si $(m,n) \preceq (0,0)$, alors $I_{m,n} = A$.

(3.3.1.2) Dans tout ce qui suit, les bifiltrations $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ sont supposées satisfaire la condition suplémentaire suivante :

(IEP) Pour tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $I_{k,l} = I_{k,0}$ si $k \geq 0$ et $l \leq 0$ et $I_{k,l} = I_{0,l}$ si $k \leq 0$ et $l \geq 0$.

Une telle bifiltration est dite **à Indices Essentiellement Positifs** (type IEP par abréviation).

Cette définition sera étendue aux bifiltrations $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ à indices dans $\mathbb{N}^2$ où certains sous-indices dans $I_{m,n}$ pouraient être eventuellement négatifs.

(3.3.1.3) Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des bifiltrations de A. On dit que $F \leq G$ si et seulement si $I_{m,n} \subseteq J_{m,n}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

(3.3.1.4) Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration de l'anneau A. Pour tous entiers $k, l \in \mathbb{N}^*$, on note $F^{(k,l)} = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, où $J_{m,n} = I_{mk,nl}$ pour tous m, n. Alors $F^{(k,l)}$ est une bifiltration de A qui est appelée la **bifiltration extraite de F d'indice** (k,l) .

(3.3.1.5) Soient $f = (I_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des filtrations de A. On notera $f \ltimes g$ la bifiltration F definie par
$f \ltimes g = (F_{m,n})$, où $F_{m,n} = I_m J_n$ pour tous m, n.

Exemple

Soient $f = (I_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des filtrations de A. Alors $f \ltimes g$ est une bifiltration de type IEP.

(3.3.1.6) Soient k, l des entiers positifs. Considérons les filtrations $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $g^{(l)} = (J_{nl})_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors
$f^{(k)} \ltimes g^{(l)} = (I_{mk}J_{nl}) = (\ f \ltimes g)^{(k,l)}$.

Définition 3.3.2

Soit M un $A-$module. On appelle bifiltration de M, toute famille $\Phi = (M_{m,n})_{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :

(i) $M_{0,0} = M$

(ii) $M_{m,n} \subseteq M_{p,q} \ \ \forall\, m \geq p$ et $n \geq q$

Si $F = (I_{m,n})_{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}$ est une bifiltration de A et si $\Phi = (M_{m,n})_{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}$ est une bifiltration de M, F et Φ sont dites compatibles si :

(iii) $I_{m,n}M_{p,q} \subseteq M_{m+p,n+q} \ \ \forall m,n,p,q \in \mathbb{Z}$.

Définition 3.3.3

Soient I et J deux idéaux de A. Une bifiltration $\Phi = (M_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ d'un $A-$module M est dite $(I, J)-$**bonne** si $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} IM_{m,n} \subseteq M_{m+1,n} \\ JM_{m,n} \subseteq M_{m,n+1} \end{cases}$ et s'il existe $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\ m \geq m_0 \text{ et } n \geq n_0, \begin{cases} IM_{m,n} = M_{m+1,n} \\ JM_{m,n} = M_{m,n+1} \end{cases}$$

Remarque 3.3.2

Si $\Phi = (M_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ est une bifiltration $(I, J)-$bonne d'un $A-$module M alors on a :

- $IJM_{m,n} \subseteq M_{m+1,n+1}$ $\forall m, n \in \mathbb{Z}$;
- $IJM_{m,n} = M_{m+1,n+1}$ $\forall m \gg 0, n \gg 0.$

3.4 Anneau bigradué associé à deux filtrations

Définition 3.4

$f = (I_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux filtrations de l'anneau commutatif A.

Considérons le groupe $G_{f,g}(A) = \displaystyle\bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{I_m J_n}{I_{m+1} J_{n+1}}$

On définit sur $G_{f,g}(A)$ une structure d'anneau bigradué par :

pour tout $\alpha_{m,n} = a_{m,n} + I_{m+1}J_{n+1}$ et $\beta_{p,q} = b_{p,q} + I_{p+1}J_{q+1}$ avec $a_{m,n} \in I_m J_n$ et $b_{p,q} \in I_p J_q$;

on pose $\alpha_{m,n}\ \beta_{p,q} = a_{m,n}b_{p,q} + I_{m+p+1}J_{n+q+1}$

Ce produit est indépendant du choix de $a_{m,n}$ et $b_{p,q}$ car si :

$\alpha_{m,n} = a'_{m,n} + I_{m+1}J_{n+1}$ et $\beta_{p,q} = b'_{p,q} + I_{p+1}J_{q+1}$ avec $a'_{m,n} \in I_m J_n$ et $b'_{p,q} \in I_p J_q$;

on a : $a_{m,n} - a'_{m,n} \in I_m J_n$, $b_{p,q} - b'_{p,q} \in I_p J_q$;

On obtient :

$$a_{m,n}b_{p,q} - a'_{m,n}b'_{p,q} = a_{m,n}b_{p,q} - a'_{m,n}b_{p,q} + a'_{m,n}b_{p,q} - a'_{m,n}b'_{p,q}$$

$$= a_{m,n}\left(b_{p,q} - b'_{p,q}\right) + b'_{p,q}\left(a_{m,n} - a'_{m,n}\right) \in I_{m+p}J_{n+q}$$

Donc $a_{m,n}b_{p,q} + I_{m+p+1}J_{n+q+1} = a'_{m,n}b'_{p,q} + I_{m+p+1}J_{n+q+1}$

On a $\alpha_{m,n}\beta_{p,q} \in \dfrac{I_{m+p}J_{n+q}}{I_{m+p+1}J_{n+q+1}}$

Pour tout $\alpha, \beta \in G_{f,g}(A)$ avec $\alpha = \sum\limits_{m\geq 0, n\geq 0} \alpha_{m,n}$ et $\beta = \sum\limits_{m\geq 0, n\geq 0} \beta_{m,n}$

Posons $\alpha\beta = \sum\limits_{m\geq 0, n\geq 0} \left(\sum\limits_{p+r=m, q+s=n} \alpha_{p,q}\beta_{r,s} \right)$

On a : $\alpha\beta \in G_{f,g}(A)$.

A étant un anneau, la multiplication définie ci-dessus dans $G_{f,g}(A)$ est associative et distributive par rapport à l'addition.

On a $G_{f,g}(A) = \bigoplus\limits_{(m,n)\,\in\,\mathbb{N}^2} \dfrac{I_m J_n}{I_{m+1}J_{n+1}}$ et $\dfrac{I_m J_n}{I_{m+1}J_{n+1}} \times \dfrac{I_p J_q}{I_{p+1}J_{q+1}} \subseteq \dfrac{I_{m+p}J_{n+q}}{I_{m+p+1}J_{n+q+1}}$

Donc $G_{f,g}(A)$ est un anneau bigradué appelé **l'anneau bigradué associé aux filtrations** f **et** g .

De même le groupe, $H_{f,g}(A) = \bigoplus\limits_{(m,n)\,\in\,\mathbb{N}^2} \dfrac{I_m J_n}{I_{m+1}J_n}$ definit une structure d'anneau bigradué.

Remarque 3.4

Dans un anneau commutatif unitaire, A, I, J et K trois idéaux de A, M un $A-$module :

(i) Le groupe $G_K(I,J) = \bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{I^m J^n}{I^m J^n K}$ peut être muni d'une structure d'anneau bigradué avec $I^0 = J^0 = A$

(ii) le groupe $M^* = \bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{I^m J^n M}{I^m J^n K M}$ est un $G_k(I,J)$ bigradué.

(iii) Le groupe $G_\Phi(M) = \bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{M_{m,n}}{M_{m+1,n+1}}$ (respectivement $H_\Phi(M) = \bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{M_{m,n}}{M_{m+1,n}}$) peut être muni d'une structure

de $G_{f,g}(A)$–module bigradué (respectivement de $H_{f,g}(A)$-module bigradué) et $f = (I_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des filtrations de A et $\Phi = (M_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ une bifiltration du $A-$module M.

3.5 Fonctions de Hilbert , polynômes de Hilbert – Samuel

3.5.1 Fonctions de Hilbert

On donne ci-dessous la définition d'une fonction de type polynomial sur $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui est l'analogue de la notion de fonction de type polynomial sur $\mathbb{Z}$.

Définition 3.5.1.1

La fonction $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est dite de type polynomial s'il existe un

polynôme $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tel que $\forall m \gg 0$ et $\forall n \gg 0$, $\varphi(m,n) = P(m,n)$.

Il est facile de voir que le polynôme P s'il existe est unique.

En effet : si $Q \in \mathbb{Q}[X,Y]$ et s'il existe m_0 et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$P(m,n) = Q(m,n)$, pour tous $m \geq m_0$ et $n \geq n_0$ alors on a

$P(m,n) - Q(m,n) = 0$

c'est à dire $(P - Q)(m,n) = 0$. Soit $(P - Q)(X,Y) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k(Y) X^k$.

Pour n fixé, $n \geq n_0$ le polynôme $S(X) = (P - Q)(X,n) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k(n) X^k$

s'annule en tout $m \geq m_0$ avec $a_k \in \mathbb{Q}[Y]$. Donc $a_k(n) = 0$, $\forall n \geq n_0$.

D'où $a_k = 0$ et $P = Q$.

Le polynôme P est appelé le polynôme associé à φ. Dans ce cas le degré de P est appelé degré de φ.

Proposition 3.5.1.1

Soit $A = \underset{(m,n)\ \in\mathbb{N}^2}{\oplus} A_{m,n}$ *un anneau bigradué noethérien de la forme*

$A = A_{0,0}[x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s]$. *On suppose que deg* $(x_i) = (1,0)$ *et deg* $y_j = (0,1)$ $\forall i, j$.

Soit $M = \underset{(m,n)\ \in\mathbb{N}^2}{\oplus} M_{m,n}$ *un* $A-$*module bigradué de type fini.*

Alors pour toute fonction additive λ *sur la catégorie des* $A_{0,0}-$*modules bigradués de type fini, la fonction* $(m,n) \longmapsto \lambda(M_{m,n})$ *est de type polynômial de degré* $\leq \theta_1(M) + \theta_2(M) - 2$,*où* $\theta_1(M)$ *et* $\theta_2(M)$ *sont respectivement l'ordre du pôle* $X = 1$ *et* $Y = 1$ *de la série de Poincaré* $S(M,X,Y)$ *.*

Preuve

Voir [12] page 37.

Corollaire 3.5.1.2

Soit $H = \underset{(m,n)\ \in\mathbb{N}^2}{\oplus} H_{m,n}$ *un anneau bigradué noethérien de la forme*

$H = H_{0,0}[x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s]$ *où deg* $(x_i) = (1,0)$ *et deg* $y_j = (0,1)$.

On suppose que $H_{0,0}$ est artinien. Soit $M = \underset{(m,n)\ \in \mathbb{N}^2}{\oplus} M_{m,n}$ un $H-$module bigradué de type fini.

Alors la fonction $(m,n) \longmapsto l_{H_{0,0}}\left(M_{(m,n)}\right)$ est de type polynomial de degré $\leq r+s-2$.

Preuve

$M_{m,n}$ est un $H_{0,0}-$module bigradué de type fini ; comme $H_{0,0}$ est artinien alors $M_{m,n}$ est un $H_{0,0}-$module noethérien et artinien donc $l_{H_{0,0}}(M_{m,n}) < \infty$, $\forall (m,n)$.

D'après la proposition 3.5.1.1, la fonction $(m,n) \longmapsto l_{H_{0,0}}(M_{m,n})$ est de type polynomial de degré $\leq r+s-2$.

Définition 3.5.1.3

La fonction $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \longmapsto H(M,m,n) = l_{H_{0,0}}(M_{m,n})$ est la fonction de Hilbert de M.

3.5.2 Polynômes de Hilbert-Samuel

Lemme 3.5.2.1

Soient I et J deux idéaux de l'anneau A, $\Phi = (M_{m,n})_{(m,n)\ \in\ \mathbb{Z}^2}$ une

bifiltration $(I,J)-$bonne du $A-$module M.

Si $l_A\left(\dfrac{M}{IJM}\right) < +\infty$, où l_A désigne la fonction longueur, alors les $A-$modules

$\dfrac{M}{M_{m,n}}$, $\dfrac{M_{m,n}}{M_{(m,n)+i+j}}$, $\dfrac{M_{(m,n)+i}}{M_{(m,n)+i+j}}$ *et* $\dfrac{M_{(m,n)+j}}{M_{(m,n)+i+j}}$ *sont de longueur finie* $\forall (m,n)$, *avec* $i=(1,0)$ *et* $j=(0,1)$

Preuve

Pour $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $I^m J^n M \subseteq M_{m,n}$,$\forall (m,n)$, donc $l_A\left(\frac{M}{M_{m,n}}\right) \leq l_A\left(\frac{M}{I^mJ^nM}\right)$

On a $\text{supp}\left(\frac{M}{I^mJ^nM}\right) = V(I^mJ^n) \cap \text{supp}M = (V(I^m) \cap V(J^n)) \cap \text{supp}M$

$$= (V(I) \cap V(J)) \cap \text{supp}M$$

$$= V(IJ) \cap \text{supp } M$$

$$= \text{supp}\left(\frac{M}{IJM}\right) \subseteq \text{Max } A$$

où $V(K) = \{P \in spec\ A; K \subseteq P\}$.

Donc si $l_A\left(\frac{M}{I^mJ^nM}\right) < \infty$ alors $l_A\left(\frac{M}{M_{m,n}}\right) < \infty$

Comme $\frac{M_{m,n}}{M_{(m,n)+i+j}}$, $\frac{M_{(m,n)+i}}{M_{(m,n)+i+j}}$ *et* $\frac{M_{(m,n)+j}}{M_{(m,n)+i+j}}$ sont des sous-modules de $\frac{M}{M_{(m,n)+i+j}}$ alors $l_A\left(\frac{M_{(m,n)+i}}{M_{(m,n)+i+j}}\right) \leq l_A\left(\frac{M_{m,n}}{M_{(m,n)+i+j}}\right) \leq l_A\left(\frac{M}{M_{(m,n)+i+j}}\right) < \infty$

De même $l_A\left(\frac{M_{(m,n)+j}}{M_{(m,n)+i+j}}\right) < \infty$

Lemme 3.5.2.2

Soient I et J deux idéaux de l'anneau A, $\Phi = (M_{m,n})_{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration $(I,J)-$bonne du $A-$module M si M est de type fini avec $i = (1,0)$ et $j = (0,1)$, alors $G_\Phi(M) = \bigoplus_{(m,n)\,\in\,\mathbb{N}^2} \frac{M_{m,n}}{M_{(m,n)+i+j}}$ est un $G_{(I,J)}\ (A)-$module bigradué de type fini.

Preuve

Preuve voir [12] lemme 3.2.2

On a le théorème suivant :

Théorème 3.5.2

Soient I et J deux idéaux de l'anneau A, $\Phi = (M_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration $(I,J)-$bonne du $A-$module M.

Supposons que $l_A\left(\dfrac{M}{IJM}\right) < +\infty$

Alors la fonction $\varphi : (m,n) \longmapsto l_A\left(\dfrac{M}{M_{m,n}}\right)$ *est de type polynômial de*

degré $\leq r+s-1$ où r et s sont respectivement le cardinal d'un système générateur de I et de J .

Le degré et la somme des coefficients de la composante homogène de plus

haut degré du polynôme associé à φ dépendent de I, J et M et non de la bifiltration $(I,J)-$bonne Φ.

Preuve voir [12] théorème 3.2.1

Lemme 3.5.2.4

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X,Y]$. On suppose que $P \neq 0$ et que pour tous $m \gg 0$, $n \gg 0$, $P(m,n) \leq Q(m,n)$ alors deg $P \leq$ deg Q.

Lemme 3.5.2.5

Soient $P \in \mathbb{Q}[X,Y]$ tel que deg $P \leq s$. On suppose que $P(m,n) \geq 0$, pour tous $m \gg 0$, $n \gg 0$.

Alors la composante homogène de degré s de P est ≥ 0 au point $(1,1)$.

Définition 3.5.2

Soient I et J deux idéaux de A. On note $\chi_{I,J}^{M}$ le polynôme associé à la fonction $(m,n) \longmapsto l_A\left(\dfrac{M}{I^m J^n M}\right)$.

Ce polynôme est appelé le polynôme de Hilbert -Samuel de M relativement à I et J.

Remarquons que si I et J sont deux idéaux de A, tels que $l_A\left(\dfrac{M}{IJM}\right) < +\infty$ alors $\chi_{I,J}^{M} = 0$ si et seulement si $M = IJM$.

En effet : si $\chi_{I,J}^{M} = 0$ alors $l_A\left(\dfrac{M}{I^m J^n M}\right) = 0$ pour tous $m \gg 0$, $n \gg 0$,

donc $M = I^m J^n M$, pour tous $m \gg 0$, $n \gg 0$; D'où $M = I^m J^n M \subseteq IJM \subseteq M$.

D'où $M = IJM$.

Inversement si $M = IJM$ alors $M = IM = JM$, donc $IM = I^2 M$.

Par récurrence on obtient $M = I^m M$ pour tous m.

Pour tout m, $M = I^m M$ donc $JM = I^m JM$. D'où $M = I^m J^n M$ pour tous m, n.

Comme $\chi_{I,J}^{M}(m,n) = l_A\left(\dfrac{M}{I^m J^n M}\right) = 0$ pour tous $m \gg 0$, $n \gg 0$. Donc $\chi_{I,J}^{M} = 0$.

En particulier si $I \subseteq r(A)$ ou $J \subseteq r(A)$ où $r(A)$ désigne le radical de Jacobson de A, et si $M \neq (0)$ alors $\chi_{I,J}^{M} \neq 0$.

Chapitre 4

Etude de quelques classes de bifiltrations.

Dans tout ce qui suit, A designe un anneau commutatif unitaire.

4.1 Sous-anneau de Véronèse d'un anneau bigradué

Définition 4.1

Soit $A = \bigoplus_{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2} A_{m,n}$ un anneau bigradué.

Pour tous éléments $k, l \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2} A_{mk,nl}$.

Alors $A^{(k,l)}$ est un sous-anneau bigradué de A.

En effet $A^{(k,l)}$ est un sous-groupe de A comme somme directe de sous-groupes de A. $1 \in A_{0,0} = A_{0k,0l} \subseteq A^{(k,l)}$.

Posons $B_{m,n} = A_{mk,nl}$. Alors $A^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2} B_{m,n}$.

D'autre part $\forall\ p, q, r, s \in \mathbb{Z}$,

$B_{p,q}B_{r,s} = A_{pk,ql}A_{rk,sl} \subseteq A_{(p+r)k,(q+s)l} = B_{p+r,q+s}$.

On en déduit d'une part que $A^{(k,l)}$ est un sous-anneau de A et d'autre part que ce sous-anneau est bigradué par les $B_{m,n}$.

$A^{(k,l)}$ est appelé **sous-anneau de Véronèse d'indice $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ de A**.

Remarque 4.1.1
Soit $a \in A_{m,n}$. Alors $\forall\ k, l \geq 1,\ a^{kl} \in (A_{m,n})^{kl} \subseteq A_{mkl,nkl} \subseteq A^{(kl,kl)}$.

Soit $A = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2}{\oplus} A_{m,n}$ un anneau bigradué et soit $M = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2}{\oplus} M_{m,n}$ un $A-$module bigradué. Soitent $k, l \in \mathbb{N}^*$ et soient $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq u \leq k-1, 0 \leq v \leq l-1$.

Posons $M^{(k,l,u,v)} = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2}{\oplus} M_{mk+u,nl+v} = \underset{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2}{\oplus} M'_{m,n}$ où $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ M'_{m,n} = M_{mk+u,nl+v}$.

Alors $M^{(k,l,u,v)}$ est un $A^{(k,l)}-$module bigradué appelé **sous-anneau de Véronèse d'indice $(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ de M** et pour tout sous-module bigradué N de M, $N^{(k,l,u,v)}$ est un sous$-A^{(k,l)}$-module bigradué de $M^{(k,l,u,v)}$.

En effet $M^{(k,l,u,v)}$ est un sous-groupe de M comme somme directe des sous-groupes

de $M'_{m,n} = M_{mk+u,nl+v}$ *de* M. D'autre part $\forall\ \ k, l \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ u, v \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq u \leq k-1, 0 \leq v \leq l-1$, $\forall\ p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, posons $B_{p,q} = A_{pk,ql}$. Alors

$B_{p,q}M'_{r,s} = A_{pk,ql}M_{rk+u,sl+v} \subseteq M_{(p+r)k+u,(q+s)l+v} = M'_{p+r,q+s}$.

Il en résulte d'une part que, $M^{(k,l,u,v)}$ est un $A^{(k,l)}-$module et d'autre part que ce $A^{(k,l)}-$module est bigradué par les $M'_{m,n}$.

Soit N un sous-module bigradué de M. Alors

$N = \underset{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}{\oplus} N \cap M_{m,n} = \underset{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}{\oplus} N_{m,n}$ où $\forall m, n, \;\; N_{m,n} = N \cap M_{m,n}$

Donc $N^{(k,l,u,v)} = \underset{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}{\oplus} N_{mk+u,nl+v} = \underset{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}{\oplus} N \cap M_{mk+u,nl+v}$.

Donc $\forall \;\; k, l, \; u, v, N^{(k,l,u,v)} \subseteq M^{(k,l,u,v)}$

$N^{(k,l,u,v)}$ est un sous-groupe de $M^{(k,l,u,v)}$ comme somme directe de

sous-groupes de $M^{(k,l,u,v)}$. Montrons que $N^{(k,l,u,v)}$ est un

sous$-A^{(k,l)} - module$ bigradué de $M^{(k,l,u,v)}$. Pour cela il suffit de vérifier la stabilité de la loi externe au niveau des composantes homogènes

$B_{p,q}N_{r,s} = A_{pk,ql}(N \cap M_{rk+u,sl+v}) \subseteq A_{pk,ql}N \cap \; A_{pk,ql}M_{rk+u,sl+v}$

$N \cap \; A_{pk,ql}M_{rk+u,sl+v} \subseteq N \cap M_{(p+r)k+u,(q+s)l+v} = N_{p+r,q+s}$.

Remarque 4.1.2

1.On écrira $M^{(k,l)}$ au lieu de $M^{(k,l,0,0)}$.

2.Pour chaque k, l, avec $k \geq 1, l \geq 1$ fixés, M est la somme directe finie des

$A^{(k,l)}$-modules bigradués de $M^{(k,l,u,v)}$.

En effet $M = \underset{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}{\oplus} M_{m,n}$. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on peut écrire

$m = tk + u$, $0 \leq u \leq k - 1$, $n = t'l + v$, $0 \leq v \leq l - 1$

$$M_{m,n} = M_{tk+u,t'l+v} \subseteq \underset{\substack{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \\ 0 \leq u \leq k-1 \\ 0 \leq v \leq l-1}}{\oplus} M^{(k,l,u,v)}$$

Donc $M = \underset{\substack{(u,v)\,\in\,\mathbb{Z}^2 \\ 0\leq u\leq k-1 \\ 0\leq v\leq l-1}}{\oplus} M^{(k,l,u,v)}$, l'inclusion inverse étant évidente.

4.2 Anneaux et modules bigradués associés à une bifiltration

De nombreuses nouvelles questions relatives aux bifiltrations n'ont pas été reprises ici. Certaines ont déjà été traitées par Dichi et Sangaré (anneaux et modules bigradués ssociés à une bifiltration, fonctions de Hibert et de Hilbert-Samuel d'un module bifiltré etc.. ou dans les thèses de Monzon Traoré, Sagaidou Mohamed Lamine, Hama Boubacar, Moussa Sangaré.

Le cas des anneaux bigradués associés à une bifiltration a été traité par DICHI et SANGARÉ dans : H. DICHI , D. SANGARÉ : *Hilbert–Samuel functions of well bifiltered modules, publié dans Asian-European Journal of Mathematics* Vol. 9, No. 2 (2016) World Scientific Publishing Company,

4.2.1 Anneau de Rees d'une bifiltration d'anneau

Définition 4.2.1.1

Soit $A = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{Z}}{\oplus} A_{m,n}$ un anneau bigradué et $F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ une

bifiltration de A.

On appelle **anneau de Rees** de F l'anneau bigradué

$R(A,F\,) = \underset{m,n\,\in\,\mathbb{N}}{\oplus} I_{m,n}X^mY^n$ où X et Y sont des indéterminées.

C'est un sous-anneau bigradué de l'anneau $A\,[X,Y]$ des polynômes sur A

à deux indéterminées X et Y.

$A\,[X,Y]$ est bigradué et $A_{m,n} = AX^mY^n$ avec deg $X = (1,0)$, deg $Y = (0,1)$

Un élément arbitraire de $R(A, F\ )$ s'écrit :

$z = a_{0,0} + a_{1,0}X + a_{0,1}Y + a_{1,1}XY + a_{2,0}X^2 + a_{0,2}Y^2 + ... + a_{p,q}X^pY^q$ où $a_{i,j} \in I_{i,j}$.

Remarque 4.2.1.1

$R(A, F\ ) = A\left[I_{1,0}X, I_{0,1}Y, I_{1,1}XY, I_{2,0}X^2, \ldots, I_{m,n}X^mY^n, \ldots\right]$

4.2.2 Anneau de Rees généraliseé d'une bifiltration d'anneau

Définition 4.2.2

Soit $A = \bigoplus_{m,n\,\in\,\mathbb{Z}} A_{m,n}$ un anneau bigradué et $F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ une bifiltration de A.

On appelle **anneau de Rees généralisé de** F l'anneau bigradué

$\Re(A, F\ ) = \bigoplus_{m,n\,\in\,\mathbb{Z}} I_{m,n}X^mY^n$ où X et Y sont des indéterminées.

C'est un sous-anneau bigradué de l'anneau $A\left[u, v, X, Y\right]$

où $u = X^{-1}$ et $v = Y^{-1}$ avec deg $X = (1, 0)$, deg $Y = (0, 1)$, deg $u = (-1, 0)$, deg $v = (0, -1)$ et deg $X^mY^n = (m, n)$

Tout élément $z \in \Re(A, F\ )$ s'écrit :

$$z = \sum_{\substack{i\,=\,-p...m \\ j\,=\,-q...n}} a_{i,j}X^iY^j \quad \text{où} \quad a_{i,j} \in I_{i,j}$$

$z = a_{-p,-q}X^{-p}Y^{-q} + a_{-p+1,-q+1}X^{-p+1}Y^{-q+1} + \cdots + a_{0,0} + a_{1,0}X + a_{0,1}Y + a_{1,1}XY + a_{2,0}X^2 + a_{0,2}Y^2 + ... + a_{m,n}X^mY^n$.

Remarque 4.2.2

$$\Re(A, F) = A\left[u, v, I_{1,0}X, I_{0,1}Y, I_{1,1}XY, I_{2,0}X^2, \ldots, I_{m,n}X^mY^n, \ldots\right]$$

où $u = X^{-1}$ et $v = Y^{-1}$.

En plus $\Re(A, f\ ) = R(A, F\ )\,[u, v]$.

4.2.3 Sous-anneau de Véronèse d'exposant (k, l) des anneaux de Rees d'une bifiltration

Définition 4.2.3

Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration de l'anneau A.

Considérons l'anneau de Rees $R(A,\ F\ ) = \underset{(m,n)\ \in\ \mathbb{N}^2}{\oplus} I_{m,n}X^mY^n$

de la bifiltration F et son anneau de Rees généralisé

$\Re(A,\ F\ ) = \underset{(m,n)\ \in\ \mathbb{Z}^2}{\oplus} I_{m,n}X^mY^n.$

Pour tous éléments $k, l \in \mathbb{N}^*$, le sous-anneau de Véronèse d'indice

(k, l) de $R(A,\ F\ )$ est $R(A,\ F\ )^{(k,l)} = \underset{(m,n)\ \in\ \mathbb{N}^2}{\oplus} I_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$.

Et celui de $\Re(A,\ F\ )$ est $\Re(A,\ F)^{(k,l)} = \underset{(m,n)\ \in\ \mathbb{Z}^2}{\oplus} I_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}.$

Posons $F^{(k,l)} = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, où $\forall m, n\ \ J_{m,n} = I_{mk,nl}$.

Alors $F^{(k,l)}$ est une bifiltration de A.

En effet $J_{0,0} = I_{0k,0l} = I_{0,0} = A.$

Si $(p,q) \preceq (m,n)$, alors $p \leq m$ et $q \leq n$; $pk \leq mk$ et $ql \leq nl$.

Donc $(pk,ql) \leq (mk,nl)$ et $I_{mk,nl} \subseteq I_{pk,ql}$ donc $J_{m,n} \subseteq J_{p,q}$.

Enfin $\forall\,(p,q),(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $J_{m,n}J_{p,q} = I_{mk,nl}I_{pk,ql} \subseteq I_{(m+p)k,(n+q)l} = J_{m+p,n+q}$.

Considérons l'anneau de Rees de la bifiltration $F^{(k,l)} = (I_{mk,nl})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$

$\forall\ k,l \in \mathbb{N}^*,\ \ \Re(A,\ F)^{(k,l)} \simeq \Re(A,\ F^{(k,l)})$.

En effet

Soit $\varphi :\ \Re(A,\ F^{(k,l)}) \longrightarrow\ \Re(A,\ F)^{(k,l)}$ l'application telle que

$\forall\ z = \sum\limits_{m,n} a_{m,n}X^mY^n$, où $a_{m,n} \in J_{m,n} = I_{mk,nl}\ \ \forall m,n, \varphi(z) = \sum\limits_{m,n} a_{m,n}X^{mk}Y^{nl}$.

On a trivialement $\varphi(1) = 1$.

Soient $z,z' \in \Re(A,F^{(k,l)})$. Ecrivons $z = \sum\limits_{m,n} a_{m,n}X^mY^n$ où $a_{m,n} \in J_{m,n} = I_{mk,nl}$,

$z' = \sum\limits_{m,n} b_{m,n}X^mY^n$ où $b_{m,n} \in J_{m,n} = I_{mk,nl}$

Alors $z+z' = \sum\limits_{m,n}(\ a_{m,n} + b_{m,n})X^mY^n)$

Donc $\varphi(z+z') = \sum\limits_{m,n} (a_{m,n} +\ b_{m,n})X^{mk}Y^{nl} =$

$$\sum_{m,n} a_{m,n}X^{mk}Y^{nl} + \sum_{m,n} b_{m,n}X^{mk}Y^{nl} = \varphi(z) + \varphi(z')$$

D'autre part $\forall\ a_{m,n} \in I_{mk,nl}$ et $\forall\ b_{p,q} \in I_{pk,ql}$, on a

$a_{m,n}b_{p,q} \in I_{mk,nl}\ I_{pk,ql} \subseteq I_{(m+p)k,(n+q)l}$.

Donc $\varphi\,[(a_{m,n}X^mY^n)(b_{p,q}X^pY^q)] = \varphi(a_{m,n}b_{p,q}X^{m+p}Y^{n+q})$

$= a_{m,n}b_{p,q}X^{(m+p)k}Y^{(n+q)l}$

$= (a_{m,n}X^{mk}Y^{nl})(b_{p,q}X^{pk}Y^{ql})$

$= \varphi(a_{m,n}X^mY^n) \times \varphi(b_{p,q}X^pY^q)$

Il résulte de la première partie en passant aux sommes finies que

$\forall\ z, z' \in \Re(A, F^{(k,l)})\ , \quad \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z').$

Donc φ est un morphisme d'anneau.

φ est surjectif . En effet $\forall\ Z \in \Re(A, F)^{(k,l)},\ Z$ s'écrit $Z = \sum\limits_{m,n} a_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$

où $a_{mk,nl} \in I_{mk,nl}$. On a $Z = \varphi(z)$ avec $z = \sum\limits_{m,n} a_{mk,nl}X^mY^n$.

Soit $z = \sum\limits_{m,n} a_{m,n}X^mY^n$ où $a_{m,n} \in J_{m,n} = I_{mk,nl}$ un élément de $\ker\varphi$.

Alors $0 = \varphi(z) = \sum\limits_{m,n} a_{m,n}X^{mk}Y^{nl}$. Donc $a_{m,n} = 0\ \forall m, n$ et $z = 0$.

Par conséquent φ est injectif et φ est un isomorphisme d'anneaux.

Remarque 4.2.3

(4.3.3.1) On montre de même que $R(A, F)^{(k,l)} \simeq R(A, F^{(k,l)})$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$.

(4.3.3.2) Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des filtrations de l'anneau A. Considerons la bifiltration $F = f \ltimes g$ definie par

$f \ltimes g = (F_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, où $F_{m,n} = I_mJ_n$ pour tous m, n. Soit k, l des entiers positifs.

Considerons les filtrations $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $g^{(l)} = (J_{nl})_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors on a $f^{(k)} \ltimes g^{(l)} = (I_{mk}J_{nl}) = (\ f \ltimes g)^{(k,l)}$.

D'après la Proposition précédente, on a $R(A, f \ltimes g)^{(k,l)} \simeq R(A, (f \ltimes g)^{(k,l)}) = R(A, f^{(k)} \ltimes g^{(l)})$.

Proposition 4.2.3

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *une bifiltration de l'anneau* A *et*

$\Re(A, F) = \bigoplus_{(m,n)\,\in\,\mathbb{Z}^2} I_{m,n} X^m Y^n$ *son anneau de Rees, alors :*

(i) u et v *sont non diviseur de zéro dans* $\Re(A, F)$ *où* $u = X^{-1}$ *et* $v = Y^{-1}$ *.*

(ii) $\forall\ m, n \in \mathbb{Z},\quad u^m v^n \Re(A, F) \cap A = I_{m,n}$ *.*

(iii) *Si* A *est intègre alors* $\Re(A, F)$ *et* $R(A, F)$ *sont intègres.*

Preuve

(i) Soit $z \in \Re(A, F)$, tel que $zuv = 0$ alors $zuvXY = 0$

autrement dit $z(uX)(vY) = 0$ d'où $z = 0$ car $uX = vY = 1$.

(ii) $\forall\ m, n \in \mathbb{Z}$, soit $t \in I_{m,n}$, on sait que

$$\begin{cases} uX = 1 \\ \\ vY = 1 \end{cases} \Longrightarrow \forall\ m, n \in \mathbb{Z}, \begin{cases} (uX)^m = u^m X^m = 1 \\ \\ (vY)^n = v^n Y^n = 1 \end{cases}$$

on a $t = t(u^m X^m)(v^n Y^n) = u^m v^n (t X^m Y^n)$

donc $t \in u^m v^n (I_{m,n} X^m Y^n) \subseteq u^m v^n \Re(A, f) \cap A$

D'où $I_{m,n} \subseteq u^m v^n \Re(A, f) \cap A \quad \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement

Soit $\omega \in u^m v^n \Re(A, f\ ) \cap A \quad \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$,

donc $\omega = u^m v^n \sum_{(i,j)=(-k,-l)}^{(p,q)} \alpha_{i,j} X^i Y^j$ où $\alpha_{i,j} \in I_{i,j}$

donc $\omega = \sum_{(i,j)=(-k,-l)}^{(p,q)} \alpha_{i,j} X^{i-m} Y^{j-n}$ où $\alpha_{i,j} \in I_{i,j}$

$\omega \in A$ alors $\deg(\omega) = (0,0)$ par conséquent $i = m$ et $j = n$

d'où $\omega = \alpha_{m,n} \in I_{m,n}$

donc $u^m v^n \Re(A, F\ ) \cap A \subseteq I_{m,n} \quad \forall\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Doù $\forall\ m, n \in \mathbb{Z}, \quad u^m v^n \Re(A, F\ ) \cap A = I_{m,n}$.

(iii) Evident car tout sous-anneau d'un anneau intègre est intègre.

4.3 Etude de quelques classes de bifiltrations d'anneaux

La définition suivante est due à Monzon Traoré [12] .

4.3.1 Bifiltration (I, J)-bonne

Définition 4.3.1.1

Soient I et J deux idéaux de A . Une bifiltration $\Phi = (M_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ d'un $A-$module M est dite (I, J)**-bonne** si :

(i) $\forall\ m, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} IM_{m,n} \subseteq M_{m+1,n} \\ JM_{m,n} \subseteq M_{m,n+1} \end{cases}$

(ii) Il existe m_0, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\ m \geq m_0, n \geq n_0, \begin{cases} IM_{m,n} = M_{m+1,n} \\ \\ JM_{m,n} = M_{m,n+1} \end{cases}$$

Remarque 4.3.1

Si $\Phi = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ est une bifiltration (I,J)-bonne d'un $A-$module M, alors on a :

$$IJM_{m,n} \subseteq M_{m+1,n+1} \qquad \forall\ m,n \in \mathbb{N}$$

$$IJM_{m,n} = M_{m+1,n+1} \qquad \forall m \gg 0 \quad ,n \gg 0\ .$$

Proposition 4.3.1

$F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ est une bifiltration (I,J)-bonne si et seulement si F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne .

Preuve

Supposons que F est (I,J)-bonne, alors on a :

$$\begin{cases} II_{0,0} \subseteq I_{1,0} \\ \\ JI_{0,0} \subseteq I_{0,1} \end{cases} \quad \text{or} \quad I_{0,0} = A \quad \text{alors} \quad \begin{cases} I \subseteq I_{1,0} \\ \\ J \subseteq I_{0,1} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi} \quad \forall\ m,n \in \mathbb{N}, \begin{cases} II_{m,n} \subseteq I_{1,0}I_{m,n} \subseteq I_{m+1,n} \\ \\ JI_{m,n} \subseteq I_{0,1}I_{m,n} \subseteq I_{m,n+1} \end{cases}$$

$$\text{or} \quad \forall\ m \geq m_0, n \geq n_0, \begin{cases} II_{m,n} = I_{m+1,n} \\ \\ JI_{m,n} = I_{m,n+1} \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \forall\ m \geq m_0, n \geq n_0, \begin{cases} I_{1,0}I_{m,n} = I_{m+1,n} \\ \\ I_{0,1}I_{m,n} = I_{m,n+1} \end{cases}$$

D'où F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne.

La réciproque est évidente.

Conséquence 4.3.1

Si F est une bifiltration (I, J)-bonne alors il existe m_0, $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$I^p J^q I_{m_0,n_0} = I_{m_0+p,n_0+q} \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

En effet $\forall p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$I^p J^q I_{m_0,n_0} = I^p J^{q-1} J I_{m_0,n_0} = I^p J^{q-1} I_{m_0,n_0+1} = I^p J^{q-2} J I_{m_0,n_0+1} = I^p J^{q-2} I_{m_0,n_0+2} =$$

$$\cdots = I^p I_{m_0,n_0+q} = I^{p-1} I I_{m_0,n_0+q} = I^{p-1} I_{m_0+1,n_0+q} = \cdots = I_{m_0+p,n_0+q}$$

Définition 4.3.1.2

Une bifiltration $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est dite **bonne** s'il existe deux idéaux I et J tels que F soit (I, J)-bonne.

4.3.2 Bifiltration EP

Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *une bifiltration de type IEP* d'un anneau A.
La bifiltration $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ d'un anneau A est dite **EP**

s'il existe deux entiers $N_1 \geq 1$ et $N_2 \geq 1$ tels que

$$\forall\ m \geq N_1 \text{ ou } n \geq N_2\ ,\ I_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2} I_{m-p,n-q} I_{p,q}$$

4.3.3 Bifiltration fortement EP

Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *une bifiltration de type IEP* d'un anneau A.

La bifiltration $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *de* A est dite **fortement EP**

s'il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$I_{m+k_1,n+k_2} = I_{m,n}\ I_{k_1,k_2} \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}$ avec $m \geq k_1$ ou $n \geq k_2$.

Proposition 4.3.3.1

Si la bifiltration $F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est fortement EP, alors F est EP .

Preuve

Supposons que $F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est fortement EP, alors

il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$I_{m+k_1,n+k_2} = I_{m,n}\ I_{k_1,k_2} \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}$ avec $m \geq k_1$ ou $n \geq k_2$.

Si $m \geq 2k_1$ ou $n \geq 2k_2$, on a $I_{m,n} = I_{m-k_1,n-k_2}\ I_{k_1,k_2}$

donc $I_{m,n} \subseteq \sum\limits_{i=1}^{2k_1}\sum\limits_{j=1}^{2k_2} I_{m-i,n-j}I_{i,j} \subseteq I_{m,n}$

d'où $I_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{2k_1}\sum\limits_{j=1}^{2k_2} I_{m-i,n-j}I_{i,j}$

Donc F est EP .

Proposition 4.3.3.2

Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration de A .

Si F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne alors F est fortement EP .

Preuve

Si F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne alors il existe m_0 ,$n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$I_{1,0}^p I_{0,1}^q I_{m,n} = I_{m+p,n+q} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \forall\ m \geq m_0,\ n \geq n_0 \text{ .(voir 4.1.4).}$$

Or $I_{1,0}^p I_{0,1}^q \subseteq I_{p,q} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$,

donc $I_{1,0}^p I_{0,1}^q I_{m,n} \subseteq I_{p,q} I_{m,n}$

d'où $\forall p, q \in \mathbb{N}$ et $\forall\ m \geq m_0$ ou $n \geq n_0$,

$$I_{m+p,n+q} = I_{1,0}^p I_{0,1}^q I_{m,n} \subseteq I_{p,q} I_{m,n} \subseteq I_{m+p,n+q} .$$

En posant $k_1 = m_0$ et $k_2 = n_0$, on a

$$I_{m+p,n+q} = I_{m,n}\ I_{p,q} \quad \text{avec} \quad m \geq k_1 \text{ ou } n \geq k_2 .$$

Donc F est fortement EP .

4.3.4 Bifiltration noethérienne

La bifiltration $F = (I_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ est dite **noethérienne** si son anneau de Rees généralisé $\Re(A, F) = \underset{m,n \in \mathbb{Z}}{\oplus} I_{m,n} X^m Y^n$ est un anneau noethérien.

Dans ce cas l'anneau A est noethérien.

4.3.5 Bifiltration fortement noethérienne

La bifiltration $F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est dite **fortement noethérienne** si

l'anneau A est noethérien et si F *est fortement* EP .

4.3.6 Bifiltration fortement AP

Définition 4.3.6

Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *une bifiltration de type IEP* d'un anneau A.
La bifiltration $F = (I_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *de* A est dite **fortement AP** s'il

existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{mk,ml} = I_k^m J_l^n$ avec $I_{k,0} = I_k$ et $I_{0,k} = J_k$.

Remarque 4.3.6
La définition du type **IEP** n'est pas indispensable en général dans la définition de bifiltrations bonne, AP et EP, ... mais cette définition est indispensable pour obtenir des résultats significatifs dans les chapitres 4 et 5.

4.4 CLASSIFICATION DES BIFILTRATIONS

4.4.1 Quelques exemples de bifiltrations

Exemple 4.4.1.1

Si $f = (I_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux filtrations de A alors

$h = (I_m J_n)_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est une bifiltration de A.

Soient I et J deux ideaux de A. On convient que $I^m J^n = A$, $\forall\ m \leq 0$ et $n \leq 0$.On pose $f_{I,J} = (I^m J^n)_{m,n\in\mathbb{Z}}$,

$f_{I,J}$ est une bifiltration de A appelée bifiltration (I, J)-adique de A.

Exemple 4.4.1.2

Soit $\quad A = \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{\langle X^2 \rangle}$ et soit $x = X + \langle X^2 \rangle$.

Soit la famille d'ideaux suivante :

$I_{0,0} = A$, $I_{m,n} = A \;\; \forall \;\; m \leq 0$ et $n \leq 0$, $I_{m,n} = \langle x \rangle \; \forall \;\; 0 \leq m \leq 2$ et $0 \leq n \leq 2$ avec $(m, n) \neq (0, 0)$
$I_{m,n} = 0 \quad \forall \;\; m \geq 3$ ou $n \geq 3$, $I_{m,n} = I_{0,n} \quad \forall \;\; m \leq 0$ et $n \geq 0$ et $I_{m,n} = I_{m,0} \quad \forall \;\; m \geq 0$ et $n \leq 0$
Alors $F = (I_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ est une bifiltration $(I_{1,0}I_{0,1})$-bonne mais pas $(I_{1,0}I_{0,1})$-adique.

Montrons que F est une bifiltration de A.

$I_{0,0} = A$
A t-on pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $I_{m+1,n} \subseteq I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subseteq I_{m,n}$?

$\forall \;\; m \geq 3$ ou $n \geq 3$, on a $\quad I_{m,n} = 0 = I_{m+1,n} = I_{m,n+1}$

Si $m \leq 2$ et $n \leq 2$, on a $I_{m,n} = \langle x \rangle \subseteq I_{0,0} = A$

Comme $m \leq 2$ et $n \leq 2$ alors $m + 1 \leq 3$ et $n + 1 \leq 3$

Si $m + 1 = 3$ ou $n + 1 = 3$, $I_{m+1,n} = 0 \subseteq I_{m,n}$ ou $I_{m,n+1} = 0 \subseteq I_{m,n}$

Si $m + 1 < 3$ et $n + 1 < 3$, $I_{m+1,n} = \langle x \rangle = I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} = \langle x \rangle = I_{m,n}$

Dans tous les cas, on a $\forall \; m, n \in \mathbb{Z}$, $I_{m+1,n} \subseteq I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subseteq I_{m,n}$

$$I_{m,n} \; I_{p,q} \overset{?}{\subseteq} I_{m+p,n+q} \quad \forall \;\; p, q, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Si $m \geq 3$ ou $n \geq 3$, alors $\quad I_{m,n} = 0$

donc $\quad I_{m,n} \; I_{p,q} = 0 \subseteq I_{m+p,n+q}$, $\forall \;\; p, q \in \mathbb{Z}$.

De meme si $p \geq 3$ ou $q \geq 3$, alors $I_{p,q} = 0$

donc $I_{m,n}\ I_{p,q} = 0 \subseteq I_{m+p,n+q}$, $\forall\ m,n \in \mathbb{Z}$.

Si $m = n = p = q = 0$, $I_{m,n}\ I_{p,q} = A = I_{m+p,n+q}$

Si $m,n,p,q \in \{0;1;2\}$, alors $I_{m,n}\ I_{p,q} = \langle x^2 \rangle = 0 \subseteq I_{m+p,n+q}$

avec $I_{0,0} = A$ et m,n,p,q non tous nuls.

Dans tous les cas, on a $I_{m,n}\ I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q}\ \forall\ m,n,p,q \in \mathbb{Z}$.

Donc F est une bifiltration de A.
Montrons que F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne

On a $\forall\ m,n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} I_{1,0}I_{m,n} \subseteq I_{m+1,n} \\ \\ I_{0,1}I_{m,n} \subseteq I_{m,n+1} \end{cases}$ car F est une bifiltration de A.

On pose $m_0 = 2$ et $n_0 = 2$,$\forall\ m \geq m_0$ et $n \geq n_0$, $I_{m,n} = 0$.

Donc $\forall\ m \geq m_0$ et $n \geq n_0$ $\begin{cases} I_{1,0}I_{m,n} = 0 = I_{m+1,n} \\ \\ I_{0,1}I_{m,n} = 0 = I_{m,n+1} \end{cases}$

Donc F est une bifiltration $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne de A.

Montrons que F n'est pas $(I_{1,0}, I_{0,1})$-adique.

Supposons que F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-adique

donc $I_{m,n} = I_{1,0}^m I_{0,1}^n \quad \forall\ m,n \in \mathbb{N}$,

on a $I_{1,0}^1 I_{0,1}^0 = I_{1,0}$; $I_{1,0}^1 I_{0,1}^1 = \langle x^2 \rangle = 0$ or $I_{1,1} = \langle x \rangle$

Supposons que $\langle x \rangle = 0 \implies x = 0 \implies X + \langle X^2 \rangle = 0 \implies X \in \langle X^2 \rangle$

Si $X \in \langle X^2 \rangle$ alors il existe $F(X) \in \mathbb{Z}\,[X]$ tel que

$X = X^2\ F(X) = X(X\ F(X)) \Longrightarrow 1 = X\ F(X)$ car $\mathbb{Z}[X]$ intègre.

On a $\left.\begin{array}{c}\deg\ 1 = 0 \\ \deg(XF(X)) \geq 1\end{array}\right\}$ impossible

donc $I_{1,1} \neq I^1_{1,0} I^1_{0,1}$

D'où la bifiltration F n'est pas $(I_{1,0}, I_{0,1})$-adique.

Exemple 4.4.1.3

soit $A = K[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X sur le corps K.

On pose
$I_{0,0} = A$, $I_{m,n} = A$ $\forall$ $m \leq 0$ et $n \leq 0$, $I = X$, $I_{m,n} = I_{0,n}$ $\forall$ $m \leq 0$ et $n \geq 0$ et $I_{m,n} = I_{m,0}$ $\forall$ $m \geq 0$ et $n \leq 0$ et

$$\forall\, m \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \quad I_{m,n} = \begin{cases} (X^{\frac{m+n}{2}}) \text{ si } m \text{ et } n \text{ sont de même parité} \\ \\ (X^{\frac{m+n+1}{2}}) \text{ si } m \text{ et } n \text{ sont de parités différentes} \end{cases}$$

alors $F = (\ I_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ est une bifiltration EP mais pas fortement EP.
Montrons que F est une bifiltration de A.

(i) $I_{0,0} = A$

(ii)
Si m et n sont pairs alors il existe $k_1,\, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que :
$m = 2k_1,\ n = 2k_2 \quad \Longrightarrow \quad I_{m,n} = (X^{\frac{2k_1+2k_2}{2}}) = I^{k_1+k_2}$

comme $m+1$ est impair, on a $I_{m+1,n} = I^{k_1+k_2+1}$

donc $I_{m+1,n} \subset I_{m,n}$.

De même $I_{m,n+1} \subset I_{m,n}$.

Si m et n sont impairs alors il existe k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$m = 2k_1 + 1$, $n = 2k_2 + 1 \implies I_{m,n} = (X^{\frac{2k_1+2k_2+2}{2}}) = I^{k_1+k_2+1}$

comme $m+1$ est pair, on a $I_{m+1,n} = I^{k_1+k_2+2}$

donc $I_{m+1,n} \subset I_{m,n}$.

De même $I_{m,n+1} \subset I_{m,n}$

Si m pair et n impairs alors il existe k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$m = 2k_1$, $n = 2k_2 + 1 \implies I_{m,n} = (X^{\frac{2k_1+2k_2+2}{2}}) = I^{k_1+k_2+1}$

comme $m+1$ est impair, on a $I_{m+1,n} = I^{k_1+k_2+1}$

donc $I_{m+1,n} = I_{m,n}$.

De même $I_{m,n+1} = I_{m,n}$.

Si m impair et n pair, analogue à la situation précédente.

Ainsi $\forall\, m,n \in \mathbb{Z}$, $I_{m+1,n} \subseteq I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subseteq I_{m,n}$.

(iii) Montrons que $I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q} \quad \forall\, m,n,p,q \in \mathbb{N}$.

En suivant la parité des entiers m,n,p,q , il y a 16 cas possibles pour (m,n,p,q).

Si on note “0” l’entier est pair et “1” l’entier est impair, on a les cas suivants :

$$\begin{array}{cccc}
(0,0,0,0) & (0,1,0,0) & (1,0,0,0) & (1,1,0,0) \\
(0,0,0,1) & (0,1,0,1) & (1,0,0,1) & (1,1,0,1) \\
(0,0,1,0) & (0,1,1,0) & (1,0,1,0) & (1,1,1,0) \\
(0,0,1,1) & (0,1,1,1) & (1,01,1) & (1,1,1,1)
\end{array}$$

Il y a 5 cas essentiels que voici :

- si tous les entiers sont pairs on a une possibilité ;

- s'il y a 2 pairs et 2 impairs on a 6 possibilités ;

- s'il y a 3 pairs et 1 impair on a 4 possibilités ;

- si tous les entiers sont impairs on a une possibilité ;

- s'il y a 1 pair et 3 impairs on a 4 possibilités ;

Il suffit de faire un exemple pour chaque cas. On a :

Si $m = 2k_1$, $n = 2k_2$, $p = 2s$ et $q = 2t$, $I_{m,n} = I^{k_1+k_2}$ et $I_{p,q} = I^{s+t}$

de plus $I_{m+p,n+q} = I^{k_1+k_2+s+t}$

or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{k_1+k_2+s+t}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$.

Si $m = 2k_1$, $n = 2k_2$, $p = 2s+1$ et $q = 2t+1$, $I_{m,n} = I^{k_1+k_2}$ et $I_{p,q} = I^{s+t+1}$

de plus $I_{m+p,n+q} = I^{k_1+k_2+s+t+1}$

or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{k_1+k_2+s+t+1}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$.

Si $m = 2k_1$, $n = 2k_2$, $p = 2s$ et $q = 2t+1$, $I_{m,n} = I^{k_1+k_2}$ et $I_{p,q} = I^{s+t+1}$

de plus $I_{m+p,n+q} = I^{k_1+k_2+s+t+1}$

or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{k_1+k_2+s+t+1}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$.

Si $m = 2k_1 + 1$, $n = 2k_2 + 1$, $p = 2s + 1$ et $q = 2t + 1$, $I_{m,n} = I^{k_1+k_2+1}$ et $I_{p,q} = I^{s+t+1}$

de plus $I_{m+p,n+q} = I^{k_1+k_2+s+t+2}$

or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{k_1+k_2+s+t+2}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$.

Si $m = 2k_1+1, n = 2k_2+1, p = 2s+1$ et $q = 2t$, $I_{m,n} = I^{k_1+k_2+1}$ et $I_{p,q} = I^{s+t+1}$

de plus $I_{m+p,n+q} = I^{k_1+k_2+s+t+2}$

or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{k_1+k_2+s+t+2}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$.

Dans tous les cas on a $I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q} \quad \forall\, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

Donc F est une bifiltration de A.

Montrons que F est EP

Posons $N_1 = N_2 = 2$ montrons que $I_{m,n} = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q} \quad \forall m \geq 2$ ou $\forall n \geq 2$.

Pour $m = 2k$ et $n = 2l$

D'une part on a $I_{m,n} = I^{k+l}$

d'autre part $\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = \sum_{p=1}^{2}(I_{2k-p,2l-1}I_{p,1} + I_{2k-p,2l-2}I_{p,2})$

$= I_{2k-1,2l-1}I_{1,1} + I_{2k-1,2l-2}I_{1,2} + I_{2k-2,2l-1}I_{2,1} + I_{2k-2,2l-2}I_{2,2}$

$= I^{k+l-1}I + I^{k+l-1}I^2 + I^{k+l-1}I^2 + I^{k+l-2}I^2 = I^{k+l}$ car $I^{k+l+1} \subset I^{k+l}$

donc $\quad I_{m,n} = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q}$

Pour $m = 2k+1$ et $n = 2l$

D'une part on a $I_{m,n} = I^{k+l+1}$

d'autre part $\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = \sum_{p=1}^{2}(I_{2k+1-p,2l-1}I_{p,1} + I_{2k+1-p,2l-2}I_{p,2})$

$= I_{2k,2l-1}I_{1,1} + I_{2k,2l-2}I_{1,2} + I_{2k-1,2l-1}I_{2,1} + I_{2k-1,2l-2}I_{2,2}$

$= I^{k+l}I + I^{k+l-1}I^2 + I^{k+l-1}I^2 + I^{k+l-1}I^2 = I^{k+l+1}$

donc $\quad I_{m,n} = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q}$

Pour $m = 2k$ et $n = 2l+1$

Analogue à la situation précédente par symétrie.

Pour $m = 2k+1$ et $n = 2l+1$

D'une part on a $I_{m,n} = I^{k+l+1}$

d'autre part $\sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = \sum_{p=1}^{2}(I_{2k+1-p,2l}I_{p,1} + I_{2k+1-p,2l-1}I_{p,2})$

$= I_{2k,2l}I_{1,1} + I_{2k,2l-1}I_{1,2} + I_{2k-1,2l}I_{2,1} + I_{2k-1,2l-1}I_{2,2}$

$= I^{k+l}I + I^{k+l}I^2 + I^{k+l}I^2 + I^{k+l-1}I^2 = I^{k+l+1}$ car $I^{k+l+2} \subset I^{k+l+1}$

donc $\quad I_{m,n} = \sum_{p=1}^{2}\sum_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q}I_{p,q}$

Conclusion

Dans tous les cas on a $I_{m,n} = \sum\limits_{p=1}^{2} \sum\limits_{q=1}^{2} I_{m-p,n-q} I_{p,q} \quad \forall m \geq 2$ ou $\forall n \geq 2$.

Donc il existe $N_1, \ N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $I_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \sum\limits_{j=1}^{N_2} I_{m-i,n-j} I_{i,j}$ avec $m \geq 2$ ou $n \geq 2$.

Donc F est une bifiltration EP.

Montrons que F n'est pas fortement EP

Supposons que F est fortement EP alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

tels que $\forall \ m \geq p$ ou $n \geq q$, $I_{m,n} I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$.

En particulier si $m = 2k_1$, $n = 2k_2 + 1$, $p = 2s$ et $q = 2t + 1$, $I_{m,n} = I^{k_1+k_2+1}$ et $I_{p,q} = I^{s+t+1}$

de plus $I_{m+p,n+q} = I^{k_1+k_2+s+t+1}$

or $I_{m,n} I_{p,q} = I^{k_1+k_2+s+t+2}$

Comme $I^{k_1+k_2+s+t+2} \neq I^{k_1+k_2+s+t+1}$

alors $I_{m,n} I_{p,q} \neq I_{m+p,n+q}$ ce qui est contradictoire à notre hypothèse.

Donc F n'est pas fortement EP.

Exemple 4.4.1.4

soit $A = K[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée X sur le corps K.

Soient N_1 et N_2 deux entiers tels que $N_1 \geq 2$ et $N_2 \geq 2$.

On pose $I_{0,0} = A$, $I_{m,n} = A \ \forall \ m \leq 0$ et $n \leq 0$, $I_{m,n} = I_{0,n} \ \forall \ m \leq 0$ et $n \geq 0$ et $I_{m,n} = I_{m,0} \ \forall \ m \geq 0$ et $n \leq 0$ et , $I = (X)$ et

$$\forall\, m \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \quad I_{m,n} = \begin{cases} (X^{m+n}) = I^{m+n} \text{ si } m \geq N_1+1 \text{ ou } n \geq N_2+1 \\ \\ (X^{N_1+N_2}) = I^{N_1+N_2} \text{ si } 0 \leq m \leq N_1 \text{ et } 0 \leq n \leq N_2 \end{cases}$$

alors $F = (\, I_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ est une bifiltration fortement EP

mais pas $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne.
Montrons que F est une bifiltration de A.

(i) $I_{0,0} = A$

(ii)

Si $m \geq N_1+1$ ou $n \geq N_2+1$ alors $I_{m,n} = I^{m+n}$

Si $m \geq N_1+1$ alors $m+1 > N_1+1$ donc $I_{m+1,n} = I^{m+n+1}$

Si $n \geq N_2+1$ alors $n+1 > N_2+1$ donc $I_{m,n+1} = I^{m+n+1}$

D'où $I_{m+1,n} \subset I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subset I_{m,n}$ $\forall\, m \geq N_1+1$ ou $n \geq N_2+1$

Si $0 \leq m \leq N_1$ et $0 \leq n \leq N_2$ alors $I_{m,n} = I^{N_1+N_2}$

on a $1 \leq m+1 \leq N_1+1$ et $1 \leq n+1 \leq N_2+1$

donc $I_{m+1,n} = I^{N_1+N_2+1}$ et $I_{m,n+1} = I^{N_1+N_2+1}$

D'où $I_{m+1,n} \subset I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subset I_{m,n}$

Dans tous les cas, on a
$I_{m+1,n} \subset I_{m,n}$ et $I_{m,n+1} \subset I_{m,n} \forall\ m\ , n \in \mathbb{Z}$

(iii)

Si $m, p \geq N_1+1$ ou $n, q \geq N_2+1$ alors

$I_{m,n} = I^{m+n}$ et $I_{p,q} = I^{p+q}$

on a $I_{m,n}I_{p,q} = I^{m+n+p+q}$

or $I_{m+p,n+q} = I^{m+n+p+q}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} = I_{m+p,n+q}$

Si $0 \leq m \leq N_1$, $0 \leq n \leq N_2$, $0 \leq p \leq N_1$ et $0 \leq q \leq N_2$ alors

$I_{m,n} = I^{N_1+N_2}$ et $I_{p,q} = I^{N_1+N_2}$ d'où $I_{m,n}I_{p,q} = I^{2(N_1+N_2)}$

on a $0 \leq m+p \leq 2N_1$ et $0 \leq n+q \leq 2N_2$,

D'où $0 \leq m+n+p+q \leq 2(N_1+N_2)$

si $0 \leq m+p \leq N_1$ et $0 \leq n+q \leq N_2$ alors

$I_{m+p,n+q} = I^{N_1+N_2}$ or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{2(N_1+N_2)}$

donc $I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q}$

Si $N_1+1 \leq m+p \leq 2N_1$ ou $N_2+1 \leq n+q \leq 2N_2$

alors $I_{m+p,n+q} = I^{m+n+p+q}$ or $I_{m,n}I_{p,q} = I^{2(N_1+N_2)}$

Comme $0 \leq m+n+p+q \leq 2(N_1+N_2)$

donc $I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q}$

Si $m \geq N_1+1$ ou $n \geq N_2+1$ et si $0 \leq p \leq N_1$ et $0 \leq q \leq N_2$

alors $I_{m,n} = I^{m+n}$ et $I_{p,q} = I^{N_1+N_2}$

on a $I_{m,n}I_{p,q} = I^{m+n+N_1+N_2}$

or $I_{m+p,n+q} = I^{m+n+p+q}$

Comme $p \leq N_1$ et $q \leq N_2 \implies p+q \leq N_1+ N_2$

$\Rightarrow m+n+p+q \leq m+n+N_1+ N_2$

$\Longrightarrow I^{m+n+N_1+N_2} \subseteq I^{m+n+p+q}$

donc $\quad I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q}$

Dans tous les cas on a $\quad I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,n+q} \quad \forall\, m,n,p,q \in \mathbb{N}$.

Donc F est une bifiltration de A.

Montrons que F est fortement EP.

Si on pose $k_1 = N_1 + 1$ et $k_2 = N_2 + 1$, alors

$\forall \; m \geq k_1$ ou $n \geq k_2$, $I_{m,n} = I^{m+n}$ et $I_{k_1,k_2} = I^{k_1+k_2}$,

on a $\quad I_{m,n}I_{k_1,k_2} = I^{m+n+k_1+k_2}$

Comme $m + k_1 \geq k_1$ et $n + k_2 \geq k_2$ alors $I_{m+k_1,n+k_2} = I^{m+n+k_1+k_2}$

D'où $\quad I_{m,n}I_{k_1,k_2} = I_{m+k_1,n+k_2} \qquad \forall \; m \geq k_1$ ou $n \geq k_2$.

Donc il existe $k_1 \geq 1$ et $k_2 \geq 1$ tels que

$I_{m,n}I_{k_1,k_2} = I_{m+k_1,n+k_2} \qquad \forall \; m \geq k_1$ ou $n \geq k_2$.

Par conséquent F est une bifiltration fortement EP.

Comme $A = K[X]$ est un anneau noethérien alors F est une bifiltration noethérienne.

Montrons que F n'est pas $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne.

Supposons que F est $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne alors il existe $m_0,\ n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\; m \geq m_0, n \geq n_0, \quad \begin{cases} I_{1,0}I_{m,n} = I_{m+1,n} \\ \\ I_{0,1}I_{m,n} = I_{m,n+1} \end{cases}$$

On pose $N_1 = m_0$ et $N_2 = n_0$.

En particulier $\forall\ m \geq N_1+1, n \geq N_2+1,\ \begin{cases} I_{1,0}I_{m,n} = I_{m+1,n} \\ \\ I_{0,1}I_{m,n} = I_{m,n+1} \end{cases}$

or $\forall\ m \geq N_1+1, n \geq N_2+1,\ \ I_{m,n} = I^{m+n} \implies I_{m+1,n} = I^{m+n+1}$

En plus $I_{1,0}I_{m,n} = I^{m+n+N_1+N_2}$ car $I_{0,1} = I^{N_1+N_2}$

D'après notre hypothése on a

$I_{1,0}I_{m,n} = I_{m+1,n} \implies I^{m+n+N_1+N_2} = I^{m+n+1}$

$\implies m+n+N_1+N_2 = m+n+1$

$\implies N_1+N_2 = 1$ or $N_1+N_2 \geq 4$ ce qui est contradictoire.

Donc F n' est pas $(I_{1,0}, I_{0,1})$-bonne.

4.4.2 Classification

D'après tout ce qui précède, on obtient la classification suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} F\ (I,J)\text{-adique} & \overset{(1)}{\Rightarrow} & F\ (I,J)\text{-bonne} & \overset{(1)}{\Rightarrow} & F \text{ fortement EP} & \overset{(1)}{\Rightarrow} & F\ \text{EP} \\ & & & & & & \\ & & & & \Updownarrow (2) & & \\ F(I,J)\text{-adique} & \overset{(2)}{\Rightarrow} & F(I,J)\text{-bonne} & \overset{(2)}{\Rightarrow} & F \text{ fortement noethérienne} & & \end{array}$$

Avec $\begin{cases} (1)\ : A \text{ quelconque} \\ (2) : A \text{ noethérien} \end{cases}$

4.5 REDUCTION DE BIFILTRATIONS

Les concept de réduction d'un idéal a été introduit pour la première fois en 1953 par Northcott et Rees.

Ce concept de réduction d'un idéal a des applications importantes en Algèbre Commutative (nitamment en théorie asymptotique des idéaux, et dans l'étude de la dépendance intégrale sur un anneau), en Géométrie Algébrique etc... Il a fait, depuis son introduction, l'objet d'une littérature abondante.

La notion de réduction d'un idéal peut se généraliser aux filtrations d'un anneau de plusieurs façons différentes.

Définition 4.5.1

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A.

On dira que $F \leq G$ si et seulement si $I_{m,n} \subseteq J_{m,n} \ \forall \ (m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

Définition 4.5.2

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des bifiltrations de A de

type IEP avec $F \leq G$ et soit $r \geq 1$ et $s \geq 1$ deux entiers arbitraires. Alors

si $m \leq 0$ et $n \leq 0$ ou si $0 \leq m \leq r$ et $0 \leq n \leq s$, il est facile de vérifier que

$$J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$$

On dit que F est une **réduction de** G s'il existe des entiers $r \geq 1$ et $s \geq 1$ tels que

(RED) $J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, avec $m > r$ ou $n > s$.

Définition 4.5.3

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A de type IEP telles que $F \leq G$.

On dit que F est une $\beta-$**réduction** de G s'il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que

$\forall m \geq k$ ou $\forall\, n \geq l$, $J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l}$.

Conséquence 4.5

$\forall m \geq k$ ou $\forall\, n \geq l$, $J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l} \subseteq J_{m,n}J_{k,l} \subseteq J_{m+k,n+l}$.

Donc $\forall m \geq k$ ou $\forall\, n \geq l$, $J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l} = J_{m,n}J_{k,l}$.

Donc G est fortement EP.

4.5.1 Bifiltrations $F-$bonnes

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A de type IEP telles que $F \leq G$.

La bifiltration G est dite $F-$**bonne** s'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall m \geq N_1 \text{ ou } \forall n \geq N_2, \quad J_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q}.$$

4.5.2 Bifiltrations $F-$fine

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A de type IEP telles que $F \leq G$.

La bifiltration G est dite $F-$**fine** s'il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall m \geq N_1 \text{ ou } \forall n \geq N_2, \; J_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2} I_{p,q}J_{m-p,n-q}.$$

Remarque 4.5.2

Soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration de A de type IEP.

Alors F est $F-$bonne $\Leftrightarrow F$ est EP $\Leftrightarrow F-$fine.

Proposition 4.5.2.1
Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *et* $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *deux bifiltrations de* A *de type IEP telles que* $F \leq G$ *.*

On suppose que G *est* $F-$*bonne. Alors*

i) G *est* G $-$*bonne donc EP.*

ii) F *est une réduction de* G

Preuve
i) Comme G est $F-$bonne alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall m \geq N_1 \text{ ou } \forall n \geq N_2, \quad J_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q}.$$

Or $J_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q} \subseteq \sum_{p=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2} J_{m-p,n-q}J_{p,q} \subseteq J_{m,n}$

Donc $J_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1}\sum_{q=1}^{N_2} J_{m-p,n-q}J_{p,q}$

D'où G est G $-$bonne donc EP.

ii) Pour $m \geq N_1$ ou $n \geq N_2$,

$$\sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q} = I_{m,n} + \sum_{q=1}^{N_2} I_{m,n-q}J_{0,q} + \sum_{p=1}^{N_1} I_{m-p,n}J_{p,0} + \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$$
$$= I_{m,n} + J_{m,n} = J_{m,n}$$

Car $I_{m,n-q}J_{0,q} \subseteq J_{m,n}$ et $I_{m-p,n}J_{p,0} \subseteq J_{m,n}$

Donc F est une réduction de G.

Théorème 4.5.2.1

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A de type IEP telles que $F \leq G$.

Si F est une $\beta-$réduction de G alors :

i) G est fortement EP.

ii) G est $F-$bonne.

iii) G est G $-$bonne donc EP.

iv) F est une réduction de G

v) G est $F-$fine si F est EP.

Preuve

i) Supposons que F est une $\beta-$réduction de G alors $F \leq G$ et il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall m \geq k$ ou $\forall\ n \geq l$, $J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l}$.

On a $\forall m \geq k$ ou $\forall\ n \geq l$, $J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l} \subseteq J_{m,n}J_{k,l} \subseteq J_{m+k,n+l}$.

Donc $\forall m \geq k$ ou $\forall\ n \geq l$, $J_{m+k,n+l} = J_{m,n}J_{k,l}$.

Donc G est fortement EP.

ii) Soient m, n tels que $\forall m \geq 2k$ et $\forall\ n \geq 2l$,

$J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l}$.

On a $\forall m \geq 2k$ ou $\forall\ n \geq 2l$, $J_{m,n} = I_{m-k,n-l}J_{k,l}$

Donc $J_{m,n} \subseteq \sum_{p=1}^{2k} \sum_{q=1}^{2l} I_{m-p,n-q} J_{p,q} \subseteq \sum_{p=1}^{2k} \sum_{q=1}^{2l} J_{m-p,n-q} J_{p,q} \subseteq J_{m,n}$

D'où $J_{m,n} = \sum_{p=1}^{2k} \sum_{q=1}^{2l} I_{m-p,n-q} J_{p,q}$

En posant $N_1 = 2k$ et $N_2 = 2l$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$\forall m \geq N_1$ ou $\forall n \geq N_2,\ J_{m,n} = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q}$

Donc G est $F-$bonne.

iii) Voir proposition 4.5.2.1 (i)

iv) Si F est une $\beta-$réduction de G alors G est $F-$bonne d'après (ii) $\Rightarrow F$ est une réduction de G (voir proposition 4.5.2.1 (ii)) .

v) Supposons que F est EP.

Si F est une $\beta-$réduction de G alors F est une réduction de G (d'après v), donc il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que

$\forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q} J_{p,q}$ avec $m \geq r$ ou $n \geq s$

Comme F est EP alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que

$\forall\ m \geq N_1$ ou $n \geq N_2,\ I_{m,n} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} I_{m-i,n-j} I_{i,j}$

On pose $N_1' = \max(r, N_1)$ et $N_2' = \max(s, N_2)$

On a $\forall m \geq N_1'$ ou $\forall n \geq N_2',\ I_{m-p,n-q} = \sum_{i=1}^{N_1'} \sum_{j=1}^{N_2'} I_{m-p-i,n-q-j} I_{i,j}$

$\forall m \geq N_1'$ ou $\forall n \geq N_2', J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q} J_{p,q} = \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} \sum_{i=1}^{N_1'} \sum_{j=1}^{N_2'} I_{m-p-i,n-q-j} I_{i,j} J_{p,q}$

alors $\forall m \geq N'_1$ ou $\forall n \geq N'_2$, $J_{m,n} = \sum_{i=1}^{N'_1} \sum_{j=1}^{N'_2} I_{i,j} \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{s} I_{m-p-i,n-q-j} J_{p,q}$

Donc $\forall m \geq N'_1$ ou $\forall n \geq N'_2$, $J_{m,n} \subseteq \sum_{i=1}^{N'_1} \sum_{j=1}^{N'_2} I_{i,j} J_{m-i,n-j}$

Comme $I_{i,j} \subseteq J_{i,j}$ alors $I_{i,j} J_{m-i,n-j} \subseteq J_{i,j} J_{m-i,n-j} \subseteq J_{m,n}$

Donc $J_{m,n} \subseteq \sum_{i=1}^{N'_1} \sum_{j=1}^{N'_2} I_{i,j} J_{m-i,n-j} \subseteq J_{m,n}$

D'où $\forall m \geq N'_1$ ou $\forall n \geq N'_2$, $J_{m,n} = \sum_{i=1}^{N'_1} \sum_{j=1}^{N'_2} I_{i,j} J_{m-i,n-j}$

Donc G est $F-$fine.

Théorème 4.5.2.2

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *et* $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *deux bifiltrations de* A de type IEP telles que $F \leq G$.

Si F *est fortement EP, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) F *est une* $\beta-$*réduction de* G.

ii) F *est une réduction de* G.

iii) G *est* $F-$*bonne.*

Preuve

i) $\Rightarrow$ ii) Voir le théorème 4.5.2.1 v .

ii) $\Rightarrow$ i)

On suppose que F est fortement EP alors il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$et $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $I_{m+k_1,n+k_2} = I_{m,n}\ I_{k_1,k_2}$ avec $m \geq k_1$ ou $n \geq k_2$.

Comme F est une réduction de G alors il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que

$\forall m,n \in \mathbb{N}^*,\;\; J_{m,n} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ avec $m \geq r$ ou $n \geq s$.

On pose $k = \max(k_1, r)$ et $l = \max(k_2, s)$ alors

$\forall m \geq k$ ou $\forall\, n \geq l,\; J_{m+k,n+l} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s} I_{m+k-p,n+l-q}J_{p,q} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s} I_{m,n}I_{k-p,l-q}J_{p,q} = I_{m,n}\sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s} I_{k-p,l-q}J_{p,q} = I_{m,n}J_{k,l}$

Donc il existe $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall m \geq k$ ou $\forall\, n \geq l,\; J_{m+k,n+l} = I_{m,n}J_{k,l}$
.

D'où F est une $\beta-$réduction de G.

i) $\Rightarrow$ iii) Voir le théorème 4.5.2.1 ii .

iii) $\Rightarrow$ ii) Voir proposition 4.5.2.1 ii .

Proposition 4.5.2.2

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *et* $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *deux bifiltrations de* A *de type IEP telles que* $F \leq G$.

Si G *est* $(I_{0,1}, I_{1,0})$*-bonne alors* F *est une* $\beta-$*réduction de* G.

Preuve

Si G est $(I_{0,1}, I_{1,0})$-bonne alors il existe $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, m \geq m_0, n \geq n_0$,

$$\begin{cases} I_{1,0}J_{m,n} = J_{m+1,n} \\ \\ I_{0,1}I_{m,n} = J_{m,n+1} \end{cases}$$

On a $I_{1,0}^{p}I_{0,1}^{q}J_{m,n} = J_{m+p,n+q}$ $\forall p,q \geq 1$ et $\forall\, m \geq m_0, n \geq n_0$ d'après la conséquences 4.3.1

On obtient $\forall p, q \geq 1$ et $\forall\ m \geq m_0, n \geq n_0,\ J_{m+p,n+q} = I_{1,0}^p I_{0,1}^q J_{m,n} \subseteq I_{p,q}J_{m,n} \subseteq J_{p,q}J_{m,n} \subseteq J_{m+p,n+q}$

Donc $J_{m+p,n+q} = I_{p,q}J_{m,n}\ \forall\ \ m \geq p$ ou $n \geq q$ avec $p = m_0$ ou $q = n_0$.

D'où F est une $\beta-$réduction de G.

4.6 Dépendance intégrale sur un anneau

4.6.1 Eléments entiers sur un anneau

Soit A un sous-anneau de l'anneau B. Un élément $x \in B$ est dit **entier** sur A s'il existe un entier $m \geq 1$ et des éléments $a_j\ \forall j$ tels que $x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m = 0$.

Cette équation est appelée **équation de dépendance intégrale de** x **sur** A.

Lemme 4.6.1

Soit $A = \underset{m,n\ \in\ \mathbb{N}}{\oplus} A_{m,n}$ *un anneau bigradué. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est noethérien.*

(ii) $A_{0,0}$ *est noethérien et* A *est une* $A_{0,0}$*-algèbre de type fini.*

Preuve voir [9] p 26

Corollaire 4.6.1

Soient $A \subset B \subset C$ *trois anneaux.*

On suppose que :

– A *est noethérien*

– C *est une* A*-algèbre de type fini*

–C *est entier sur* B.

Alors B *est une* A*-algèbre de type fini.*
Preuve voir [5] proposition 6.9 (p 155)

Proposition 4.6.1
Soit $A = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{N}} A_{m,n}$ *un anneau bigradué à degrés positifs*

et $M = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} M_{m,n}$ *un* A*-module bigradué.*

On suppose que l'anneau A *est noethérien et* M *un* A*-module de type fini.*

Alors $\forall\ k,l \in \mathbb{N}^*, \forall\ u,v \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq u \leq k-1, 0 \leq v \leq l-1$,*on a :*

(i) $A^{(k,l)}$ *est noethérien.*

(ii) $M^{(k,l,u,v)}$ *est un* $A^{(k,l)}-$*module de type fini.*

Preuve

(i) Supposons que A est noethérien alors $A_{0,0}$ est noethérien et

A est une $A_{0,0}$-algèbre de type fini d'après le lemme 4.6.1

Soit $a \in A_{m,n}$, alors $\forall k,l \geq 1, a^{kl} \in (A_{m,n})^{kl} \subseteq A_{mkl,nkl} \subseteq A^{(kl,kl)} \subseteq A^{(k,l)}$.

Donc il existe $b \in A^{(k,l)}$ tel que $a^{kl} = b \Longrightarrow a^{kl} - b = 0$

or $a^{kl}-b=a^{kl}+0a^{(k-1)l}+0a^{(k-2)l}+...+0a^{l}+0a^{k(l-1)}+0a^{k(l-2)}+...+0a^{k}+b=0$

donc $a^{kl}-b=0$ est une équation de dépendance intégrale de a sur $A^{(k,l)}$.

Comme la $A_{0,0}$-algèbre A est engendrée par ses éléments homogènes,

donc A est entier sur $A^{(k,l)}$.

On a $A_{0,0}\subset A^{(k,l)}\subset A$, donc $A^{(k,l)}$ est une $A_{0,0}$-algèbre de type fini par

le corollaire 4.6.1

D'où $A^{(k,l)}$ est noethérien car toute algèbre de type fini sur un anneau noethérien est noethérien.

(ii) Montrons d'abord que A est un $A^{(k,l)}-$module de type fini.

Comme est A une $A_{0,0}$-algèbre de type fini alors il existe

$x_1,x_2,...,x_s\in A$ tels que $A=A_{0,0}\left[x_1,x_2,...,x_s\right]$.

$\forall\ z\in A,\ z=\sum\lambda_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_s^{\alpha_s}$ avec $\lambda_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}\in A_{0,0}$

tels que $0\leq\alpha_i<kl$ pour $1\leq i\leq s$.

Donc A est engendré par les éléments de la forme $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_s^{\alpha_s}$

qui constituent un système générateur du $A^{(k,l)}-$module A;

En effet pour tout système d'entiers $n_i\geq 0$ ($1\leq i\leq s$) , il

existe des entiers positifs q_i , r_i tels que $n_i=q_ikl+r_i$ avec $r_i<kl$ ($1\leq i\leq s$)

On a alors $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_s^{n_s}=(x_1^{q_1}x_2^{q_2}...x_s^{q_s})^{kl}(x_1^{r_1}x_2^{r_2}...x_s^{r_s})$.

Comme $x_1^{q_1}x_2^{q_2}...x_s^{q_s} \in A$ alors $(x_1^{q_1}x_2^{q_2}...x_s^{q_s})^k \in A^{(k,l)}$

Donc A est un $A^{(k,l)}-$module de type fini.

D'où si M un $A-$module de type fini , c'est aussi un $A^{(k,l)}-$module de type fini.

Comme M est somme directe des $M^{(k,l,u,v)}$ $(0 \leq u \leq k-1, 0 \leq v \leq l-1)$,

chacun des $M^{(k,l,u,v)}$ est un $A^{(k,l)}-$module de type fini. Ce qui prouve (ii) .

Chapitre 5

Sur un critère de réduction des bifiltrations à partir de leurs anneaux de Rees généralisés

Les concept de réduction d'un idéal a été introduit pour la première fois en 1953 par Northcott et Rees.

Ce concept de réduction d'un idéal a des applications importantes en Algèbre Commutative (nitamment en théorie asymptotique des idéaux, et dans l'étude de la dépendance intégrale sur un anneau), en Géométrie Algébrique etc... Il a fait, depuis son introduction, l'objet d'une littérature abondante.

La notion de réduction d'un idéal peut se généraliser aux filtrations d'un anneau de plusieurs façons différentes.

Ici nous nous intéressons au concept réduction des bifiltrations et nous donnons un critère de réduction des bifiltrations à partir de leurs anneaux de Rees généralisés.

Nous donnons également les analogues de quelques propriétés des filtrations pour les bifiltrations.

5.1 Définition. Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des bifiltrations de A de type IEP avec $F \leq G$ et soit $r \geq 1$ et $s \geq 1$ deux

entiers arbitraires. Alors si $m \leq 0$ et $n \leq 0$ ou si $0 \leq m \leq r$ et $0 \leq n \leq s$, il est facile de vérifier que $J_{m,n} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$

On dit que F est une **réduction de** G s'il existe des entiers $r \geq 1$ et $s \geq 1$ tels que

(RED) $J_{m,n} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, avec $m > r$ ou $n > s$.

5.2 Exemples.

(5.2.1) Chaque bifiltration $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est sa propre réduction. En

effet soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, avec $m > r = 1$ ou $n > s = 1$. Si $m > 1$ et $n > 1$, alors on a

$\sum\limits_{p=0}^{1}\sum\limits_{q=0}^{1} I_{m-p,n-q}I_{p,q}$

$= I_{m,n} + I_{m,n-1}I_{0,1} + I_{m-1,n}I_{1,0} + I_{m-1,n-1}I_{1,1}$

$= I_{m,n}$

Si $m > 1$ et $n \leq 1$, alors

a) Si $n < 0$, alors $I_{m,n} = I_{m,0}$.

$\sum\limits_{p=0}^{1}\sum\limits_{q=0}^{1} I_{m-p,n-q}I_{p,q}$

$= I_{m,0} + I_{m,0}I_{0,1} + I_{m-1,0}I_{1,0} + I_{m-1,0}I_{1,1}$

$= I_{m,0}$ car $I_{m,0}I_{0,1} \subseteq I_{m,1} \subseteq I_{m,0}, I_{m-1,0}I_{1,0} \subseteq I_{m,0},$

$I_{m-1,0}I_{1,1} \subseteq I_{m,1} \subseteq I_{m,0}$

b) Si $n \geq 0$, alors $0 \leq n \leq 1$.

$\sum\limits_{p=0}^{1}\sum\limits_{q=0}^{1} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = I_{m,n}$ car chaque composante de la somme est contenue dans $I_{m,n}$ et l'un d'entre eux égal à $I_{m,n}$.

Le cas $m \leq 1$ et $n > 1$ est similaire au cas précédent .

(5.2.2) Soient $f = (I_n)$, $g = (J_n)$, $h = (H_n)$ et $k = (K_n)$ des filtrations de l'anneau A . Supposons que f est une réduction de h et que g est une réduction de k. Alors $f \ltimes g$ est une réduction de $h \ltimes k$.

En effet $f \ltimes g = (F_{m,n})$ avec $F_{m,n} = I_m J_n$ et $h \ltimes k = (G_{m,n})$ où $G_{m,n} = H_m K_n$. on a $I_m J_n \subseteq H_m K_n$ pour tout m, n, d'où $F \leq G$.

On sait par (5.2.2) que $f \ltimes g$ et $h \ltimes k$ sont des bifiltrations de type IEP.

Soient $N_1 \geq 1$ et $N_2 \geq 1$ des entiers tels que $H_m = \sum\limits_{p=0}^{N_1} I_{m-p} H_p$ pour tout $m > N_1$ et $K_n = \sum\limits_{q=0}^{N_2} J_{n-q} K_q$ pour tout $n > N_2$.

Si $m > N_1$ et $n > N_2$, alors $G_{m,n} = H_m K_n = \sum\limits_{p=0}^{N_1} \sum\limits_{q=0}^{N_2} I_{m-p} J_{n-q} H_p K_q = \sum\limits_{p=0}^{N_1} \sum\limits_{q=0}^{N_2} F_{m-p,n-q} G_{p,q}$

Si $m \leq N_1$ et $n > N_2$, alors

a) Si $m \leq 0$ alors $H_m = A$, $I_{m-p} H_p = H_p$ pour tous $p = 0, 1, ..., N_1$.

$\sum\limits_{p=0}^{N_1} I_{m-p} H_p = I_m + H_1 + ... + H_{N_1}$

$= A$ car $I_m = A$

Donc $H_m = \sum\limits_{p=0}^{N_1} I_{m-p} H_p$

b) Si $m > 0$, alors

$\sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}H_p =$

$I_m + I_{m-1}H_1 + ... + I_0H_m + I_{-1}I_{m+1} + .. + I_{m-N_1}H_{N_1}$

$= I_m + I_{m-1}H_1 + ... + H_m + H_{m+1} + .. + H_{N_1}$
$= H_m$

Donc $H_m = \sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}H_p$.

D'où $G_{m,n} = H_mK_n = \sum_{\substack{0\leq p\leq N_1\\ 0\leq q\leq N_2}} F_{m-p,n-q}G_{p,q}$

Si $m > N_1$ et $n \leq N_2$, la démonstration est identique aux cas précédents.

Le théorème suivant et ses corollaires nous donnent une caractérisattion

de réduction de bifiltrations. Ce sont les analogues du théorème 2.3 de [7] et de ses corollaires .

5.3 Théorème. *Soient* $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *et* $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *deux*

bifiltrations de A *de type IEP tels que* $F \leq G$. *Supposons que* $J_{m,n}$ *est un idéal de type fini pour tous* m, n.

Alors F *est une réduction de* G *si et seulement si* $\Re(A,\ G)$ *est un* $\Re(A,\ F)$*-module de type fini.*

Preuve.
Supposons que F est une réduction de G. Alors il existe des entiers $r \geq 1$ et $s \geq 1$ tels que

(RED) $\quad J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ $\quad$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m > r$ ou $n > s$.

Par hypothèse, chaque idéal $J_{m,n}$ est de type fini. Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ et soit $(x_{m,n,j})_{1\leq j\leq t_{m,n}}$ un système générateur de l'idéal $J_{m,n}$.

Considerons un élément homogène z de degré (m, n) de $\Re(A, G)$

Alors z est de la forme $z = d_{m,n}X^mY^n$ où $d_{m,n} \in \ J_{m,n}$. Alors d'après l'équation (RED),

$d_{m,n} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s}\sum\limits_{i} a_{i,p,q}b_{i,p,q}$,où $a_{i,p,q} \in I_{m-p,n-q}$ et $b_{i,p,q} \in J_{p,q}$ pour tous i, p et q.

On peut écrire $b_{i,p,q} = \sum\limits_{j=1}^{t_{p,q}} c_{i,p,q,j}x_{p,q,j}$, où $c_{i,p,q,j} \in A$ pour tous i, p, q, j.

Donc $d_{m,n} = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{t_{p,q}} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}x_{p,q,j}$, où $a_{i,p,q} \in I_{m-p,n-q}$ et $c_{i,p,q,j} \in A$ pour i, p, q, j.

D'où $z = \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{t_{p,q}} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}x_{p,q,j}X^mY^n$

$= \sum\limits_{p=0}^{r}\sum\limits_{q=0}^{s}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{t_{p,q}} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}X^{m-p}Y^{n-q}(x_{p,q,j}X^pY^q)$

Supposons que $m > r$ et $n > s$. Alors $a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}X^{m-p}Y^{n-q} \in \Re(A, F)$

pour tous i, p, q, j et z est un $\Re(A, F)$- combinaison linéaire des éléments

$x_{p,q,j}X^pY^q$ de $\Re(A, G)$, où $0 \leq p \leq r$, $0 \leq q \leq s$, $1 \leq j \leq t_{p,q}$.

Supposons que $m \leq r$ et $n > s$. Considerons un entier p tel que $0 \leq p \leq r$.

a) Si $p \leq m \leq r$ alors z est un $\Re(A, F)$- combinaison linéaire des éléments $x_{p,q,j}X^pY^q$ de $\Re(A, G)$, où $0 \leq p \leq r$, $0 \leq q \leq s$, $1 \leq j \leq t_{p,q}$

b) Si $m \leq p \leq r$, alors $a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}\ X^{m-p}Y^{n-q} \in I_{m-p,n-q}X^{m-p}Y^{n-q} = I_{0,n-q}u^{p-m}Y^{n-q} = (I_{0,n-q}X^0Y^{n-q})u^{p-m} = (I_{0,n-q}X^0Y^{n-q})u^k$, avec $k = p-m$.

Si $m \geq 0$, alors $k = p - m \leq p \leq r$

Si $m < 0$, alors $k = p - m = p + m'$ où $m' > 0$. On a $u^{p-m} = u^p u^{m'}$. Donc $a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}\ X^{m-p}Y^{n-q} \in (I_{0,n-q}X^0Y^{n-q}u^{m'})u^p \subseteq \Re(A,F)u^p$

D'où z est un $\Re(A,F)$- combinaison linéaire des éléments $u^k x_{p,q,j}X^pY^q$ de $\Re(A,G)$, où $0 \leq k \leq r, 0 \leq p \leq r$, $0 \leq q \leq s$, $1 \leq j \leq t_{p,q}$.

Si $m > r$ et $n \leq s$, on a une conclusion similaire avec v^q à la place de u^p.Il en résulte que $\Re(A,\ G)$ est un $\Re(A,\ F)$-module engendré par les éléments de la forme $\{\ u^k v^l x_{p,q,j}X^pY^q\}$ où $o \leq p \leq r$, $o \leq q \leq s, 1 \leq j \leq t_{p,q}, 0 \leq k \leq r, 0 \leq l \leq s$, qui est fini. Donc $\Re(A,\ G)$ est un $\Re(A,\ F)$-module de type fini.

Réciproquement supposons que $\Re(A,\ G)$ est un $\Re(A,\ F)$-module de type

fini. Puisqu'ils sont tous deux des sous-anneaux de $A[u,v,X,Y]$, on peut

supposer que $\Re(A,\ G)$ est un $\Re(A,\ F)$-module de type fini engendré par un nombre fini d'éléments homogènes. Soient $z_1, z_2, ..., z_t$ ces éléments homogènes de degrés strictement positfs. Cet ensemble est absolument non vide. Soit

$(m_i, n_i) = deg\ z_i$ pour $i = 1, 2, ..., t$. Alors $z_i = b_i X^{m_i}Y^{n_i}$, où $b_i \in J_{m_i,n_i}$ pour tout i. Soient $N_1 = \max\{m_i, i = 1, 2, ..., t\}$ et $N_2 = \max\{n_i, i = 1, 2, ..., t\}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

Supposons que $m > N_1$ et $n > N_2$

Soit $b \in J_{m,n}$. Prenons $z = bX^mY^n \in \Re(A,G)$. On a $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 +$

$... + \alpha_t z_t$, où $\alpha_i \in \Re(A,\ F)$ pour tout i. Pour des raisons de degré, on peut supposer que α_i est homogène de degré $(m - m_i,\ n - n_i)$. On peut ecrire $\alpha_i = a_i X^{m-m_i}Y^{n-n_i}$ où $a_i \in I_{m-m_i,n-n_i}$.

Alors $b = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_tb_t \in \sum_{i=1}^{t} I_{m-m_i,n-n_i}J_{m_i,n_i}$

Ainsi $J_{m,n} \subseteq \sum_{i=1}^{t} I_{m-m_i,n-n_i}J_{m_i,n_i} \subseteq \sum_{p=0}^{N_1}\sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$.

Il en résulte que $J_{m,n} = \sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q}$

Supposons maintenant que $m \leq N_1$ et $n > N_2$.

a) Si $m \leq 0$ alors $J_{m,n} = J_{0,n}$

On a $\sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q} = \sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{0,n-q} J_{p,q}$

$= \sum_{p=0}^{N_1} (I_{0,n} J_{p,0} + I_{0,n-1} J_{p,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{p,N_2})$

$= (I_{0,n} J_{0,0} + I_{0,n-1} J_{0,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{0,N_2}) + (I_{0,n} J_{1,0} + I_{0,n-1} J_{1,1} + ...+$

$I_{0,n-N_2} J_{1,N_2}) + ... + (I_{0,n} J_{N_1,0} + I_{0,n-1} J_{N_1,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{N_1,N_2})$

$= I_{0,n}(J_{0,0} + J_{1,0} + ... + J_{N_1,0}) + I_{0,n-1}(J_{0,1} + J_{1,1} + ... + J_{N_1,1}) + ...+$

$I_{0,n-N_2}(J_{0,N_2} + J_{1,N_2} + ... + J_{N_1,N_2})$

$= I_{0,n} + I_{0,n-1} J_{0,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{0,N_2}$

Donc il suffit de montrer que $J_{0,n} \subseteq I_{0,n} + I_{0,n-1} J_{0,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{0,N_2}$

Soit $b \in J_{m,n}$ où $m \leq 0$ et soit $m' = -m$. Alors $z = bX^m Y^n \in \Re(A, G)$.

Donc $z = bu^{m'} Y^n$ où $b \in J_{m,n} = J_{0,n}$

On a $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_t z_t$, où $\alpha_i \in \Re(A,\, F)$ pour tout i.

Il suffit de resoudre la question dans le cas d'un générateur $t = 1$

Supposons que $z = bu^{m'} Y^n = \alpha_1 z_1$ où $\alpha_1 = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} a_{i,j} X^i Y^j$ où $a_{i,j} \in I_{i,j}$

pour tous i, j. Alors $z = bu^{m'} Y^n$ où $b \in J_{m,n} = J_{0,n}$

$\alpha_1 z_1 = (\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} a_{i,j} X^i Y^j)(b_1 X^{m_1} Y^{n_1}) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} a_{i,j} b_1 X^{m_1+i} Y^{n_1+j}$ où

$a_{i,j} \in I_{i,j}$ pour tous i, j et $b_1 \in J_{m_1,n_1}$.

Puisque $z = bu^{m'}Y^n$ où $b \in J_{m,n} = J_{0,n}$, alors $bu^{m'}Y^n = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j}b_1X^{m_1+i}Y^{n_1+j}$

Si on multiplie chaque membre de l'égalité ci-dessus par $X^{m'}$ alors on obtient $bY^n = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j}b_1X^{m'+m_1+i}Y^{n_1+j}$ qui entraine $m'+m_1+i = 0, n_1+j = n$

Ainsi $i = -m_1 - m'$, $j = n - n_1$ et $b \in \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} I_{-m_1-m',n-n_1}J_{m_1,n_1} \subseteq I_{0,n-n_1}J_{0,n_1} \subseteq \sum_{q=0}^{n_1} I_{0,n-q}J_{0,q}$

Il s'en suit que $J_{0,n} \subseteq \sum_{q=0}^{n_1} I_{0,n-q}J_{0,q}$, d'où $J_{0,n} = \sum_{q=0}^{n_1} I_{0,n-q}J_{0,q}$

b) $0 \leq m \leq N_1$ et $n > N_2$.

On appliquera les mêmes arguments que dans le cas $m > N_1$ et $n > N_2$.

Le cas $m > N_1$ et $n \leq N_2$ est similaire au cas précédent.

Ainsi $J_{m,n} = \sum_{p=0}^{N_1}\sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ pour tous m, n avec $m > N_1$ ou $n > N_2$ et F est une réduction de G

Remarque

Nous remercions le Professeur KOUAKOU Mathias pour avoir tiré notre attention sur la conséquence suivante du théorème 5.3 : pour une bifiltration F de type IEP donnée d'un anneau A, il existe une bijection entre

l'ensemble des bifiltrations G de type IEP de A telles que F soit une réduction de G, et l'ensembles de tous les sous-anneaux bigradués S de $A[u, v, X, Y]$, extensions entières de type fini de $\Re(A, F)$ l'anneau de Rees généralisé associé à F.

5.4 Corollaire. *Soit A un anneau Noethérien et soit $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ une bifiltration de type IEP de A. Alors il existe une bijection entre l'ensemble des bifiltrations $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de type IEP de l'anneau A telle que F*

soit une réduction de G et les sous-anneaux bigradués S de $A[u, v, X, Y]$ qui sont une extension entière de type fini de $\Re(A,\ F)$.

Preuve.

On pose B l'ensemble des sous-anneaux bigradués de $A[u, v, X, Y]$ et $\mathrm{Red}^{-1}(F)$ l'ensemble des bifiltrations $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de type IEP de l'anneau A telle que F soit une réduction de G . On défini l'application θ comme suit :

$$\begin{aligned}\theta : \mathrm{Red}^{-1}(F) &\longrightarrow \mathrm{B}\\ G &\longmapsto \Re(A,\ G)\end{aligned}$$

Pour chaque bifiltration $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de type IEP de l'anneau A telle que F soit une réduction de G, soit $\theta(G) = S = \Re(A,\ G)$. Alors S est un sous-anneau bigradué de $A[u, v, X, Y]$ qui est un $\Re(A,\ F)$-module de type fini d'après le Théorème 5.3, d'où une extension entière de type fini de $\Re(A,\ F)$.

L'application θ ainsi définie est une bijection entre l'ensemble des bifiltrations $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de type IEP de l'anneau A tel que F soit une réduction de G dans l'ensemble des sous-anneaux bigradués S de $A[u, v, X, Y]$ qui sont des extensions entières de $\Re(A,\ F)$. En effet soit S un sous-module bigradué de $A[u, v, X, Y]$ qui contient $\Re(A,\ F)$ et qui est un module de type fini sur $\Re(A,\ F)$. Soit $J_{m,n} = u^m v^n S \cap A$ pour tous m, n et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.On vérifie facilement que G est une bifiltration de A et que $J_{m,n} \supseteq u^m v^n \Re(A,\ F) \cap A = I_{m,n}$ pour tous m, n, ainsi $F \leq G$. De plus on a $S = \Re(A,\ G) = \theta(G)$. Par conséquent θ est surjective.

Soient $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $H = (H_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de type IEP de l'anneau A telles que F soit une réduction de G et H. Si $\theta(G) = \theta(H) = S$, alors, on montre comme précédement que, $J_{m,n} = u^m v^n S \cap A = H_{m,n}$ pour tous m, n et $G = H$. Donc θ est injective d'où bijective.

5.5 Corollaire. *Soient $F = (F_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}, G = (G_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, $H = (H_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $K = (K_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des bifiltrations de type IEP d'un anneau noethérien A. Alors :*

(5.5.1) Si F est une réduction de G et G est une réduction de K, alors F est une réduction de K.

(5.5.2) Si F est une réduction de G et si $F \leq H \leq G$, alors H est une réduction de G. De plus si F est Noethérienne, alors F est une réduction de H.

Preuve.
(*5.5.*1) Si *F est une réduction de G* et *G est une réduction de K*, alors d'après le Théorème 5.3, $\Re(A,\, G)$ est un $\Re(A,\, F)$-module de type fini et $\Re(A,\, K)$ est un $\Re(A,\, G)$-module de type fini. Donc $\Re(A,\, K)$ est un $\Re(A,\, F)$-module de type fini. Ce qui entraine que *F est une réduction de K*.

(*5.5.2*) *Si F est une réduction de G et si $F \leq H \leq G$, alors* $\Re(A,\, G)$ est un $\Re(A,\, F)$-module de type fini, d'où un $\Re(A,\, H)$-module de type fini. Ainsi H est une réduction de G.

En plus si F est Noethérienne, alors, comme $\Re(A,\, G)$ est un $\Re(A,\, F)$-module de type fini et que $\Re(A,\, F)$ est un anneau Noethérien, alors chaque sous-module de $\Re(A,\, G)$ et, en particulier $\Re(A,\, H)$, est un $\Re(A,\, F)$-module de type fini. Donc F est une réduction de H.

5.6. Corollaire. Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des bifiltrations *de type IEP d'un anneau Noethérien A* avec $F \leq G$. Alors

(*5.6.*1) *Si F est une réduction de G*, alors F est noethérienne si et seulement si G est Noethérienne.

(*5.6.*2) *Si F est Noethérienne et est une réduction de G*, alors $F^{(k,l)}$ *est Noethérienne et est une réduction de $G^{(k,l)}$* pour tous entiers $k, l \in \mathbb{N}^*$.

Preuve.
(*5.6.*1) *Si F est une réduction de G*, alors $\Re(A,\, G)$ est un $\Re(A,\, F)$-module de type fini. Ainsi, si F est Noethérienne, alors $\Re(A,\, F)$ est un anneau noethérien. Donc $\Re(A,\, G)$ est un anneau noethérien et la bifiltration G est Noethérienne.

Reciproquement si G est Noethérienne, alors d'après le Théorème de Eakin [4], F est Noethérienne.

(*5.6.2*) Supposons que F *est Noethérienne et est une réduction de* G.

Pour tous entiers $k, l \in \mathbb{N}^*$, considérons la bifiltration $F^{(k,l)} = (I_{mk,nl})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ extraite de F d'indice (k, l) comme définie dans (3.3.1.4).

(On sait que $F^{(k,l)}$ *est Noethérienne si* $\Re(A, F^{(k,l)})$ *est Noethérien*
Montrons que $\Re(A, F^{(k,l)})$ est Noethérien)

(Montrons d'abord que $\Re(A,\ F)$ est entier sur $\Re(A, F^{(k,l)})$)

Soient $\Re_{k,l} = \Re(A, F)^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$
En particulier $\Re_{1,1} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{m,n}X^mY^n = \Re(A, F)$
On remarque que $\Re(A, F^{(k,l)}) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^mY^n \subseteq \Re_{1,1}$.

En effet, comme $k, l \in \mathbb{N}^*$, si $m \geq 1$ et $n \geq 1$, alors $mk \geq m$ et $nl \geq n$. Ainsi $I_{mk,nl} \subseteq I_{m,n}$.

Si $m \leq 0$ ou $n \leq 0$, alors $mk \leq 0$ ou $nl \leq 0$.

Donc supposons que $m \leq 0$ et $n \leq 0$. Alors $I_{mk,nl} = A = I_{m,n}$

Si $m \leq 0$ et $n > 0$, alors $mk \leq 0$ et $nl > 0$. Alors par convention $I_{mk,nl} = I_{0,nl}$ et $I_{m,n} = I_{0,n}$

Ainsi $I_{mk,nl} \subseteq I_{m,n}$ car $I_{0,nl} \subseteq I_{0,n}$

Le cas $m > 0$ et $n \leq 0$ est similaire aux autres cas. Ce qui montre que $I_{mk,nl} \subseteq I_{m,n}$ pour tous m, n.

D'où $I_{mk,nl}X^mY^n \subseteq I_{m,n}X^mY^n$. Ce qui entraine que $\Re(A, F^{(k,l)}) \subseteq \Re_{1,1} = \Re(A, F)$

De même $\mathcal{S}_{k,l} = \Re(A, G)^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} J_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$.

En particulier $\mathcal{S}_{1,1} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} J_{m,n}X^mY^n = \Re(A,G)$

On a aussi $\mathcal{S}_{k,l} \simeq \Re(A,G^{(k,l)}) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} J_{mk,nl}X^mY^n$ et $\Re_{k,l} \simeq \Re(A,F^{(k,l)}) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^mY^n$ (Proposition 4.2)

Supposons que F est une réduction de G. Alors $\mathcal{S}_{1,1} = \Re(A,G)$ est un $\Re_{1,1} = \Re(A,F)$-module de type fini. D'autre part on a $(I_{m,n}X^mY^n)^{kl} \subseteq I_{mkl,nkl}X^{mkl}Y^{nkl} = I_{(ml)k,(nk)l}X^{(ml)k}Y^{(nk)l} \subseteq \Re(A,F)^{(k,l)} = \Re_{k,l}$

Ce qui entraine que $\Re_{1,1}$ est entier sur $\Re(A,F^{(k,l)}) \simeq \Re_{k,l}$.

De même $\mathcal{S}_{1,1} = \Re(A,G)$ est entier sur $\mathcal{S}_{k,l}$ pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$

On a $A \subseteq \Re_{k,l} \subseteq \Re_{1,1} = \Re(A,F)$. comme F est noethérienne alors $\Re_{1,1} = \Re(A,F)$ est une A-algebre de type fini d'après le Théorème 1.1 de [11]. Donc $\Re_{1,1} = \Re(A,F)$ est de type fini comme un $\Re_{k,l}$-algèbre et est entier sur $\Re_{k,l}$ pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$. Ainsi d'après le Théorème de Eakin [4], $\Re_{k,l}$ est Noethérien. Donc $F^{(k,l)}$ est Noethérienne pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$.

(Montrons que $F^{(k,l)}$ est une réduction de $G^{(k,l)}$ pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$)

(Il suffit de montrer que $\Re(A,\ G^{(k,l)})$ est un $\Re(A,\ F^{(k,l)})$-module de type fini)

D'après la derenière partie de (*5.6.*2), il est clair que $F^{(k,l)} \leq G^{(k,l)}$ pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$. Dautre part, comme déjà noté, $\mathcal{S}_{1,1}$ est un $\Re_{1,1}$-module module de type fini. Comme $A \subseteq \Re_{k,l} \subseteq \Re_{1,1} \subseteq \mathcal{S}_{1,1}$ alors $\mathcal{S}_{1,1}$ est un $\Re_{k,l}$-module de type fini pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$. On a aussi $\Re_{k,l} \subseteq \mathcal{S}_{k,l} \subseteq \mathcal{S}_{1,1}$. Comme $\Re_{k,l}$ est Noethérien, alors $\mathcal{S}_{k,l}$ est un $\Re_{k,l}$-module de type fini pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$ et d'après le Théorème 5.3, $F^{(k,l)}$ est une réduction de $G^{(k,l)}$ pour tous entiers $k,l \in \mathbb{N}^*$. $\square$

5.0.2 Bifiltration fortement entière sur une autre

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A de type IEP.

G est dite **fortement entière** sur F si $F \leq G$ et si $\Re(A, G)$ est un $\Re(A, F)-$module de type fini.

Théorème 5.7

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de A de type IEP telles que $F \leq G$.

Si l'anneau A est noethérien alors F est une réduction de G si et seulement si G est fortement entière sur F .

Preuve

Supposons que F est une réduction de G, comme l'anneau A est noethérien alors $J_{m,n}$ est de type fini ; d'après le théorème 5.3, nous avons le résultat.

Théorème 5.8

Soient $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ deux bifiltrations de type IEP d'un anneau noethérien A.

Si F est fortement EP, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) F est une $\beta-$réduction de G.

ii) F est une réduction de G.

iii) G est $F-$bonne.

iv) G est fortement entière sur F .

Preuve

(i)$\Leftrightarrow$ (ii)$\Leftrightarrow$ (iii) d'après le théorème 4.5.2.2.

(ii)$\Leftrightarrow$ (iv) d'après le théorème 4.6.2.1 ii.

CONCLUSION

Nous avons réussi à faire une classification des bifiltrations et nous avons également démontré quelques propriétés importantes des anneaux et modules bigradués associés aux bifiltrations. Nous avons caractérisé les bifiltrations $(I, J)-$bonnes.

Nous avons aussi donné un critère de réduction des bifiltrations à partir de leurs anneaux de Rees généralisés.

En perspective nous comptons établir l'analogue du théorème de Samuel Rees aux anneaux bigradués. Nous envisageons d'étudier les fonctions de Hilbert sur les modules bigradués et les fonctions de Hilbert-Samuel associées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUBACAR HAMA *Fonctions quasi-polynomiales de Hilbert-SAMUEL sur les modules bien bifiltrés, multiplicités*, Thèse de Doctorat soutenue à l'Université de Bamako (2015).

[2] N. BOURBAKI Algèbre Commutative Chapitre 1 à 4, Masson ; Paris (1985)

[3] H. DICHI-D. SANGARÉ-SOUMARÉ *Filtrations, integrale dependence, reduction, f-good filtrations*, Comm.Algebra 20(1992) 2393-2418

[4] P.EAKIN, *The converse to a well known theorem on Noetherian rings,* Math. Ann. 177 (1968), 278-282

[5] LORENXO RAMERO Grimoire d'Algèbre Commutative, Masson ; Paris

[6] MOUSSA SANGARE, DAOUDA SANGARE AND YORO DIAKITE, *On a characterization of EP bifiltrations on commutative rings,* Africa Mathematics Annals (AFMA), to appear in vol.6.

[7] J.S. OKON AND L.J. RATLIFF,JR. *Reductions of Filtrations,* Pacific Journal of Mathematics, vol.144, N°1, (1990) 137-154

[8] L.J. RATLIFF,JR. AND D.E.Rush, *Note on I-good filtrations and Noetherian Rees Rings,* Comm. Algebra, 16 (1988), 955 - 975

[9] SAGAÏDOU MOHAMED LAMINE Fonction de Hilbert d'un module bigradué, Thèse de Doctorat soutenue à l'Université de Bamako (2011).

[10] D. SANGARÉ *Some aspects of the asymptotic theory of ideals, Generalization to filtrations*. Commutative Ring Theory, (Fès 1992), 229-247 Pure and applied Math 153.

[11] SHIRO GOTO AND KIKUMICHI YAMAGISHI, *Finite generation of Noetherian graded rings,* Proceedings American Math. Soc. vol. 89 N°1 (1983)

[12] M. TRAORÉ-H. DICHI-D. SANGARÉ *Bifiltrations, Polynômes de Hilbert-Samuel, Multiplicités* Annales Mathématiques Africaines Série 1,Volume 2 (2011) pp 7-21

Annales Mathématiques Africaines
Volume 6 (2017) pp. 45-54

On a reduction criterion for bifiltrations in terms of their generalized Rees rings

Idrissa Yaya* and Daouda SANGARE**

Université Nangui Abrogoua, UFR SFA,
Laboratoire de Mathématiques et Informatique
* e-mail : idrissayaya@ymail.com (corresponding author)
** e-mail : dsangare@yahoo.fr

Abstract. In this paper, a concept of reduction of bifiltrations is introduced. Similarly to the case of filtrations, a reduction criterion for bifiltrations in some class in terms of their generalized Rees rings is given.

1. Introduction

Throughout this paper, A denotes a commutative ring.

The concept of reduction of ideals was introduced by D.G. Northcott and D.Rees in [**NR**]. It was actively studied in the literature since its introduction. Since powers of ideals are special filtrations, the concept of reduction of ideals was generalized to filtrations by J.S. Okon and L.J. Ratliff,Jr in [**OR**], where the authors had given many important results on the subject.

Here we introduce a concept of reduction for rings bifiltrations and we give a criterion of reduction for bifiltrations in some class in terms of their generalized Rees rings, similarly to the case of filtrations.

2. Bifiltrations

2.1. Filtrations.

Let us recall the following definitions which will be used in the sequel.

(2.1.1) By a **filtration on the ring** A, we mean a family $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of ideals of A such that $I_0 = A$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ for all $n \in \mathbb{Z}$ and $I_pI_q \subseteq I_{p+q}$ for all $p, q \in \mathbb{Z}$. It follows that if $n \leq 0$, then $I_n = A$.

(2.1.2) For each integer $k \geq 1$, let $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$. Then $f^{(k)}$ is a filtration on A which is called **the filtration of index** k **extracted from the filtration** f.

(2.1.3) If I is an ideal of A, then the filtration $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$,

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13A15, 16W70.

Key words and phrases. Filtration, Bifiltration, Rees rings of a Bifiltration, Noetherian Bifiltrations, Reduction of Bifiltrations.

where $I^n = A$ for all $n \leq 0$, is called the **I-adic filtration** of A

(2.1.4) Let $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be filtrations on a ring A. The filtration f is called a **reduction of** g if $f \leq g$ and if there exists an integer $N \geq 1$ such that $J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$ for all $n > N$, see [OR] for more information.

2.2. Bifiltrations.

The set $\mathbb{Z}^2$ is partially ordered as follows :

For all $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$, $(m,n) \preceq (p,q)$ if and only if $m \leq p$ and $n \leq q$.

(2.2.1) A **bifiltration** on the ring A is a family $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ of ideals of A such that

(i) $I_{0,0} = A$

(ii) For all $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$, if $(m,n) \preceq (p,q)$, then $I_{p,q} \subseteq I_{m,n}$

(iii) $I_{m,n}I_{p,q} \subseteq I_{m+p,\ n+q}$ for all $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$.

Condition (ii) is equivalent to say that

$I_{m+1,n} \subseteq I_{m,n}$ and $I_{m,n+1} \subseteq I_{m,n}$ for all $m,n \in \mathbb{Z}$

It follows from condition (ii) that if $(m,n) \preceq (0,0)$, then $A = I_{0,0} \subseteq I_{m,n}$, so $I_{m,n} = A$.

If $m \leq 0$, then $(m,0) \preceq (0,0)$, hence $A = I_{0,0} \subseteq I_{m,0}$, so $I_{m,0} = A$.

Similarly, if $n \leq 0$, then $I_{0,n} = A$.

(2.2.2) Throughout this paper all the bifiltrations $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ are supposed to satisfy the following additional conditions :

(EPI) For all $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $I_{k,l} = I_{k,0}$ if $k \geq 0$ and $l \leq 0$ and $I_{k,l} = I_{0,l}$ if $k \leq 0$ and $l \geq 0$.

Such a bifiltration is said to be of **Essentially Positive Indices type** (EPI type for short).

This definition will be extended to bifiltrations $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ with indices in $\mathbb{N}^2$ where negative sub-indices may occur in $I_{m,n}$.

As an example, let $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be filtrations on the ring A. Then $I_n = J_n = A$ for all $n \leq 0$. We will denote by $f \ltimes g$ the bifiltration F defined as $f \ltimes g = (F_{m,n})$, where $F_{m,n} = I_mJ_n$ for all m,n.

Then $f \ltimes g$ is a bifiltration which is of EPI type.

(2.2.3) Let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ and $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be bifiltrations on A. We set $F \leq G$ if and only if $I_{m,n} \subseteq J_{m,n}$ for all $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

(2.2.4) Let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be a bifiltration on the ring A. For integers $k,l \in \mathbb{N}^*$, we write $F^{(k,l)} = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, where $J_{m,n} = I_{mk,nl}$ for all m,n. Then $F^{(k,l)}$ is a bifiltration on A which is called **the bifiltration of index** (k,l) **extracted from the bifiltration** F.

(2.2.5) Let $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be filtrations on the ring A and let k,l be positive integers. Consider the filtrations $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ and $g^{(l)} = (J_{nl})_{n\in\mathbb{Z}}$. Then $f^{(k)} \ltimes g^{(l)} = (I_{mk}J_{nl}) = (f \ltimes g)^{(k,l)}$.

3. Bigraded rings

3.1. Definitions.

(3.1.1) The ring A is said to be $\mathbb{Z}^2$- **bigraded** if there exists a family $(A_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ of subgroups of A such that $A = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} A_{m,n}$ with $A_{m,n}A_{p,q} \subseteq A_{m+p,n+q}$ for all $m,n,p,q \in \mathbb{Z}$.

The elements of the subgroup $A_{m,n}$ are said to be **homogeneous of degree** (m,n).

(3.1.2) The concept of $\mathbb{N}^2$- **bigraded** ring is defined by replacing $\mathbb{Z}$ by $\mathbb{N}$ in the previous definition.

3.2. The Veronese subrings of a bigraded ring.

Let $A = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} A_{m,n}$ be a bigraded ring. For integers $k,l \in \mathbb{N}^*$, we set $A^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} A_{mk,nl}$.

Then $A^{(k,l)}$ is a bigraded subring of A which is called the **Veronese subring of index** (k,l) **of** A.

4. The Rees rings of a bifiltration

DEFINITION 4.1. *Let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be a bifiltration of EPI type on the ring A.*

*(4.1.1) We define the **Rees ring** $R(A,F) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} I_{m,n}X^mY^n$ of F as a bigraded subring of the ring $A[X,Y]$ of polynomials in two indeterminates X and Y with coefficients in A, which is bigraded by taking as degrees, deg $X = (1,0)$ and deg $Y = (0,1)$.*

*(4.1.2) **The generalized Rees ring of** F is by definition the bigraded subring $\mathcal{R}(A,F) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{m,n}X^mY^n$ of $A[u,v,X,Y]$ where $u = X^{-1}$ and $v = Y^{-1}$.*

(4.1.3) Notice that

$$R(A,F) = A[I_{1,0}X, I_{0,1}Y, I_{2,0}X^2, I_{1,1}XY, I_{0,2}Y^2, ...]$$

and that

$$\mathcal{R}(A,F) = A[u,v,I_{1,0}X, I_{0,1}Y, I_{2,0}X^2, I_{1,1}XY, I_{0,2}Y^2, ...] = R(A,F)[u,v].$$

*(4.1.4) The **bifiltration** F **is called Noetherian** if its generalized Rees ring $\mathcal{R}(A,F)$ is Noetherian.*

There is a close connexion between the generalized Rees ring $\mathcal{R}(A,F^{(k,l)})$ of the bifiltration $F^{(k,l)}$ and the Veronese subring $\mathcal{R}(A,F)^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$ of index (k,l) of the generalized Rees ring of F, as shown in the following Proposition.

PROPOSITION 4.2. *Let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be a bifiltration of EPI type on the ring A. Then the two bigraded rings $R(A,F)^{(k,l)}$ and $R(A,F^{(k,l)})$ are isomorphic for all $k,l \in \mathbb{N}^*$.*

PROOF. We have $\mathcal{R}(A,F)^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$

Consider the mapping φ from $\mathcal{R}(A,F^{(k,l)})$ into $\mathcal{R}(A,F)^{(k,l)}$ defined as

$$\varphi(z) = \sum_{m,n} a_{m,n}X^{mk}Y^{nl} \text{ for all } z = \sum_{m,n} a_{m,n}X^{m}Y^{n} \in \mathcal{R}(A,F^{(k,l)}),$$

where $a_{m,n} \in I_{mk,nl}$ for all m,n. Then it is easily shown that φ is a ring isomorphism. □

REMARK 4.3. *(4.3.1) similarly* $R(A,F)^{(k,l)} \simeq R(A,F^{(k,l)})$ *for all* $k,l \in \mathbb{N}^*$.

(4.3.2) Let $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *and* $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *be filtrations on the ring* A. *Consider the bifiltration* $F = f \ltimes g$ *defined as*

$f \ltimes g = (F_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, *where* $F_{m,n} = I_mJ_n$ *for all* m,n. *Let* k,l *be positive integers. Consider the filtrations* $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ *and* $g^{(l)} = (J_{nl})_{n\in\mathbb{Z}}$. *Then we have* $f^{(k)} \ltimes g^{(l)} = (I_{mk}J_{nl}) = (f \ltimes g)^{(k,l)}$. *Therefore by Proposition 4.2,*

$$\mathcal{R}(A, f \ltimes g)^{(k,l)} \simeq \mathcal{R}(A,(f\ltimes g)^{(k,l)}) = \mathcal{R}(A, f^{(k)} \ltimes g^{(l)}).$$

5. Reduction of bifiltrations

DEFINITION 5.1. *Let* $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *and* $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *be bifiltrations of EPI type on the ring* A *with* $F \leq G$ *and let* $r \geq 1$ *and* $s \geq 1$ *be arbitrary integers. Then if* $m \leq 0$ *and* $n \leq 0$ *or if* $0 \leq m \leq r$ *and* $0 \leq n \leq s$, *then it is easily checked that*

$$J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}.$$

We call F *a* ***reduction of*** G *if there exist integers* $r \geq 1$ *and* $s \geq 1$ *such that*

(RED) $J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ *for all* $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, *with* $m > r$ *or* $n > s$.

EXAMPLE 5.2. *(5.2.1) Each bifiltration* $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ *of EPI type is a reduction of itself.*

Indeed let $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, with $m > r = 1$ or $n > s = 1$. If $m > 1$ and $n > 1$, then

$$\sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = I_{m,n} + I_{m,n-1}I_{0,1} + I_{m-1,n}I_{1,0} + I_{m-1,n-1}I_{1,1} = I_{m,n}$$

If $m > 1$ and $n \leq 1$, then

a) If $n < 0$, then $I_{m,n} = I_{m,0}$.

$$\sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = I_{m,0} + I_{m,0}I_{0,1} + I_{m-1,0}I_{1,0} + I_{m-1,0}I_{1,1} = I_{m,0}$$

since $I_{m,0}I_{0,1} \subseteq I_{m,1} \subseteq I_{m,0}, I_{m-1,0}I_{1,0} \subseteq I_{m,0}, \qquad I_{m-1,0}I_{1,1} \subseteq I_{m,1} \subseteq I_{m,0}$

b) If $n \geq 0$, then $0 \leq n \leq 1$.

$\sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1} I_{m-p,n-q}I_{p,q} = I_{m,n}$ since each component of the sum is contained in $I_{m,n}$ and one of them equals $I_{m,n}$.

The case $m \leq 1$ and $n > 1$ is similar to the previous one.

(5.2.2) Let $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $h = (H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ and $k = (K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ be filtrations on the ring A . Assume that f is a reduction of h and that g a reduction of k. Then $f \ltimes g$ is a reduction of $h \ltimes k$.
Indeed $f \ltimes g = (F_{m,n})$ with $F_{m,n} = I_m J_n$ and $h \ltimes k = (G_{m,n})$ where $G_{m,n} = H_m K_n$. We have $I_m J_n \subseteq H_m K_n$ for all m, n, hence $F \leq G$.

We know by (2.2.2) that $f \ltimes g$ and $h \ltimes k$ are bifiltrations of EPI type.

Let $N_1 \geq 1$ and $N_2 \geq 1$ be integers such that $H_m = \sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}H_p$ for all $m > N_1$ and $K_n = \sum_{q=0}^{N_2} J_{n-q}K_q$ for all $n > N_2$.

If $m > N_1$ and $n > N_2$, then

$$G_{m,n} = H_m K_n = \sum_{p=0}^{N_1}\sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p}J_{n-q}H_pK_q = \sum_{p=0}^{N_1}\sum_{q=0}^{N_2} F_{m-p,n-q}G_{p,q}$$

If $m \leq N_1$ and $n > N_2$, then

a) If $m \leq 0$ then $H_m = A$, $I_{m-p}H_p = H_p$ for all $p = 0, 1, ..., N_1$.

$$\sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}H_p = I_m + H_1 + ... + H_{N_1} = A \text{ since } I_m = A$$

Therefore $H_m = \sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}H_p$

b) If $m > 0$, then

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}H_p &= I_m + I_{m-1}H_1 + ... + I_0H_m + I_{-1}I_{m+1} + .. + I_{m-N_1}H_{N_1} \\
&= I_m + I_{m-1}H_1 + ... + H_m + H_{m+1} + .. + H_{N_1} \\
&= H_m
\end{aligned}$$

Hence $G_{m,n} = H_m K_n = \sum_{\substack{0\leq p\leq N_1 \\ 0\leq q\leq N_2}} F_{m-p,n-q}G_{p,q}$

If $m > N_1$ and $n \leq N_2$ then the result follows by similar arguments.

The following Theorem and its corollaries give some characterizations of the reduction of bifiltrations. They are the analogues for bifiltrations of Theorem 2.3 of [**OR**] and some of its Corollaries .

THEOREM 5.3. *Let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ and $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be two bifiltrations of EPI type on the ring A such that $F \leq G$. Assume that the ideal $J_{m,n}$ is finitely generated for all m, n.*

Then F is a reduction of G if and only if $\mathcal{R}(A, G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A, F)$-module.

PROOF. Suppose that F is a reduction of G. Then there exist integers $r \geq 1$ and $s \geq 1$ such that

$$(RED) \quad J_{m,n} = \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s} I_{m-p,n-q}J_{p,q} \quad \text{for all } (m,n)\in\mathbb{Z}^2 \text{ with } m>r \text{ or } n>s.$$

Let $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ and let $(x_{m,n,j})$ $1\leq j\leq t_{m,n}$ be a system of generators of the ideal $J_{m,n}$.

Consider any homogeneous element z of degree (m,n) of $\mathcal{R}(A,G)$. Then z is of the form $z=d_{m,n}X^mY^n$, where $d_{m,n}\in J_{m,n}$.

Following equation (RED), $d_{m,n}=\sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\sum_{i} a_{i,p,q}b_{i,p,q}$, where $a_{i,p,q}\in I_{m-p,n-q}$ and $b_{i,p,q}\in J_{p,q}$ for all i,p and q. We may write

$$b_{i,p,q}=\sum_{j=1}^{t_{p,q}} c_{i,p,q,j}x_{p,q,j}, \quad \text{where } c_{i,p,q,j}\in A \text{ for all } i,p,q,j.$$

Therefore $d_{m,n}=\sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\sum_{i}\sum_{j=1}^{t_{p,q}} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}x_{p,q,j}$, where $a_{i,p,q}\in I_{m-p,n-q}$ and $c_{i,p,q,j}\in A$ for all i,p,q,j.

So

$$\begin{aligned} z &= \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\sum_{i}\sum_{j=1}^{t_{p,q}} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}x_{p,q,j}X^mY^n \\ &= \sum_{p=0}^{r}\sum_{q=0}^{s}\sum_{i}\sum_{j=1}^{t_{p,q}} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}X^{m-p}Y^{n-q}(x_{p,q,j}X^pY^q) \end{aligned}$$

Suppose that $m>r$ and $n>s$. Then $a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}X^{m-p}Y^{n-q}\in\mathcal{R}(A,F)$ for all i,p,q,j and z is an $\mathcal{R}(A,F)$-linear combination of the elements $x_{p,q,j}X^pY^q$ of $\mathcal{R}(A,G)$, where $0\leq p\leq r$, $0\leq q\leq s$, $1\leq j\leq t_{p,q}$.

Suppose now that $m\leq r$ and $n>s$. Consider an integer p such that $0\leq p\leq r$.

a) If $p\leq m\leq r$ then z is an $\mathcal{R}(A,F)$- linear combination of the elements $x_{p,q,j}X^pY^q$ of $\mathcal{R}(A,G)$, where $0\leq p\leq r$, $0\leq q\leq s$, $1\leq j\leq t_{p,q}$.

b) If $m\leq p\leq r$, then

$$\begin{aligned} a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}X^{m-p}Y^{n-q}\in I_{m-p,n-q}X^{m-p}Y^{n-q} &= I_{0,n-q}u^{p-m}Y^{n-q} \\ &= (I_{0,n-q}X^0Y^{n-q})u^{p-m} \\ &= (I_{0,n-q}X^0Y^{n-q})u^k, \end{aligned}$$

with $k=p-m$.

If $m\geq 0$, then $k=p-m\leq p\leq r$

If $m<0$, then $k=p-m=p+m'$ where $m'>0$. So $u^{p-m}=u^pu^{m'}$. Therefore

$$a_{i,p,q}c_{i,p,q,j}X^{m-p}Y^{n-q}\in(I_{0,n-q}X^0Y^{n-q}u^{m'})u^p\subseteq\mathcal{R}(A,F)u^p$$

Hence z is an $\mathcal{R}(A,F)$-linear combination of the elements $u^kx_{p,q,j}X^pY^q$ of $\mathcal{R}(A,G)$, where $0\leq k\leq r, 0\leq p\leq r$, $0\leq q\leq s$, $1\leq j\leq t_{p,q}$.

If $m>r$ and $n\leq s$, then we have a similar conclusion with v^q in place of u^p. It follows that $\mathcal{R}(A,G)$ is generated as $\mathcal{R}(A,F)$-module by the set $\{u^kv^lx_{p,q,j}X^pY^q\}$ where $o\leq p\leq r$, $o\leq q\leq s, 1\leq j\leq t_{p,q}, 0\leq k\leq r, 0\leq l\leq s$, which is finite. Therefore $\mathcal{R}(A,G)$ is finitely generated as $\mathcal{R}(A,F)$-module.

Conversely suppose that $\mathcal{R}(A,G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module. Since both rings are bigraded subrings of $A[u,v,X,Y]$, we may suppose that $\mathcal{R}(A,G)$

is generated as an $\mathcal{R}(A,F)$-module by finitely many homogeneous elements. Let $z_1, z_2, ..., z_t$ be the homogeneous generators of $\mathcal{R}(A,G)$ with nonnegative degrees. This set is obviously non empty. Let $(m_i, n_i) = deg\ z_i$ for $i = 1, 2, ..., t$. Then $z_i = b_i X^{m_i} Y^{n_i}$, where $b_i \in J_{m_i,n_i}$ for all i. Let $N_1 = \max\{m_i, i = 1, 2, ..., t\}$ and $N_2 = \max\{n_i, i = 1, 2, ..., t\}$.

Let $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Suppose that $m > N_1$ and $n > N_2$. Let $b \in J_{m,n}$. Take $z = bX^m Y^n \in \mathcal{R}(A,G)$. We have $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_t z_t$, where $\alpha_i \in \mathcal{R}(A,F)$ for all i. For degree reasons, we may suppose that α_i is homogeneous with degree $(m - m_i,\ n - n_i)$. Write $\alpha_i = a_i X^{m-m_i} Y^{n-n_i}$ where $a_i \in I_{m-m_i,n-n_i}$. Then

$$b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_t b_t \in \sum_{i=1}^{t} I_{m-m_i,n-n_i} J_{m_i,n_i}$$

So

$$J_{m,n} \subseteq \sum_{i=1}^{t} I_{m-m_i,n-n_i} J_{m_i,n_i} \subseteq \sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q}.$$

It follows that $J_{m,n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q}$

Suppose now that $m \leq N_1$ and $n > N_2$.

a) If $m \leq 0$ then $J_{m,n} = J_{0,n}$

We have

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{m-p,n-q} J_{p,q} &= \sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} I_{0,n-q} J_{p,q} \\
&= \sum_{p=0}^{N_1} I_{0,n} J_{p,0} + I_{0,n-1} J_{p,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{p,N_2} \\
&= (I_{0,n} J_{0,0} + I_{0,n-1} J_{0,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{0,N_2}) + \\
&\quad + (I_{0,n} J_{1,0} + I_{0,n-1} J_{1,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{1,N_2}) + ... + \\
&\quad + (I_{0,n} J_{N_1,0} + I_{0,n-1} J_{N_1,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{N_1,N_2}) \\
&= I_{0,n}(J_{0,0} + J_{1,0} + ... + J_{N_1,0}) + \\
&\quad + I_{0,n-1}(J_{0,1} + J_{1,1} + ... + J_{N_1,1}) + ... + \\
&\quad + I_{0,n-N_2}(J_{0,N_2} + J_{1,N_2} + ... + J_{N_1,N_2}) \\
&= I_{0,n} + I_{0,n-1} J_{0,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{0,N_2}
\end{aligned}$$

So it suffices to show that $J_{0,n} \subseteq I_{0,n} + I_{0,n-1} J_{0,1} + ... + I_{0,n-N_2} J_{0,N_2}$

Let $b \in J_{m,n}$, where $m \leq 0$ and let $m' = -m$. Then $z = bX^m Y^n \in \mathcal{R}(A,G)$.

Then $z = bu^{m'} Y^n$ where $b \in J_{m,n} = J_{0,n}$

We have $z = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_t z_t$, where $\alpha_i \in \mathcal{R}(A,F)$ for all i.

It suffices to solve the question in the case of one generator $t = 1$.

Assume that $z = bu^{m'} Y^n = \alpha_1 z_1$ where $\alpha_1 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j} X^i Y^j$,

where $a_{i,j} \in I_{i,j}$ for all i, j. Then

$z = bu^{m'} Y^n$ where $b \in J_{m,n} = J_{0,n}$,

$$\alpha_1 z_1 = \left(\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j} X^i Y^j \right) (b_1 X^{m_1} Y^{n_1}) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j} b_1 X^{m_1+i} Y^{n_1+j},$$

where $a_{i,j} \in I_{i,j}$ for all i, j and $b_1 \in J_{m_1,n_1}$

Since $z = bu^{m'}Y^n$ where $b \in J_{m,n} = J_{0,n}$, then

$$bu^{m'}Y^n = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j}b_1X^{m_1+i}Y^{n_1+j}$$

If we multiply each member of the above equality by $X^{m'}$ then we get

$$bY^n = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j}b_1X^{m'+m_1+i}Y^{n_1+j},$$

which gives $m' + m_1 + i = 0, n_1 + j = n$

Therefore $b = \sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} a_{i,j}b_1$, with $m' + m_1 + i = 0, n_1 + j = n$

So $i = -m_1 - m'$, $j = n - n_1$ and

$$b \in \sum_{(i,j)} I_{-m_1-m',\, n-n_1} J_{m_1,\, n_1} \subseteq I_{0,\, n-n_1} J_{0,n_1} \subseteq \sum_{q=0}^{n_1} I_{0,\, n-q} J_{0,q}$$

It follows that $J_{0,n} \subseteq \sum\limits_{q=0}^{n_1} I_{0,n-q}J_{0,q}$, hence $J_{0,n} = \sum\limits_{q=0}^{n_1} I_{0,n-q}J_{0,q}$

b) $0 \leq m \leq N_1$ et $n > N_2$

Apply the same arguments as the case $m > N_1$ and $n > N_2$.

The case $m > N_1$ and $n \leq N_2$ is similar to the previous one.

So $J_{m,n} = \sum\limits_{p=\,0}^{N_1} \sum\limits_{q=\,0}^{N_2} I_{m-p,n-q}J_{p,q}$ for all m, n with $m > N_1$ or $n > N_2$ and F is a reduction of G. □

Corollary 5.4. *Let A be a Noetherian ring and let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be a bifiltration of EPI type on the ring A. Then there exists a bijection between the set of bifiltrations $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ of EPI type on the ring A such that F is a reduction of G and the bigraded subrings S of $A[u, v, X, Y]$ that are finite integral extensions of $\mathcal{R}(A, F)$.*

Proof. For each bifiltration $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ of EPI type on the ring A such that F is a reduction of G, let $\theta(G) = S = \mathcal{R}(A, G)$. Then S is a bigraded subring of $A[u, v, X, Y]$ which is a finitely generated $\mathcal{R}(A, F)$-module by Theorem 5.3, hence a finite integral extension of $\mathcal{R}(A, F)$.

The mapping θ defined this way is a bijection between the set of bifiltrations $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ of EPI type on the ring A such that F is a reduction of G into the set of bigraded subrings S of $A[u, v, X, Y]$ that are finite integral extensions of $\mathcal{R}(A, F)$. Indeed let S be a bigraded subring of $A[u, v, X, Y]$ which contains $\mathcal{R}(A, F)$ and which is a finite module over $\mathcal{R}(A, F)$. Let $J_{m,n} = u^mv^nS \cap A$ for all m, n and $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$. Then one checks easily that G is a bifiltration on A and that $J_{m,n} \supseteq u^mv^n\mathcal{R}(A,\ F) \cap A = I_{m,n}$ for all m, n, so $F \leq G$. Furthermore we have $S = \mathcal{R}(A, G) = \theta(G)$. Consequently θ is surjective.

Let $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ and $H = (H_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be two bifiltrations of EPI type on the ring A such that F is a reduction of G and H. If $\theta(G) = \theta(H) = S$, then, as shown above, $J_{m,n} = u^mv^nS \cap A = H_{m,n}$ for all m, n and $G = H$. Therefore θ is injective hence bijective. □

Corollary 5.5. *Let $F = (F_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}, G = (G_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$, $H = (H_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ and $K = (K_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be bifiltrations of EPI type on a Noetherian ring A. Then :*

(5.5.1) If F is a reduction of G and G is a reduction of K, then F is a reduction of K

(5.5.2) If F is a reduction of G and if $F \leq H \leq G$, then H is a reduction of G. In addition if F is Noetherian, then F is a reduction of H.

Proof. (5.5.1) If F is a reduction of G and G is a reduction of K, then by Theorem 5.3, $\mathcal{R}(A,G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module and $\mathcal{R}(A,K)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,G)$-module. Therefore $\mathcal{R}(A,K)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module. It follows that F is a reduction of K.

(5.5.2) If F is a reduction of G and if $F \leq H \leq G$, then $\mathcal{R}(A,G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module, hence a finitely generated $\mathcal{R}(A,H)$-module. So H is a reduction of G.

In addition if F is Noetherian, then, since $\mathcal{R}(A,G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module and that $\mathcal{R}(A,F)$ is a Noetherian ring, then each submodule of $\mathcal{R}(A,G)$ and, in particular $\mathcal{R}(A,H)$, is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module.

Therefore F is a reduction of H. □

Corollary 5.6. *Let $F = (I_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ and $G = (J_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ be bifiltrations of EPI type on a Noetherian ring A with $F \leq G$. Then*

(5.6.1) If F is a reduction of G, then F is Noetherian if and only if G is Noetherian

(5.6.2) If F is Noetherian and is a reduction of G, then $F^{(k,l)}$ is Noetherian and is a reduction of $G^{(k,l)}$ for all integers $k,l \in \mathbb{N}^*$.

Proof. (5.6.1) If F is a reduction of G, then $\mathcal{R}(A,G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}(A,F)$-module. So, if F is Noetherian, then $\mathcal{R}(A,F)$ is a Noetherian ring.

Therefore $\mathcal{R}(A,G)$ is a Noetherian ring and the bifiltration G is Noetherian.

Conversely if G is Noetherian, then by Eakin's Theorem [Ea], F is Noetherian.

(5.6.2) Suppose that F is Noetherian and is a reduction of G. For integers $k,l \in \mathbb{N}^*$, consider the bifiltration $F^{(k,l)} = (I_{mk,nl})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ of index (k,l) extracted from the bifiltration F as defined in (2.2.4).

Let $\mathcal{R}_{k,l} = \mathcal{R}(A,F)^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$

In particular $\mathcal{R}_{1,1} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{m,n}X^mY^n = \mathcal{R}(A,F)$

Remark that $\mathcal{R}(A,F^{(k,l)}) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} I_{mk,nl}X^mY^n \subseteq \mathcal{R}_{1,1}$.

Indeed, since $k,l \in \mathbb{N}^*$, if $m \geq 1$ and $n \geq 1$, then $mk \geq m$ and $nl \geq n$.

So $I_{mk,nl} \subseteq I_{m,n}$.

If $m \leq 0$ or $n \leq 0$, then $mk \leq 0$ or $nl \leq 0$.

Therefore suppose that $m \leq 0$ and $n \leq 0$. Then $I_{mk,nl} = A = I_{m,n}$

If $m \leq 0$ and $n > 0$, then $mk \leq 0$ and $nl > 0$.

Then by convention $I_{mk,nl} = I_{0,nl}$ and $I_{m,n} = I_{0,n}$

So $I_{mk,nl} \subseteq I_{m,n}$ since $I_{0,nl} \subseteq I_{0,n}$

The case $m > 0$ and $n \leq 0$ is similar.

This achieves to show that $I_{mk,nl} \subseteq I_{m,n}$ for all m, n.

Hence $I_{mk,nl}X^mY^n \subseteq I_{m,n}X^mY^n$.

It follows that $\mathcal{R}(A, F^{(k,l)}) \subseteq \mathcal{R}_{1,1} = \mathcal{R}(A, F)$

Similarly let $\mathcal{S}_{k,l} = \mathcal{R}(A, G)^{(k,l)} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} J_{mk,nl}X^{mk}Y^{nl}$.

In particular $\mathcal{S}_{1,1} = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} J_{m,n}X^mY^n = \mathcal{R}(A, G)$

We have also $\mathcal{S}_{k,l} \simeq \mathcal{R}(A, G^{(k,l)}) = \bigoplus_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} J_{mk,nl}X^mY^n$

Assume that F is a reduction of G. Then $\mathcal{S}_{1,1} = \mathcal{R}(A, G)$ is a finitely generated $\mathcal{R}_{1,1} = \mathcal{R}(A, F)$-module. On the other hand

$$(I_{m,n}X^mY^n)^{kl} \subseteq I_{mkl,nkl}X^{mkl}Y^{nkl} = I_{(ml)k,(nk)l}X^{(ml)k}Y^{(nk)l} \subseteq \mathcal{R}(A, F)^{(k,l)} = \mathcal{R}_{k,l}$$

It follows that $\mathcal{R}_{1,1}$ is integral over $\mathcal{R}(A, F^{(k,l)}) \simeq \mathcal{R}_{k,l}$.

Similarly $\mathcal{S}_{1,1} = \mathcal{R}(A, G)$ is integral over $\mathcal{S}_{k,l}$ for all integers $k, l \in \mathbb{N}^*$

We have $A \subseteq \mathcal{R}_{k,l} \subseteq \mathcal{R}_{1,1} = \mathcal{R}(A, F)$.

Since F is noetherian then $\mathcal{R}_{1,1} = \mathcal{R}(A, F)$ is a finitely generated A-algebra by Theorem 1.1 of [GY].

Therefore $\mathcal{R}_{1,1} = \mathcal{R}(A, F)$ is finitely generated as $\mathcal{R}_{k,l}$-algebra and is integral over $\mathcal{R}_{k,l}$ for all integers $k, l \in \mathbb{N}^*$. So by Eakin's Theorem [Ea], $\mathcal{R}_{k,l}$ is Noetherian. Therefore $F^{(k,l)}$ is Noetherian for all integers $k, l \in \mathbb{N}^*$.

As for the last part of (5.6.2), it is clear that $F^{(k,l)} \leq G^{(k,l)}$ for all integers $k, l \in \mathbb{N}^*$.

On the other hand as already noted, $\mathcal{S}_{1,1}$ is a finitely generated $\mathcal{R}_{1,1}$-module. Since $A \subseteq \mathcal{R}_{k,l} \subseteq \mathcal{R}_{1,1} \subseteq \mathcal{S}_{1,1}$ then $\mathcal{S}_{1,1}$ is a finitely generated $\mathcal{R}_{k,l}$-module for all integers $k, l \in \mathbb{N}^*$. We have also $\mathcal{R}_{k,l} \subseteq \mathcal{S}_{k,l} \subseteq \mathcal{S}_{1,1}$. Since $\mathcal{R}_{k,l}$ is Noetherian, then $\mathcal{S}_{k,l}$ is a finitely generated $\mathcal{R}_{k,l}$-module for all integers $k, l \in \mathbb{N}^*$ and by Theorem 5.3, $F^{(k,l)}$ is a reduction of $G^{(k,l)}$ for all integers $k, l \in N^*$. □

References

[Ea] P. Eakin, *The converse to a well known theorem on Noetherian rings*, Math. Ann. **177** (1968), 278-282

[GY] Shiro Goto and Kikumichi Yamagishi, *Finite generation of Noetherian graded rings,* Proceedings American Math. Soc. vol. **89** N° **1** (1983)

[NR] D.G. Northcott and D.Rees, *Reductions of ideals in local rings, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **50** (1954) 145-158.*

[OR] J.S. Okon and L.J. Ratliff,Jr. *Reductions of Filtrations*, Pacific Journal of Mathematics, vol. **144**, N° **1**, (1990), 137-154

[RR] L.J. Ratliff,Jr. and D.E. Rush, *Note on I-good filtrations and Noetherian Rees Rings*, Comm. Algebra, **16** (1988), 955-975

[SSD] Moussa Sangaré, Daouda Sangaré and Yoro Dakité, *On a characterization of EP bifiltrations on commutative rings*, Africa Mathematics Annals (AFMA), to appear in vol. **6**.

[Tr] Monzon Traoré, *Bigraduations, Bifiltrations, Multiplicités,* Thèse de Doctorat Université de Bamako 2010.