

PROPAGATION DES ONDES DANS LES SYSTEMES PTS CONSTITUES DE DIMERS

GWETH Marthe Mbond Ariane

Yaoundé, Juin 2016

Table des matières

DÉDICACE	5
REMERCIEMENTS	6
RÉSUMÉ	8
ABSTRACT	9
INTRODUCTION GÉNÉRALE	10
1 Revue de la littérature	12
1.1 Notions de systèmes PTS	12
1.2 Notion de guides d'ondes	14
1.2.1 Définition	14
1.2.2 Les guides d'ondes dans les systèmes PTS	14
2 Matériels et méthodes.	16
2.1 Matériels	16
2.2 Méthodes	16
3 Résultats et discussions	18
3.1 Transmission et réflexion d'une onde par une discontinuité de type dimer	18
3.1.1 Equations de la dynamique	19
3.1.2 Détermination des coefficients de transmission et réflexion	20
3.1.3 Représentation graphique de la transmission et de la réflexion	22
3.1.4 Propagation d'une onde dans la chaîne	23

3.2	Transmission et réflexion des ondes par deux lignes couplées dont l'une comporte une discontinuité de type dimer	24
3.2.1	Equations du modèle	25
3.2.2	Coefficients de transmission et de Réflexion	25
3.2.3	Représentations graphiques des transmissions et des réflexions	27
3.2.4	Etude de la propagation.	28
3.3	Transmission et réflexion des ondes par trois lignes couplées dont l'une comporte une discontinuité de type dimer.	32
3.3.1	Equations du modèle	33
3.3.2	Coefficients de transmission et réflexion.	33
3.3.3	Représentations graphiques des transmissions et des réflexions	35
3.3.4	Etude de la propagation	36
3.3.4.1	Cas de trois lignes non couplés	37
3.3.4.2	Excitation d'une seule ligne	37
3.3.4.3	Excitation simultanée des trois lignes.	40
3.4	Etude d'une chaîne de dimers couplés	41
3.4.1	Présentation du modèle	41
3.4.2	Equations du modèle	41
3.4.3	Conditions pour que les valeurs propres soient réelles	43
3.4.4	Représentation graphique des valeurs propres	44
3.4.5	Propagation linéaire dans la chaîne	45
3.5	Couplage de deux chaînes de dimer	47
3.5.1	Equation du modèle	47
3.5.2	Expressions des valeurs propres β	48
3.5.3	Propagation dans le modèle	52
4	Implications pédagogiques sur le système éducatif.	56
4.1	Implication sur le rôle de l'enseignant	56
4.2	Implications sur l'apprentissage des élèves	57
	CONCLUSION GÉNÉRALE	59
	BIBLIOGRAPHIE	60

Table des figures

3.1	<i>Chaîne de guides d'ondes comportant une discontinuité de type dimer.</i>	19
3.2	<i>Représentation de $T ^2$ et $R ^2$ en fonction de k/π lorsque $c_1 = 1$ et $c_2 = 4$.</i>	22
3.3	<i>Propagation de la gaussienne dans le système</i>	23
3.4	<i>Couplage de deux chaînes de guides d'ondes conservatifs dont l'une comporte une discontinuité dimer.</i>	24
3.5	<i>Représentation de $T_1 ^2$, $R_1 ^2$ (à gauche) et $R_2 ^2$, $T_2 ^2$ (à droite) lorsque $c_3 = 0$.</i>	27
3.6	<i>Représentation de $T_1 ^2$, $R_1 ^2$ (à gauche) et $R_2 ^2$, $T_2 ^2$ (à droite) lorsque $c_3 = 0.25$.</i>	28
3.7	<i>Propagations dans les lignes 1 (à gauche) et ligne 2 (à droite) en absence de couplage</i>	29
3.8	<i>Propagation dans les lignes 1 (à gauche) et 2 (à droite) lorsque et l'onde étant envoyé uniquement dans la première ligne.</i>	30
3.9	<i>: Propagation dans les lignes 1 (à gauche) et 2 (à droite) lorsque et l'onde étant envoyé uniquement dans la deuxième ligne.</i>	31
3.10	<i>: Propagation dans les lignes 1 (à gauche) et 2 (à droite) lorsque $c_3 = 0.25$ et les ondes sont envoyés simultanément dans les deux lignes.</i>	32
3.11	<i>Trois chaînes couplées de guides d'ondes conservatifs dont l'une comporte une discontinuité dimer.</i>	33
3.12	<i>Représentation de $R_1 ^2$, $T_1 ^2$ (a); $R_2 ^2$, $T_2 ^2$ (b) : $R_3 ^2$, $T_3 ^2$ (c) lorsque $c_3 = 0$.</i>	35
3.13	<i>Représentation de $R_1 ^2$, $T_1 ^2$ (a); $R_2 ^2$, $T_2 ^2$ (b) : $R_3 ^2$, $T_3 ^2$ (c) lorsque $c_3 = 0.25$</i>	36
3.14	<i>Propagations dans les trois lignes en absence de couplage.</i>	37
3.15	<i>Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyé uniquement dans la première ligne.</i>	38
3.16	<i>Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyer uniquement dans la deuxième ligne.</i>	39

3.17	<i>Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyé uniquement dans la troisième ligne..</i>	39
3.18	<i>Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyé simultanément dans les trois lignes.</i>	40
3.19	<i>Ligne de dimers couplés en serie</i>	41
3.20	<i>Représentation des valeurs propres lorsque les conditions sont respectées</i>	44
3.21	<i>Représentation des valeurs propres lorsque les conditions ne sont pas respectées</i>	45
3.22	<i>Propagation dans la ligne constitué du couplage de plusieurs dimers</i>	46
3.23	<i>Deux chaines couplés de dimers</i>	47
3.24	<i>Représentation des valeurs propres lorsque la condition est respectée</i>	51
3.25	<i>représentation des valeurs propres lorsque la condition n'est pas respectée</i>	52
3.26	<i>Propagation d'un gaussienne dans la première ligne de la chaine de dimers couplée : (a) avant la valeur critique et (b) après la valeur critique.</i>	53
3.27	<i>Propagation dans la deuxième ligne de la chaine de dimer couplée : (a) avant la valeur critique et (b) après la valeur critique.</i>	54

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

★ mon papa bien aimé **GWETH Joseph** et à ma chère maman **MBOND II Suzanne Gisela**. Ce travail est le résultat de l'effort et des sacrifices que vous avez toujours portés à mon égard.

REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait jamais été possible sans l'intervention des personnes auxquelles nous tenons ici à exprimer notre gratitude.

Je glorifie le Seigneur Dieu qui m'a toujours comblé de grâces et de miséricordes dont il est le premier rempart.

Je tiens à remercier :

- ★ le Professeur **KENFACK JIOTSA** pour la confiance portée à mon égard et qui, en dépit de ses nombreuses occupations n'a ménagé aucun effort pour diriger ce travail ;
- ★ **TIKENG Arnaud** qui m'a soutenu et guidé tout au long de ce travail ;
- ★ les Aînés du laboratoire **M. FENDZI, M. NBONSOU, M. TSOB-GNI, M. MOMO** pour leur soutien ;
- ★ tous mes enseignants de l'ENS pour les multiples échanges constructifs, leurs conseils, leur disponibilité tout au long de notre formation. Qu'ils trouvent en ces mots ma sincère reconnaissance.

Mes remerciements vont également :

- ★ à l'endroit de MBAGA NTJAM et à tous mes frères pour leur soutien de toute nature
- ★ à tous mes camarades de promotion de l'ENS pour les débats édifiants de tous les jours.

★ à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'élaboration de ce travail.

RÉSUMÉ

Le présent travail porte sur la propagation dans les systèmes PTS (parity-time symmetric) constitués de dimers et il vise une meilleure compréhension des phénomènes de réflexions et de transmissions des ondes dans ces systèmes. Dans le chapitre 2 de notre étude, nous avons montré dans un premier temps que les lignes de guides d'ondes entièrement conservatifs couplées à une autre ligne contenant une discontinuité dimers peuvent induire des ondes réfléchies et transmises comme si elles possédaient également des discontinuités. Dans un second temps, nous constatons que la propagation dans de tels systèmes met en évidence une dissymétrie de l'onde qui crée une modulation d'amplitude de manière à rendre symétrique tout le système. Dans le chapitre 3 où nous avons étudié les systèmes PTS entièrement constitués de dimer, nous avons constaté que : lorsque les conditions PTS sont respectées, l'onde se propage de façon stable et à amplitude constante ; par contre lorsque ces conditions ne sont pas respectées, la propagation est instable et l'amplitude augmente dans le temps.

ABSTRACT

The present work investigates on the propagation in the systems PTS constituted of dimers and it aims a better understanding of reflection and transmission of the waves in these systems. In the chapter 2 of our survey, we showed for the first time that the lines of conservatifs waveguides coupled to another line containing a discontinuity dimers can lead reflexive waves and can transmit as if they also possessed discontinuities. In a second time, we noted that the propagation in such systems revealed that the dissymmetry of the wave creates a modulation of amplitude in order to make symmetrical in the whole system. In the chapter 3 where we studied the systems PTS constituted of dimers, we noted that : when the PTS conditions are respected, the wave propagates itself in a steady way with constant amplitude; on the other hand when these conditions are not respected, the propagation is unsteady and the amplitude increases in the time.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Durant des années, on a pensé dans le cadre de la mécanique quantique que seul les observables physiques hermitiens possédaient un spectre réel. Mais en 1998, des études menées par Bender et al [1] ont montré que les Hamiltoniens non hermitiens peuvent aussi avoir un spectre réel lorsqu'ils sont sous conditions PTS (parity-time-symmetric) ; cette observation mathématique a ainsi entraîné de profondes conséquences en physique. A partir de ce moment d'autres chercheurs se sont penchés sur ce sujet à l'instar de Christodoulides et al [2] qui partant du fait qu'un indice de réfraction complexe présenté par certains matériaux, joue le rôle de potentiel optique, ont montré en 2010 qu'un système PTS en optique est obtenu en couplant linéairement deux guides d'ondes dont l'un appelé " gain " est le siège d'une amplification et l'autre appelé " loss " est siège d'une " atténuation ". Après avoir appelé " Dimer " les deux guides d'ondes couplés avec gain et loss, le professeur Kivshar [3] étudie le comportement d'une onde dans une chaîne de guides d'ondes conservatifs couplés ayant en son sein une discontinuité " Dimer ". Il s'agit essentiellement d'étudier la transmission et la réflexion d'une onde à la traversée de la discontinuité. Il est arrivé à la conclusion que les ondes transmises et réfléchies pouvaient être amplifiées par la discontinuité et donc servir de contrôle actif dans la propagation des ondes.

Dans ce travail nous apportons une contribution à l'étude de la propagation des ondes dans les chaînes couplées de guides d'ondes PT symétriques. Le

premier chapitre est consacré à une généralité sur la notion de systèmes PTS (Parity and Time symmetry). Le deuxième chapitre quand à lui est une étude de la transmission et de la réflexion des ondes dans deux chaînes obtenues en couplant premièrement une chaîne de guides d'onde conservatif à la chaîne construite par le Professeur KIVSHAR, et deuxièmement, une deuxième chaîne de guides d'ondes conservatifs est couplée à ce premier modèle. Dans le troisième chapitre nous couplons deux chaînes de guides d'ondes dont chacune est une succession de Dimers, puis nous déterminons dans quelles conditions ces deux chaînes couplées forme un système PTS. Une simulation numérique est ensuite effectuée pour observer le comportement d'une onde dans le système lorsque ce dernier est PTS et lorsqu'il ne l'est pas. Le travail s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

Introduction

Il était communément admis en mécanique quantique qu'une grandeur physique est mesurable lorsque son opérateur associé possède un spectre entièrement réel. On dit que cet opérateur est hermitien. Cependant, en 1998, Bender [1] a démontré que les opérateurs non hermitiens dans certains cas possédaient un spectre entièrement réel, ce type d'opérateur devant alors satisfaire à une conditions qualifié de parity and time symmetry (PTS).

1.1 Notions de systèmes PTS

L'opérateur Hamiltonien associée à l'équation décrivant un phénomène physique est dit PTS lorsqu'il reste invariant après les actions successives des opérateurs Parity (P) et time (T).

D'une façon général, l'action de l'opérateur parity (P) est définie par les relations : $\hat{P} \rightarrow -\hat{P}$, $\hat{x} \rightarrow -\hat{x}$. Tandis que celle de l'opérateur time (T) sera définie par : $\hat{P} \rightarrow -\hat{P}$, $\hat{x} \rightarrow \hat{x}$, $\hat{i} \rightarrow -\hat{i}$.

où \hat{p} est l'opérateur quantité de mouvement et \hat{x} l'opérateur position.

Considérons le Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{P^2}{2} + v(x) \quad (1.1)$$

L'action de \hat{p} sur H est définie par :

$$\hat{P}H = \hat{P} \left(\frac{P^2}{2} + v(x) \right) = \frac{(-P)^2}{2} + v(-x) = \frac{P^2}{2} + v(-x) \quad (1.2)$$

L'action de \hat{T} sur le resultat ci-dessus conduit a :

$$\hat{T}\hat{P}H = \hat{T} \left(\frac{P^2}{2} + v(-x) \right) = \frac{(-P)^2}{2} + v^*(-x) = \frac{P^2}{2} + v^*(-x) \quad (1.3)$$

Les équations (1.1) et (1.3) montrent que pour qu'il y ait invariance après l'action des opérateurs Parity et Time sur le Hamiltonien, il faudrait qu'on ait :

$$v(x) = v^*(-x) \quad (1.4)$$

Cette relation implique que la partie réelle de son potentiel est une fonction paire de la position et la partie imaginaire une fonction impaire de la position.

Il est cependant à noter que des études supplémentaires effectuées notamment par Ziad MUSLIMANI et al [4] ont montré qu'avec des potentiels satisfaisant la relation(1-4) on assiste à un comportement particulier propre aux systèmes PTS, à savoir qu'il existe un seuil lié au rapport entre les amplitudes des parties réelle et imaginaire du potentiel en deçà duquel le spectre est entièrement réel et au-delà duquel il devient entièrement complexe. La relation (1-4) devient donc une condition nécessaire mais pas suffisante pour les systèmes PTS.

1.2 Notion de guides d'ondes

1.2.1 Définition

Un guide d'onde est une enveloppe conductrice dans laquelle se propage une énergie électromagnétique. Il sert à guider les ondes pour les maintenir confinées dans un milieu particulier, sur une certaine distance. Cette propagation guidée des ondes se rencontre en optique intégrée et en télécommunication, à divers échelles (échelles métriques, centimétriques ou plus petite).

Le principe de cette propagation guidée est basé sur le fait que l'énergie qui est sous forme d'onde électromagnétique est transmise et conduite à l'intérieur du tube conducteur (guide d'onde) qui agit comme frontière et confine les ondes en son intérieur. Ces guides d'ondes sont de nos jours conçus à partir des polymères et ils trouvent leurs applications dans plusieurs domaines.

Les systèmes PTS qui font l'objet de notre étude peuvent être conçus à partir du couplage de guide d'onde comme l'a démontré Christodoulides en 2008.

1.2.2 Les guides d'ondes dans les systèmes PTS

En considérant un potentiel de la forme :

$$v(x) = V_0 \operatorname{sech}^2(x) + iW_0 \operatorname{sech}(x) \tanh(x) \quad (1.5)$$

partant de l'équation (1-1) et en tenant compte de l'équation de Schrodinger complexe normalisée, Christodoulides [2] parvient à démontrer qu'en couplant linéairement deux guides d'ondes dont l'un appelé " gain " a un facteur d'amplification ρ et l'autre appelé " loss " a un facteur d'atténuation $-\rho$ on obtient un système PTS optique dont la dynamique est décrite par les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} i\frac{\partial a}{\partial z} - i\rho a + cb = 0 \\ i\frac{\partial b}{\partial z} + i\rho b + ca = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

ρ et c étant des constantes dont les expressions sont déduites du potentiel.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté d'une manière générale les systèmes PTS et les guides d'ondes dont le couplage peut conduire à un système PTS en Optique et dont la dynamique qui à été présenté sera utilisée dans la suite pour construire des systèmes PTS dans lesquelles nous ferons propager des ondes.

MATÉRIELS ET MÉTHODES.

Introduction

Chaque recherche scientifique nécessite une méthodologie bien adaptée et c'est la raison pour laquelle nous allons présenter dans ce chapitre les matériels et méthodes qui ont servi à élaborer ce travail.

2.1 Matériels

Dans la réalisation de ce travail nous utiliserons les logiciels et langages de programmations suivants :

- Matlab pour la programmation notamment dans la simulation numérique des équations différentielles très difficiles à résoudre à la main ; nous pourrons ainsi simuler la propagation des ondes dans les systèmes PTS.
- Maple pour la résolution mathématique des systèmes d'équations très lourdes à résoudre à la main et pour la représentation des coefficients trouvés.

2.2 Méthodes

Pour l'étude des systèmes PTS possédant une discontinuité dimer, nous allons dans un premier temps étudier les coefficients de transmissions et de réflexions et les modélisés ; dans un second temps nous simulerons la propagation

des ondes dans ces systèmes et vérifier si les résultats sont cohérents.

Pour ce qui est de l'étude des systèmes PTS constitués entièrement de dimers nous commencerons par chercher les conditions PTS dans lesquelles ces systèmes sont réceptifs à la propagation et nous simulerons ensuite le déplacement des ondes dans ces milieux.

Conclusion

Parvenu au terme de ce chapitre où il était question de présenter les matériels et méthodes qui seront utilisés pour la réalisation de ce travail ; nous pouvons ensuite présenter nos résultats.

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Introduction

Comme nous l'avons mentionné plus haut, il a été démontré qu'un système PTS en optique se construit en couplant deux guides d'ondes dont l'un appelé " gain " est le siège d'une amplification et l'autre appelé " loss " est le siège d'une atténuation. Suite à ces travaux, le professeur Kivshar étudie en 2011 [3], la réflexion et la transmission d'une onde par une discontinuité de type dimer introduite dans une chaîne de guide d'onde conservatif. Le dimer étant un ensemble de deux guides d'onde couplés dont le premier est un " gain " et le second est un " loss ".

Dans la suite de ce travail, nous faisons d'abord un bref aperçu sur les résultats obtenus par KIVSHAR, puis nous construisons d'autres modèles en couplant d'autres chaînes de guides d'ondes à celle étudiée par KIVSHAR et nous étudions la transmission et la réflexion des ondes dans ces nouvelles chaînes.

3.1 Transmission et réflexion d'une onde par une discontinuité de type dimer

Le schéma ci-dessous représente une chaîne de guides d'ondes conservatif (boules blanches) à l'intérieure de laquelle une discontinuité (boules bleue et

rouge) de type Dimer à été introduite.

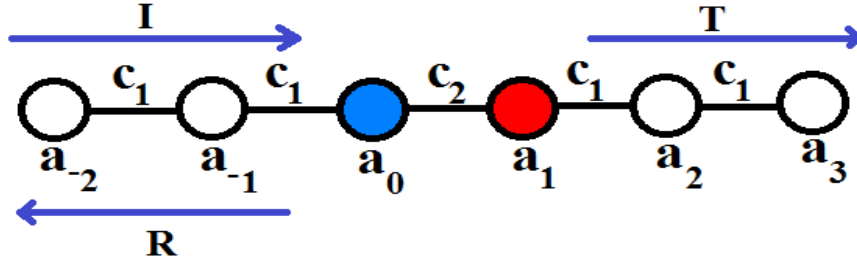


FIG. 3.1 – Chaîne de guides d’ondes comportant une discontinuité de type dimer.

3.1.1 Equations de la dynamique

Les équations décrivant la dynamique d’une onde dans la chaîne se déduisent de celles établies par Christodoulides. Elles sont données dans le cas d’une propagation linéaire par :

$$i \frac{da_j}{dz} + c_1 a_{j-1} + c_1 a_{j+1} = 0, j \neq 0, 1 \quad (3.1)$$

$$i \frac{da_0}{dz} + i \rho a_0 + c_1 a_{-1} + c_2 a_1 = 0, j = 0 \quad (3.2)$$

$$i \frac{da_1}{dz} - i \rho a_1 + c_2 a_0 + c_1 a_2 = 0, j = 1 \quad (3.3)$$

Dans ces équations, j représente le numéro du guide d’onde ; z la distance de propagation ; ρ le coefficient de gain et Loss ; c_1 le coefficient de couplage à l’extérieur du dimer ; c_2 le coefficient de couplage à l’intérieur du dimer et l’amplitude du mode.

3.1.2 Détermination des coefficients de transmission et réflexion

Pour étudier la transmission et la réflexion des ondes, nous considérons qu'une onde se propageant dans les guides conservatifs subit une réflexion qui se superpose à l'onde incidente ainsi qu'une transmission lorsqu'elle rencontre la discontinuité. Ces considérations nous permettent alors d'écrire :

$$a_j = \exp(ikj - i\beta z) + R \exp(-ikj - i\beta z), j \leq 0 \quad (3.4)$$

$$a_j = T \exp(ikj - i\beta z), j \geq 1 \quad (3.5)$$

L'équation (2.4) est la somme de deux expressions dont la première représente l'onde incidente qui approche le dimer par la gauche alors que la seconde représente une onde réfléchie d'amplitude (coefficient de réflexion) qui prend naissance lors de la rencontre de l'onde avec le premier guide d'onde du dimer. L'équation (2.5) représente l'onde transmise dont l'amplitude vaut (coefficient de transmission).

En injectant (2-4) et (2-5) dans les équations ci-dessus, on arrive aux expressions suivantes de la transmission et de la réflexion :

$$R(\rho) = \frac{-\beta^2 e^{ik} - \beta c_1 e^{i2k} - \beta c_1 + ic_1 \rho - c_1^2 e^{ik} - \rho^2 e^{ik} - ic_1 \rho e^{i2k} + c_2^2 e^{ik}}{D} \quad (3.6)$$

$$T(\rho) = \frac{-2ic_1 c_2 \sin k}{D} \quad (3.7)$$

Avec

$$D = \beta^2 e^{ik} + 2\beta c_1 e^{i2k} + \rho^2 e^{ik} + c_1^2 e^{i3k} - c_2^2 e^{ik}$$

Dans ces solutions, la constante de propagation est celle d'une onde incidente de la forme :

$$a_j = A \exp(ikj - i\beta z) \quad (3.8)$$

qui se propage dans la série de guides d'ondes conservatifs en absence de discontinuité dont l'équation de la dynamique est donnée par (2.1).

L'expression (2-8) prise en compte dans l'équation (2-1) conduit à :

$$\beta = -2c_1 \cos k \quad (3.9)$$

En remplaçant β par son expression, R et T deviennent :

$$R = \frac{2\tilde{c}_1\tilde{\rho}(\sin k) - \tilde{c}_1^2 - \tilde{\rho} + 1}{D_0} \quad (3.10)$$

$$T = \frac{-2i\tilde{c}_1(\sin k)e^{-ik}}{D_0} \quad (3.11)$$

Avec

$$\begin{cases} D_0 = \bar{\rho}^2 + \bar{c}_1^2 e^{-i2k} - 1 \\ \bar{\rho} = \frac{\rho}{c_2} \\ \bar{c}_1 = \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \quad (3.12)$$

La résolution de l'équation $D_0 = 0$ conduit à :

$$\begin{cases} k = \frac{\pi}{2} \\ |\bar{\rho}| = |\bar{\rho}_{crit}| \sqrt{1 + \bar{c}_1^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

$|\bar{\rho}_{crit}|$ obtenu représente la valeur critique qui est celle pour laquelle $T(\rho)$ et $R(\rho)$ divergent, le système devenant alors instable.

Les équations (2.10) et (2.11) permettent également de constater que :

$$\begin{cases} R(\rho) \neq R(-\rho) \\ T(\rho) = T(-\rho) \end{cases} \quad (3.14)$$

Cette dernière relation signifie que la transmission est indépendante de la nature du premier guide d'onde (gain ou loss) du dimer rencontré par l'onde, ce qui n'est pas le cas pour la réflexion.

3.1.3 Représentation graphique de la transmission et de la réflexion

Des équations (2-10) et (2-11), on obtient une représentation des intensités $|R|^2$ et $|T|^2$ des ondes réfléchies et transmises. Les valeurs de ρ sont prises telles que $|\rho| = r |\rho|_{critique}$ avec $r \in [-1; 1]$

- $c_1 = 1$ et $c_2 = 4$

Les courbes ci-dessous sont obtenues pour les valeurs de r précisées sur celles-ci : les courbes en rouge représentent les intensités des ondes réfléchies et

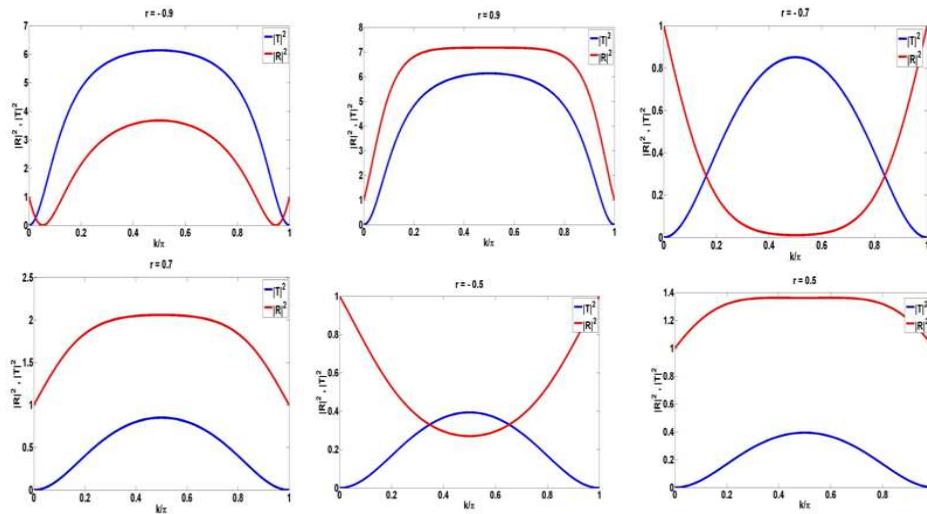


FIG. 3.2 – Représentation de $|T|^2$ et $|R|^2$ en fonction de k/π lorsque $c_1 = 1$ et $c_2 = 4$.

les courbes bleues représentent les intensités des ondes transmises. Sur ces courbes, on observe pour certaines valeur de k , une valeur de $|R|^2$ ou $|T|^2$ supérieure à 1, ce qui signifie qu'il y a une amplification de l'onde en ce point. Dans d'autre cas, on note une atténuation des ondes ; ces amplifications et ces atténuations signifient

que le dimer peut générer un contrôle actif de la diffusion d'une onde dans une chaîne.

3.1.4 Propagation d'une onde dans la chaîne

Nous allons à présent effectuer une simulation de la propagation dans la chaîne précédente d'une gaussienne de la forme :

$$a_j = \exp \left[-ik(j - j_0) - \delta(j - j_0)^2 \right] \quad (3.15)$$

Dans l'expression ci-dessus, j_0 et δ représentent respectivement le numéro du guide d'onde sur lequel l'onde est centré et la largeur de cette gaussienne.

Les courbes ci-dessous nous donne pour certains cas, la propagation de cette gaussienne dans le système :

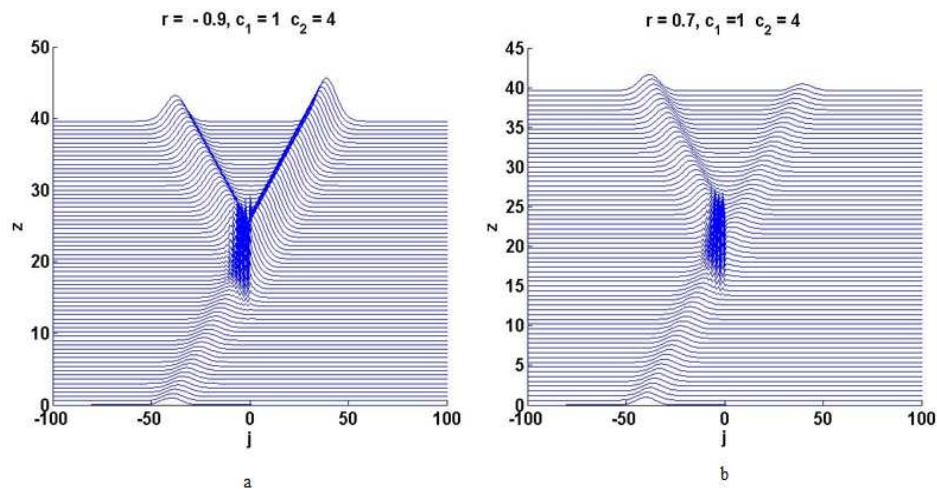


FIG. 3.3 – Propagation de la gaussienne dans le système

Comme nous pouvons le remarquer sur la figure (a) ci-dessus, l'onde réfléchie et l'onde transmise sont amplifiées avec une amplification plus intense de la transmission par rapport à la réflexion, ce qui est en accord avec les prévisions des

tracées des intensités des ondes données par les coefficients de transmission et de réflexion. D'autre part, la figure (b) est également en accord avec les coefficients de transmission et réflexion qui prévoyait une atténuation de la transmission et une amplification de la réflexion moins intense qu'au premier cas.

3.2 Transmission et réflexion des ondes par deux lignes couplées dont l'une comporte une discontinuité de type dimer

A la chaîne étudiée ci-dessus, nous allons à présent coupler une deuxième chaîne constituée de guides d'ondes conservatifs tel que représenté ci-dessous.

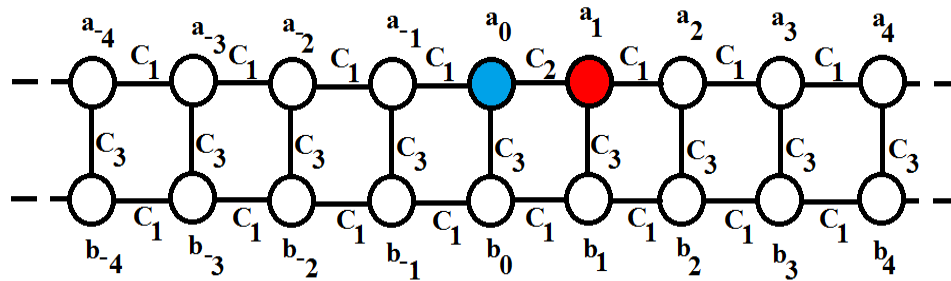


FIG. 3.4 – Couplage de deux chaînes de guides d'ondes conservatifs dont l'une comporte une discontinuité dimer.

Dans ce modèle c_1 représente le coefficient de couplage entre les guides d'ondes conservatifs, c_2 le coefficient de couplage entre les guides d'ondes du dimer et c_3 le coefficient de couplage entre les deux chaînes.

3.2.1 Equations du modèle

Les équations décrivant la dynamique du système ci-dessus sont données dans le cas par :

$$\begin{cases} i \frac{da_j}{dz} + i\rho [a_0\delta(j, 0) - a_1\delta(j, 1)] + c_1(a_{j-1} + a_{j+1}) + \\ (c_2 - c_1) [a_1\delta(j, 0) + a_0\delta(j, 1)] + c_4b_j = 0 \\ i \frac{db_j}{dz} + c_1(b_{j-1} + b_{j+1}) + c_3a_j = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Dans ces équations j représente le numéro du guide d'onde ; z la distance de propagation ; les a_j et b_j sont les amplitudes des modes ; ρ et $-\rho$ désignent les coefficients de gain/loss des deux guides d'ondes du dimer.

3.2.2 Coefficients de transmission et de Réflexion

Pour étudier la transmission et la réflexion des ondes par ce dispositif, nous écrivons les solutions sous la forme :

$$a_j = \exp[-i(kj - \beta z)] + R_1 \exp[-i(-kj - \beta z)], j \leq 0 \quad (3.17)$$

$$a_j = T_1 \exp[-i(kj - \beta z)], j \geq 1 \quad (3.18)$$

$$b_j = \exp[-i(kj - \beta z)] + R_2 \exp[-i(-kj - \beta z)], j \leq 0 \quad (3.19)$$

$$b_j = T_2 \exp[-i(kj - \beta z)], j \geq 1 \quad (3.20)$$

Les équations (2.17) et (2.19) sont les sommes de deux expressions dont les premières représentent les ondes incidentes et les secondes représentent les ondes réfléchies d'amplitudes R_1 et R_2 . Les équations (2.18) et (2.20) par contre représentent les ondes transmises d'amplitudes T_1 et T_2 .

En injectant ces expressions dans les équations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} R_1(-\beta - i\rho + c_1e^{-ik}) + T_1c_2e^{-ik} + R_2c_3 - \beta - i\rho + c_1e^{ik} + c_3 = 0 \\ R_1c_2 + T_1(-\beta e^{-ik} + i\rho e^{-ik} + c_1e^{-2ik}) + T_2c_3e^{-ik} + c_2 = 0 \\ R_1c_3 + R_2(-\beta + c_1e^{-ik}) + T_2c_4e^{-ik} - \beta + c_4e^{ik} + c_3 = 0 \\ T_1c_3e^{-ik} + R_2c_4 + T_2(c_4e^{-2ik} - \beta e^{-ik}) + c_4 = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

La résolution de ce système nous permet d'obtenir :

$$\begin{cases} R_1 = \frac{\det_{R_1}}{\det} \\ T_1 = \frac{\det_{T_1}}{\det} \\ R_2 = \frac{\det_{R_2}}{\det} \\ T_2 = \frac{\det_{T_2}}{\det} \end{cases} \quad (3.22)$$

Les expressions des déterminants \det_{R_1} , \det_{T_1} , \det_{R_2} , \det_{T_2} et \det peuvent être retrouvées en effectuant les calculs dans le logiciel Maple.

La résolution de l'équation $\det = 0$ conduit à :

$$\begin{cases} k = \frac{\pi}{2} \\ |\rho| = |\rho_{crit}| = \sqrt{\frac{2c_1^4 + 2c_1^2c_2^2 + 2c_1^2c_3^2 - 2c_1c_2c_3^2 + c_3^4}{2c_1^2}} \end{cases} \quad (3.23)$$

Cette valeur de ρ représente sa valeur critique pour laquelle le système devient instable au centre de la zone de Brillouin. On se rend bien compte qu'en posant $c_3 = 0$ (c'est-à-dire qu'on découple les deux chaînes) dans la deuxième expression du système (2.23) on retrouve à nouveau l'expression (2.13) d'une seule chaîne avec Dimer.

3.2.3 Représentations graphiques des transmissions et des réflexions

Les représentations ci-dessous sont celles $|R_1|^2$, $|T_1|^2$, $|R_2|^2$ et $|T_2|^2$ dans les cas suivants en fonction de k allant de 0 à π ; les courbes en bleu représentent les transmissions et celles en rouge représentent les réflexions :

- $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$ et $\rho = r\rho_{critique}$ avec $r = -0.9$

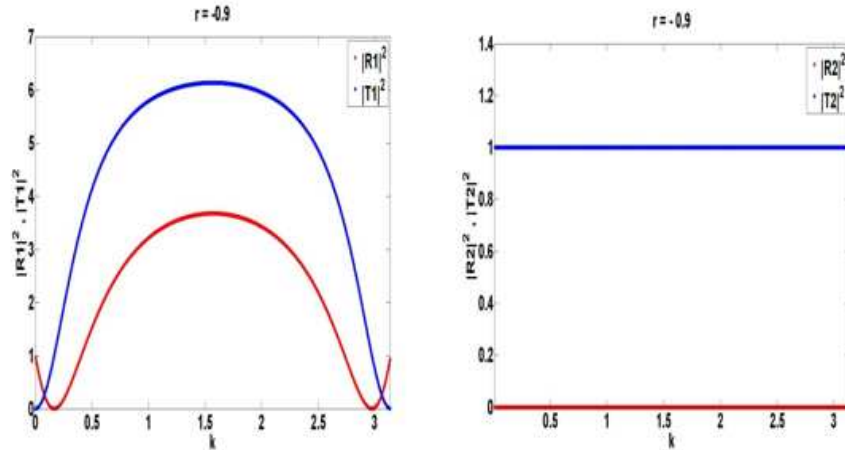


FIG. 3.5 – Représentation de $|T_1|^2$, $|R_1|^2$ (à gauche) et $|R_2|^2$, $|T_2|^2$ (à droite) lorsque $c_3 = 0$.

Dans ces figures, on remarque que lorsque les deux lignes sont découplées, les courbes de $|R_1|^2$ et $|T_1|^2$ (à gauche) correspondent bien à celle de la chaîne unique étudiée plus haut comportant la discontinuité dimer (premières courbes de la figure 2.2) et comme il fallait s'y attendre, on observe que dans la deuxième chaîne (courbes à droite de la figure 2.6), on a $|R_2|^2 = 0$ et $|T_2|^2 = 1$, ce qui sous-entend que l'onde est entièrement transmise dans la deuxième chaîne sans amplification ni atténuation. On remarque également que les coefficients $|R_1|^2$, $|T_1|^2$ prévoient une amplification des ondes pour certaines valeurs du nombre d'onde k .

En donnant une valeur non nulle au coefficient de couplage entre les deux

chaînes ($c_3 = 0.25$) les transmissions et réflexions sont données par les courbes ci-dessous.

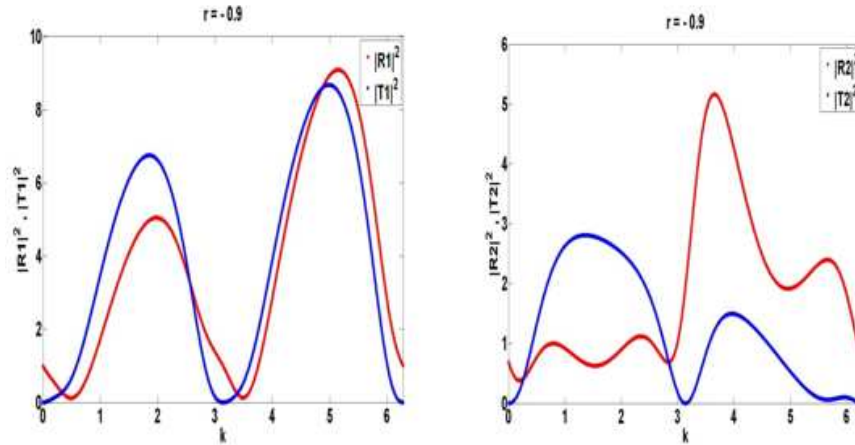


FIG. 3.6 – Représentation de $|T_1|^2$, $|R_1|^2$ (à gauche) et $|R_2|^2$, $|T_2|^2$ (à droite) lorsque $c_3 = 0.25$.

Dans cette figure on constate que lorsque les deux lignes sont couplées la réflexion n'est plus nulle (à droite) bien que cette ligne soit constituée entièrement de guides conservatifs. L'onde se propageant dans cette ligne subit également des réflexions, mais avec des modulations d'amplitudes. On peut donc déduire que le couplage du dimer avec les guides d'ondes conservatifs a un effet sur ceux-ci et dès lors ils se comportent comme des guides d'ondes gain et loss et créés à cet effet une discontinuité dans cette ligne.

3.2.4 Etude de la propagation.

Comme précédemment, nous simulons la propagation dans les deux lignes ci-dessus d'une gaussienne qui approche la discontinuité par la gauche. La dite gaussienne est prise sous la forme :

$$a_j(z = 0) = \exp [ik(j - j_0) - \delta(j - j_0)^2] \quad (3.24)$$

Où j , δ , k , j_0 représentent respectivement le numéro du guide d'onde, l'inverse de la largeur à mi-hauteur, le nombre d'onde et le numéro du guide sur lequel l'onde est centré.

- Cas de deux lignes non couplés

Comme pour le tracé des coefficients de transmission et de réflexion, nous commençons d'abord par découpler les deux lignes en prenant $c_3 = 0$, et nous nous plaçons au centre de la zone de Brillouin c'est-à-dire $k = \frac{\pi}{2}$. Nous obtenons alors les deux figures ci-dessous qui montrent bien que l'onde subit une amplification lorsqu'elle est réfléchiée et transmise par le dimer de la première chaîne. D'autre part, l'onde envoyée dans la deuxième ligne la traverse sans être réfléchiée.

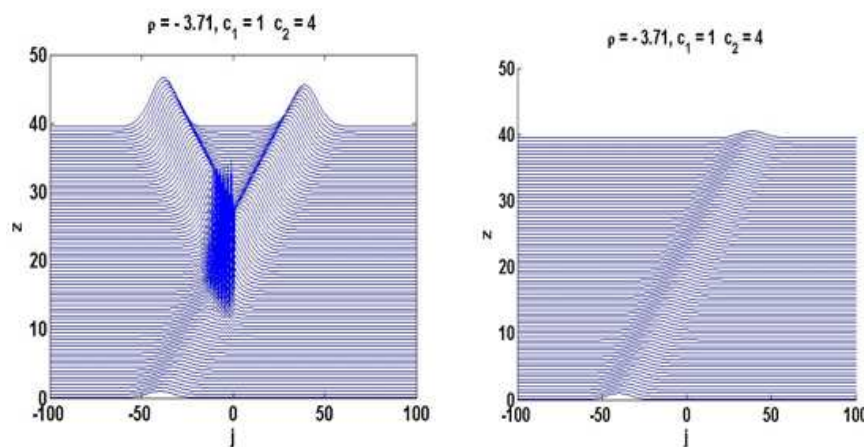


FIG. 3.7 – Propagations dans les lignes1 (à gauche) et ligne2 (à droite) en absence de couplage

Cette figure nous montre bien que l'onde subit une amplification lorsqu'elle est réfléchiée et transmise par le dimer de la première ligne (à gauche). D'autre part, l'onde envoyée dans la deuxième ligne la traverse sans être réfléchiée (à droite).

- Excitation d'une seule ligne

Nous revenons à présent à notre système couplé, et nous envoyons la gaussienne

initiale uniquement dans la première ligne, on obtient les courbes ci-dessous.

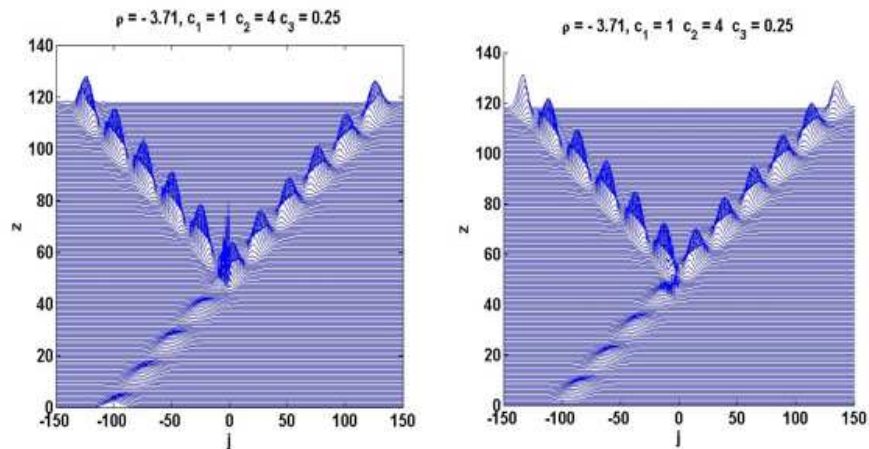


FIG. 3.8 – Propagation dans les lignes 1 (à gauche) et 2 (à droite) lorsque et l'onde étant envoyé uniquement dans la première ligne.

Sur ces figures, on observe que du fait du couplage, l'onde envoyé dans la première ligne ne reste pas uniquement dans cette dernière. En effet, on peut remarquer qu'au départ, elle se propage à l'intérieur de cette première ligne pendant un temps en s'atténuant progressivement, elle passe ensuite dans la deuxième et s'y propage également en s'atténuant, puis retourne dans l'autre ligne et ainsi de suite. Il en résulte une modulation d'amplitude dans les deux lignes. la modulation d'amplitude entraîne plutôt une répétition dans la ligne non excitée de ce qui se passe dans la ligne excitée avec une amplitude qui est la moyenne des deux.

En excitant uniquement la deuxième ligne. Nous obtenons les figures de

propagation ci-dessous.

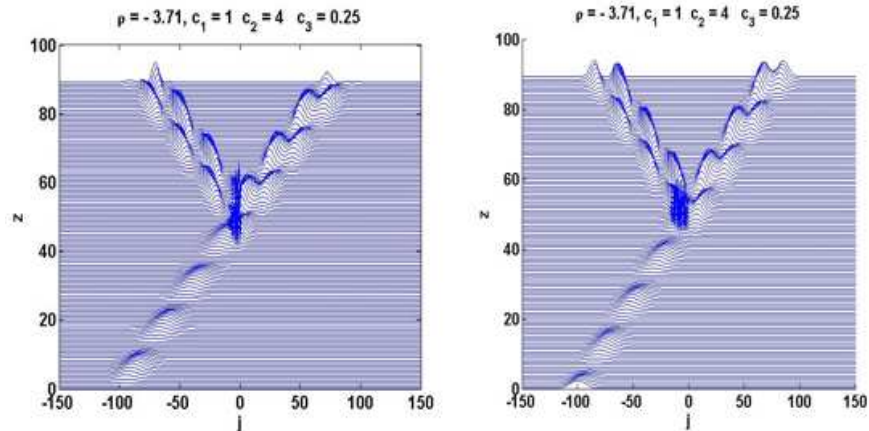


FIG. 3.9 – : Propagation dans les lignes 1 (à gauche) et 2 (à droite) lorsque et l'onde étant envoyé uniquement dans la deuxième ligne.

A l'observation de ces figures, on déduit la même conclusion que précédemment à savoir une modulation d'amplitude qui crée un équilibre entre les amplitudes des ondes dans les lignes 1 et 2, il est cependant à remarquer que les ondes réfléchies et transmises sont fractionnées en deux, ce phénomène s'accroît lorsque l'on augmente la valeur de c_3 .

- Excitation simultanée des deux lignes

Maintenant, Nous envoyons une onde dans chacune des deux lignes et on obtient alors les courbes ci-dessous :

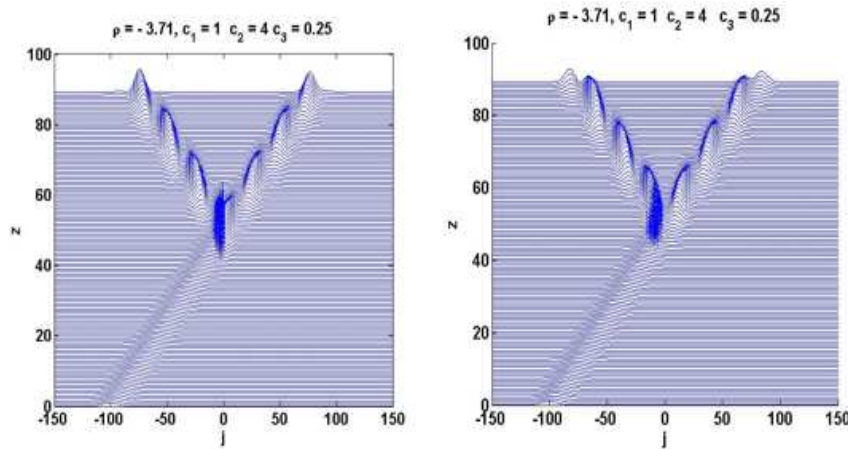


FIG. 3.10 – : Propagation dans les lignes 1 (à gauche) et 2 (à droite) lorsque $c_3 = 0.25$ et les ondes sont envoyés simultanément dans les deux lignes.

De ces figures, on constate que contrairement aux cas précédents où la modulation d'amplitude naissait avant que l'onde ne rencontre la discontinuité, on se rend compte ici que les deux ondes se propage initialement sans être modulées, la modulation ne naît qu'avec le contact avec la discontinuité. On arrive donc à la conclusion selon laquelle la modulation d'amplitude apparaît lorsqu'une dissymétrie est annoncée par le tracé des coefficients de transmission et de réflexion. La modulation d'amplitude naît pour créer la symétrie dans les deux lignes.

3.3 Transmission et réflexion des ondes par trois lignes couplées dont l'une comporte une discontinuité de type dimer.

Nous couplons à la chaîne ci-dessus, une troisième ligne de guides d'ondes conservatifs tel que l'indique la figure ci-dessous :

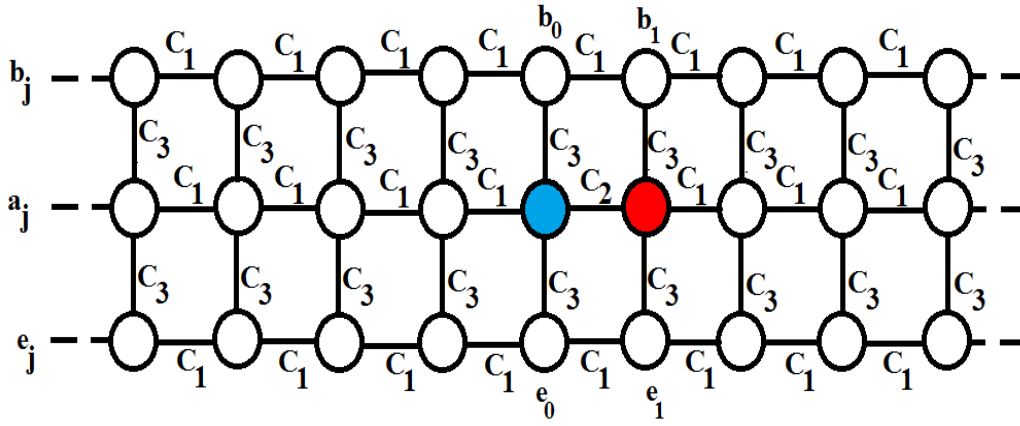


FIG. 3.11 – Trois chaînes couplées de guides d'ondes conservatifs dont l'une comporte une discontinuité dimer.

3.3.1 Equations du modèle

Les équations décrivant la propagation des ondes dans ce système sont données par :

$$\begin{cases} i \frac{db_j}{dz} + c_1(b_{j-1} + b_{j+1}) + c_3 a_j = 0 \\ i \frac{da_j}{dz} + i\rho [a_0 \delta(j, 0) - a_1 \delta(j, 1)] + c_1(a_{j-1} + a_{j+1}) + \\ (c_2 - c_1) [a_1 \delta(j, 0) + a_0 \delta(j, 1)] + c_4 b_j = 0 \\ i \frac{de_j}{dz} + c_1(e_{j-1} + e_{j+1}) + c_3 a_j = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

a_j , b_j et e_j représentent les amplitudes des modes et j représente le numéro du guide d'onde.

3.3.2 Coefficients de transmission et réflexion.

Pour déterminer ces coefficients nous prenons les solutions sous la forme :

$$b_j = \exp [i(kj - \beta z)] + R_2 \exp [i(-kj - \beta z)], j \leq 0 \quad (3.26)$$

$$b_j = T_2 \exp [i(kj - \beta z)], j \geq 1 \quad (3.27)$$

$$a_j = \exp [i(kj - \beta z)] + R_1 \exp [i(-kj - \beta z)], j \leq 0 \quad (3.28)$$

$$a_j = T_1 \exp [i(kj - \beta z)], j \geq 1 \quad (3.29)$$

$$e_j = T_3 \exp [i(kj - \beta z)], j \geq 1 \quad (3.30)$$

En injectant ces solutions dans le système d'équation (2.25) on obtient les expressions suivantes :

$$R_1 = \frac{\det_{R_1}}{\det} \quad (3.31)$$

$$T_1 = \frac{\det_{T_1}}{\det} \quad (3.32)$$

$$R_2 = \frac{\det_{R_2}}{\det} \quad (3.33)$$

$$T_2 = \frac{\det_{T_2}}{\det} \quad (3.34)$$

$$R_3 = \frac{\det_{R_3}}{\det} \quad (3.35)$$

$$T_3 = \frac{\det_{T_3}}{\det} \quad (3.36)$$

Les expressions des déterminants $\det(R_1)$, $\det(T_1)$, $\det(R_2)$, $\det(T_2)$, $\det(R_3)$, $\det(T_3)$ et \det peuvent être retrouvés par le logiciel Maple.

Des expressions obtenues ci-dessus, on constate que les transmissions et réflexions divergent lorsque le déterminant principal s'annule. La résolution de l'équation $det = 0$ conduit à :

$$\begin{cases} k = \frac{\pi}{2} \\ |\rho_{crit}| = \sqrt{2} \frac{\sqrt{c_1(2c_1^5 + 2c_1^3c_3^2 + 2c_2^2c_1^3 + c_3^4c_1 - 2c_2c_3^2)}}{2c_1^2} \end{cases} \quad (3.37)$$

3.3.3 Représentations graphiques des transmissions et des réflexions

Les représentations ci-dessous sont celles de $|R_1|^2$, $|T_1|^2$, $|R_2|^2$, $|T_2|^2$, $|R_3|^2$, $|T_3|^2$ dans les cas suivants ; les courbes en bleu représentent les transmissions et celles en rouge représentent les réflexions :

- $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$ et $\rho = r\rho_{critique}$ avec $r = -0.9$

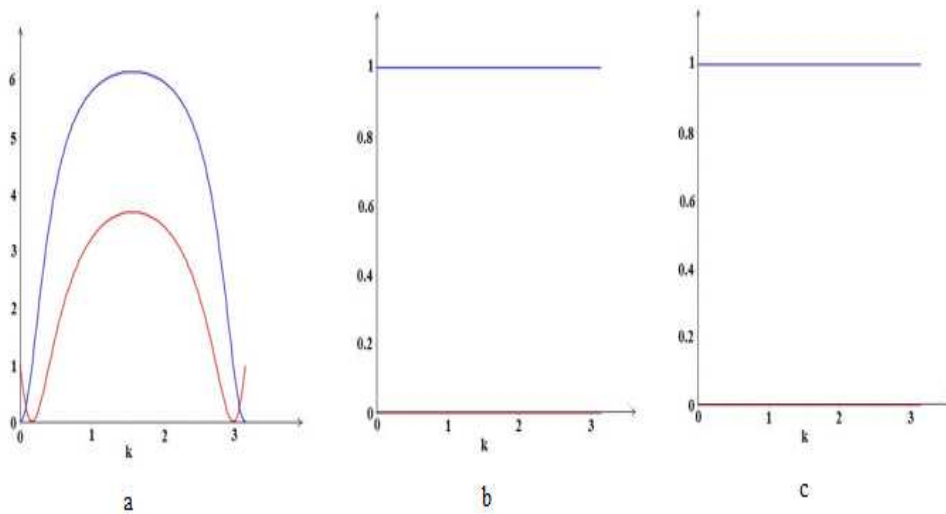


FIG. 3.12 – Représentation de $|R_1|^2$, $|T_1|^2$ (a) ; $|R_2|^2$, $|T_2|^2$ (b) ; $|R_3|^2$, $|T_3|^2$ (c) lorsque $c_3 = 0$.

Ici, nous faisons les mêmes observations que précédemment, à savoir que lorsque les trois chaînes sont découplées ($c_3 = 0$), les courbes de $|R_1|^2$ et $|T_1|^2$

correspondent à celle de la chaîne unique comportant la discontinuité dimer tandis que dans la deuxième et la troisième ligne en (b) et (c), on a $|R_2|^2 = 0$, $|T_2|^2 = 1$, $|R_3|^2 = 0$, et $|T_3|^2 = 1$, ce qui sous-entend que l'onde est entièrement transmise dans les deux lignes n'ayant pas de discontinuité sans amplification ni atténuation.

Les courbes ci-dessous sont obtenus pour les valeurs suivantes des paramètres : $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$ et $\rho = r\rho_{critique}$ avec $r = -0.9$

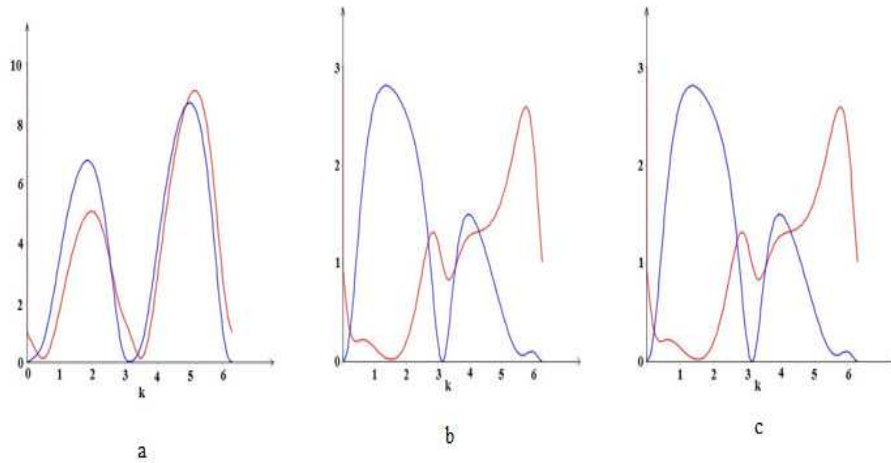


FIG. 3.13 – Représentation de $|R_1|^2$, $|T_1|^2$ (a) ; $|R_2|^2$, $|T_2|^2$ (b) ; $|R_3|^2$, $|T_3|^2$ (c) lorsque $c_3 = 0.25$

On constate comme précédemment que lorsque les trois chaînes sont couplées la réflexion n'est plus nulle en (b) et en (c) bien que ces lignes soient constituées entièrement de guides conservatifs. Les ondes se propageant dans ces lignes subissent des réflexions.

3.3.4 Etude de la propagation

Dans cette partie nous simulons la propagation dans les trois lignes ci-dessus d'une gaussienne qui approche la discontinuité par la gauche. La dite gaussienne est prise sous la forme (2.23).

3.3.4.1 Cas de trois lignes non couplés

Ici nous prenons $c_3 = 0$, et nous nous plaçons au centre de la zone de Brillouin, Nous obtenons alors la figure suivante représentant les propagations dans les trois lignes :

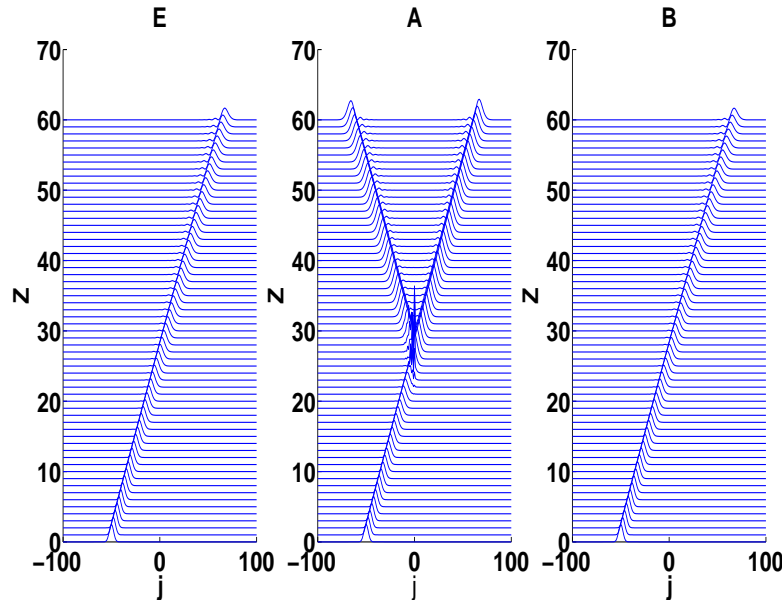


FIG. 3.14 – Propagations dans les trois lignes en absence de couplage.

Cette figure nous montre bien que l'onde subit une amplification lorsqu'elle est réfléchiée et transmise par le dimer de la deuxième ligne. D'autre part, les ondes envoyées dans les première et troisième lignes traversent sans être réfléchiées.

3.3.4.2 Excitation d'une seule ligne

Nous revenons à présent à notre système couplé, et nous envoyons la gaussienne initiale uniquement dans une des trois lignes les courbes ci-dessous les paramètres du système étant pris comme suit : $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, et $c_3 = 0.5$

- première ligne e_j

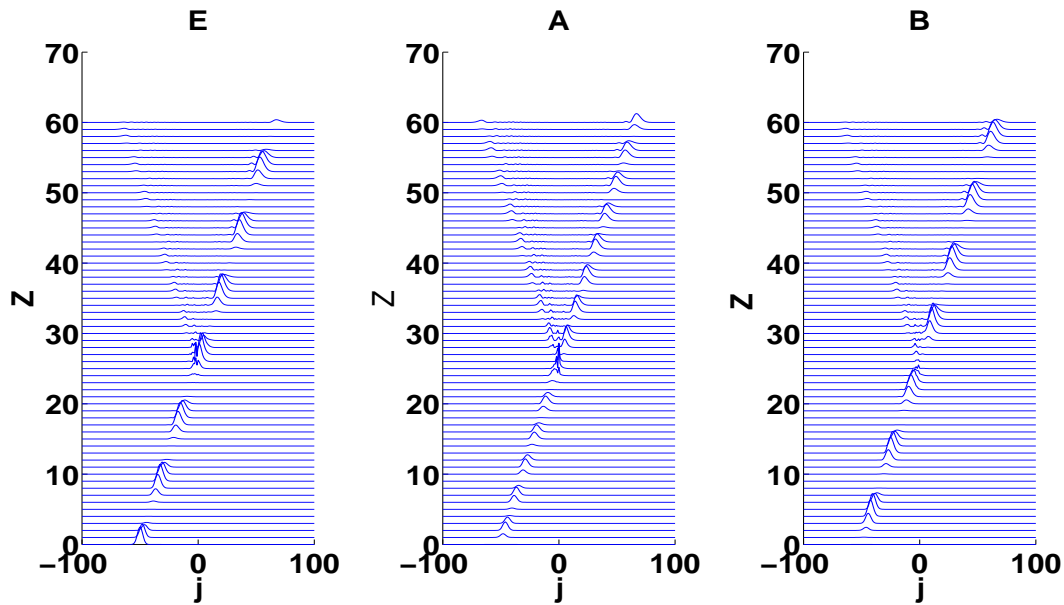


FIG. 3.15 – Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyée uniquement dans la première ligne.

Sur ces figures, on observe que du fait du couplage, l'onde envoyée dans la première chaîne ne reste pas uniquement dans cette dernière. En effet, on peut remarquer qu'au départ, elle se propage à l'intérieur de cette première ligne pendant un temps en s'atténuant progressivement, elle passe ensuite dans la deuxième et s'y propage également en s'atténuant, et enfin elle passe dans la troisième ligne refait le même parcours puis retourne dans la première ligne et ainsi de suite. Il en résulte une modulation d'amplitude dans les trois lignes. Cette modulation d'amplitude entraîne une répétition dans les lignes non excitées de ce qui se passe dans la ligne excitée avec une amplitude qui est la moyenne des trois.

- deuxième ligne a_j

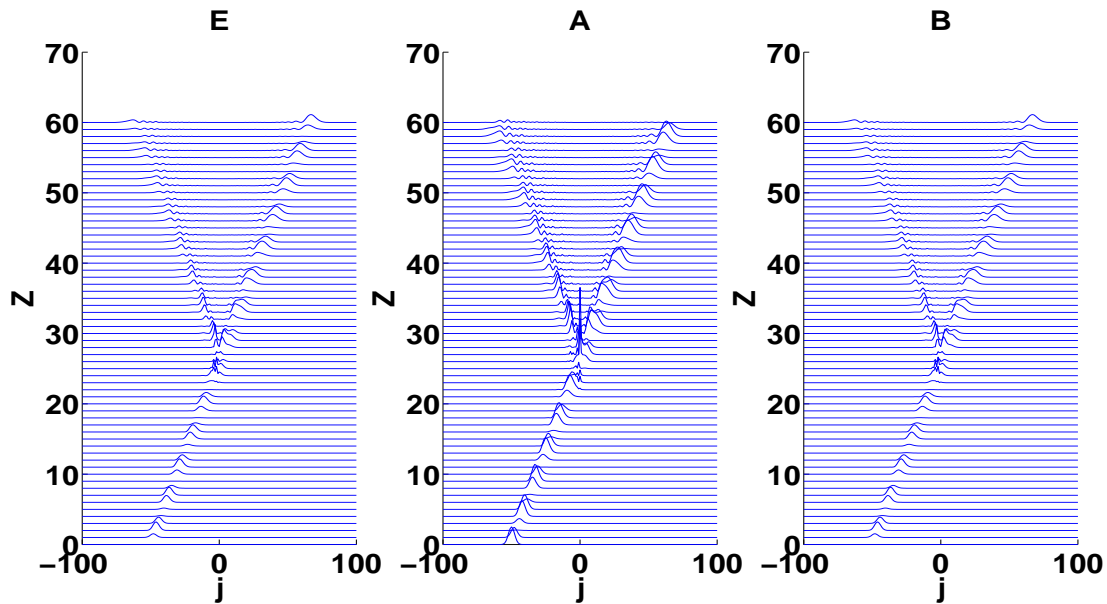


FIG. 3.16 – Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyée uniquement dans la deuxième ligne.

Ici on constate que l'onde envoyée dans la deuxième ligne ne reste pas uniquement dans cette dernière ; elle commence à se propager dans celle-ci en s'atténuant puis elle passe dans les deux autres lignes à travers le couplage . Il en résulte également une modulation avec une amplitude qui est la moyenne des trois.

- troisième ligne b_j

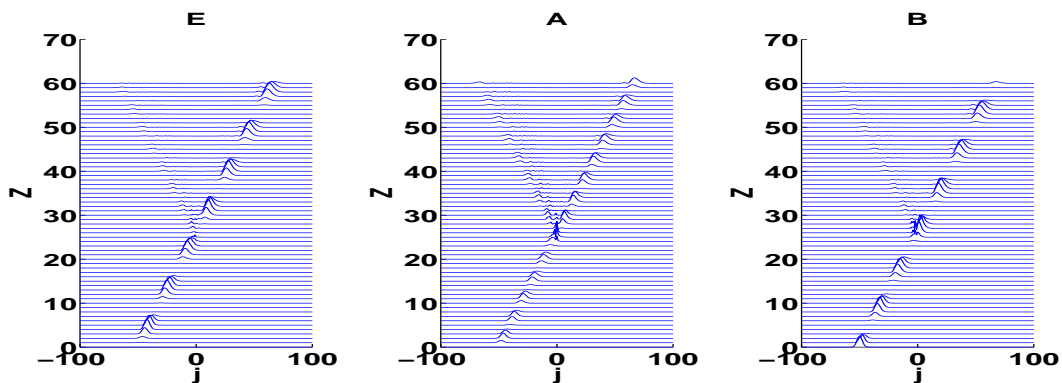


FIG. 3.17 – Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyée uniquement dans la troisième ligne..

Les remarques faites de ces figures sont pratiquement les mêmes que celles

faites lorsque l'onde était envoyé uniquement dans la première ligne à la seule différence qu'ici l'onde quitte la troisième ligne pour la deuxième ligne et de la deuxième pour la première ligne.

3.3.4.3 Excitation simultanée des trois lignes.

Maintenant, Nous envoyons une onde dans chacune des deux chaînes et on obtient alors les courbes ci-dessous :

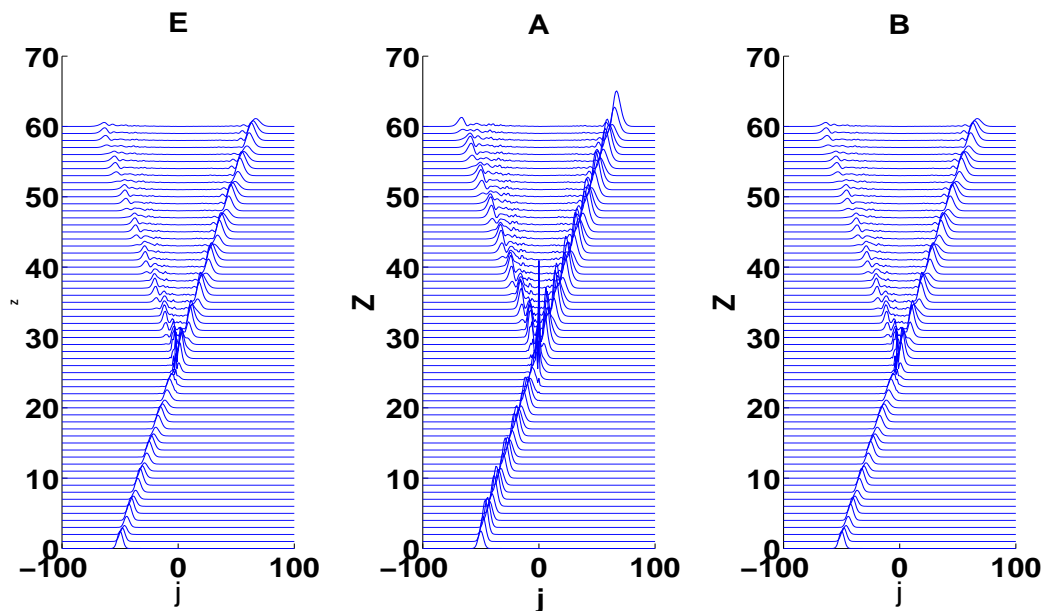


FIG. 3.18 – Propagations dans les trois lignes, l'onde étant envoyé simultanément dans les trois lignes.

La figure ci-dessus nous permet de constater qu'on a toujours une modulation d'amplitude mais cette fois les ondes transmises et réfléchies sont mieux amplifier par le dimer. il en ressort également que les modulations d'amplitude naissent pour créer la symétrie dans tous le système. Dans la suite, nous allons étudier les systèmes PTS constitués uniquement de dimer.

3.4 Etude d'une chaîne de dimers couplés

3.4.1 Présentation du modèle

La figure ci-dessous représente notre premier modèle de dimer :

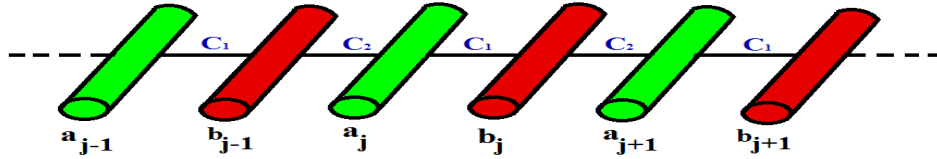


FIG. 3.19 – *Ligne de dimers couplés en serie*

Dans ce modèle j représente le numéro du guide d'onde ; z la distance de propagation ; a_j et b_j sont respectivement les modes des guides d'ondes " gain " et " loss " de coefficient positif et négatif ; c_1 et c_2 les coefficients de couplages à l'intérieur et à l'extérieur des dimers.

3.4.2 Equations du modèle

Les équations correspondant à la propagation de l'onde dans ce modèle sont données par :

$$\begin{cases} i \frac{da_j}{dz} + i\rho_a a_j + c_1 b_j + c_2 b_{j-1} = 0 \\ i \frac{db_j}{dz} + i\rho_b b_j + c_1 a_j + c_2 a_{j+1} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Il est à noter ici que contrairement aux modèles précédents où une chaîne constituées de guides d'ondes conservatifs était couplés de part et d'autre d'une discontinuité Dimer formant déjà un système PTS, nous avons maintenant un système dont il faut au préalable déterminer dans quelles conditions ce dernier constitue un PTS c'est-à-dire déterminer dans quels cas le spectre est réels et dans

quels autre cas il devient imaginaire. Physiquement, ceci signifie que pour une onde donnée, l'amplification dans les guides gain est équilibrée par l'atténuation dans les guides loss de sorte qu'un équilibre s'établisse.

Pour la recherche des conditions PTS, les solutions sont prises sous la forme :

$$\begin{cases} (-\beta + i\rho_a)a_j + (c_1 + c_2e^{-ik})b_j = 0 \\ (c_1 + c_2e^{ik})a_j + (-\beta + i\rho_b)b_j = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

De ce système on peut déduire la matrice M des valeurs propres suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -\beta + i\rho_a & c_1 + c_2e^{-ik} \\ c_1 + c_2e^{ik} & -\beta + i\rho_b \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Les solutions non triviale du système (3-3) existent lorsque le déterminant la matrice (3-4) est nul, on aboutit alors a l'équation ci-dessous :

$$\beta^2 - i\beta(\rho_a + \rho_b) - \rho_a\rho_b - 2c_1c_2 \cos k - c_1^2 - c_2^2 = 0 \quad (3.41)$$

Qui conduit alors aux valeurs de suivantes :

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}i(\rho_a + \rho_b) + \frac{1}{2}\sqrt{8c_1c_2 \cos k + 4c_1^2 + 4c_2^2 - (\rho_a - \rho_b)^2} \\ \beta_2 = \frac{1}{2}i(\rho_a + \rho_b) - \frac{1}{2}\sqrt{8c_1c_2 \cos k + 4c_1^2 + 4c_2^2 - (\rho_a - \rho_b)^2} \end{cases} \quad (3.42)$$

Ces solutions peuvent se mettre sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \beta_1 = i\rho_+ + \sqrt{2c_1c_2 \cos k + c_1^2 + c_2^2 - \rho_-^2} \\ \beta_2 = i\rho_+ - \sqrt{2c_1c_2 \cos k + c_1^2 + c_2^2 - \rho_-^2} \end{cases} \quad (3.43)$$

avec

$$\begin{cases} \rho_+ = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b) \\ \rho_- = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho_b) \end{cases} \quad (3.44)$$

3.4.3 Conditions pour que les valeurs propres soient réelles

Pour que les valeurs propres données en (3.7) soient réelles, il faudrait que :

$$\begin{cases} \rho_+ = 0 \\ et \\ 2c_1c_2 \cos k + c_1^2 + c_2^2 - \rho_-^2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

En remplaçant (3.8) dans (3.9) on obtient :

$$\begin{cases} \rho_a = -\rho_b \\ et \\ |\rho_a - \rho_b| \leq 2\sqrt{2c_1c_2 \cos k + c_1^2 + c_2^2} \end{cases} \quad (3.46)$$

Cette dernière inéquation doit rester valable lorsque prend sa plus petite valeur c'est-à-dire -1 ; on obtient donc :

$$\begin{cases} \rho_a = -\rho_b \\ et \\ |\rho_a - \rho_b| \leq 2|c_1 - c_2| \end{cases} \quad (3.47)$$

Les valeurs propres de ce modèle sont donc réelles lorsque les deux conditions ci-dessus sont remplies ; la première condition de ce système traduit tout simplement le fait que lors de la propagation les effets d'amplification seront compensés par les effets d'atténuations et donc l'onde se propagera de façon stable, la deuxième relation quand elle montre que c_1 doit être différent de c_2 .

Dans la suite nous représentons les valeurs propres lorsque c_1 est différent de c_2 ensuite lorsque $c_1=c_2$

3.4.4 Représentation graphique des valeurs propres

Les deux figures ci-dessous obtenues pour $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, $\rho_a = 0.8$, et $\rho_b = -0.8$; présentent les parties réelles et imaginaires du spectres de valeurs propres en fonction de k

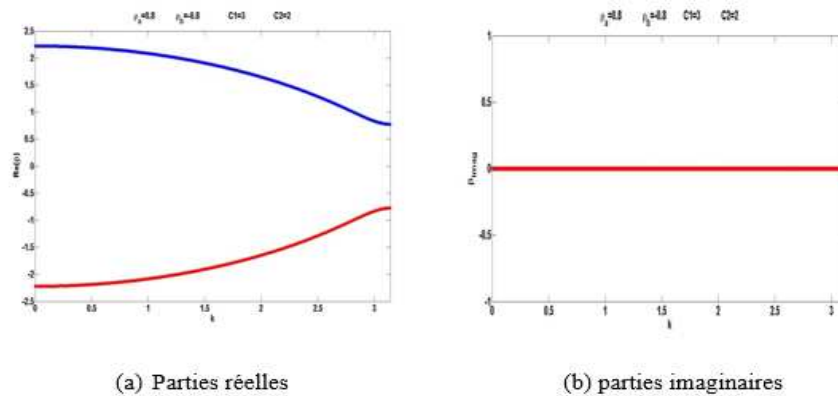


FIG. 3.20 – Représentation des valeurs propres lorsque les conditions sont respectées

Les figures ci-dessus nous permettent de constater que lorsque (3.11) est vérifiée, le spectre de valeurs propres est entièrement réel (parties imaginaires toutes nulles).

- Cas où $\rho_a = -\rho_b$ et $|\rho_a - \rho_b| \geq |\Delta\rho|_{critique}$

Ici les coefficients de gain et loss ont gardés les mêmes valeurs que précédemment et les coefficients de couplages ont changées et deviennent tels que $c_1 = c_2 = 3$. Les représentations sont toujours faites en fonction de k et sont les suivantes :

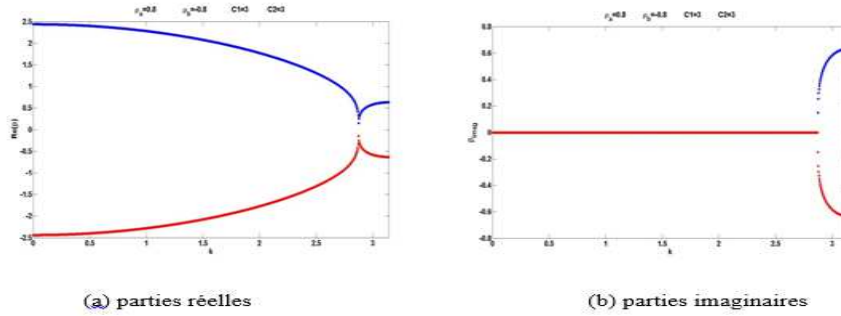


FIG. 3.21 – Représentation des valeurs propres lorsque les conditions ne sont pas respectées

Ici le spectre de valeurs propres n'est plus réel (les parties imaginaires sont non nulles)

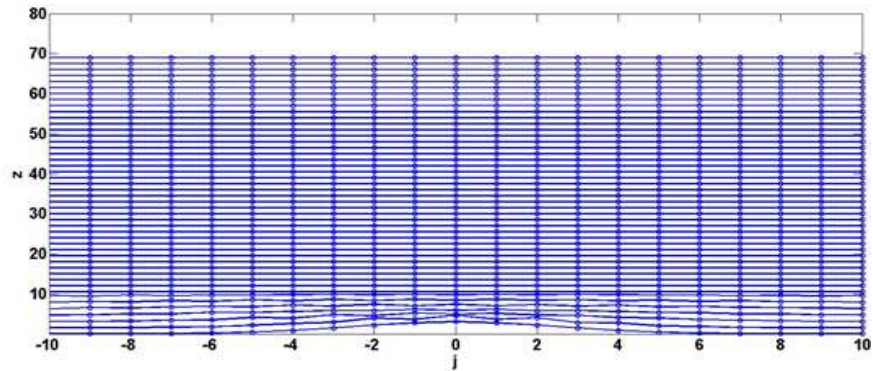
3.4.5 Propagation linéaire dans la chaîne

d'onde à un autre, L'onde que nous envoyons à présent dans la chaîne est une gaussienne qui se propage le long des guides, il s'agit ici d'observer le comportement de cette dernière Contrairement aux modèle précédents où l'onde incidente se propageait de manière transversale d'un guide dans le cas où la chaîne est PTS et lorsqu'elle ne l'est pas ainsi, la propagation sera faite avant et après la valeur critique de donnée par (3-11) .Cette gaussienne est prise sous la forme :

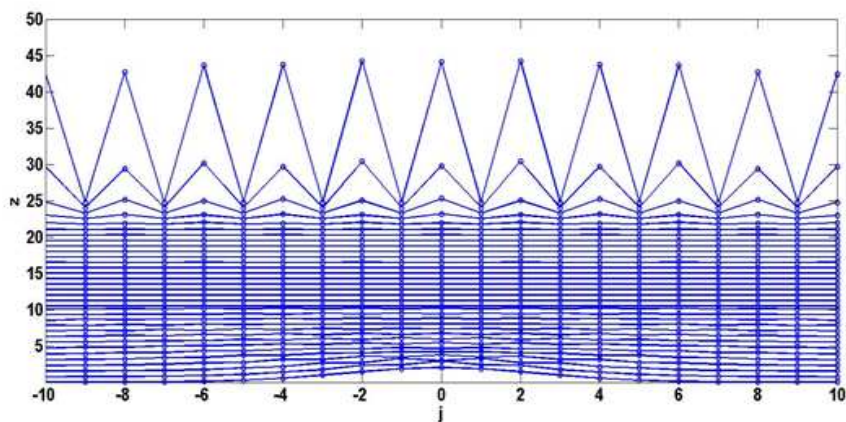
$$a_j(z = 0) = \exp \left[-\delta(j - j_0)^2 \right] \quad (3.48)$$

Où δ est la largeur de la gaussienne, j_0 le guide sur lequel l'onde est centrée

Pour simuler cette propagation nous allons résoudre les équations (3.1) en utilisant Runge-kutta d'ordre 4. Nous obtenons ainsi les figures suivantes :



(a)



(b)

FIG. 3.22 – Propagation dans la ligne constitué du couplage de plusieurs dimers

Les figures (a) et (b) qui sont respectivement obtenus dans les deux cas précédents où le spectre de valeurs propres a été représenté montrent le comportement de l'onde dans la chaîne. Sur celles-ci, on observe une instabilité se manifestant par une croissance de l'amplitude de l'onde lorsqu'elle se propage dans le deuxième cas où les valeurs propres sont complexes alors que cette am-

plitude ne croit pas dans le premier cas où les valeurs propres sont réelles. Cette simulation confirme l'instabilité à laquelle on s'attend lorsque les conditions PTS ne sont pas respectées.

3.5 Couplage de deux chaînes de dimer

A la chaîne de dimer précédente, nous couplons une deuxième chaîne qui nous conduit alors au modèle ci-après :

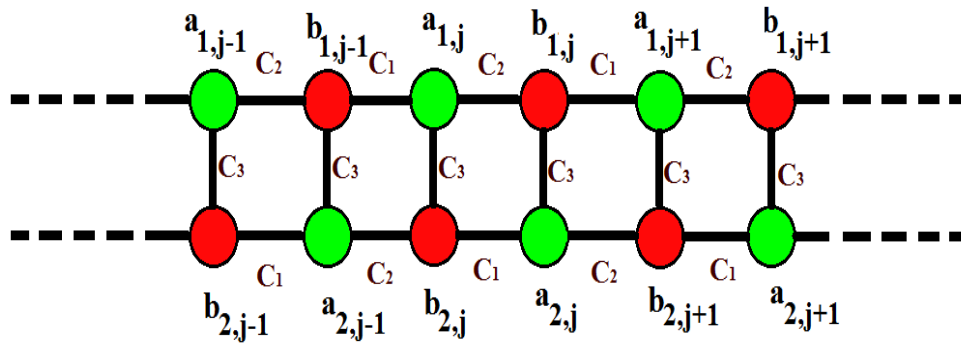


FIG. 3.23 – Deux chaînes couplées de dimers

La deuxième chaîne est déduite de la première en inversant les modes a et b et les coefficients de couplages c_1 et c_2 . Les coefficients de gain/loss sont ρ_a pour le mode a et ρ_b pour le mode b avec :

$$\begin{cases} \rho_a = \rho \\ \rho_b = -\rho \end{cases} \quad (3.49)$$

3.5.1 Equation du modèle

Les équations décrivant la dynamique de l'onde dans le modèle sont déduites de celles trouvées au chapitre 1. En considérant ρ_a et ρ_b comme en (3.10)

elles sont données par :

$$\begin{cases} i \frac{da_{1,j}}{dz} + i\rho a_{1,j} + c_1 b_{1,j-1} + c_2 b_{1,j} + c_3 b_{2,j} = 0 \\ i \frac{db_{1,j}}{dz} - i\rho b_{1,j} + c_1 a_{1,j+1} + c_2 a_{1,j} + c_3 a_{2,j} = 0 \\ i \frac{da_{2,j}}{dz} + i\rho a_{2,j} + c_2 b_{2,j+1} + c_1 b_{2,j} + c_3 b_{1,j} = 0 \\ i \frac{db_{2,j}}{dz} - i\rho b_{2,j} + c_2 a_{2,j-1} + c_1 a_{2,j} + c_3 a_{1,j} = 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

Dans la suite les solutions a_{1j} , b_{1j} , a_{2j} , et b_{2j} seront prises sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,j} = A_1 \exp [i(kj - \beta z)] \\ b_{1,j} = B_1 \exp [i(kj - \beta z)] \\ a_{2,j} = A_2 \exp [i(kj - \beta z)] \\ b_{2,j} = B_2 \exp [i(kj - \beta z)] \end{cases} \quad (3.51)$$

3.5.2 Expressions des valeurs propres β

En remplaçant les solutions données en (3.12) dans (3.11) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (\beta + i\rho)a_{1,j} + (c_1 e^{-ik} + c_2)b_{1,j} + c_3 b_{2,j} = 0 \\ (c_1 e^{ik} + c_2)a_{1,j} + (\beta - i\rho)b_{1,j} + c_3 a_{2,j} = 0 \\ c_3 b_{1,j} + (\beta + i\rho)a_{2,j} + (c_1 + c_2 e^{ik})b_{2,j} = 0 \\ c_3 a_{1,j} + (c_1 + c_2 e^{-ik})a_{2,j} + (\beta - i\rho)b_{2,j} = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

(3.13) peut encore se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \beta + i\rho c_1 e^{-ik} + c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 e^{ik} + c_2 & \beta - i\rho c_3 & 0 \\ 0 & c_3 & \beta + i\rho c_1 + c_2 e^{ik} \\ c_3 & 0 & c_1 + c_2 e^{-ik} & \beta - i\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ b_{1,j} \\ a_{2,j} \\ b_{2,j} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.53)$$

Nous pouvons ainsi déduire la matrice des valeurs propres de ce modèle comme nous l'avons fait dans notre premier modèle ; on obtient ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} \beta + i\rho c_1 e^{-ik} + c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 e^{ik} + c_2 & \beta - i\rho c_3 & 0 \\ 0 & c_3 & \beta + i\rho c_1 + c_2 e^{ik} \\ c_3 & 0 & c_1 + c_2 e^{-ik} & \beta - i\rho \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Le déterminant de cette matrice qui doit être nul, conduit à une équation de la forme :

$$\beta^4 + E\beta^2 + D = 0 \quad (3.55)$$

Avec :

$$E = -2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2c_1 c_2 \cos k - \rho^2) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} D = & c_1^4 - 4\rho^2 c_1 c_2 \cos k + c_3^4 - 2c_1^2 c_3^2 \cos k - 2c_2^2 c_3^2 \cos k + 4c_2 c_1^3 \cos k + 4c_1 c_2^3 \cos k \\ & + 4c_1^2 c_2^2 \cos^2 k + c_2^4 + \rho^4 - 2c_2^2 \rho^2 + 2c_2^2 c_1^2 - 4c_3^2 c_1 c_2 - 2c_3^2 \rho^2 - 2c_1^2 \rho^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

En posant $\tilde{\beta} = \beta^2$; l'équation (3.16) devient :

$$\tilde{\beta}^2 + E\tilde{\beta} + D = 0 \quad (3.58)$$

Les solutions de cette équation sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = -\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\sqrt{E^2 - 4D} \\ \tilde{\beta}_2 = -\frac{1}{2}E - \frac{1}{2}\sqrt{E^2 - 4D} \end{cases} \quad (3.59)$$

Avec :

$$E^2 - 4D = 8c_3^2(1 + \cos k)(c_1 + c_2)^2 \quad (3.60)$$

On peut donc déduire les valeurs propres du système qui sont données par :

$$\begin{cases} \beta_1 = \sqrt{\tilde{\beta}_1} \\ \beta_2 = -\sqrt{\tilde{\beta}_1} \\ \beta_3 = \sqrt{\tilde{\beta}_2} \\ \beta_4 = -\sqrt{\tilde{\beta}_2} \end{cases} \quad (3.61)$$

Sachant que dans les systèmes PTS le spectre de valeurs propres doit être réel, alors nous devons chercher les conditions dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ seront réelles.

Pour que ces valeurs propres soient réelles il faudrait que $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ soient réels et positifs ; ceci revient à dire que :

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 \geq 0 \leftrightarrow E \leq \sqrt{E^2 - 4D} \\ \tilde{\beta}_2 \geq 0 \leftrightarrow E \leq -\sqrt{E^2 - 4D} \end{cases} \quad (3.62)$$

ces inéquations conduisent à :

$$\begin{cases} \rho^2 \leq c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2c_1c_2 \cos k + c_3(c_1 + c_2)\sqrt{2(1 + \cos k)} \\ \rho^2 \leq c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + 2c_1c_2 \cos k - c_3(c_1 + c_2)\sqrt{2(1 + \cos k)} \end{cases} \quad (3.63)$$

Ces expressions doivent rester vrai lorsque $\cos k$ prend sa plus petite valeur soit $\cos k = -1$

On obtient alors :

$$\rho^2 \leq c_3^2 + (c_1 - c_2)^2 \quad (3.64)$$

La condition pour que les valeurs propres soient réelles est donc :

$$|\rho| \leq \sqrt{c_3^2 + (c_1 - c_2)^2} \quad (3.65)$$

Dans la suite nous noterons $|\rho|_{\text{critique}} = \sqrt{c_3^2 + (c_1 - c_2)^2}$ la valeur de ρ au-delà de laquelle le spectre est complexe.

La Représentation des valeurs propres en deçà et au-delà de la valeur critique donnent les courbes qui suivent

- *Cas de* $|\rho| < \sqrt{c_3^2 + (c_1 - c_2)^2}$

Ici nous avons considéré $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0.5$ et nous avons représenté β_1 , β_2 , β_3 et β_4 en fonction de k allant de 0 à π lorsque $|\rho| < |\rho|_{\text{critique}}$ (condition respectée).

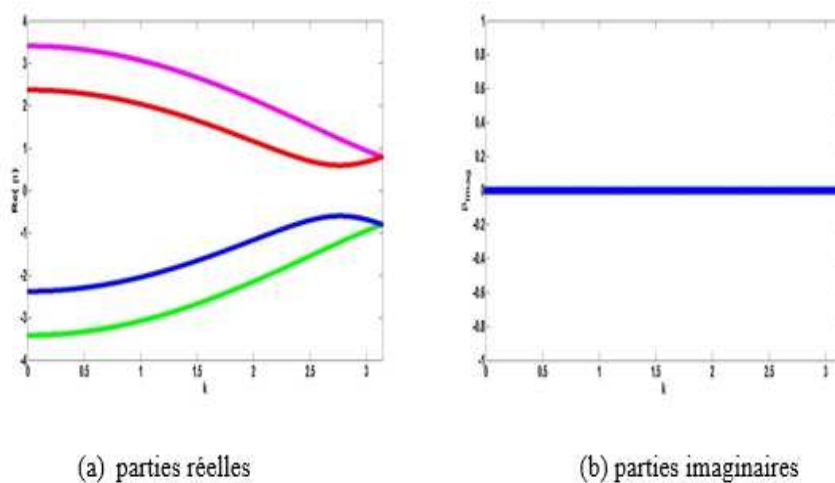


FIG. 3.24 – Représentation des valeurs propres lorsque la condition est respectée

Dans cette figure β_1 est représentée en violet ; β_2 en vert ; β_3 en rouge et β_4 en

bleu. Nous constatons ici que toutes les valeurs propres sont entièrement réelles car leurs parties imaginaires sont toutes nulles.

- Cas $|\rho| \succ \sqrt{c_3^2 + (c_1 - c_2)^2}$

Dans ce cas la condition n'est plus respectée c'est-à-dire $|\rho| \succ |\rho|_{\text{critique}}$ et les coefficients c_1 , c_2 , c_3 et c_4 gardent les mêmes valeurs que précédemment.

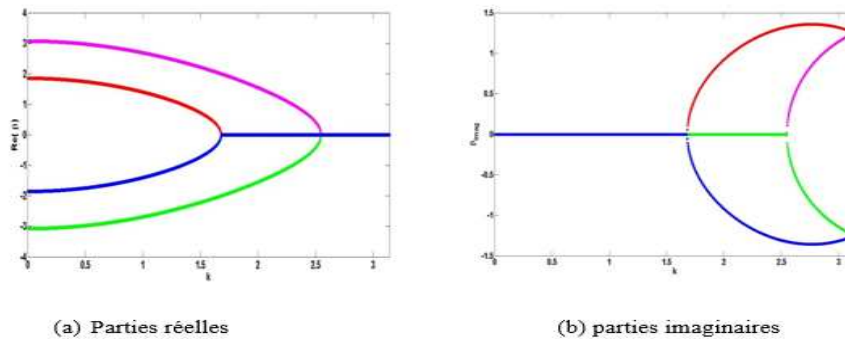


FIG. 3.25 – représentation des valeurs propres lorsque la condition n'est pas respectée

Nous constatons ici que les valeurs propres ne sont plus réelles mais plutôt complexes car leurs parties imaginaires sont non nulles.

3.5.3 Propagation dans le modèle

La propagation faite dans ce cas est linéaire car c'est une gaussienne de la forme (3.9) que nous envoyons dans cette chaîne de dimer couplée. Nous obtenons ainsi les figures suivantes :

- Première ligne de la chaîne de dimers couplés.

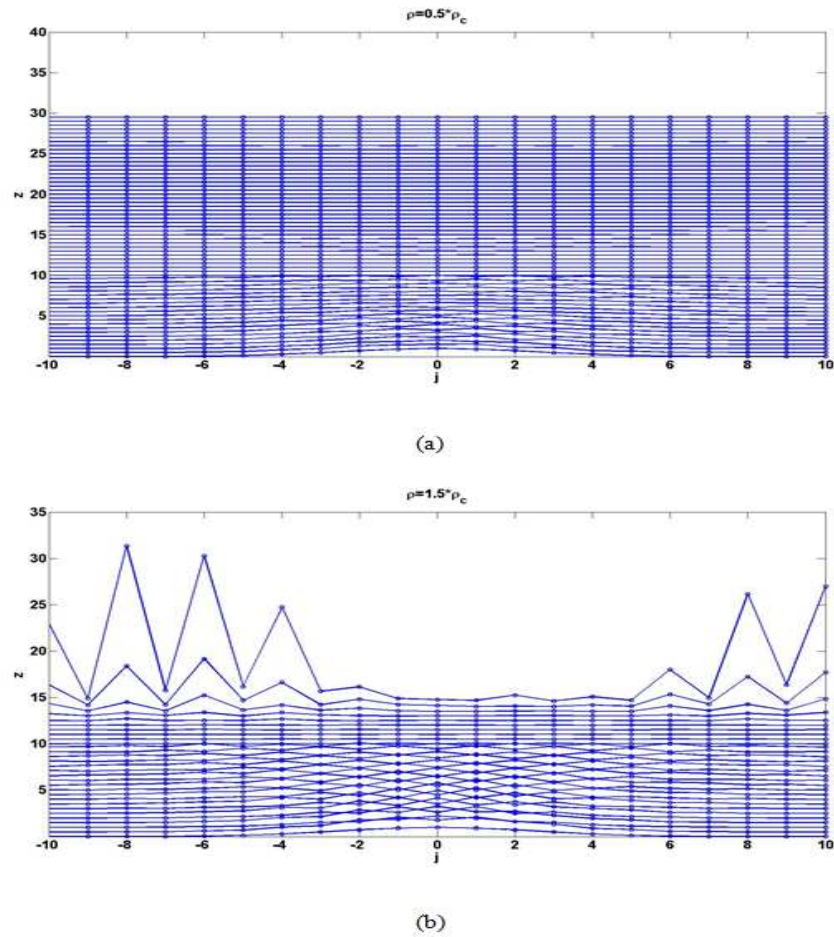
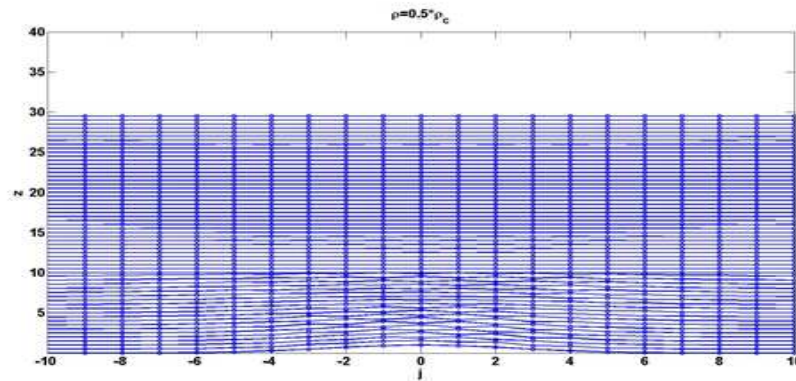


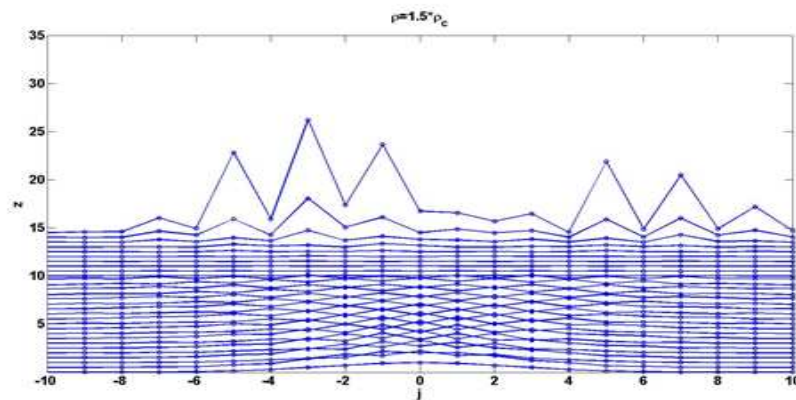
FIG. 3.26 – Propagation d’une gaussienne dans la première ligne de la chaîne de dimers couplée : (a) avant la valeur critique et (b) après la valeur critique.

Les figures (a) et (b) obtenus ci-dessus montrent respectivement le comportement de l’onde dans les deux cas précédents pour lesquels le spectre de valeurs propres a été représenté. Sur la première figure on observe une propagation des ondes avec amplitude constante et de façon stable lorsque le spectre est réel ; sur la deuxième figure par contre on observe une augmentation de l’amplitude de l’onde de façon instable lorsque le spectre de valeurs propres est complexe.

- Deuxième ligne de dimer.



(a)



(b)

FIG. 3.27 – Propagation dans la deuxième ligne de la chaîne de dimer couplée : (a) avant la valeur critique et (b) après la valeur critique.

Les figures (a) et (b) représentent le comportement de l'onde dans la deuxième chaîne de Dimers ; Sur la première figure on observe une propagation de l'onde avec une amplitude constante et ceci correspond à un spectre de valeurs propres réel comme dans la première chaîne et sur la deuxième figure on fait le même constat que dans la première ligne et on observe une augmentation de l'amplitude

de façon instable pour le cas du spectre de valeurs propres complexes.

Conclusion

Parvenu au terme de ce chapitre qui portait sur la propagation dans les systèmes PTS constitués uniquement de Dimers, il en ressort que lorsque la propagation de la gaussienne est effectuée dans les conditions PTS obtenues à l'aide des valeurs propres, l'onde se propage de manière stable et à amplitude constante, par contre lorsqu'elle n'est pas respectée la propagation est instable avec une augmentation d'amplitude de l'onde dans le temps.

IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUES SUR LE SYSTÈME ÉDUCATIF.

Introduction

La pédagogie est la branche de l'éducation qui se préoccupe des méthodes d'enseignement. Dans les chapitres précédents, on a étudié la transmission et la réflexion d'une onde ainsi que sa propagation. Les ondes étant une notion abordée à partir du second cycle des enseignements généraux, l'enseignant devra donc trouver des méthodes et moyens pour que la dite notion soit bien assimilée par les apprenants. La tâche qui lui incombe est considérée comme étant de plus en plus étendue et couvre notamment le développement individuel des enfants et des jeunes gens, la gestion des processus d'apprentissage en classe, la transformation de l'ensemble de l'établissement scolaire en une " communauté d'apprenants", ainsi que les liens avec les collectivités locales et le monde extérieur.

4.1 Implication sur le rôle de l'enseignant

L'enseignement est de nos jours l'un des métiers les plus nobles car il participe à sa manière à une reconstruction d'une société plus consciente et dynamique et ceci passe par la prise de conscience de l'environnement immédiat dans lequel nous nous trouvons. L'enseignant se trouvant dans ce maillage et a donc certaines responsabilités et devoirs. Il n'est plus question pour ce dernier de construire des

notions essentiellement focalisées sur la théorie comme jadis mais amener l'apprenant dans une approche non plus objective mais basées sur le savoir faire. Pour y parvenir l'enseignant doit centrer son cours sur des activités rattachées à la vie pratique de tous les jours qu'il prendra lui-même le soin de bien élaborer.

Lorsqu'il aura à dispensé le cours sur les ondes, l'enseignant pourra se servir de ce background pour mieux expliquer la notion en question aux élèves, mais aussi ce travail peut aider l'enseignant à trouver plus facilement des situations problèmes tirées du quotidiens des apprenants pour introduire son cours sur les ondes.

4.2 Implications sur l'apprentissage des élèves

en général dans notre contexte beaucoup n'ont pas de culture scientifique et leur comportement en société n'est pas très différent d'un profane quand il s'agit de régler un problème concret qui fait parfois appel aux notions acquises en classe car ne sachant pas faire un parallélisme entre la théorie apprise et les problèmes concrets.

Un cours bien élaboré (sou tenu par une fiche pédagogique soigneusement conçue et orienté expérimentation) par exemple sur les ondes peut influencer l'apprenant et le permettre de mieux comprendre et de se servir de ces notions pour résoudre une situation problème dans la vie courante, il peut aussi influencer sur l'orientation du choix de l'apprenant dans la mesure où ce dernier devient conscient des réalités et enjeux de la dite notion et perçoit des lors différemment les choses.

Conclusion

Parvenu au terme de nos travaux où il était question des implications pédagogiques de notre thématique à savoir la propagation des ondes et de façon générale la maîtrise des ondes, il en ressort que l'enseignant a de lourdes responsabilités quant à la façon de dispenser ces notions assez délicates introduites au second cycle de l'enseignement général. Il en ressort également que le développement des méthodes d'enseignements plus concrètes pratiques et dynamiques influent sur le choix et l'orientation de ce dernier dans le monde universitaire et professionnel.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail portait sur l'étude des systèmes PTS constitués de Dimers, dans celui-ci, nous avons à travers des généralités défini ce que l'on entend par système Parity and Time symétry (PTS) ensuite, nous avons étudié la transmission et la reflexion des ondes par des chaînes comportant des discontinuités de type Dimer, et nous avons achevé par la détermination des conditions PTS des chaînes couplées de Dimers. De ce travail, il ressort que les systèmes PTS doivent être décrit par un potentiel complexe dont la partie réelle est une fonction paire de la position et la partie imaginaire une fonction impaire de la position. La discontinuité de type Dimer introduite dans une chaîne de guide d'ondes conservatif peut conduire à une amplification de cette onde, le couplage de deux chaînes de guides d'ondes entraîne une modulation d'amplitude qui génère une symétrie dans la propagation de l'onde dans les différentes chaînes. D'autre part, des chaînes couplées constituées d'une série de Dimers peuvent constituer des systèmes PTS qui comme tous les autres systèmes PTS présentent un spectre réels dans des conditions que nous avons déterminées et ledit spectre devenant complexe hors de ladite condition, faisant basculer le système dans une instabilité.

En guise de perspective, nous envisageons dans nos prochains travaux d'étendre nos études au cas non linéaire dans la propagation des solitons.

Bibliographie

- [1] C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. 80, 5243 (1998).
- [2] D. N. Christodoulides, C. E. Ruter, K. G. Makris, R. EL-Ganainy, M. Sergev and D. Kip, Nature Phys 6, 192 (2010).
- [3] Yuri S. Kivshar, Sergev V. Suchkov, Boris A. Mahomed, D. N. Christodoulides and V. Dimitriev, Phys. Rev. 84, 046609 (2011).
- [4] Z. H. Musslimani, G. Makris, R. EL-Ganainy and D. N. Christodoulides, Analytical solutions to a class of non linear Schrodinger equations with PT like potentials ; university of central Florida USA (2008).
- [5] M. Mba, Etude et analyse des structures des bandes des systèmes PTS, mémoire ENS (2013).
- [6] | R. EL-Ganainy, K.G. Makris, D. N. Christodoulides and Z. H. Musslimani, Opt. Lett. 32, 2632 (2007).
- [7] V. Sergev. Dimitriev, A. Andrey. Sukhorukov and Yuri. S. Kivshar, Opt. Lett. 35, 2976 (2010).
- [8] M. M. Sanga, Propagation des ondes dans une chaine de guides d'ondes ayant en son sein une discontinuité PTS, mémoire ENS (2015).
- [9] H. L. Nantia Woufack, Propagation d'une onde dans les PTS périodiques et non périodiques ENS (2015).