

PTS DIMÈRE DANS UNE CHAÎNE DE PENDULES COUPLÉS PAR FIL DE TORSION

Mémoire présenté et soutenu en vue de l'obtention du DIPES II par :

WOGUEM Yen Fred

Département de Physique

Licencié en Physique

Matricule : **14M2209**

Sous la direction de

KENFACK JIOTSA Aurélien

Maître de conférences, Université de Yaoundé I/ENS

Année Académique 2018/2019

Table des matières

Liste des abréviations	i
Dédicaces	ii
Remerciements	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Introduction	2
1 Revue de littérature	3
1.1 Généralités sur la symétrie parité-temps	3
1.1.1 Symétrie parité-temps	3
1.1.2 Systeme PTS mécanique	4
1.2 Généralités sur la chaine de pendules couplés	6
1.2.1 Définition	6
1.2.2 L'équation de sine-Gordon	7
2 Matériel et Méthodes	12

2.1	Etude du système physique de type PTS dimère	12
2.1.1	Equation linéaire du dimère PTS	13
2.1.2	Modes propres et seuils de transistions	15
2.1.3	Résolution analytique	17
2.1.4	Equations non-linéaire du dimer PTS	18
2.1.5	Résolution numérique	19
2.2	Etude de la chaîne	19
2.2.1	Etude de la chaîne	19
2.2.2	Relation de dispersion	20
2.2.3	Coefficients de transmission et reflexion	20
2.2.4	Points exceptionnelles	21
3	Résultats et Discussions	23
3.1	Résultats dans le cas linéaire	23
3.1.1	Modes propres	23
3.1.2	Seuils de transistion	25
3.2	Solutions du cas linéaire	26
3.2.1	Fréquence de Rabi et du système	26
3.2.2	Evolutions temporelles pour les deux masses	26
3.3	Solutions du cas non-linéaire	30
3.3.1	Evolutions temporelles	30
3.3.2	Solutions symétriques ,anti-symétriques et asymétriques	33
3.3.3	Courbes de la stabilité	35
3.4	Coefficients de transmission et réflexion	36
3.4.1	Coefficients de transmission et réflexion	36

3.4.2	Seuils de transistions à la résonance	37
4	Implications pédagogique sur le système enseignement-apprentissage	39
4.1	Implication du sujet sur l'enseignement	39
4.2	Implication du sujet sur l'apprentissage	40
	Bibliographie	45

Table des figures

1.1	Photo d'un Breather en mouvement dans la chaîne de pendules [7].	7
1.2	La courbe en rouge représente la relation de dispersion linéaire ω_k du modèle continu (1.24) et la courbe verte en traits discontinus représente la relation de dispersion du modèle discret (1.21). Il existe un gap de fréquence pour toutes fréquences $ \omega < \omega_0$	10
2.1	pendules simples couplés par fil de torsion	13
2.2	Chaîne de pendules contenant le dimère	19
3.1	Modes propres pour (a) $x=0.1$, (b) $x=0.7$, (c) $x=1.0$ et (d) $x=1.5$. Sur chaque figure, le cadran du haut représente la partie réelle et celui du bas la partie imaginaire	24
3.2	Evolution de γ en fonction de κ pour $x=0.1$, 0.7 , 1.0 , 1.5 , 2 ; Les courbes qui ont pour origine celui du repère représentent les γ_{th1} et celles qui ont pour origine l'axe des ordonnées, représentent les γ_{th2}	25
3.3	(a)Variation de la fréquence de Rabi(bleu) et du système(rose) en fonctions de γ , (b)Variation de la fréquence de Rabi(bleu) et du système(rose) en fonctions de κ	26

- 3.4 Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases de la masse une (m_1) (jaune et rouge) et deux (m_2) (vert et noir) pour différentes valeurs de x à 10% du seuil de transition dans le cas linéaire : (a) et (b) pour $x= 0.1$; (c) et (d) pour $x=1$. . 27
- 3.5 Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases de la masse une (m_1) (jaune et rouge) et deux (m_2) (vert et noir) pour différentes valeurs de x à 50% du seuil de transition dans le cas linéaire : (a) et (b) pour $x= 0.1$; (c) et (d) pour $x=1$. . 28
- 3.6 Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases de la masse une(m_1) (jaune et rouge) et deux(m_2) (vert et noir) pour différentes valeurs de x à 90% du seuil de transition dans le cas linéaire : (a) et (b) pour $x= 0.1$; (c) et (d) pour $x=1$. . 29
- 3.7 Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases des masses une(rouge) et deux(vert) pour différentes valeurs de x à 10% du seuil de transition dans le cas non-linéaire : (a) et (b) pour $x= 0.1$; (c) et (d) pour $x=1$, $\mu_{13} = 0.5$ et $\mu_{15} = 0$. 30
- 3.8 Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases des masses une(rouge) et deux(vert) pour différentes valeurs de x à 25% du seuil de transition dans le cas non-linéaire : (a) et (b) pour $x= 0.1$; (c) et (d) pour $x=1$, $\mu_{13} = 0.5$ et $\mu_{15} = 0$. 31
- 3.9 Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases des masses une(jaune) et deux(vert) pour différentes valeurs de x à 34% du seuil de transition dans le cas non-linéaire : (a) et (b) pour $x= 0.1$; (c) et (d) pour $x=1$, $\mu_{13} = 0.5$ et $\mu_{15} = 0$. 32

3.10	Points fixes dans le cas cubique	33
3.11	Représentation des points fixes : (a) dans le cas symétrique, (b) dans le cas anti-symétrique (c) dans le cas asymétrique	34
3.12	Superposition des solutions symétriques asymétriques et anti-symétriques	35
3.13	Représentation des courbes de la stabilité de notre système : (a) dans le cas symétrique, (b) dans le cas anti-symétrique, (c) dans le cas asymétrique	35
3.14	Evolution des coefficients de transmission et de réflexion avec deux pics de même nature du même coté : pour $\kappa = 0.9$ (a) $x=0.1$; (b) $x=0.5$	36
3.15	Evolution des coefficients de transmission et de réflexion avec deux pics de même nature de différents coté :pour $\kappa = 0.9$ (a) $x=1.1$; (b) $x=1.5$	37
3.16	Seuils de transistion à la rerésonance en fonctions de κ et x	38

Liste des abréviations

PTS = Parity Time Symmetry

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

- Mon père et ma mère pour tout leur soutien et conseil.
- Mes frères et soeurs pour leur soutien et affection à mon égard .
- Tous mes oncles et toutes mes tantes pour le soutien qu'ils m'ont toujours accordé

Remerciements

Mes remerciements vont :

- Au Professeur Kenfack Jiotso Aurélien en tant que Directeur de ce mémoire, pour avoir accepté de diriger ce travail. Qu’il trouve ici l’expression de ma profonde gratitude.
- Au Professeur Owono Owono Luc Calvin, Chef du Département de Physique pour les enseignements et les conseils prodigués.
- A l’endroit de tous les membres du jury pour l’honneur qu’ils me font en acceptant de participer au jury.
- A M.Fendzi Emmanuel, Tabeu stéphane et Simo Ibrahim pour leur soutien et disponibilité.

J’adresse également mes remerciements à tous les Enseignants du Département de Physique pour la qualité de leurs enseignements dispensés.

Je tiens également à remercier tous mes camarades de promotion pour les débats édifiants de tous les jours.

À tous ceux qui ont pu m’assister au cours de mes études, je leur exprime mes sincères remerciements.

Que ceux dont les noms ne sont pas ici ne se sentent pas oubliés.

Résumé

Le présent travail porte sur l'étude d'un système PTS du type dimère dans une chaîne de pendules couplés par fil de torsion. Les équations de couplage modélisant notre système constitué de deux masses et des fils de torsion ont été établis par la méthode de Lagrange. Nous avons déterminé les conditions pour que notre système soit PTS conduisant aux valeurs propres réelles. Nous avons également étudié les coefficients de réflexion et de transmission après avoir inséré le dimère au milieu de la chaîne. Les résultats obtenus montrent que, pour certaines valeurs du paramètre x (rapport des constantes de torsion) et à certaines valeurs de γ , l'onde est complètement transmise du côté gauche tandis qu'on observe une réflexion du côté droit et pour certaines autres valeurs de x et γ , le dimère n'a pas d'impact sur l'onde, on a donc une transmission totale. Ces derniers ont montré l'influence du paramètre x et γ sur les coefficients de transmission et de réflexion des ondes.

Mots-clefs : PTS dimere, chaîne de pendules couplés, coefficients de reflexion et de transmission.

Abstract

The present work deals with the study of a dimer PTS system in a chain of pendulums coupled by twist wire. Coupling equations modeling our system consisting of two masses and torsion wires were established by the Lagrange method. We have determined the conditions for our system to be PTS leading to actual eigenvalues. We also studied the reflection and transmission coefficients after inserting the dimer in the middle of the chain. The results obtained show that, for certain values of the parameter x (ratio of torsional constants) and at certain values of γ , the wave is completely transmitted on the left side whereas one observes a reflection of the right side and for certain other values of x and γ , the dimer has no impact on the wave, so we have a total transmission. The latter showed the influence of the parameter x and γ on the transmission and reflection coefficients of the waves.

Keywords : PTS system dimer, chain of pendulums couple, reflection and transmission coefficients.

Introduction Générale

De nombreuses études ont montré que tout système hermitien a un spectre réelle. Récemment certaines études ont montré que certains systèmes non-hermitien ont un spectre réel lorsque certains de ses paramètres sont contenus dans un domaine précis. Ainsi ces systèmes sont appelés système PTS. Ces systèmes vérifient l'inversion dans l'espace et dans le temps [1]. un système PTS dimère est un modèle constitué de deux particules dont l'une est amplificatrice et l'autre est dissipative. une chaîne de pendules couplés est un ensemble de n pendules identiques accolés. Récemment une étude a été faite dans le domaine de l'électronique montrant que lorsqu'on introduit un dimère électronique dans une chaîne on observe les phénomènes de reflexion et de transmission [10]. Cependant est-ce qu'en insérant notre modèle mécanique dans une chaîne de pendules on observera les mêmes phénomènes? Dans ce travail, nous donnons dans le premier chapitre la généralité sur les systèmes PTS et la chaîne de pendules couplés. Le chapitre deux sera consacré à l'étude de la dynamique du système PTS dimère et des phénomènes de transmission et de réflexion d'une onde dans une chaîne de pendules couplés par fil de torsion comportant notre système PTS dimère. Au chapitre trois, nous présenterons et analyserons les résultats obtenus. Le chapitre quatre portera sur les implications pédagogiques. Ce travail s'achèvera par une conclusion générale

résumant les principaux résultats obtenus et les perspectives.

Introduction

Les systèmes PTS ont été étudiés dans divers contextes de la physique. Ce qui nous intéresse ici sont les d'oscillateurs mécaniques couplés avec un amortissement et un non-amortissement de quantité égale et opposée. Dans ce chapitre, nous présentons les généralités sur les systèmes PTS et la chaîne de pendules couplés.

1.1 Généralités sur la symétrie parité-temps

1.1.1 Symétrie parité-temps

Un Hamiltonien pseudo-hermitien satisfait :

$$H^+ = \eta H \eta^{-1} \quad (1.1)$$

Où η est un automorphisme hermitique linéaire. Pour plusieurs systèmes symétriques PT, le choix \hat{P} démontre la correspondance entre la pseudo-hermiticité et la PT-symétrie. Un hamiltonien est dit PT-symétrique si il commute avec l'opérateur parité P et l'opérateur inversion du temps T, ceci est donnée par la relation (1.14) :

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}\hat{T} \quad (1.2)$$

En combinant les équations (1.1) et (1.12), nous obtenons la transformation de l'hamiltonien sous l'action simultanée des opérateurs \hat{P} et \hat{T} , ce qui donne :

$$\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{H}(\hat{r}, \hat{p}, t)\hat{P}\hat{T} = \hat{H}(\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{p}\hat{P}\hat{T}, \hat{P}^+\hat{T}^+\hat{r}\hat{P}\hat{T}, t) = \hat{H}^*(\hat{p}, -\hat{r}, -t) \quad (1.3)$$

Ainsi un système est PT-symétrique si :

$$\hat{H}(\hat{r}, \hat{p}, t) = \hat{H}^*(\hat{p}, -\hat{r}, -t) \quad (1.4)$$

Pour les hamiltoniens qui sont sous la forme la forme :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \quad (1.5)$$

Où m est la masse et V l'énergie potentielle de la particule. La condition (1.16) pour que l'hamiltonien soit PT-symétrique requiert que la partie réelle du potentiel soit une fonction paire des coordonnées et la partie imaginaire une fonction impaire : $V(r) = V^*(-r)$. Un oscillateur mécanique est dit symétrique à parité-temps si son hamiltonien satisfait à la relation (1.2) ou (1.4). Pour un oscillateur mécanique à deux degrés de liberté régie par des équations décrivant la dynamique du modèle, le modèle sera dit symétrique à parité et temps si ses équations restent invariantes sous la transformation PT, en d'autres termes si elles sont invariantes sous l'échange des variables x et y (degré de liberté du système), suivi d'une inversion de temps.

1.1.2 Systeme PTS mécanique

Un système mécanique est généralement décrit par son Hamiltonien donné pour un système à une dimension par la relation :

$$H = \frac{p^2}{2m} + v(x) \quad (1.6)$$

Avec p étant la quantité de mouvement du système, x la position et $v(x)$ le potentiel. Un système mécanique sera donc dit PTS si en appliquant à la fois l'opérateur parité et l'opérateur temps le Hamiltonien du système reste inchangé. En effet, l'action de l'opérateur parité noté \hat{P} se traduit par :

$$\hat{P}p \rightarrow -p \quad (1.7a)$$

$$\hat{P}x \rightarrow -x \quad (1.7b)$$

et celle de l'opérateur temps par

$$\hat{T}p \rightarrow -p \quad (1.8a)$$

$$\hat{T}x \rightarrow x \quad (1.8b)$$

$$\hat{T}i \rightarrow -i \quad (1.8c)$$

L'application de l'opérateur parité \hat{P} au Hamiltonien du système nous donne :

$$\hat{P}H = \hat{P}\left(\frac{p^2}{2m} + v(x)\right) = \frac{(-p)^2}{2m} + v(-x) = \frac{p^2}{2m} + v(-x) \quad (1.9)$$

L'action de l'opérateur temps \hat{T} aux résultats précédents va nous donner à son

tour :

$$\hat{T}\hat{P}H = \hat{T}\left(\frac{p^2}{2m} + v(-x)\right) = \frac{p^2}{2m} + v^*(-x) \quad (1.10)$$

le Hamiltonien est donc invariant par application des opérateur parité et temps si et seulement si les équations précédentes sont égales soit :

$$v(x) = v^*(-x) \quad (1.11)$$

Cette relation traduit le fait que la partie réelle du potentiel d'un tel système soit une fonction paire de la position et la partie imaginaire une fonction impaire de la position. Ainsi en mécanique un système est dit PTS si son Hamiltonien vérifie la relation ci-dessus.

1.2 Généralités sur la chaîne de pendules couplés

Dans cette partie, nous présentons quelques différents travaux qui ont été réalisés dans la chaîne de pendules couplés. Ces travaux portent sur la propagation du soliton dans la chaîne de pendules couplés.

1.2.1 Définition

Le soliton est une onde solitaire qui se propage sans se déformer dans un milieu non-linéaire et dispersif. On en trouve dans de nombreux phénomènes physiques. Ils sont solutions de nombreuses équations aux dérivées partielles non-linéaires.

1.2.2 L'équation de sine-Gordon

On considère la chaîne de pendules couplés linéairement de la figure(1.1) construite suivant [6,7]. Tous les pendules sont quasi-identiques de masse m et libres de rotation autour d'un axe commun et on note ω_0 leur fréquence propre. Deux pendules voisins sont couplés linéairement entre eux par une force de rappel, matérialisée par un ressort, donnant lieu à la fréquence ω_1 .

Modèle discret

Le Lagrangien du système est donné par la somme, sur toutes les mailles de la chaîne, de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de chaque pendule

$$L = \sum_{n=1}^N \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_n^2 - \frac{m\omega_1^2 l^2}{2} (\theta_n - \theta_{n-1})^2 - m\omega_0^2 l^2 (1 - \cos \theta_n) \quad (1.12)$$

Où θ_i est l'écart angulaire du pendule i par rapport à sa position d'équilibre, et l est la distance entre l'axe de rotation et le centre de gravité du pendule. Le point au-dessus θ désignera de manière standard la dérivée par rapport au temps.

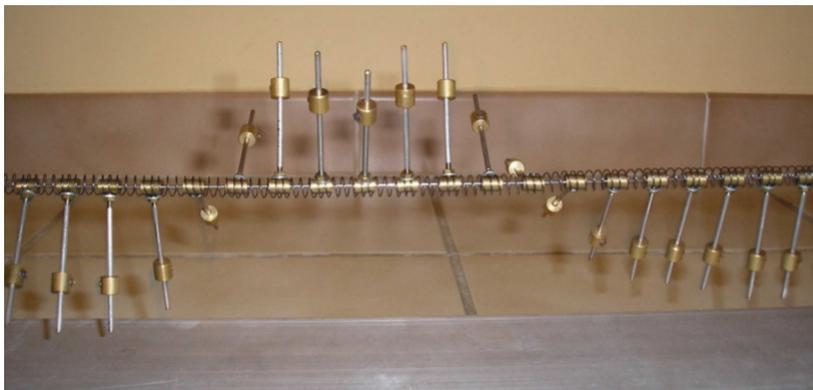


FIGURE 1.1 – Photo d'un Breather en mouvement dans la chaîne de pendules [7].

La première contribution de l'équation (1.12) correspond à l'énergie cinétique de rotation des pendules. Le second terme représente l'énergie de couplage élastique entre deux pendules voisins. Enfin, le dernier terme décrit l'énergie potentielle de pesanteur d'un pendule et introduit l'aspect non-linéaire. L'introduction des moments conjugués p_i des coordonnées $q_i = l\theta_i$ définis par les relations

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = ml\dot{\theta}_i, i = 1, \dots, N \quad (1.13)$$

et l'utilisation des équations d'Euler-Lagrange

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow ml\ddot{\theta}_i = m\omega_1^2 l(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - m\omega_0^2 l, i = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

conduisent aux équations différentielles non-linéaires couplées suivantes :

$$\ddot{\theta}_n - \omega_1^2(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) + \omega_0^2 \sin \theta_n = 0, n = 1, \dots, N \quad (1.15)$$

Modèle continu

Bien qu'aucune solution de l'équation (1.15) ne soit connue, il est possible d'obtenir une solution approchée grâce à l'approximation des milieux continus, c'est-à-dire quand le caractère discret de la chaîne est pratiquement inaperçu par l'onde. Elle est valable dans le cas d'un couplage fort, où la variable θ_n varie peu d'un pendule à l'autre $|\theta_{n+1} - \theta_n| \ll |\theta_n|$. On note d la distance entre les pendules et on remplace la variable discrète $\theta_n(t)$ par le champ $u(x,t)$ où $x = nd$. On utilise le développement de Taylor autour du point $x = nd$

$$\theta_{n\pm 1}(t) = u(x \pm d, t) = u(x, t) \pm d \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \pm \frac{d^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) + o(d^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)) \quad (1.16)$$

Ainsi, l'on a, après simplification

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \simeq d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + o(d^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)) \quad (1.17)$$

et l'on obtient en remplaçant (1.17) dans (1.15), l'équation de sine-Gordon (SG), à savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0 \quad (1.18)$$

où $c = \omega_1 d$

Limite linéaire et bande interdite

Considérons le cas des faibles amplitudes, c'est-à-dire $\theta \ll 2\pi$. En prenant la limite linéaire du terme sinusoïdal, l'équation (1.15) devient

$$\ddot{\theta}_n - \omega_1^2(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) + \omega_0^2 \sin \theta_n = 0, n = 1, \dots, N \quad (1.19)$$

Elle admet des solutions du type $\theta_n(t) = \theta_0 e^{(k*n*d - \omega*t)} + c.c$ dans lesquelles la pulsation ω et le vecteur d'onde k à une dimension, sont reliés par la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2(1 - \cos kd) \quad (1.20)$$

représentée sur la figure(1.2). Cette relation de dispersion montre que les pulsations ω inférieures à la pulsation propre ω_0 d'un pendule, correspondent à des vecteurs d'ondes k imaginaires, c'est-à-dire des ondes atténuées exponentiellement. Autrement dit, les ondes ne se propagent pas dans la chaîne de pendule, c'est une bande interdite (ou gap de fréquence) pour laquelle le milieu est non passant. Soit

$k = i\lambda$, la relation de dispersion devient

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\omega_1^2(\cosh \lambda d - 1) \leq \omega_0^2 \quad (1.21)$$

d'où l'on peut extraire

$$\lambda = \frac{1}{d} \operatorname{arc} \cos h \left[1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_1^2} \right] \quad (1.22)$$

Si l'on considère le cas des milieux continus, la limite linéaire du terme sinusoidal de l'équation SG (1.18) conduit à l'équation de Klein-Gordon à une dimension, soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 u = 0. \quad (1.23)$$

Elle admet des solutions en ondes planes du type $\theta_n(t) = \theta_0 e^{(k*x - \omega*t)} + c.c$ dans lesquelles la pulsation ω et le vecteur d'onde k à une dimension, sont reliés par la relation de dispersion

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2, \quad (1.24)$$

représentée sur la figure(1.2). De même que précédemment, il existe une bande interdite pour des fréquences inférieures à ω_0 .

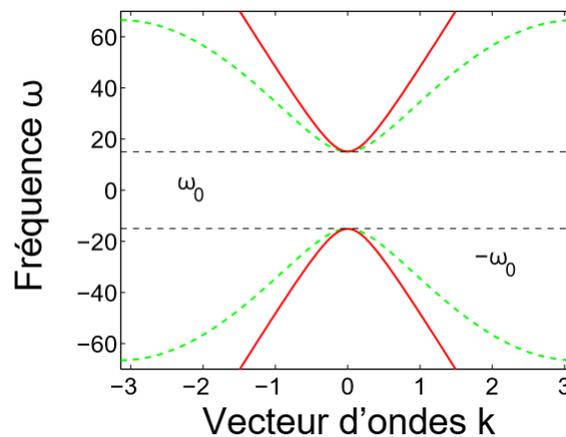


FIGURE 1.2 – La courbe en rouge représente la relation de dispersion linéaire ω_k du modèle continu (1.24) et la courbe verte en traits discontinus représente la relation de dispersion du modèle discret (1.21). Il existe un gap de fréquence pour toutes fréquences $|\omega| < \omega_0$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis les bases fondamentales nécessaires à la compréhension de l'étude des oscillateurs de type PTS. A cet effet, nous avons fait une revue de la littérature en définissant les systèmes PTS et la chaîne de pendules couplés. Nous présentons dans la suite le modèle étudié et les méthodes utilisées pour la résolution des équations de la dynamique de ce système.

MATÉRIEL ET MÉTHODES

Introduction

La notion de symétrie parité et temps provient des tentatives d'extension de la mécanique quantique au-delà des opérateurs hermitiens [2]. Dans ce chapitre, nous dérivons premièrement les équations d'évolution du système étudié. Il s'agit des oscillateurs mécaniques de type PTS construites à partir du couplage de deux pendules simples. Rappelons que de tels systèmes PT-symétriques nécessitent un élément qui fournit une amplification (une dissipation négative) [3]. Nous résolvons par la suite analytiquement et numériquement les équations linéaires puis numériquement les équations non-linéaires de notre modèle.

2.1 Etude du système physique de type PTS dimère

Le couplage linéaire de deux oscillateurs dont l'un a une amplification linéaire (gain) et l'autre une quantité égale d'atténuation linéaire (perte) forme une unité que nous appelons dimer PTS.

Le système PTS dimer est constitué de deux masses m_1 et m_2 chacune étant reliée à une tige de longueur l . Ces masses sont couplées entre elles par des fils de constantes de torsion de constantes de torsion c_1 , c_2 et c_3 . Sur la deuxième masse nous avons placé un moteur qui tourne avec une fréquence angulaire constante Ω .

Ce moteur introduit une amplification pour le second pendule figure 2.1.

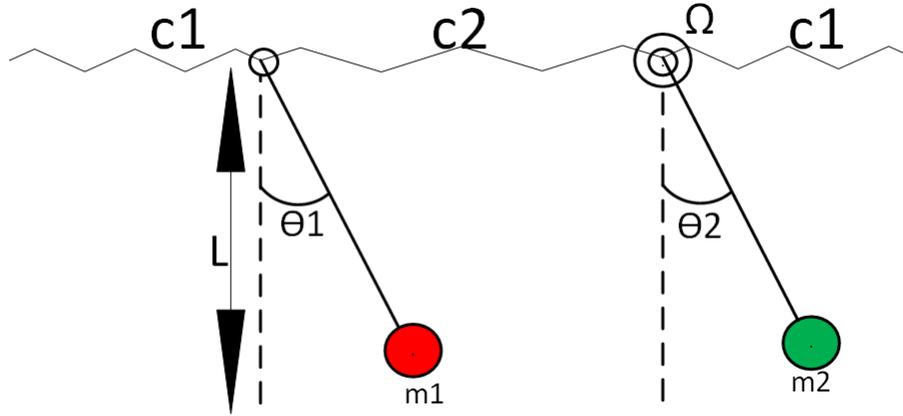


FIGURE 2.1 – pendules simples couplés par fil de torsion

2.1.1 Equation linéaire du dimère PTS

Pour retrouver les équations de la dynamique du système, nous utilisons la méthode de Lagrange : posons : $m_1=m_2=m$, $c_1=c_3$ et

$$\frac{c_2}{c_1} = x$$

L'énergie cinétique et potentielle du système sont respectivement données par :

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (2.1)$$

$$V = \frac{1}{2}c_1(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2}c_2(\theta_1^2 - \theta_2^2) - mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (2.2)$$

Le lagrangien du système est donnée par :

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}c_1(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}c_2(\theta_1^2 - \theta_2^2) + mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (2.3)$$

Avec θ_1 et θ_2 les déplacements angulaires des pendules. D'après le formalisme lagrangien ,le système d'équation du mouvement pour un système non conservatif est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\lambda_1 \dot{\theta}_1 \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\lambda_2 \dot{\theta}_2 - F(\Omega - \dot{\theta}_2) \quad (2.5)$$

où λ_1 et λ_2 représentent les coefficients d'amortissement et $F(\Omega - \dot{\theta}_2)$ la force délivrée par le moteur relié à la tige portant la masse m_2 . Cette force est fonction de la vitesse du moteur et de la vitesse relative de la masse m_2 . En faisant un développement limité à l'ordre 2 de cette force, on obtient : $F(\Omega) - \dot{\theta}_2 F'(\Omega)$ que nous remplaçons dans l'équation (2.5) du système et le système devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\lambda_1 \dot{\theta}_1 \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\lambda_2 \dot{\theta}_2 - F(\Omega) - \dot{\theta}_2 F'(\Omega) \quad (2.7)$$

En remplaçant le Lagrangien par son expression , en effectuant les différentes dérivées et en supposant θ petit c'est-à-dire $\sin \theta \approx \theta$ le système précédent devient :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\lambda_1}{ml^2} \dot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c_1}{ml^2}\right) \theta_1 + \frac{c_2}{ml^2} (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2.8)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{(\lambda_2 + F'(\Omega))}{ml^2} \dot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c_1}{ml^2}\right) \theta_2 + \frac{c_2}{ml^2} (\theta_2 - \theta_1) = \frac{F(\Omega)}{ml^2} \quad (2.9)$$

Si nous choisissons de mesurer les angles par rapport à leurs positions d'équilibre , nous pouvons alors remplacer θ_1 et θ_2 par $\theta_1 + \epsilon_1$ et $\theta_2 + \epsilon_2$ dans le système précédent. Avec ϵ_1 et ϵ_2 désignent les valeurs des angles à l'équilibre ainsi on aura :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\lambda_1}{ml^2} \dot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c_1}{ml^2}\right) \theta_1 + \frac{c_2}{ml^2} (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2.10)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{(\lambda_2 + F'(\Omega))}{ml^2} \dot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{c_1}{ml^2}\right) \theta_2 + \frac{c_2}{ml^2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (2.11)$$

posons : $\gamma_1 = \frac{\lambda_1}{ml^2 \omega_0}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2 + F'(\Omega)}{ml^2 \omega_0}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\kappa = \frac{c_2}{ml^2 \omega_0^2}$, $\tau = \omega_0 t$ Le système

devient :

$$\ddot{\theta}_1 + \gamma_1 \dot{\theta}_1 + \left(1 + \frac{\kappa}{x}\right) \theta_1 + \kappa (\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2.12)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \gamma_2 \dot{\theta}_2 + \left(1 + \frac{\kappa}{x}\right)\theta_2 + \kappa(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (2.13)$$

Où ω_0 représente la pulsation propre du système alors que γ_1, γ_2 Représentent les coefficients 'loss' et 'gain'.

2.1.2 Modes propres et seuils de transitions

Pour résoudre notre système afin de trouver les valeurs propres du système ainsi que les différentes solutions, nous prendrons les solutions sous la forme d'une onde plane où seule la partie temporelle est prise en compte :

$$\theta_1(t) = Ae^{(i\omega t)} \quad (2.14)$$

$$\theta_2(t) = Be^{(i\omega t)} \quad (2.15)$$

A et B représentent les amplitudes et ω la fréquence. En effectuant les différentes dérivées que l'on reporte dans notre système, on obtient :

$$\left(-\omega^2 + i\omega\gamma_1 + \left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right)\right)A - \kappa B = 0 \quad (2.16)$$

$$-\kappa A + \left(-\omega^2 + i\omega\gamma_2 + \left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right)\right)B = 0 \quad (2.17)$$

Ce système admet des racines non triviales si et seulement si son déterminant est nulle, on a donc :

$$\omega^4 + ia\omega^3 + b\omega^2 + ic\omega + d = 0 \quad (2.18)$$

Avec : $a = -(\gamma_1 + \gamma_2)$, $b = -(2(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}) + \gamma_1\gamma_2)$, $c = (\gamma_1 + \gamma_2)(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x})$,
 $d = (1 + \kappa + \frac{\kappa}{x})^2 - \kappa^2$

les solutions réelles sont obtenues pour :

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$(\gamma_1 + \gamma_2)\left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right) = 0 \quad (2.20)$$

Les conditions des equations (2.19) et (2.20) conduisent à la relation :

$$\gamma_1 = -\gamma_2 \quad (2.21)$$

posons : $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$

En utilisant la relation $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$ dans l'équation (2.18) nous avons la nouvelle équation :

$$\omega^4 + b\omega^2 + d = 0 \quad (2.22)$$

Les nouvelles expressions de b et d sont données par : $b = -(2(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}) + \gamma^2)$
 $d = (1 + \kappa + \frac{\kappa}{x})^2 - \kappa^2$. Après résolution de l'équation 2.22, on obtient les solutions suivantes :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4d}}{2}} \quad (2.23)$$

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4d}}{2}} \quad (2.24)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4d}}{2}} \quad (2.25)$$

$$\omega_4 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4d}}{2}} \quad (2.26)$$

Nous pouvons dès à présent trouver les seuils de transitions de notre système en résolvant tout simplement l'équation :

$b^2 - 4d = 0$ avec pour variable γ qui est le paramètre gain/perte .

Cette équation est : $\gamma^4 - 4(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x})\gamma^2 + 4\kappa^2 = 0$

Après résolution de cette équation, nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$\gamma_{th1} = \sqrt{2(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}) - 2\sqrt{(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x})^2 - \kappa^2}} \quad (2.27)$$

$$\gamma_{th2} = \sqrt{2\left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right) + 2\sqrt{\left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right)^2 - \kappa^2}} \quad (2.28)$$

Tels sont les seuils de transitions de notre système. Nous avons rejeté les valeurs négatives car nous travaillons dans un domaine positif.

2.1.3 Résolution analytique

Nous savons que les equations du mouvement de notre système sont données par les équations (2.12) et (2.13)

Soient les matrices

$$D = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}$$

posons $\dot{\theta}_1 = p_1$, $\dot{\theta}_2 = p_2$, $\dot{\phi}_1 = (\dot{\theta}_1, \dot{p}_1, \dot{\theta}_2, \dot{p}_2)$ et $\phi_1 = (\theta_1, p_1, \theta_2, p_2)$ En considérant le système constitué des équations (2.12) et (2.13) nous avons la relation :

$$\frac{d\phi}{dt} = L\phi$$

D étant la matrice diagonale de L , nous pouvons écrire : $L = VDV^{-1}$

nous avons la nouvelle relation :

$$\frac{d\phi}{dt} = VDV^{-1}\phi \quad (2.29)$$

soit $\psi = V^{-1}\phi$ on a :

$$\frac{d\psi}{dt} = D\psi \quad (2.30)$$

Sous forme indicielle nous avons la solution : $\psi_k = C_k e^{\omega_k t}$ alors $\psi_k = \sum_{n=1}^N V_{kn} \psi_n = \sum_{n=1}^N V_{kn} C_n e^{\omega_n t}$

Nous considerons comme condition initiale : $B = (\theta_{10}, p_{10}, \theta_{20}, p_{20})$

Ce qui nous donne la relation : $C = \frac{B}{V}$ Les solutions sont données par les équations :

$$\theta_1 = v_{11}c_1 e^{i\omega_1 t} + v_{12}c_2 e^{i\omega_2 t} + v_{13}c_3 e^{i\omega_3 t} + v_{14}c_4 e^{i\omega_4 t} \quad (2.31)$$

$$P_1 = v_{21}c_1 e^{i\omega_1 t} + v_{22}c_2 e^{i\omega_2 t} + v_{23}c_3 e^{i\omega_3 t} + v_{24}c_4 e^{i\omega_4 t} \quad (2.32)$$

$$\theta_2 = v_{31}c_1 e^{i\omega_1 t} + v_{32}c_2 e^{i\omega_2 t} + v_{33}c_3 e^{i\omega_3 t} + v_{34}c_4 e^{i\omega_4 t} \quad (2.33)$$

$$P_2 = v_{41}c_1 e^{i\omega_1 t} + v_{42}c_2 e^{i\omega_2 t} + v_{43}c_3 e^{i\omega_3 t} + v_{44}c_4 e^{i\omega_4 t} \quad (2.34)$$

La fréquence de Rabi et de battement correspondant aux oscillations de notre système sont données par : $W_{R1} = \frac{\omega_1 - \omega_3}{2}$ et $W_{R2} = \frac{\omega_1 + \omega_3}{2}$

2.1.4 Equations non-linéaire du dimer PTS

En utilisant ce qui précède, nous allons introduire la non-linéarité d'une manière générale. En effectuant un développement limité de $\cos \theta$ a l'ordre 6 autour de 0 et en introduisant la non linéarité dans les fils de torsion nous obtenons l'expression du nouveau lagrangien qui est :

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}c_{11}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{4}c_{13}(\theta_1^4 - \theta_2^4) - \frac{1}{6}c_{15}(\theta_1^6 - \theta_2^6) \\ & + mgl(2 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{24}(\theta_1^4 + \theta_2^4) + \frac{1}{720}c_{13}(\theta_1^6 + \theta_2^6)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Les équations du mouvement sont données par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\lambda_1 \dot{\theta}_1 \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\lambda_2 \dot{\theta}_2 - F(\Omega - \dot{\theta}_2) \quad (2.37)$$

Posons :

$$\frac{c_2}{c_{11}} = x, \mu_{13} = \frac{c_{13}}{ml^2\omega_0^2}, \mu_{15} = \frac{c_{15}}{ml^2\omega_0^2}$$

En effectuant les différentes dérivées et en considérant tout ce que nous avons posés précédemment nous obtenons les nouvelles équations suivantes :

$$\ddot{\theta}_1 + \gamma_1 \dot{\theta}_1 + \left(1 + \frac{\kappa}{x}\right)\theta_1 + \kappa(\theta_1 - \theta_2) + \left(\mu_{13} - \frac{1}{6}\right)\theta_1^3 + \left(\mu_{15} + \frac{1}{120}\right)\theta_1^5 = 0 \quad (2.38)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \gamma_2 \dot{\theta}_2 + \left(1 + \frac{\kappa}{x}\right)\theta_2 + \kappa(\theta_2 - \theta_1) + \left(\mu_{13} - \frac{1}{6}\right)\theta_2^3 + \left(\mu_{15} + \frac{1}{120}\right)\theta_2^5 = 0 \quad (2.39)$$

2.1.5 Résolution numérique

Pour le modèle non-linéaire, nous allons l'étudier à l'aide du schéma numérique de Runge Kutta d'ordre 4 et du logiciel MATLAB.

2.2 Etude de la chaîne

2.2.1 Etude de la chaîne

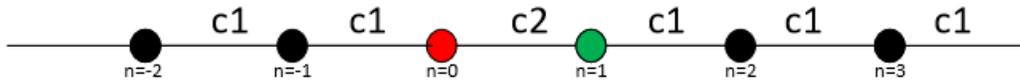


FIGURE 2.2 – Chaîne de pendules contenant le dimère

Les équations de la chaîne sont données par les équations suivantes :

$$\ddot{\theta}_0 + \gamma \dot{\theta}_0 + \left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right)\theta_0 - \frac{\kappa}{x}\theta_{-1} - \kappa\theta_1 n = 0 \quad (2.40)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \gamma \dot{\theta}_1 + \left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right)\theta_1 - \frac{\kappa}{x}\theta_2 - \kappa\theta_0 n = 1 \quad (2.41)$$

$$\ddot{\theta}_n + \left(1 + 2\frac{\kappa}{x}\right)\theta_n - \frac{\kappa}{x}\theta_{n+1} - \frac{\kappa}{x}\theta_{n-1}n \neq 0, 1 \quad (2.42)$$

2.2.2 Relation de dispersion

Prenons notre solution sous la forme d'une onde plane : $\theta_n = Ue^{i(k*n-\omega t)}$. En remplaçant dans l'équation 2.36 nous obtenons la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = 1 + 4\frac{\kappa}{x}\left(\sin\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2 \quad (2.43)$$

2.2.3 Coefficients de transmission et reflexion

Cherchons les solutions sous la forme des equations 2.38 et 2.39 :

$$\theta_n = \theta_L^+ e^{i(k*n-\omega t)} + \theta_L^- e^{i(-k*n-\omega t)} \quad n \leq 0 \quad (2.44)$$

$$\theta_n = \theta_R^+ e^{i(k*n-\omega t)} + \theta_R^- e^{i(-k*n-\omega t)} \quad n \geq 1 \quad (2.45)$$

En remplaçant les équations 2.38 et 2.39 dans les équations 2.35 et 2.36 nous obtenons les équations suivantes :

$$\kappa e^{ik}\theta_R^+ + \left(A + \frac{\kappa}{x}e^{ik}\right)\theta_L^- = -\left(A + \frac{\kappa}{x}e^{-ik}\right)\theta_L^+ - \kappa e^{-ik}\theta_R^- \quad (2.46)$$

$$e^{ik}\left(A^* - \frac{\kappa}{x}e^{ik}\right)\theta_R^+ - \kappa\theta_L^- = \kappa\theta_L^+ - e^{-ik}\left(A^* - \frac{\kappa}{x}e^{-ik}\right)\theta_R^- \quad (2.47)$$

Avec $A = \omega^2 + i\gamma\omega - \left(1 + \kappa + \frac{\kappa}{x}\right)$ et A^* est le conjugué de A .

Mettons ce système sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \theta_R^+ \\ \theta_L^- \end{pmatrix} = M_1^{-1}M_2 \begin{pmatrix} \theta_L^+ \\ \theta_R^- \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \kappa e^{ik} & \left(A + \frac{\kappa}{x}e^{ik}\right) \\ e^{ik}\left(-A^* - \frac{\kappa}{x}e^{ik}\right) & -\kappa \end{pmatrix}$$

$$M_1^{-1} = \frac{1}{\det M_1} \begin{pmatrix} -\kappa & (A + \frac{\kappa}{x}e^{ik}) \\ -e^{ik}(-A^* - \frac{\kappa}{x}e^{ik}) & \kappa e^{ik} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -(A + \frac{\kappa}{x}e^{-ik}) & -\kappa e^{-ik} \\ \kappa & -e^{-ik}(-A^* - \frac{\kappa}{x}e^{-ik}) \end{pmatrix}$$

$$\det M_1 = e^{ik}(A + \frac{\kappa}{x}e^{ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik}) - \kappa^2 e^{ik} \quad (2.49)$$

Nous obtenons la relation suivante :

$$M_1^{-1}M_2 = \frac{1}{\det M_1} \begin{pmatrix} -2i\frac{\kappa^2}{x}\sin(k) & e^{-ik}(\kappa^2 - (A + \frac{\kappa}{x}e^{ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{-ik})) \\ e^{ik}(\kappa^2 - (A + \frac{\kappa}{x}e^{-ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik})) & -2i\frac{\kappa^2}{x}\sin(k) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Les coefficients de transmissions gauche et droite sont égaux. Ils représentent les éléments de la diagonale principale de la relation (2.48), ils sont donnés par l'équation (2.49) :

$$T = T_r = T_l = \frac{-2i(\frac{\kappa^2}{x})e^{ik}\sin(k)}{(A + \frac{\kappa}{x}e^{ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik}) - \kappa^2} \quad (2.51)$$

Les coefficients de réflexions gauche et droite représentent les éléments de la deuxième diagonale, ils sont donnés par les équations (2.50) et (2.49) :

$$R_l = \frac{\kappa^2 - (A + \frac{\kappa}{x}e^{-ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik})}{(A + \frac{\kappa}{x}e^{ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik}) - \kappa^2} \quad (2.52)$$

$$R_r = \frac{(\kappa^2 - (A + \frac{\kappa}{x}e^{-ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik}))e^{-2ik}}{(A + \frac{\kappa}{x}e^{ik})(A^* + \frac{\kappa}{x}e^{ik}) - \kappa^2} \quad (2.53)$$

2.2.4 Points exceptionnelles

Pour déterminer ces points correspondants aux pics de résonance, nous allons résoudre l'équation $\det M_1 = 0$.

En posant la partie imaginaire et réelle égale à zero. Nous obtenons les relations suivantes :

$$\cos(k) = 1 - x \quad (2.54)$$

$$\gamma_r^2 = \frac{2\frac{\kappa}{x}(\kappa + \frac{\kappa}{x} - 1)}{(1 + 2\kappa)^2} \quad (2.55)$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le matériel et les méthodes utilisées pour l'étude de notre système. Dans la suite nous montrerons les résultats issus du traitement analytique et numérique des solutions des équations linéaires et non-linéaires et des coefficients de transmission et reflexion.

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats issus de la simulation numérique des solutions des équations dans le cas linéaire et non-linéaire. Nous analysons l'influence des paramètres de la structure sur ces solutions. Le modèle est ensuite inséré une chaîne de pendules. Une étude est faite sur son impact dans la chaîne comme impureté.

3.1 Résultats dans le cas linéaire**3.1.1 Modes propres**

La représentation des quatre modes de vibration en fonction de γ qui est le paramètre gain/perte et des différentes valeurs de $x=0.1, 0.7, 1, 1.5, 2$ et $\kappa=0.9$ est donnée par la figures 3.1

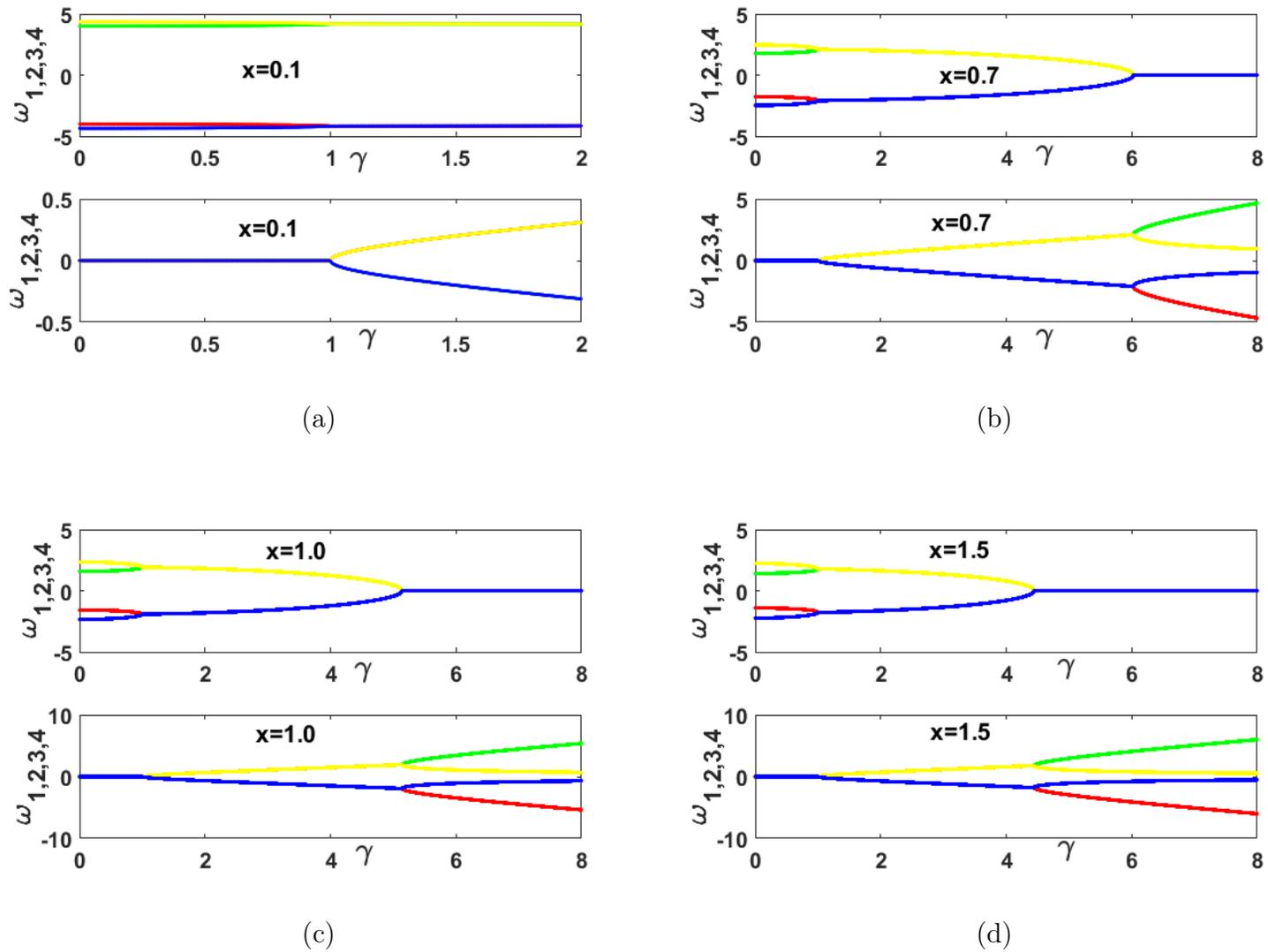


FIGURE 3.1 – Modes propres pour (a) $x=0.1$, (b) $x=0.7$, (c) $x=1.0$ et (d) $x=1.5$. Sur chaque figure, le cadran du haut représente la partie réelle et celui du bas la partie imaginaire

Nous observons que avant la première transition le spectre est réel ; entre la première et la deuxième transition le spectre est complexe et au delà de la deuxième transition, il est imaginaire pur. Nous pouvons en plus de cela dire que lorsque le paramètre x augmente l'écart entre la première et la seconde transition diminue.

3.1.2 Seuils de transistion

La représentation des seuils de transitions est donnée par la figure 3.2 :

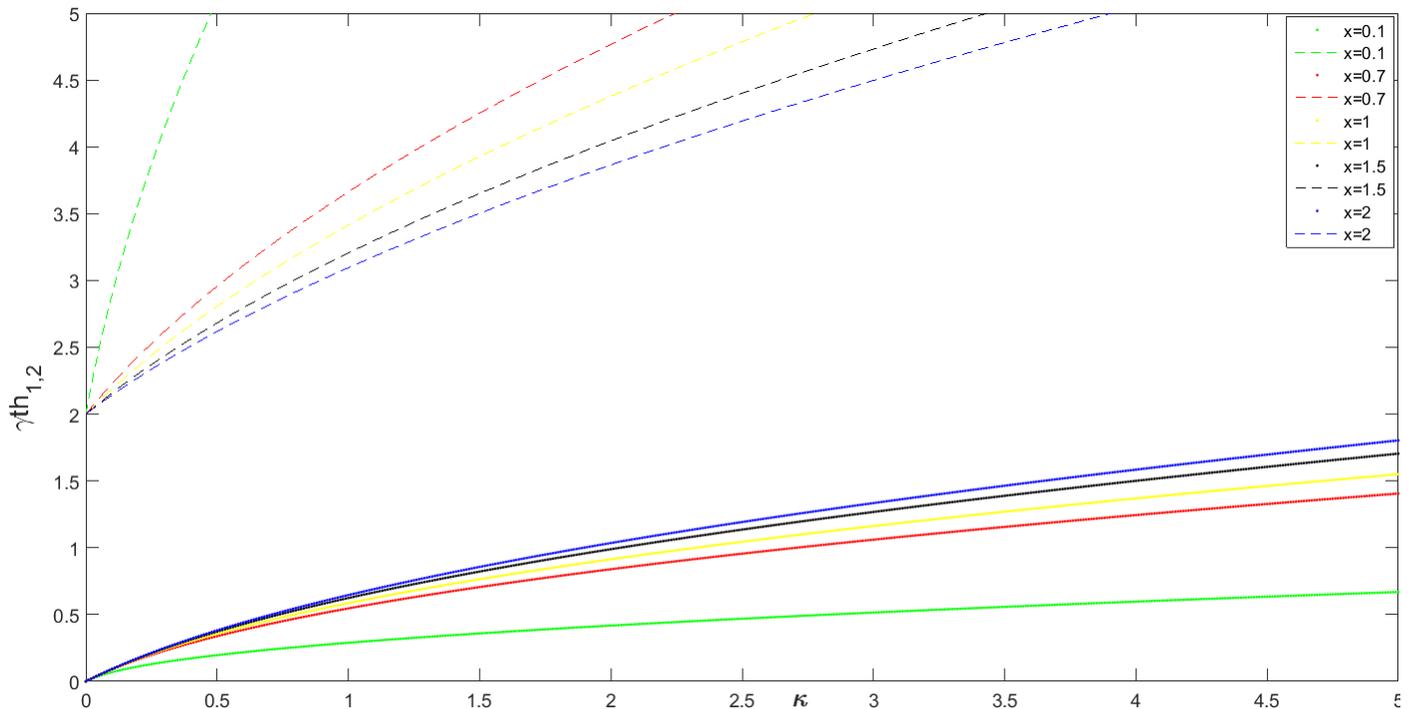


FIGURE 3.2 – Evolution de γ en fonction de κ pour $x=0.1$, 0.7 , 1.0 , 1.5 , 2 ; Les courbes qui ont pour origine celui du repère représentent les γ_{th1} et celles qui ont pour origine l'axe des ordonnés, représentent les γ_{th2} .

Nous observons que lorsque x augmente l'amplitude de γ_{th1} augmente tandis que celle de γ_{th2} diminue. L'écart entre γ_{th1} et γ_{th2} diminue lorsque le paramètre x augmente. L'ordonnée à l'origine des γ_{th1} est nul alors que celle des γ_{th2} est égale à 2.

3.2 Solutions du cas linéaire

3.2.1 Fréquence de Rabi et du système

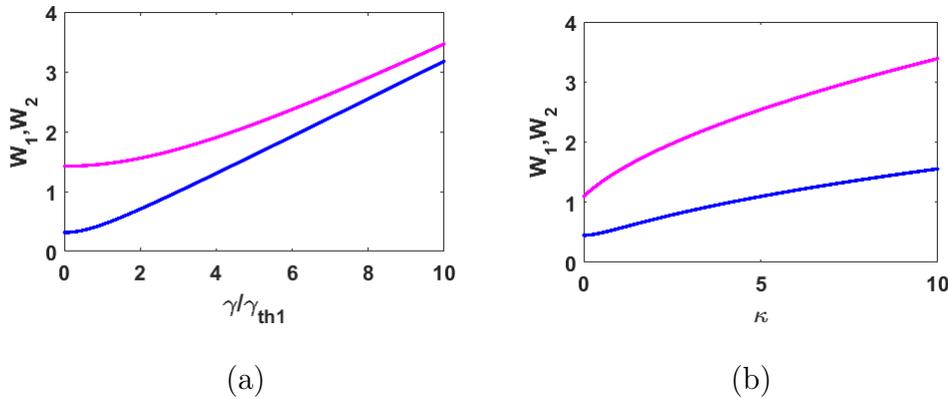


FIGURE 3.3 – (a)Variation de la fréquence de Rabi(bleu) et du système(rose) en fonctions de γ , (b)Variation de la fréquence de Rabi(bleu) et du système(rose) en fonctions de κ

Nous pouvons dire que la fréquence de rabi et celle du système croient en fonction du paramètre γ et κ . Lorsque γ augmente l'écart entre ces deux courbes diminue alors que cet écart augmente lorsque κ augmente cet écart augmente. Dans les deux cas de figures la fréquence du système est toujours supérieure a celle du Rabi.

3.2.2 Evolutions temporelles pour les deux masses

Les courbes des évolutions temporelles des deux masses sont représentées par la figure 3.4

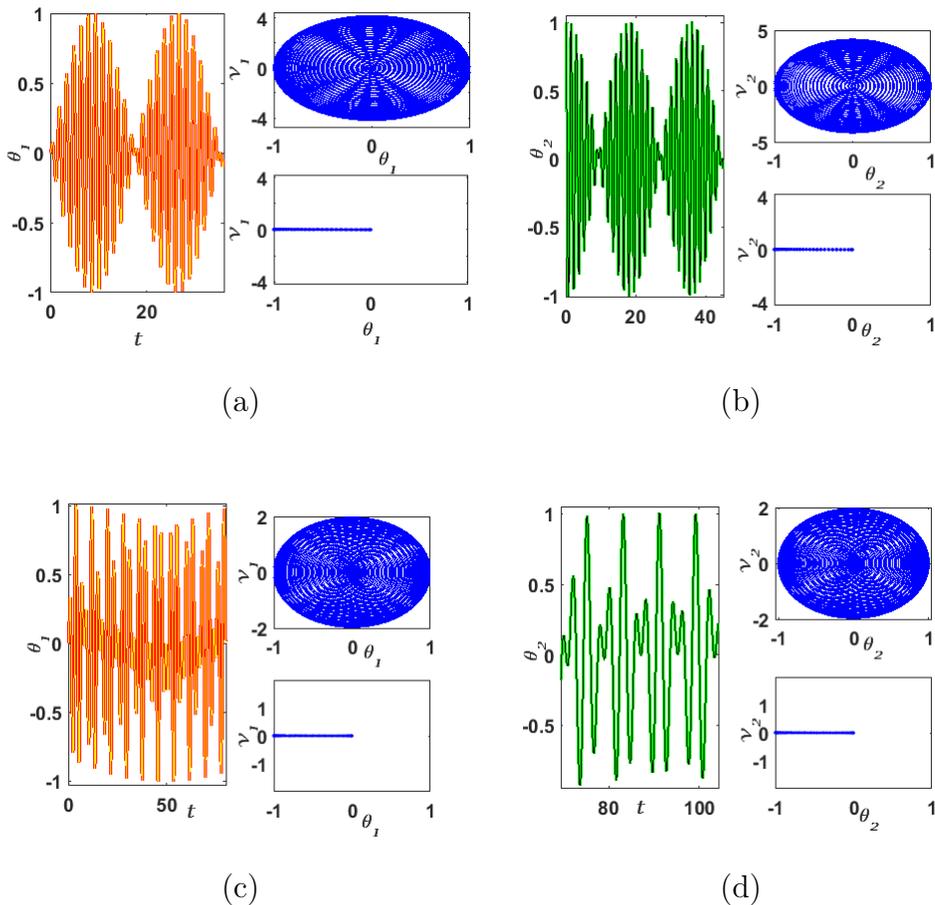


FIGURE 3.4 – Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases de la masse une (m_1) (jaune et rouge) et deux (m_2) (vert et noir) pour différentes valeurs de x à 10% du seuil de transition dans le cas linéaire : (a) et (b) pour $x=0.1$; (c) et (d) pour $x=1$

Nous pouvons dire que lorsque nous sommes à 10% du seuil de transition le système oscille et la solution analytique est bien en accord avec la solution numérique. Nous constatons également que lorsque le paramètre x augmente période des oscillations augmente, l'amplitude augmente et la fréquence diminue.

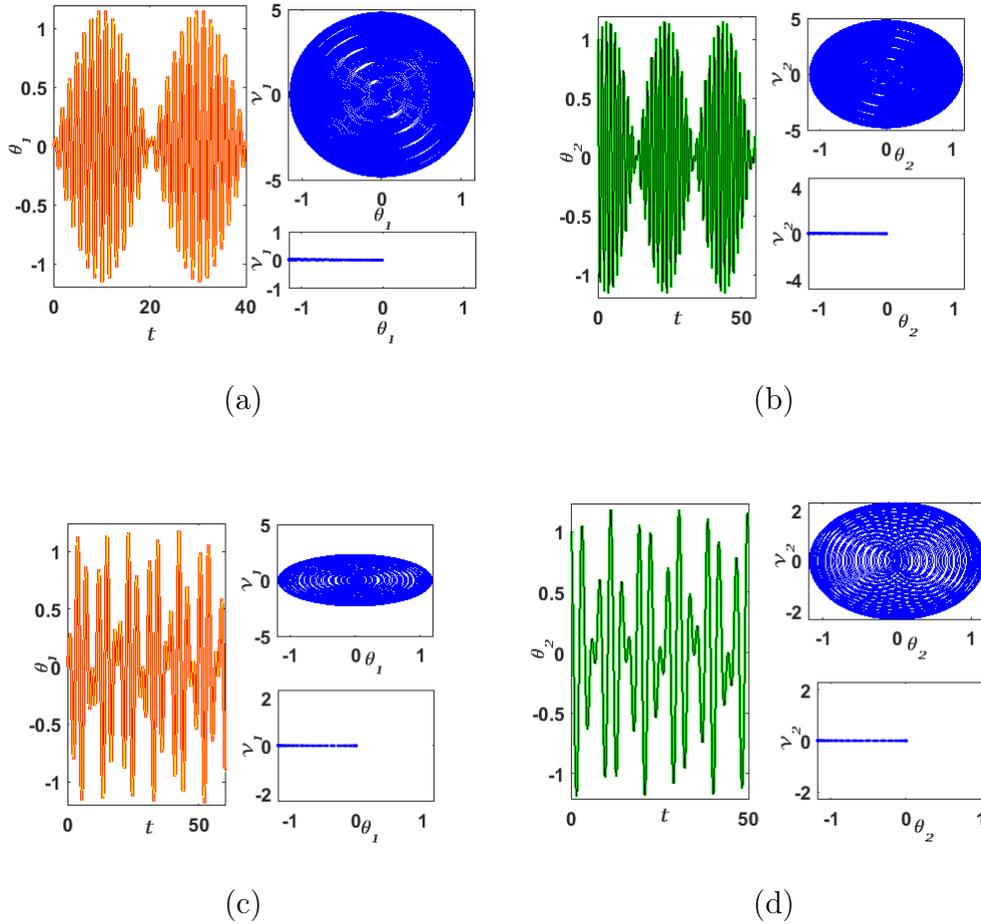


FIGURE 3.5 – Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases de la masse une (m_1) (jaune et rouge) et deux (m_2) (vert et noir) pour différentes valeurs de x à 50% du seuil de transition dans le cas linéaire : (a) et (b) pour $x = 0.1$; (c) et (d) pour $x = 1$

Nous remarquons qu'à 50% du seuil de transition le système oscille et la solution analytique est bien en accord avec la solution numérique. Lorsque le paramètre x augmente période des oscillations augmente, l'amplitude augmente et par conséquent la fréquence diminue.

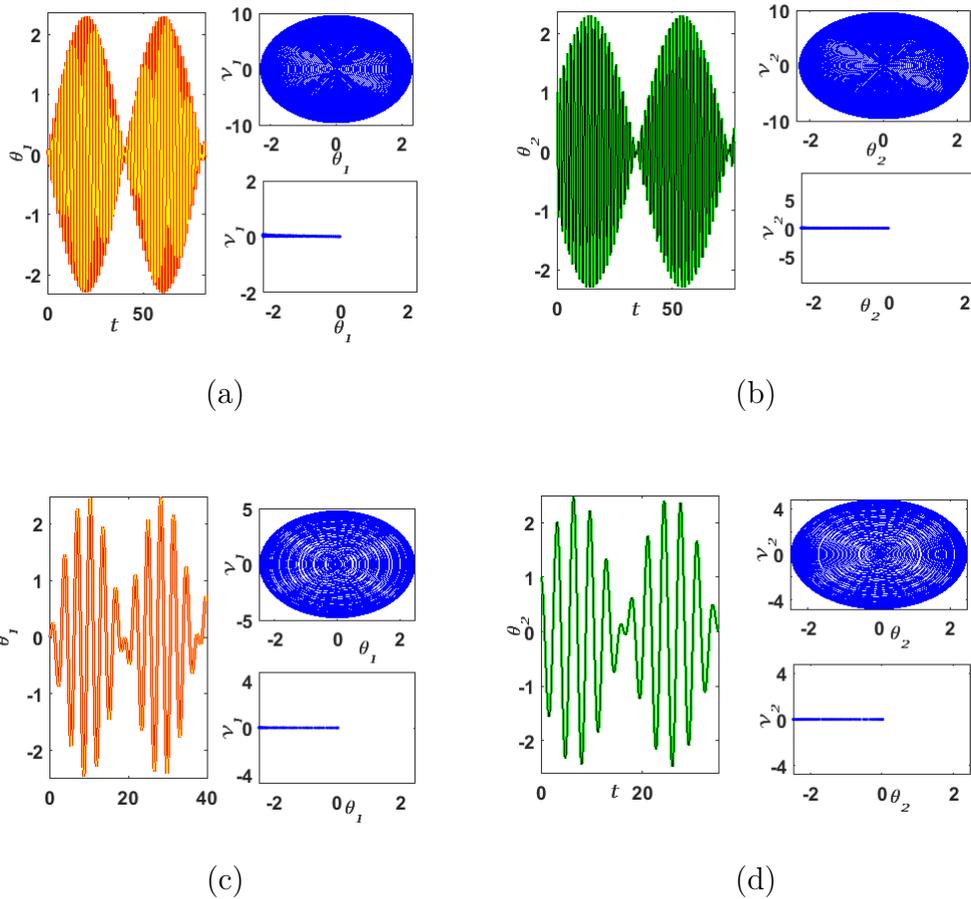


FIGURE 3.6 – Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases de la masse une (m_1) (jaune et rouge) et deux (m_2) (vert et noir) pour différentes valeurs de x à 90% du seuil de transition dans le cas linéaire : (a) et (b) pour $x=0.1$; (c) et (d) pour $x=1$

A 90% du seuil de transition le système oscille, la solution analytique est bien en accord avec la solution numérique et nous avons dans ce cas les oscillations de Rabi. Nous constatons également que lorsque le paramètre x augmente la période des oscillations augmente, l'amplitude augmente et par conséquent la fréquence diminue. Lorsqu'on dépasse le seuil de transition c'est-à-dire à partir de 101% on constate que notre système n'oscille plus, l'amplitude des oscillations croît exponentiellement.

3.3 Solutions du cas non-linéaire

3.3.1 Evolutions temporelles

Non-linéarité cubique

Les courbes d'évolution temporelle dans le cas non-linéaire sont données par les figures suivantes :

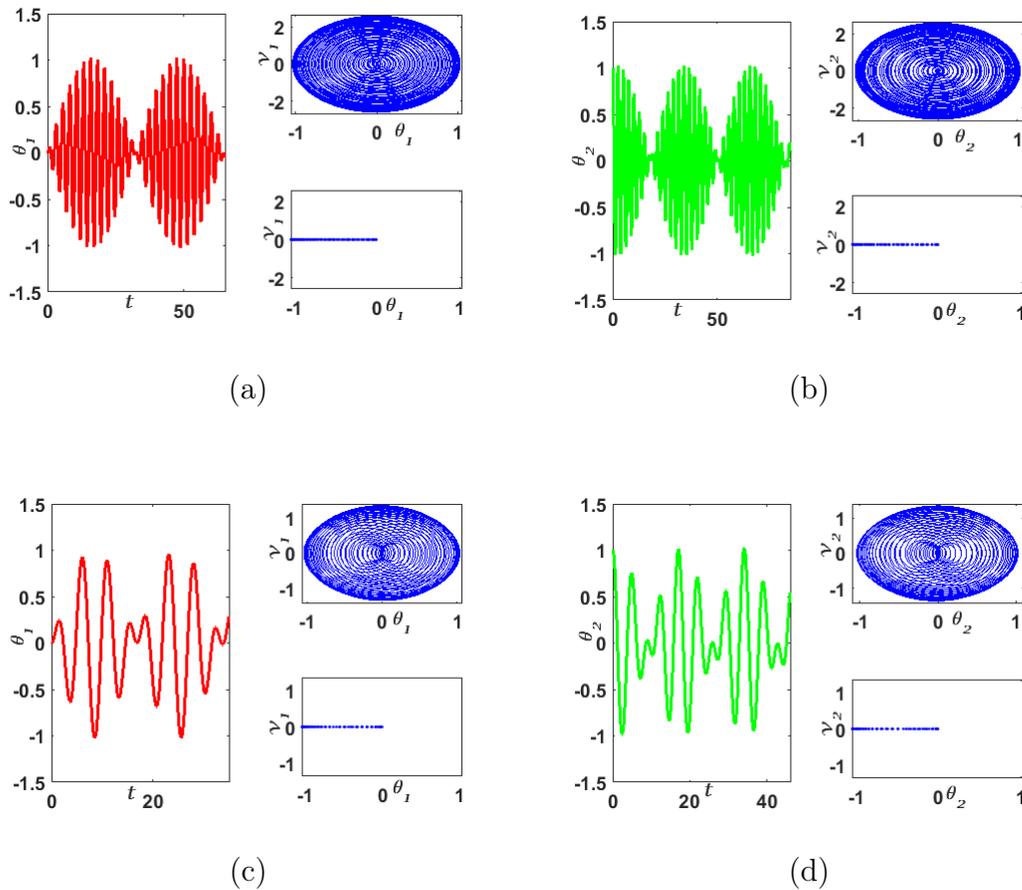


FIGURE 3.7 – Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases des masses une(rouge) et deux(vert) pour différentes valeurs de x à 10% du seuil de transition dans le cas non-linéaire : (a) et (b) pour $x=0.1$; (c) et (d) pour $x=1$, $\mu_{13}=0.5$ et $\mu_{15}=0$

Nous remarquons que lorsque nous sommes à 10% du seuil de transition le système oscille, ce qui est en accord avec les portraits de phases, on observe uni-

quement la solution numérique. Nous constatons également que lorsque le paramètre x augmente période des oscillations diminue, l'amplitude varie de manière oscillatoire et par conséquent la fréquence augmente.

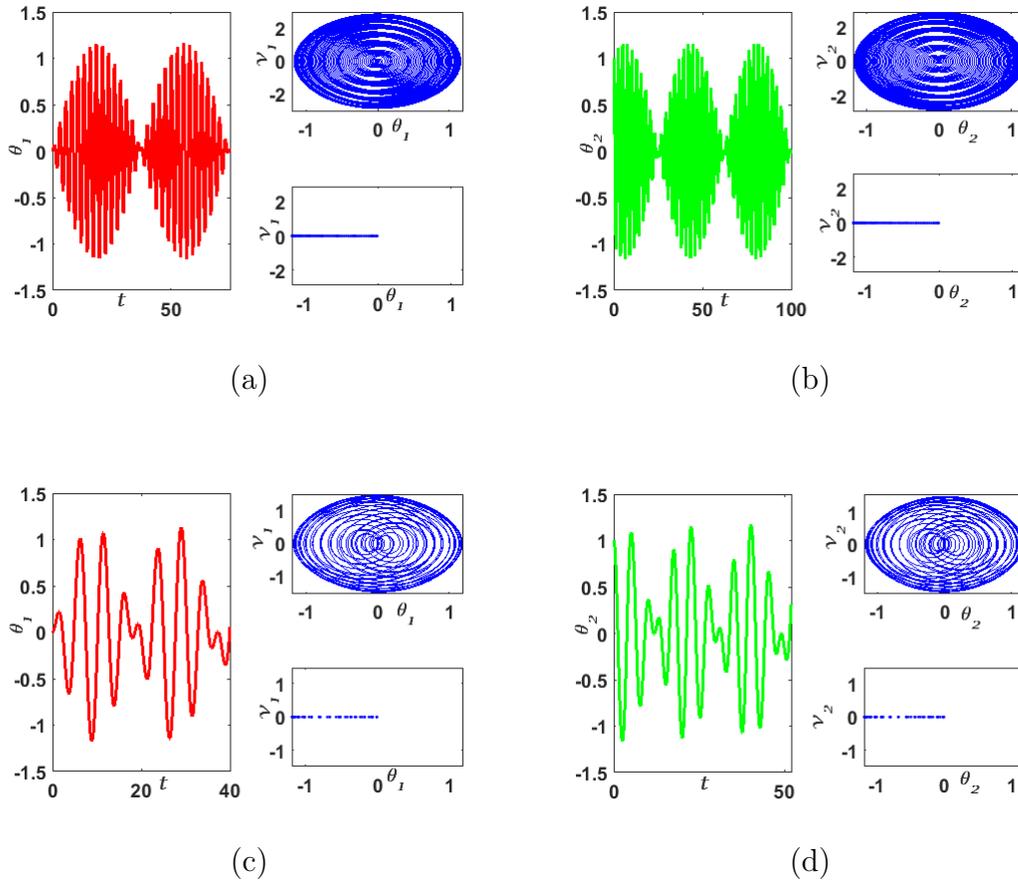


FIGURE 3.8 – Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases des masses une(rouge) et deux(vert) pour différentes valeurs de x à 25% du seuil de transition dans le cas non-linéaire : (a) et (b) pour $x=0.1$; (c) et (d) pour $x=1$, $\mu_{13} = 0.5$ et $\mu_{15} = 0$

Dans ce cas nous sommes à 25% du seuil de transition et le système oscille, ce qui est bien observé au niveau des portraits de phases, seul la solution numérique est observée. Nous constatons également que lorsque le paramètre x augmente période des oscillations diminue, l'amplitude varie de manière oscillatoire et par conséquent la fréquence augmente.

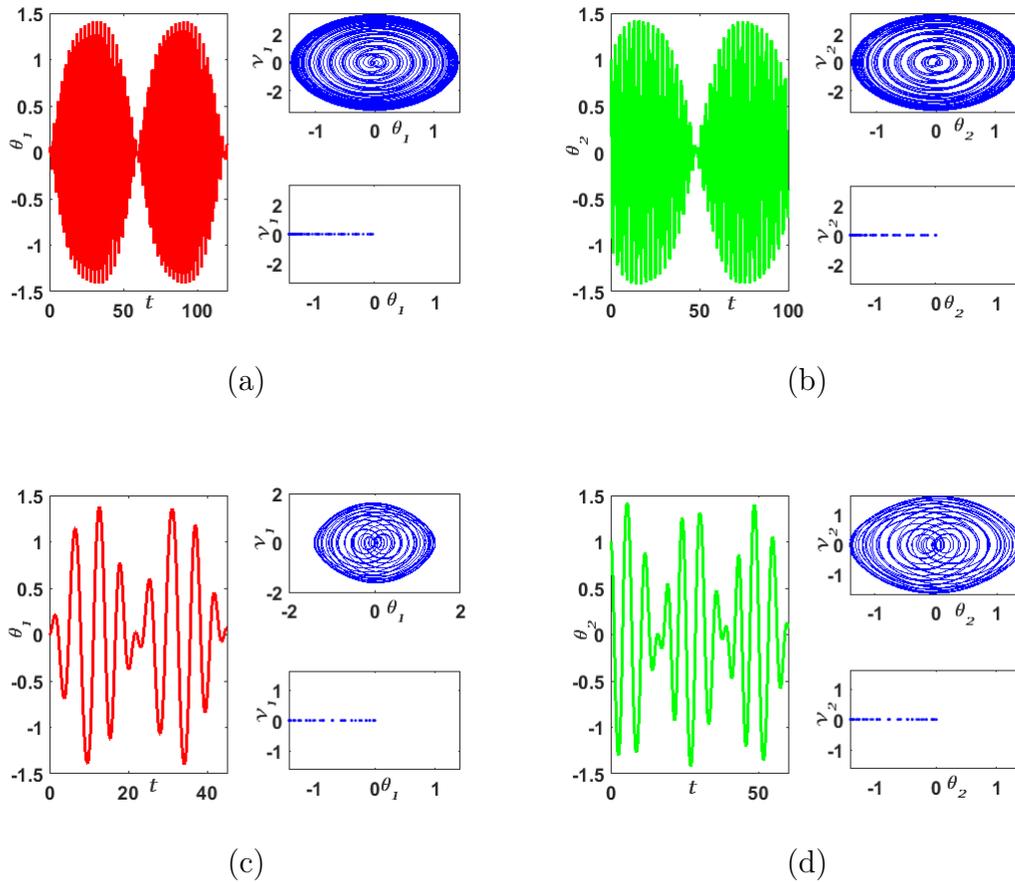


FIGURE 3.9 – Evolution temporelle, de la section des points carrés et du portrait des phases des masses une(jaune) et deux(vert) pour différentes valeurs de x à 34% du seuil de transition dans le cas non-linéaire : (a) et (b) pour $x=0.1$; (c) et (d) pour $x=1$, $\mu_{13} = 0.5$ et $\mu_{15} = 0$

Ici, lorsque nous sommes à 34% du seuil de transition le système oscille, ce qui est bien observé au niveau des portraits de phases de plus, on observons uniquement la solution numérique. Nous constatons également que lorsque le paramètre x augmente période des oscillations diminue, l'amplitude varie de manière oscillatoire et par conséquent la fréquence augmente. A partir de 35% du seuil de transition le système n'oscille plus il se rompre. On constate que la non-linéarité cubique a rapproché la limite du seuil de transition pour lequel le système oscille.

3.3.2 Solutions symétriques ,anti-symétriques et asymétriques

Le tracé des points fixes est donné par la figure :

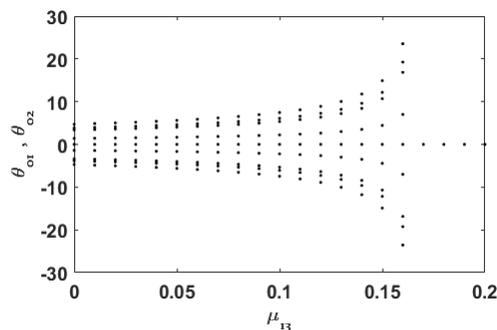
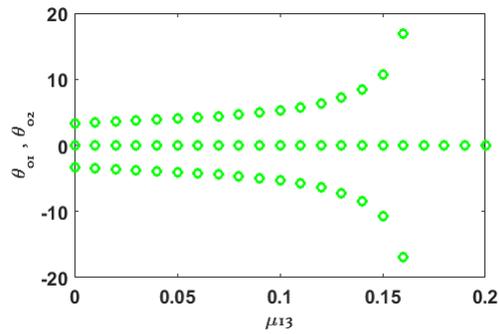
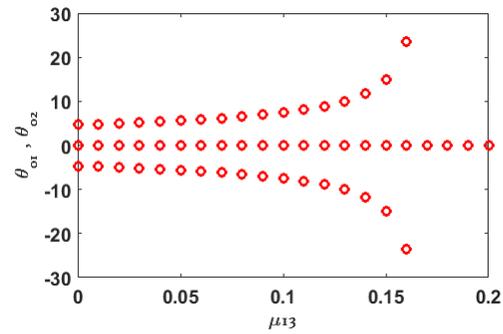


FIGURE 3.10 – Points fixes dans le cas cubique

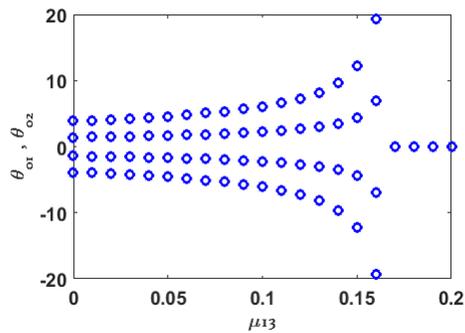
Nous avons obtenu neuf solutions dans le cas de notre non-linéarité cubique. Ces solutions sont symétriques par rapport à la droite horizontale passant par l'origine. On observe des solutions qui ont une évolution croissante, décroissante et même constante.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.11 – Représentation des points fixes : (a) dans le cas symétrique, (b) dans le cas anti-symétrique (c) dans le cas asymétrique

Cette figure présente les différentes solutions obtenues pour les points fixes dans le cas cubique.

Nous observons ici les différentes solutions symétrique, anti-symétrique et asymétrique, nous avons neuf solutions.

La superposition de toutes ces solutions sont données par la figure qui suit :

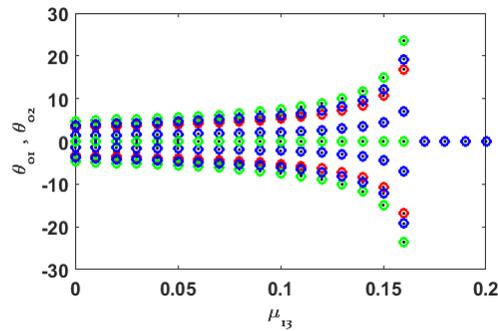


FIGURE 3.12 – Superposition des solutions symétriques asymétriques et anti-symétriques

Cette figure nous montre que les solutions trouvés analytiquement sont correctes puisque ces solutions sont en accord avec la solution numérique une superposition parfaite de ces solutions dans le cas analytique et numérique.

3.3.3 Courbes de la stabilité

Les courbes de stabilité sont données par les figures suivantes :

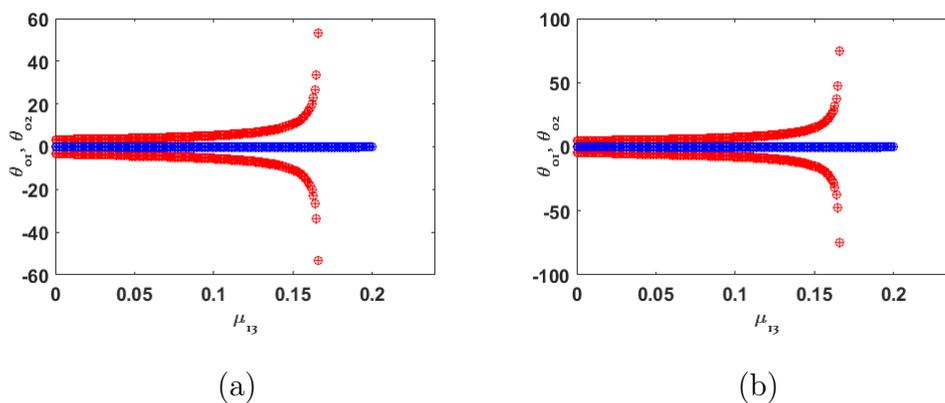


FIGURE 3.13 – Représentation des courbes de la stabilité de notre système : (a) dans le cas symétrique, (b) dans le cas anti-symétrique, (c) dans le cas asymétrique

Ces figures montrent que, dans le cas des solutions symétriques certains points sont stables tandis que d'autres sont instables, il en est de même dans le cas des

solutions anti-symétriques.

3.4 Coefficients de transmission et réflexion

3.4.1 Coefficients de transmission et réflexion

Les courbes des coefficients de transmission et de réflexion sont données par la figure 3.17 ; où nous observons les pics de nature différentes de part et d'autre d'une part et d'autre part nous observons les pics de même nature du même coté. on obtient les courbes représentées ci-dessous :

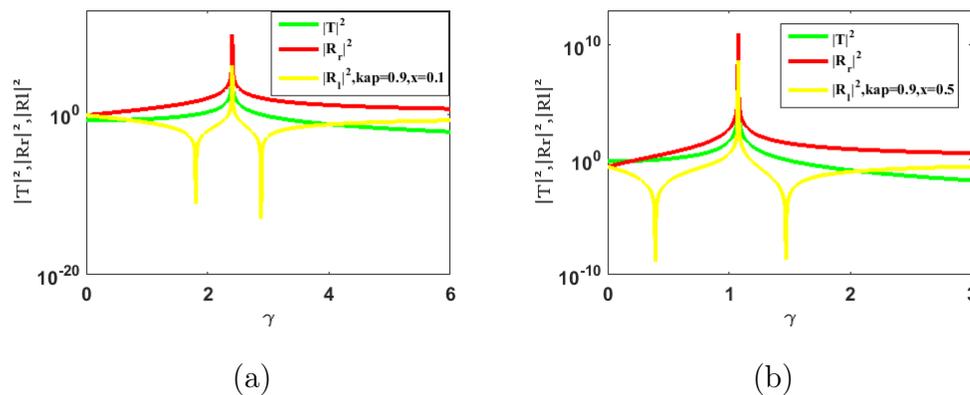


FIGURE 3.14 – Evolution des coefficients de transmission et de réflexion avec deux pics de même nature du même coté : pour $\kappa = 0.9$ (a) $x=0.1$; (b) $x=0.5$

Les pics obtenus qui sont dirigés vers le bas montrent que pour ces valeurs de γ on a une réflexion nulle du côté gauche. Le système introduit dans la chaîne se comporte alors comme neutre. Ce phénomène est observable pour $x \in]0 ; 1[$.

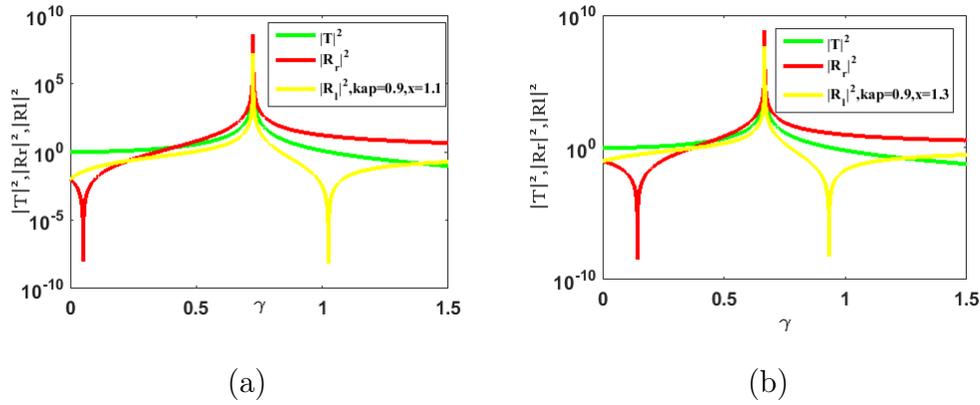


FIGURE 3.15 – Evolution des coefficients de transmission et de réflexion avec deux pics de même nature de différents coté : pour $\kappa = 0.9$ (a) $x=1.1$; (b) $x=1.5$

Ces courbes expliquent que, les pics obtenus qui sont dirigés vers le bas sont définis pour des réflexions nulles réflexion nulle du côté gauche et du côté droit on aura donc une transmission totale en ces points particuliers. Ce phénomène est observable pour $x \in]1; 2[$. Au delà de $x \geq 2$, on observe plus ce phénomène.

3.4.2 Seuils de transistions à la résonance

La représentation des seuils de transistions en fonction de x et κ est donnée par :

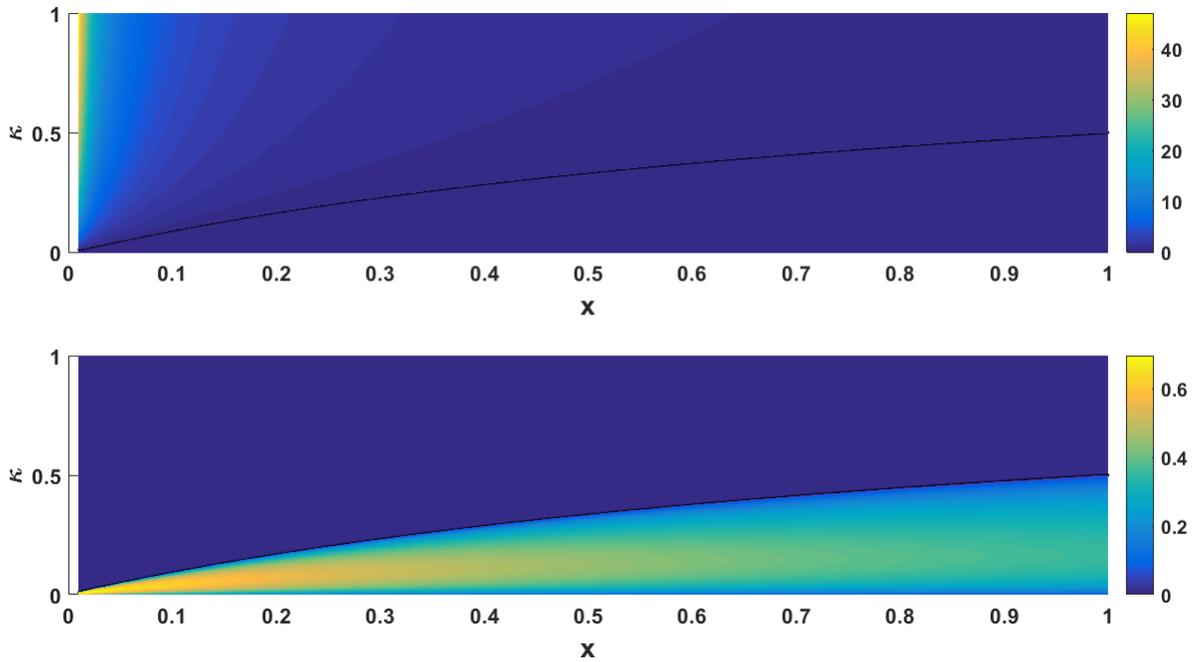


FIGURE 3.16 – Seuils de transition à la résonance en fonctions de κ et x

Cette courbe nous permet de définir la gamme des valeurs de γ_r correspondant à la résonance ceci, pour n'importe quel valeur des paramètres κ et x .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les résultats relatifs à l'étude du systèmes PTS dimère. Les résultats analytiques sont en parfait accord avec les résultats numériques. Nous avons démontré que la symétrie PT n'est pas une notion abstraite, mais qu'elle peut être utilisée pour décrire des systèmes physiques réels. La propriété de symétrie parité et temps peut être mise à profit dans de nombreux systèmes, dans divers domaines, pour contrecarrer les pertes d'énergie dans ces systèmes, induire des phénomènes d'amplification de l'onde.

IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUE SUR LE SYSTÈME
ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

Introduction

Les systèmes oscillants est un thème abordé en classe de terminale de l'enseignement secondaire où on présente de façon simple les oscillateurs mécaniques et électriques. Le champ expérimental de référence est considérablement élargi. Il s'étend ici aux oscillateurs mécaniques couplés de type PTS. Sur le plan didactique et pédagogique, l'enseignant y trouvera un contenu plus riche sur les dites notions, des méthodes et moyens pour que ces notions soient bien assimilées par les apprenants. La tâche de l'enseignant est étendue et couvre notamment le développement psychologique des enfants, la gestion des processus d'enseignement-apprentissage, la transformation de l'ensemble de l'établissement scolaire en une communauté d'apprenants, ainsi que les liens avec les collectivités locales et le monde extérieur.

4.1 Implication du sujet sur l'enseignement

L'effort d'enseignement est particulièrement centré sur des conditions de mise en activité, sur les manières de faire travailler qui peuvent entraîner des changements dans les comportements des apprenants. L'enseignement est de nos jours

l'un des métiers les plus nobles car il participe à sa manière à une reconstruction d'une société plus consciente et dynamique et ceci passe par la prise de conscience de l'environnement immédiat dans lequel nous nous trouvons. L'enseignant se trouvant dans ce maillage a donc certaines responsabilités et devoirs . Il n'est plus question pour ce dernier de construire des notions essentiellement focalisées sur la théorie comme jadis mais amener l'apprenant dans une approche non plus objective mais basées sur le savoir-faire. Pour y parvenir l'enseignant doit centrer son cours sur des activités rattachées à la vie pratique de tous les jours qu'il prendra lui-même le soin de bien élaborer. L'enseignant pourra se servir dans le cas d'un cours sur les oscillateurs de ce background pour mieux expliquer la notion en question aux élèves, mais aussi ce travail peut aider l'enseignant à trouver plus facilement des situations problèmes tirées du quotidien des apprenants pour introduire son cours sur les oscillateurs.

4.2 Implication du sujet sur l'apprentissage

Les apprenants trouveront dans ce mémoire des outils didactiques qui leurs permettront de prendre en charge la résolution des situations problèmes en surmontant le conflit cognitif. Un cours bien élaboré (sous tendu par une démarche pédagogique soigneusement conçue et orienté expérimentation) par exemple sur les oscillateurs mécaniques peut influencer l'apprenant et le permettre de mieux comprendre et de se servir de ces notions pour résoudre une situation problème dans la vie courante. Il peut aussi influencer sur l'orientation du choix de l'apprenant dans la mesure où ce dernier devient conscient des réalités et enjeux de la dite notion et perçoit dès lors différemment les choses.

Conclusion

Il était question dans ce chapitre des implications sur le système éducatif de notre thème de mémoire qui porte sur effet d'un système mécanique PTS dimère dans une chaîne de pendules couplés par fil de torsion. L'enseignement s'attache non seulement au processus de transmission des connaissances c'est-à-dire à la façon de dispenser un cours mais également à la qualité de ce qui est transmis donc aux contenus des enseignements. Les différentes notions présentées dans ce document mais introduites en classe de Terminale de l'enseignement secondaire permettront à l'enseignant de remplir cette fonction. Les applications des ces notions dans les différents domaines de la physique mentionnés ici peuvent influencer positivement le processus enseignement apprentissage et aider les apprenants dans leurs choix académiques et professionnels

Conclusion générale

L'objectif de ce travail était d'étudier le comportement d'un PTS dimère dans une chaîne de pendules lorsqu'on envoie une onde dans la chaîne. On a brièvement introduit la notion de système PTS et il en ressort de cette étude qu'il existe des systèmes physiques dont le Hamiltonien possède des valeurs propres réelles bien que n'étant pas hermétien. Nous avons étudié le comportement de notre système PTS dimère à l'intérieur d'une chaîne de pendules couplés par fil de torsion. Il en ressort que en fonction des différents paramètres, notre système peut réfléchir complètement une onde, il peut être transparent c'est-à-dire qu'on observe un phénomène de transmission totale et peut également réfléchir juste une partie et laisser une autre partie être transmise. Comme applications nous pouvons citer : le réseau de jonction Josephson, la réduction ou l'absorption des oscillations sur un pont a hauban. On ne saurait terminer sans mentionner les énormes difficultés rencontrées lors de nos travaux ceci liées à la complexité des expressions mathématiques à calculer ; ne disposant pas d'une machine assez puissante, nous avons quand même pu effectuer nos études. Nous ne pouvons qu'encourager des prochaines initiatives qui feront avancer nos travaux. En guise de perspective, nous envisageons dans les travaux à venir faire l'étude du comportement d'un système électromécanique constitué d'un PTS dimère mécanique et électronique à

l'intérieur d'une chaîne lorsqu'on envoie une onde.

Bibliographie

- [1] Bender, C.M., S. Boettcher, and P.N. Meisinger. PT -symmetric quantum mechanics. J. Math. Phys. 40, 2201. 1999.
- [2] Bender, C.M. and S. Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian. Hamiltonians Having PT Symmetry. Phys. Rev. Lett. 80, 5243. 1998.
- [3] Mostafazadeh, A.Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. J. Math. Phys. 43, 205. 2002.
- [4] Mostafazadeh, A.Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry II : A complete characterization of nonHermitian Hamiltonians with a real spectrum. J. Math. Phys. 43, 2814. 2002.
- [5] Kaempffer F.A, Concepts in Quantum Mechanics (New York : Academic Press, 1965) ; Translated into Russian : Osnovnye Polozheniya Kvantovoi-Mekhaniki (Moscow : URSS, 2007
- [6] B.amana et j.-l.lemaire , cours de pendules couples
- [7] Michel Peyrard - Thierry dauxois ,physique des solitons , edp sciences
- [8] E.Fermi, j.r Pasta, S.M. Ulam, Studies of nonlinear problems, los alamos sci.lab. Rep.(1995)LA-1940, reproduced in : A.C.Newell (Ed) Nonlinear wave

motion, *ans lect appl math* 15 (1974)

[9] Cours de pendules de torsion couplés , université de lemans

[10] Fernande Fotsa-Ngaffo, Stephane Boris Tabeu, Senghor Tagouegni, and Kenfack-Jiotsa, Vol.34, N_0 . 3/ March 2017 / *Journal of the optical Society of America B*