REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHERTRAINING COLLEGE OF YAOUNDE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

N

E S

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTEGRALES

Mémoire de DI.P.E.S II de mathématiques

De

MOTCHEKA KAMGAING Albert

***Matricule :* 08V0320**

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Pr Hubert NNANG

Maître de Conférences

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique : 2015-2016

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTÉGRALES

Mémoire de DIPES II de Mathématiques

De

MOTCHEKA KAMGAING Albert

Matricule: **08V0320**

Licencié en Mathématiques pures

Sous la direction de :

Pr. Hubert NNANG

Maître de conférences

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année Académique 2015-2016

7 juillet 2016

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :
Ma maman chérie KAMTCHUENG Jeannette, mère pleine d'amour et de tendresse .

REMERCIEMENTS

Ce Mémoire n'aurait jamais vu le jour sans l'Éternel et la participation effective de certaines personnes que j'ai eu la grâce d'avoir auprès de moi pendant ces deux années de travail ; je dis merci particulièrement :

- Au Dieu tout puissant, qui m'a accordé les grâces nécessaires au cours de ce travail pour accomplir l'une des missions auxquelles il m'a appelé. Dieu d'amour comment ne pas te bénir et te glorifier pour tant de merveilles que tu as accompli dans ma vie ? Merci Seigneur, à toi la plénitude de la gloire ;
- Au Professeur NNANG Hubert pour m'avoir proposé ce sujet et dirigé tous les travaux de ce mémoire en faisant preuve d'une grande disponibilité malgré ses multiples occupations ;
- A tous les enseignants du département de mathématiques de l'École Normale Supérieure de Yaoundé qui m'ont tout appris depuis mon entrée dans cette prestigieuse école ;
- A tous les aînés, camarades de promotion et mes camarades de l'université de Yaoundé I pour leur soutien ;
- A tous ceux qui n'ont ménagé aucun effort à lire ce mémoire et en faire des critiques et suggestions importantes, je pense à Junior TSOYI, SOP MADJO, Hilaire TOUYEM ;
- A tous ceux qui m'ont aidé à saisir ce mémoire après l'avoir perdu lors d'une agression.
- A toute ma famille pour leur soutien moral, matériel et financier qu'elle a eu à faire jusqu'ici pour ma réussite académique. Particulièrement à Romain KOMMOGNE, Pillipe KOM, Germain TCHATCHIM, Gisèle MALIEDJE, Jean pierre CHETUENG, Gertrude YOUBI, Juliette AKEUFACK, Alice GAKAM et Antoine DJATCHEGIE ;
- A la famille MABOU, MAWE Jeanne et sa suite ;
- A tous ceux qui m'ont aidé par quelque manière que ce soit et ne s'y retrouvent pas, qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

Déclaration sur l'honneur

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

MOTCHEKA Albert

Table des matières

Table des figures

RESUME

Dans ce travail, nous effectuons le changement de variables dans les intégrales (de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n, n \geq 1$). Précisément, nous établissons la formule suivante dite de changement de variables :

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx,$$

où U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, f est une fonction mesurable de $V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur V, $D(\varphi)$ est le déterminant de la matrice Jacobienne de φ et dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
En utilisant la notion de mesure image, nous montrons que la formule est vraie pour les fonctions indicatrices. Ensuite, partant du fait que toute fonction étagée est combinaison linéaire de fonctions indicatrices, nous établissons la formule pour les fonctions étagées ; et enfin pour des fonctions mesurables ; car toute fonction mesurable est limite d'une suite de fonctions étagées.

Mots clés : mesure, fonctions mesurables, difféomorphisme, ensemble négligeable, changement de variables.

ABSTRACT

In this work, we make change of variables integral (of Lebesgue in $\mathbb{R}^n, n \geq 1$). Exactly, we establish the following formula call change of variables formula :

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx,$$

where U and V are open subsets of $\mathbb{R}^n, f$ is a measurable function of $V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \varphi$ is a $\mathcal{C}^1$-diffeomorphism, $D(\varphi)$ is the determinant of the Jacobian matrix of φ and dx is the Lebesgue measure $\mathbb{R}^n$.

Using the notion of frame measure, we prove that the formula is is true for characteristic functions. Then, going to the fact that every simple function is a linear combination of characteristic functions, we establish the formula for simple functions and finally for measurables functions because every measurable function is a limit of a sequence of simples functions.

Keys words : measure, measurable functions, diffeomorphism, negligible set, change of variables.

INTRODUCTION

L'intégration est un concept fondamental en mathématiques issue de l'analyse. Elle est très utilisée dans de nombreuses branches des mathématiques telles que la probabilité et la statistique qui sont des domaines très applicables dans la société. Historiquement, tout part du fait que l'on souhaite évaluer l'aire sous une courbe graphique. Les méthodes utilisées doivent beaucoup à la théorie de l'intégration qui occupe une place prédominante en mathématiques ; bien qu'il faille attendre les améliorations du calcul infinitésimal. Au XVII^e siècle naissent des méthodes générales du calcul de l'infini (voir le principe de Cavaleri) [1]. En 1686, Leibnitz apporta des modifications importantes en mettant sur pied les fondements de l'intégration (Geometria recondita, 1686) ; il donna entre autres le lien entre intégration et dérivation. Malgré ces sacrifices, il y avait encore beaucoup à faire, c'est ainsi qu'au XIX^e siècle Riemann (Bernard Riemann, 1854, publication posthume en 1867)[8] rendu les choses souples ; mais l'intégral de Riemann ne se limitait qu'aux fonctions bornées. Ce n'est qu'en 1902 que Henri Lebesgue révolutionna les choses en instituant l'intégrale de Lebesgue qui marqua les esprits par sa formalisation aboutie. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine, en témoignent des extensions de l'intégrale (l'intégrale d'Ito, intégrale de Kurzweil-henstock)[8]. Elle permet entre autres le calcul d'aire de l'espace délimité par la représentation graphique d'une fonction, le calcul de volume. Nous nous intéressons dans ce travail à l'intégration de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. De façon plus précise, nous faisons un compte rendu sur les méthodes d'intégration utilisant le changement de variables dans les intégrales. Le résultat le plus important que nous explicitons est connu sous le nom théorème de changement de variables. Pour y parvenir, nous établirons tout d'abord quelques résultats importants. Notre travail est axé sur quatre chapitres ; le premier s'intéresse à des notions préliminaires de mesure et d'intégration, au chapitre deux on travail dans un cadre particulier puis on généralise les résultats dans $\mathbb{R}^n$ au chapitre trois et le quatrième donne quelques implications pédagogiques.

CHAPITRE UN

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Pour la bonne compréhension des résultats à établir dans le cadre de ce mémoire, il est nécessaire de rappeler certaines notions importantes. Il s'agit principalement des éléments de la théorie de mesure et d'intégration.

1.1 Définitions et propriétés

1.1.1 Notion de mesure

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.1.1 : i) On appelle tribu sur E toute famille $\mathcal{A}$ de parties de E vérifiant :

- $E \in \mathcal{A}$;
- $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \backslash B \in \mathcal{A}$;
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A},\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

ii) Lorsqu'une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E est une tribu, on dit que le couple $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Remarque 1.1.1 : Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble E, alors :

- $\forall A \in \mathcal{A}, A^c \in \mathcal{A}$;
- $\varnothing \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ est stable pour des intersections dénombrables.

Remarque 1.1.2 : Tout ensemble non vide E possède des tribus, par exemple :

- $\mathcal{A} = \{\varnothing, E\}$ est la plus petite tribu sur E ;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ est la plus grande.

Définition 1.1.2 : Une topologie sur un ensemble non vide X est une famille $\mathcal{T}$ de parties de X telles que :

– $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
– si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$;
– $\mathcal{T}$ est stable pour des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{T}$.
  Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les ouverts de X. On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

Définition 1.1.3 (Tribu de Borel) : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle tribu de Borel sur X la tribu engendrée par les ouverts de X.

Remarque 1.1.3 : Si X est un ensemble, on désigne par $\mathcal{B}(X)$ la tribu engendrée par les ouverts de X. Un élément de $\mathcal{B}(X)$ est appelé borélien.

Définition 1.1.4 : Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
On appelle mesure sur $(E, \mathcal{A})$ toute application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :
– $\mu(\varnothing) = 0$;
– $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ si $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ et $A_n \cap A_m = \varnothing$ pour $n \neq m$.

Le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Remarque 1.1.4 : Soit E un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur E et μ une mesure sur $\mathcal{A}$.
– On dira espace mesurable si on a le couple $(E, \mathcal{A})$ et espace mesuré si on a le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$.
– On dira souvent "mesure" ou "mesure positive".
– La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire pour éviter des situations triviales.
  En effet, $\forall A \in \mathcal{A}$, on a $A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing ...$, donc $\mu(A) = \mu(A) + \sum_n \mu(\varnothing)$.

Proposition 1.1.1 (propriétés élémentaires d'une mesure) : *1. Monotonie : Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

2. Sous-additivité : Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum\limits_n \mu(A_n)$.

3. Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\cup_n A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

4. Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}$ et si $A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, avec $\mu(A_0) < \infty$ alors $\mu(\cap_n A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

Preuve: cf.[5] ∎

1.1.2 Quelques exemples de mesures

1. **Mesure de comptage sur un ensemble X.**

   Sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$, on définit l'application $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A) & \text{si A est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

   On vérifie que μ est une mesure appelée mesure de comptage. Cette mesure est surtout utilisée sur des ensembles "discrets" $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, ...)$.

2. **Mesure de Dirac en un point.**

   Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, avec X non vide et soit $x \in X$. On définit l'application

   $\mu_x : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ par :

$$\mu_x(A) = 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

   μ est une mesure appelée mesure de Dirac au point x, on le note souvent $\mu = \delta_x$.

Remarque 1.1.5 : La condition $\mu(A_0) < \infty$ du (4) de la proposition 1.1.1 est nécessaire. En effet, considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage et considérons $A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$, alors $A_n \supset A_{n+1}$ et $\bigcap_n A_n = \emptyset$, mais $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = +\infty$.

1.1.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 1.1.1 (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) : *Il existe une unique mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que $\mu(]a, b[) = b - a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*
μ est appelée mesure de Lebesgue.

Preuve: cf.[5] ■

Remarque 1.1.6 : La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est diffuse, c'est-a-dire :
$\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
En effet, $\{x\} = \bigcap]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, donc, par la proposition 1.1.1, on a :
$\mu(\{x\}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(]x - \dfrac{1}{n}, x + \dfrac{1}{n}[) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0.$

On dit aussi qu'elle ne charge pas les points (contrairement à la mesure de Dirac).

Remarque 1.1.7 : Sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, on a :

- $\mu(]a,b[) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b]) = \mu([a,b]) = b - a$ si $a < b$,
- Les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

En particulier, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont de mesure nulle

Définition 1.1.5 : Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. On dit que $A \subset E$ est négligeable (pour la mesure μ) si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$.
2. On dit que la mesure μ est complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est encore négligeable.

Remarque 1.1.8 : Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Un sous ensemble quelconque N de E est négligeable s'il existe un ensemble mesurable B tel que $N \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 1.1.6 : On appelle pavé dans $\mathbb{R}^n$ un produit de n intervalles bornés de $\mathbb{R}$ (fermés, ouverts ou semi-ouverts).

Théorème 1.1.2 (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$) : *Il existe une unique mesure positive sur* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, *notée* λ *et appelée mesure de Lebesgue, telle que pour tout pavé* $P = \prod_{i=1}^{n}[ai, bi] \subset \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i, \forall i = 1, \cdots, n$ *on ait :* $\lambda(P) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Preuve: cf.[5] ∎

La mesure de Lebesgue λ possède les propriétés suivantes :

Propriétés 1.1.1 : *a)* λ *est invariante par translation et rotation.*

b) λ *est régulière, c'est-a-dire* $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ *mesurable, on a :*

- $\lambda(E) = sup\{\lambda(K) | K \text{ compact } \quad K \subset E\}$. *C'est la régularité intérieure ;*
- $\lambda(E) = inf\{\lambda(V) | V \text{ ouvert } \quad V \supset E\}$. *C'est la régularité extérieure.*

Preuve: cf.[5] ∎

Remarque 1.1.9 : Certains auteurs (cf.[2],[5]) utilisent une caractérisation beaucoup plus forte qui est la suivante : Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite de pavés $(P_i)_i$ recouvrant M et tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \leq \varepsilon$.

Remarque 1.1.10 : La régularité exprime le fait que les ensembles boréliens peuvent être approchés de l'intérieur par des compacts, et de l'extérieur par des ouverts. De manière équivalente, pour toute partie mesurable A de mesure finie et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \backslash K) \leq \varepsilon$.

Proposition 1.1.2 : *Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Tout ensemble mesurable $E \subset U$ est réunion d'un borélien $B \subset U$ et d'un ensemble négligeable N.*
2. *Tout ensemble négligeable est inclus dans un borélien négligeable.*

Preuve: cf.[6] ■

Définition 1.1.7 : Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.
Une application $f : E \longrightarrow F$ est mesurable si $\forall A \in \mathcal{B},\ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Définition 1.1.8 : Soit $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces topologiques. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est continue si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.1.11 :
- Les fonctions mesurables sont aux espaces mesurables ce que les fonctions continues sont aux espaces topologiques.
- Si $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable, si Y est un ensemble quelconque et $f : X \longrightarrow Y$ une application, alors on peut toujours munir Y d'une tribu $\mathcal{N}$ telle que f soit mesurable. Évidemment, on peut prendre $\mathcal{N} = \{\varnothing, Y\}$ (et c'est la plus petite tribu possible). Un meilleur choix est de poser $\mathcal{N} = \{B \subset Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$. Alors on peut vérifier que $\mathcal{N}$ est une tribu, et que c'est la plus grande tribu sur Y qui rende f mesurable. On dit que $\mathcal{N}$ est la tribu image de $\mathcal{M}$ par f.
- Si X est un ensemble quelconque, si $(Y, \mathcal{N})$ est un espace mesurable, et $f : X \longrightarrow Y$ une application, alors on peut toujours munir X d'une tribu $\mathcal{M}$ telle que f soit mesurable. Évidemment on peut prendre $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ (et c'est la plus grande tribu possible). Un meilleur choix est de poser $\mathcal{M} = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{N}\}$. Alors on peut vérifier que $\mathcal{M}$ est une tribu, et c'est la plus petite tribu sur X qui rende f mesurable.

Définition 1.1.9 : Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
Une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeur(s).
Elle est dite étagée sur $\mathcal{A}$ si elle est étagée et pour toute valeur prise a $\in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{A}$.

N.B : Si f est étagée et si $a_1, ..., a_p$ sont les valeurs prises, on note $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ et on a $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{A_i}$ où

$$1_{A_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_i, \\ 0 & \text{si } x \notin A_i. \end{cases}$$

Notation : On note respectivement par $\mathcal{E}; \mathcal{E}_+; \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ l'espace des fonctions étagées, étagées positives, mesurables et mesurables positives. $\mathcal{E}(\mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+) \equiv \mathcal{E}_+(\mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$.

Propriétés 1.1.2 : *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.*

- *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ sont mesurables.*
- *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui converge simplement vers f, alors f est mesurable.*
- *La composée de fonctions mesurables est mesurables.*

Preuve: cf.[9] ■

Proposition 1.1.3 : *Toute fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives.*

Preuve: cf.[5] ■

Remarque 1.1.12 : On rappelle que :

- $\limsup f_n = \inf_n (\sup_{p \geq n} f_p)$;
- $\liminf f_n = \sup_n (\inf_{p \geq n} f_p)$;
- $\liminf f_n \leq \limsup f_n$.

Propriétés 1.1.3 : *Si f et g sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, alors $f + g, sup(f,g), inf(f,g), fg$ sont mesurables et $\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$ est mesurable.*

Preuve: cf.[9] ■

Définition 1.1.10 (Terminologie) : Dans un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on dit qu'une propriété $P(x)(x \in E)$ est vraie presque partout (ou μ-presque partout) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

1.1.4 Notion d'intégration

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 1.1.11 : Soit $f \in \mathcal{E}_+(\mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$
On appelle intégrale supérieure de f notée $\int^* f\, d\mu$, l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ donné par $\int^* f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$ avec $f = \sum_{i=1}^{n} y_i 1_{A_i}$ où les $A_i \in \mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints.

Définition 1.1.12 : Soit $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}_+)$.
On appelle intégrale supérieur de f notée $\int^* f\, d\mu$, la limite de $\int^* f_n\, d\mu$
où $(f_n)_n \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}})$ est croissante et converge vers f.

Propriétés 1.1.4 : *Soient $f, g \in \mathcal{M}_+$.*

1.) $\int^* (f+g)\, d\mu = \int^* f\, d\mu + \int^* g\, d\mu$,

2.) $\forall \lambda > 0$, $\int^* \lambda f\, d\mu = \lambda \int^* f\, d\mu$,

3.) $f \leq g \Rightarrow \int^* f\, d\mu \leq \int^* g\, d\mu$,

4.) si $f = g$ μ-pp[1] alors $\int^* f\, d\mu = \int^* g\, d\mu$.
les propriétés 1),2),et 3), sont aussi vérifiées lorsque f et g sont dans $\mathcal{E}_+$.

Preuve: cf.[9] ∎

Proposition 1.1.4 (Mesure image) : *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de E vers F. Alors, l'application μ_f définie de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}_+$ par : $\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$, pour tout $A \subset \mathcal{B}$, est une mesure sur $\mathcal{B}$, appelée mesure image par f.*

Preuve: cf.[6] ∎

Dans la suite, nous considérerons, sauf mention expresse du contraire, l'espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ où $\mathcal{A}$ sera la tribu borélienne.

Définition 1.1.13 : Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est intégrable pour la mesure μ si f est mesurable ou égale presque partout à une fonction mesurable et $\int^* f^+ d\mu < +\infty$; $\int^* f^- d\mu < +\infty$, avec $f^+ = max(f, 0)$ et $f^- = min(f, 0)$.
On appelle intégrale de f notée $\int f d\mu$, le réel $\int f d\mu = \int^* f^+ d\mu - \int^* f^- d\mu$.

1. μ–presque partout

Remarque 1.1.13 : Dans la définition ci-dessus, si f est mesurable alors f^+ et f^- sont mesurables.

Propriété 1.1.1 : *Toute fonction intégrable est mesurable.*

Preuve: cf.[2] ■

1.2 Quelques théorèmes fondamentaux d'intégration

Dans cette partie, nous énonçons sans démonstration les théorèmes de Fatou, de Convergence de Lebesgue, de Fubini

Lemme 1.1 (de Fatou (cas particulier)) *Pour toute suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{M}_+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, $\liminf \int^* f_n\, d\mu \geq \int^* \liminf f_n\, d\mu$.

Preuve: cf.[9] ■

Théorème 1.2.1 (de Beppo levi) : *Pour toute suite croissante* $(f_n)_n$ *de* $\mathcal{M}_+$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int^* f_n\, d\mu = \int^* \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu.$$

Preuve: cf.[9] ■

Lemme 1.2 (de Fatou (cas général)) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions intégrables ;*

- *Si* $\forall n\ f_n \geq g$ μ*-pp où* g *est intégrable et si* $\liminf \int f_n\, d\mu < +\infty$, *alors* $\liminf f_n$ *est intégrable et* $\int \liminf f_n\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu$.
- *Si* $\forall n\ f_n \leq g$ μ*-pp où* g *est intégrable et si* $\limsup \int f_n\, d\mu > -\infty$, *alors* $\limsup f_n$ *est intégrable et* $\int \limsup f_n\, d\mu \geq \limsup \int f_n\, d\mu$.

Preuve: cf.[9] ■

Théorème 1.2.2 (de convergence dominée) : *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de fonctions intégrables qui converge* μ*-pp et telle qu'il existe une fonction* g *intégrable vérifiant :*
$\forall n\ |f_n| \leq g$ μ*-pp. Alors* $\lim_n f_n$ *est intégrable et* $\int \lim f_n\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$.

Preuve: cf.[9] ■

Théorème 1.2.3 (de convergence monotone) : *Soit* $(f_n)_n$ *une suite monotone de fonctions intégrables,*
si $\int f_n\,d\mu$ *a une limite finie, alors* $f = \lim_n f_n$ *est intégrable et* $\int \lim f_n\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu$.

Preuve: cf.[9] ∎

Théorème 1.2.4 (de Fubini) : $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, *soit* U *(resp* V*) un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *(resp* $\mathbb{R}^q$*).*

Soit f *une fonction intégrable sur* $U \times V$*, pour* x *fixé dans* U*, posons* $f_x(y) = f(x,y)$, $y \in V$*. Alors :*

1. *Pour presque tout* x *la fonction* f_x *est intégrable sur* V*, la fonction* $x \longmapsto F(x) = \int_V f_x(y)dy$ *est donc définie presque partout sur* U*.*
2. *La fonction* F *est intégrable dans* U*.*
3. $\iint_{U\times V} f(x,y)dxdy = \int_U F(x)dx$*. Autrement dit :*

$$\iint_{U\times V} f(x,y)dxdy = \int_U (\int_V f(x,y)dy)dx,$$

ce qu'on écrit parfois :

$$\iint_{U\times V} f(x,y)dxdy = \int_U dx \int_V f(x,y)dy.$$

Preuve: cf.[2] ∎

Remarque 1.2.1 : Bien entendu, on peut échanger les rôles de U et V, de sorte qu'on a aussi

$$\iint_{U\times V} f(x,y)dxdy = \int_V dy \int_U f(x,y)dx,$$

donc

$$\int_U dx \int_V f(x,y)dy = \int_U dy \int_V f(x,y)dx.$$

Théorème 1.2.5 (de Fubini, 2^e^ forme) : *Soit* f *une fonction mesurable positive sur* $U \times V \subset \mathbb{R}^{p+q}$*.*

1. *Pour presque tout* x*, la fonction* f_x *est mesurable positive dans* V *; la fonction* $x \longmapsto F(x) = \int_V f(x,y)dy$ *est donc définie presque partout dans* U*.*
2. *La fonction* F *est mesurable positive dans* U*.*

3.

$$\iint_{U\times V} f(x,y)dxdy = \int_U dx \int_V f(x,y)dy.$$

(*On a aussi*

$$\iint_{U\times V} f(x,y)dxdy = \int_V dy \int_U f(x,y)dx.$$

On peut donc intervertir les intégrations).

Preuve: cf.[2] ■

Théorème 1.2.6 (formule de la moyenne (dans $\mathbb{R}$)) : *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, Si $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et de signe constant, alors il existe un point $c \in [a,b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve: f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. On note

$$m = inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad M = sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Pour tout $x \in [a,b]$, supposons par exemple g positive, on a donc :

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Par intégrabilité de fg et positivité de l'intégration, on peut intégrer membre à membre de a à b :

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx,$$

d'où deux situations possibles :

- ou bien $\int_a^b g(x)dx = 0$: la double inégalité ci-dessus montre que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et tout $c \in [a,b]$ convient dans l'énoncé du théorème.
- ou bien $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, auquel cas on peut encore écrire :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Or le théorème des valeurs intermédiaires assure que f prend toute valeur entre m et M. D'où l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

■

Théorème 1.2.7 ($1^{\text{ère}}$ formule de la moyenne) : *Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, f une fonction intégrable positive dans A, g une fonction réelle mesurable dans A telle que $m \leq g \leq M \quad (m, M \in \mathbb{R})$. Alors fg est intégrable dans A et*

$$\int_A f(x)g(x)dx = H \int_A f(x)dx$$

avec $m \leq H \leq M$. Si en outre g est continue et A compact connexe, alors il existe $\xi \in A$ tel que :

$$\int_A f(x)g(x)dx = g(\xi) \int_A f(x)dx.$$

Preuve: D'après la propriété 1.1.1, f est mesurable et par suite fg est mesurable dans A. On a $mf \leq fg \leq Mf$, donc fg est intégrable dans A et on a :

$$m \int_A f(x)dx \leq \int_A f(x)g(x)dx \leq M \int_A f(x)dx,$$

et par suite, on a :

$$\int_A f(x)g(x)dx = H \int_A f(x)dx,$$

avec $m \leq H \leq M$. Si de plus, A est compact connexe et g continue alors en notant $m = inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad M = sup_{x\in[a,b]} f(x)$, g prend dans A toute les valeurs entre m et M, donc la valeur intermédiaire H. D'où l'existence d'un $\xi \in A$ tel que :

$$\int_A f(x)g(x)dx = g(\xi) \int_A f(x)dx.$$

■

Théorème 1.2.8 ($2^{\text{è}}$ formule de la moyenne) : *Soit f une fonction décroissante positive finie dans un intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction réelle intégrable dans $[a, b]$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx$$

Preuve: cf.[2] ■

Chapitre Deux

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTÉGRALES : CAS DE $\mathbb{R}$

2.1 Calcul de primitives

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, il s'agit de déterminer toutes les fonctions F dérivables sur I telles que $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. On convient de noter $F(x) = \int f(x)dx$, cette intégrale sans bornes est appelée intégrale indéfinie. La variable x n'est pas muette.

2.1.1 Tableau de quelques primitives usuelles

Dans le tableau ci-après, on donne pour chaque fonction f une primitive.

$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, \int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\int \dfrac{1}{x} = \ln\lvert x\rvert$
$\int e^x dx = e^x$	$\int \ln x dx = x\ln x - x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x$
$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$	$\int \cot x dx = \ln\lvert sinx\rvert$
$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert$	$\int \dfrac{dx}{\cos x}dx = \ln\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})\rvert$
$\int \dfrac{dx}{\cos x \sin x} = \ln\lvert\tan x\rvert$	$\int \tan^2 x dx = \tan x - x$
$\int \cosh x dx = \sinh x$	$\int \sinh x dx = \cosh x$
$\int \dfrac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$	$\int \dfrac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x$
$\int \tanh x dx = ln(\cos x)$	$\int \coth x dx = \ln\lvert\sinh x\rvert$

$\int \dfrac{dx}{\sinh x} = ln\|\tanh(\frac{x}{2})\|$	$\int \dfrac{dx}{\cosh x} dx = 2\arctan e^x$
$\int \dfrac{dx}{\cosh x \sinh x} = ln\|\tanh x\|$	$\int \tanh^2 x dx = x - \tanh x$
$a \neq 0, \int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} Arctan(\frac{x}{a})$	$a > \|x\|, \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Arcsin(\frac{x}{a})$
$a \neq 0, \int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\|\frac{x-a}{x+a}\|$	$\|x\| < a, \int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} Argth - \frac{x}{a})$
$h \neq 0, \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = ln\|x + \sqrt{x^2+h}\|$	$a > 0, \int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = Argsh(\frac{x}{a})$
$a > 0, \int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = Argch(\frac{x}{a}) = ln\|x + \sqrt{x^2-a^2}\|$	$a \neq 0, \int \dfrac{dx}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$

2.1.2 Méthodes d'intégration

2.1.2.1 Intégration par changement de variables

Théorème 2.1.1 : *Soit f une fonction continue et $F(x) = \int f(x)dx$.*

1. *Changement de variable explicite.*

   On suppose qu'il existe une fonction dérivable h tel qu'en posant $u = h(x)$, on ait $f(x)dx = \phi(u)du$ où ϕ est une fonction continue. Si ϕ admet une primitive Φ, alors $F(x) = \Phi(u) = \Phi(h(x))$.

2. *Changement de variable implicite.*

   On suppose qu'il existe une fonction dérivable et inversible ϕ tel que $x = \phi(t)$. Si $(f \circ \phi)\phi'$ possède une primitive G, alors $F(x) = G(\phi^{-1}(x))$.

Preuve: cf.[4] ∎

Remarque 2.1.1 : 1. Pour calculer les intégrales définies par changement de variables, on peut :
   - Soit utiliser les nouvelles bornes de la nouvelle variable, données par le changement.
   - Soit garder les bornes initiales et revenir à la variable initiale.

2. Lorsque l'on calcule les primitives par changement de variables, il faut nécessairement revenir à la variable initiale en fin de calcul, le changement n'étant pas unique.

Propriétés 2.1.1 (formule fondamentale) : *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.*

- *f possède des primitives sur $[a, b]$.*
- *Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

- *la fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[a,b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.*
- *Deux primitives de f diffèrent par une constante.*

Preuve: cf.[4] ∎

Remarque 2.1.2 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- (f paire) $\Longrightarrow (\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx)$
- (f impaire) $\Longrightarrow (\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0)$
- si f périodique de période T, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$,
  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx, \quad \int_a^{b+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

2.1.2.2 Intégration par partie

On déduit de la formule suivante pour u, v dérivables $(uv)' = uv' + vu'$ que $u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$. D'où

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx}$$

Exercice d'application: Déterminer les primitives suivantes.

$$I(x) = \int \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x^2-1}dx; \quad J(x) = \int e^{arccosx}dx; \quad K(x) = \int \frac{dx}{x^2+a^2} \quad (a \neq 0)$$

Solution: :

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = Argchx + \frac{1}{2}ln(x^2-1) + c, c \in \mathbb{R}$$

En faisant deux intégration par partie, on obtient :

$$J(x) = \frac{1}{2}(xe^{\arccos x} - \sqrt{1-x^2}e^{\arccos x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

En faisant le changement de variable $x = |a|t$, on obtient :

$$K(x) = \frac{1}{|a|}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{|a|}\arctan t + C = \frac{1}{|a|}\arctan(\frac{x}{|a|}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

∎

Remarque 2.1.3 : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

En utilisant cette formule, on montre que $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{2}$

Théorème 2.1.2 (de changement de variables) : *Soit* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : [\alpha;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *(au moins) avec* $\varphi([\alpha;\beta]) \subseteq [a;b]$, *alors :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Preuve: La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle admet une primitive F sur ce segment. Mais la fonction $F\circ\varphi$ est dérivable sur $[\alpha,\beta]$, de dérivée $(f\circ\varphi)\varphi'$. Il suffit alors d'appliquer la formule fondamentale :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.1.4 :

- il n'est pas nécessaire que φ soit bijective. Cependant si φ est bijective de $[\alpha;\beta]$ sur $\varphi([\alpha;\beta])$, alors on a : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)}(f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$. C'est le plus souvent sous cette forme qu'on utilise le théorème.
- Dans la pratique, on pose $x = \varphi(t)$, donc $dx = \varphi'(t)dt$ et on en déduit les bornes correspondantes.

Exemple 2.1.1: Retrouvons la formule fondamentale $ln(ab) = ln(a) + ln(b); \forall a; b \in \mathbb{R}_+^*$. On sait que $\forall t > 0; ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x}dx$. Ainsi, $ln(ab) = \int_1^{ab}\frac{1}{x}dx = \int_1^a \frac{1}{x}dx + \int_a^{ab}\frac{1}{x}dx$ c'est-à-dire $ln(ab) = ln(a) + \int_a^{ab}\frac{1}{x}dx$. On calcule $\int_a^{ab}dx$. On pose $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\varphi : [1;b] \longrightarrow [a;ab]$ définie par : $\varphi : t \longmapsto at$ est bijective. $\varphi'(t) = a$; $\varphi^{-1}(a) = 1$ et $\varphi^{-1}(ab) = b$, donc : $\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx = \int_1^b \frac{1}{at}adt = \int_1^b \frac{1}{t}dt = ln(b)$. On retrouve bien le résultat voulu.

2.2 Intégration des fonctions rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle, on la décompose en éléments simples .

2.2.1 Décomposition en éléments simples

Théorème 2.2.1 : *Soit* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, *une fonction rationnelle où* p *et* q *sont des polynômes à coefficients réels sans diviseur commun.*

1. *Le dénominateur peut se mettre sous la forme*

$$q(x) = c(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}(x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2}...(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}$$

   où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{N}$ *et* a_i, b_l, c_l *sont des réels tels que* $b_l^2 - 4c_l < 0$ *pour* $l = 1, 2, ..., m$ *et* $i = 1, ..., n$.

2. *La fonction* $\dfrac{p}{q}$ *peut s'écrire de façon unique sous la forme :*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = E(x) + \sum_{j=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1j}}{(x-a_1)^j} + ... + \sum_{j=1}^{\alpha_n} \frac{A_{nj}}{(x-a_n)^j} + \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{b_{1k}x + c_{1k}}{(x^2+b_1x+c_1)^k} + ... + \sum_{k=1}^{\beta_m} \frac{b_{mk}x + c_{mk}}{(x^2+b_mx+c_m)^k}$$

   où A_{ij}, b_{lk}, c_{lk} *sont des constantes,* $i = 1, ..., n; j = 1, ..., \alpha_i; l = 1, ..., m; k = 1, ..., \beta_l$.

Preuve: cf.[7] ■

Remarque 2.2.1 :

1. E (appelé partie entière) s'obtient par division euclidienne; et si le degré de p est strictement inférieur au degré de q, alors $E = 0$
2. La fraction $\dfrac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}$ s'appelle élément simple de première espèce relatifs aux pôles réels a_i dont l'ordre de multiplicité est α_i, $i = 1, ..., n$.
3. La fraction $\dfrac{b_{lk}x + c_{lk}}{(x^2+b_lx+c_l)^k}$ s'appelle élément simple de seconde espèce relatifs aux pôles complexes conjugués solutions de $x^2 + b_lx + c_l = 0$ $(b_l^2 - 4c_l < 0)$ dont l'ordre de multiplicité est β_l $l = 1, ..., m$

2.2.2 Détermination des constantes

On distingue plusieurs méthodes; on peut :

1. Réduire au même dénominateur et identifier.
2. Multiplier l'égalité par $(x-a_i)^{\alpha_i}$ (resp $x^2 + b_lx + c_l)^{\beta_l}$) et faire $x \longrightarrow a_i$ (resp $x \longrightarrow z_0 \in \mathbb{C}$ où $z_0^2 + b_lz_0 + c_l = 0$). Ce procédé (rapide) fournit les coefficients $A_{i\alpha_i}$ (resp $b_{l\beta_l}$ et $c_{l\beta_l}$).
3. Considérer la parité (éventuelle) qui réduira les calculs.

4. On peut prendre la limite après multiplication par une puissance convenable de x.
5. On peut donner à x autant de valeurs qu'il y a de constantes à rechercher et résoudre le système linéaire obtenu.
6. Combiner les méthodes précédentes.

Exercice d'application: Décomposer en éléments simples et intégrer les fractions suivantes : $\dfrac{x^5}{(x^2+1)^2}$ $\quad \dfrac{1}{x^3+1}$

Solution: La décomposition en éléments simple de $\dfrac{x^5}{(x^2+1)^2}$ est :

$$\frac{x^5}{(x^2+1)^2} = x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

D'où

$$\int \frac{x^5dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2}{2} - ln(x^2+1) - \frac{1}{2(x^2+1)} + c, c \in \mathbb{R}$$

La décomposition en éléments de $\dfrac{1}{x^3+1}$ est :

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

et on a :

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}(ln|x+1| - \frac{1}{2}ln|x^2-x+1| - \sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))) + c, c \in \mathbb{R}$$ ■

2.3 Autres types d'intégration

2.3.1 Intégration des fonctions trigonométriques

Définition 2.3.1 : On appelle intégrale trigonométrique toute expression de la forme $I = \int f(\sin x, \cos x, \tan x)dx$, où f est un quotient de deux polynômes en $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

En posant $t = tan(\dfrac{x}{2})$ c'est-a-dire $\dfrac{x}{2} = \arctan t$, et $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, les formules $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ permettent de ramener I à l'intégrale d'une fonction rationnelle. Il est utile de savoir que :

Propriétés 2.3.1 (Règle de Bioche) : *Si l'élément $f(\sin x, \cos x, \tan x)dx$ est invariant par :*

1. *Le changement de x en $-x$, on peut poser $u = \cos x$;*
2. *Le changement de x en $\pi - x$, on peut poser $u = \sin x$;*
3. *Le changement de x en $\pi + x$, on peut poser $u = \tan x$.*

Preuve: cf.[4] ■

On peut aussi linéariser en utilisant entre autre les formules suivantes :
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x + 1 = 1 - 2\sin^2 x$; $\sin 2x = 2\cos x \sin x$.

Exercice d'application: Calculer les intégrales suivantes :

$$I(x) = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (a \neq 0, b \neq 0), \quad J(x) = \int \frac{dx}{sinx + sin2x}, \quad K(x) = \int \frac{dx}{\cos x}$$

Solution: : $\dfrac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ est invariant par le changement de x en $\pi + x$, on pose $u = \tan x$ et on a :

$$\begin{aligned} I(x) = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{a^2 + b^2\tan^2 x} &= \int \frac{du}{a^2 + b^2u^2} \\ &= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}u) + c \\ &= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{b}{a}\tan x) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\dfrac{dx}{sinx + sin2x}$ est invariant par le changement de x en $-x$, on pose $u = \cos x$ et on a :

$$J(x) = \int \frac{dx}{sinx + sin2x} = -\int \frac{du}{(1-u^2)(1+2u)} = \frac{1}{6}ln|1-\cos x| + \frac{1}{2}ln|1+\cos x| + \frac{2}{3}ln|1+2\cos x| + c$$

avec $c \in \mathbb{R}, \cos x \notin \{-1; \frac{-1}{2}; 1\}$.

$\dfrac{dx}{\cos x}$ est invariant par le changement de x en $\pi - x$, on pose $u = \sin x$ et on a :

$$K(x) = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}ln|\frac{1+u}{1-u}| + c = \frac{1}{2}ln|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}| + c, c \in \mathbb{R}$$

avec $\sin x \notin \{-1; 1\}$. ■

2.3.2 Intégration des fonctions hyperboliques

Définition 2.3.2 : On appelle intégrale hyperbolique toute expression de la forme
$I = \int f(shx, chx, thx, e^x)dx$, où f est un quotient de deux polynômes en shx, chx, thx, e^x.

En posant $t = th(\frac{x}{2})$ et $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$, les formules $shx = \frac{2t}{1-t^2}$, $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $thx = \frac{2t}{1-t^2}$ permettent de ramener l'intégrale I à l'intégrale d'une fonction rationnelle en t. On peut aussi poser $u = e^x$; En se rappelant de l'identité $ch^2x - sh^2x = 1$, on peut aussi linéariser en utilisant entre autre les formules suivantes :

$ch2x = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1 = 1 + 2sh^2x, \quad sh2x = 2chxshx.$

Exercice d'application: Calculer l'intégrale suivante : $I = \int ch^7xdx$.

Solution: :

$$\begin{aligned} I = \int ch^7xdx = \int ch^6xchxdx = \int (ch^2x)^3chxdx &= \int (1+sh^2x)^3d(shx) \\ &= \int (1+u^2)^3du \text{ avec } u = shx \end{aligned}$$

$$I = \int (1+3u^2+3u^4+u^6)du = u + u^3 + \frac{3u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c \text{ avec } u = shx$$

■

2.3.3 Intégrales Abéliennes

On en distingue deux types : première et seconde espèce.

Définition 2.3.3 : On appelle intégrale abélienne de première espèce, les intégrales de la forme

$$I = \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

où R est un quotient de deux polynômes en x et $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

En posant $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, on calcul x en fonction de t et on différentie. Cela permet de ramener I à l'intégrale d'une fonction rationnelle en t.

Remarque 2.3.1 : Nous avons supposé que $bc - ad \neq 0$, sinon $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ est constante et le problème est sans objet.

Définition 2.3.4 : On appelle intégrale abélienne de seconde espèce, les intégrales de la forme

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad (a,b,c) \text{ constantes}$$

où R est un quotient de deux polynômes en x et $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

Pour calculer I, on met le trinôme ax^2+bx+c sous forme canonique :

i) En prenant $a=\pm 1$, on peut avoir les trois cas suivants :

$$ax^2+bx+c=\begin{cases}(x-\alpha)^2-\beta^2 & (1)\\ (x-\alpha)^2+\beta^2 & (2)\\ -(x-\alpha)^2+\beta^2 & (3)\end{cases}$$

– Si (1) alors on pose $x-\alpha=\beta ch\varphi$,

– Si (2) alors on pose $x-\alpha=\beta sh\varphi$,

– Si (3) alors on pose $x-\alpha=\beta\sin\varphi$ ou $x-\alpha\cos\varphi$.

Les deux premiers cas ($a=1$) ramènent I à l'intégrale d'une fonction rationnelle en $ch\varphi$ et/ou $sh\varphi$. Le troisième cas ($a=-1$) ramène I à l'intégrale d'une fonction rationnelle en $\sin\varphi$ et/ou $\cos\varphi$.

ii) si $|a|\neq 1$, on se ramène au cas i) en mettant $\sqrt{|a|}$ en facteur.

Exercice d'application: Calculer les intégrales suivantes :

$I(x)=\int\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}dx \qquad J(x)=\int\sqrt{x^2+2x+17}dx$

Solution: : En posant $t=\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}$, on obtient $x=\frac{5-t^3}{1+t^3}$ et $dx=-\frac{18t^2}{(t^3+1)^2}dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int t(-\frac{18t^2}{(t^3+1)^2}dt)\\ &= \frac{6t}{t^3+1}-\int\frac{dt}{t^3+1} \quad \text{(intégration par partie)}\end{aligned}$$

Or $\int\frac{dt}{t^3+1}$ a été calculer plus haut (cf. intégration des fonctions rationnelles), et on obtient le résultat en remplaçant t par sa valeur.

$I(x)=\frac{6t}{t^3+1}-\frac{1}{3}(ln|t+1|-\frac{1}{2}ln|t^2-t+1|-\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})))+c$, avec $t=\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}$, $c\in\mathbb{R}$

$$I(x)=\frac{6\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}}{(\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}})^3+1}-\frac{1}{3}(ln|\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}+1|-\frac{1}{2}ln|(\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}})^2-\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}+1|-\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{\frac{5-x}{x+1}}-\frac{1}{2})))+c$$

$\sqrt{x^2+2x+17}=\sqrt{(x^2+2x+1)+16}=\sqrt{(x+1)^2+4^2}$, posons $x+1=4sh\varphi$ alors $dx=4ch\varphi d\varphi$. Ainsi,

$$J(x)=16\int ch^2\varphi d\varphi=8(sh\varphi\sqrt{1+sh^2\varphi}+\varphi)+c=(x+1)\sqrt{x^2+2x+17}+argsh(\frac{x+1}{4})+c$$

, avec $c\in\mathbb{R}$. ■

2.3.4 Utilisation d'une paramétrisation, représentation paramétrique rationnelle

Dans le cas général, On a

$$I = \int R(x, \sqrt[n]{P(x)})dx$$

où R est un quotient de deux polynômes en x et $y = \sqrt[n]{P(x)}$ avec P un polynôme en x. On se ramène à l'un des cas étudié précédemment en posant $t = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt[n]{P(x)}}{x}$

Exemple 2.3.1: Calculer $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$

Solution: : posons $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3} = tx$ alors $x = \dfrac{1}{1+t^3}$ et $dx = -\dfrac{3t^2}{(1+t^3)^2}dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{y} \\ &= \int \frac{dx}{tx} \\ &= \int \frac{-3t}{1+t^2} \\ &= \frac{-3}{2} ln(1+t^2) + c \end{aligned}$$

avec $t = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x}$, D'où $I = \dfrac{-3}{2} ln(1 + (\dfrac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x})^2) + c, c \in \mathbb{R}$. ■

Remarque 2.3.2 : Si nous avons I sous la forme

$$I = \int R(x, \sqrt[n_1]{P(x)}, \sqrt[n_2]{P(x)}, \cdots, \sqrt[n_q]{P(x)})dx$$

où R est une fonction de x, $\sqrt[n_1]{P(x)}, \sqrt[n_2]{P(x)}, \cdots, \sqrt[n_q]{P(x)}$ avec P un polynôme en x, $(n_i)_{1 \le i \le q}$ sont des entiers naturels tous non nuls. On se ramène à l'un des cas étudié précédemment en posant $t = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt[m]{P(x)}}{x}$ où $m = PPCM(n_1, n_2, \cdots, n_q)$ [1]

1. plus petit commun multiple des $(n_i)_{1 \le i \le q}$

CHANGEMENT DE VARIABLES DANS LES INTÉGRALES : CAS GÉNÉRAL

3.1 Introduction et généralité

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1.1 : Une application $f : U \to V$ est un homéomorphisme si les trois conditions suivantes sont réunies :

- f est bijective,
- f est continue,
- f^{-1} est continue.

En d'autres termes, f est un homéomorphisme si f est une bijection bi-continue.

Définition 3.1.2 : Une application $f : U \to V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si les trois conditions suivantes sont réunies :

- f est bijective,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U,
- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un homéomorphisme de U sur V. Notons x(resp.y) la variable de U(resp.de V) et $\lambda = dy$ la mesure de Lebesgue sur V. Le changement de variable $y = \varphi(x)$ transforme la mesure λ sur V en une mesure borélienne μ sur U, appelé mesure image de λ par φ^{-1}, et qui est définie par $\mu(B) = \lambda(\varphi(B))$ pour tout borélien $B \subset U$. En particulier, on a $\lambda(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$ pour tout borélien $A \subset V$, soit

$$\int_V \mathbf{1_A}(y)dy = \int_U \mathbf{1_A}(\varphi(x))d\mu(x).$$

De cette relation, on déduit facilement que, pour toute fonction λ-mesurable étagée $f : V \longrightarrow [0, +\infty]$, la fonction $f \circ \varphi : U \longrightarrow [0, +\infty]$, est μ-mesurable et vérifie :

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))d\mu(x) \qquad (1).$$

On souhaite établir cela pour toute fonction λ-mesurable, ainsi nous nous proposons alors de travailler avec la mesure image lorsque $\varphi : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur V. Plus précisément, si $D(\varphi)$ désigne le déterminant de la matrice Jacobienne de φ :

$$D(\varphi)(x) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

on montre ci-dessous que $d\mu(x) = |\mathrm{D}\varphi(x)| d(x)$. La relation (1) fournit alors la formule

$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx \qquad (2).$

Cette formule implique que si, $A \subset U$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, alors $\varphi(A) \subset V$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Nous supposerons ici que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ (cette hypothèse est un peu forte, il suffit de supposer que φ est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$).

3.2 Propriétés et théorème du changement de variable

Le résultat principal concerne l'intégration des fonctions Lebesgue-mesurables positives par changement de variable :

Définition 3.2.1 : Soient Ω_1 et Ω_2 deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Si l'application $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins), alors on appelle matrice jacobienne de F, la matrice des dérivées partielles :

$$M_F = (\frac{\partial F_j}{\partial x_i})_{1 \le i,j \le n}.$$

On dit alors que son déterminant noté J_F (ou $D(F)$) est le jacobien de F.

Proposition 3.2.1 : *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications différentiables telles que $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$. Alors pour $x \in \Omega_1$, on a :*

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \times J_f(x).$$

Preuve: cf.[10] ∎

Définition 3.2.2 : On dit qu'une partie $\Omega \in \mathbb{R}^n$ est compact si de tout recouvrement ouvert de Ω, on peut extraire un sous recouvrement fini. Cette partie est relativement compact si son adhérence est compact.

Proposition 3.2.2 : *Tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme réunion d'une suite croissante de parties $(A_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.Les A_j sont relativement compacts.*

Preuve: Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors prendre $A_j = B(0, j); j \in \mathbb{N}^*$.
Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, posons $\Omega_j = \{x \in \Omega | d(x, C^{\Omega}_{\mathbb{R}^n}) > \frac{1}{j}\} \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$. Alors Ω_j est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. En effet

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{R} \\ \text{x} & \longrightarrow & \text{d(x,A)} \end{array}$$ est continue pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega_j = \chi^{-1}(]\frac{1}{j}, +\infty[)$.

Prendre $A_j = \Omega_j \bigcap B(0, j); j \in \mathbb{N}^*$ ∎

Proposition 3.2.3 : *Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Si pour tout compact $Q \subset U$, on a $\lambda(\varphi(Q)) \leq \int_Q |D(\varphi)(x)|dx$, alors pour tout ouvert $\Omega \subset U$, on a : $\lambda(\varphi(\Omega)) \leq \int_\Omega |D(\varphi)(x)|dx$.*

Preuve: Supposons que pour tout compact $Q \subset U$, on a $\lambda(\varphi(Q)) \leq \int_Q |D(\varphi)(x)|dx$ et montrons que l'on a pour tout ouvert $\Omega \subset U$:
$\lambda(\varphi(\Omega)) \leq \int_\Omega |D(\varphi)(x)|dx$
D'après la proposition 3.2.2 tout ouvert $\Omega \subset U$ est réunion d'une suite croissante de parties A_n qui sont chacune réunion d'un nombre fini de pavés compacts $Q_{n,k}$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints. De la relation
$\lambda(\varphi(Q_{n,k})) \leq \int_{Q_{n,k}} |D(\varphi)(x)|dx$,
on en déduit alors :
$\lambda(\varphi(A_n)) = \lambda(\cup_k \varphi(Q_{n,k})) \leq \sum_k \lambda(\varphi(Q_{n,k})) \leq \sum_k \int_{Q_{n,k}} |D(\varphi)(x)|dx = \int_{A_n} |D(\varphi)(x)|dx$; et donc :

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\varphi(\Omega)) & = & \lambda(\cup_n \varphi(A_n)) \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda(\varphi(A_n)) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{A_n} |D(\varphi)(x)|dx = \int_\Omega |D(\varphi)(x)|dx \end{array}$$

∎

Proposition 3.2.4 : *Sous les hypothèses de la proposition 3.2.3, on a : pour tout borélien $B \subset U$,*
$\lambda(\varphi(B)) \leq \int_B |D(\varphi)(x)|dx$

Preuve: – Si $\int_B |D(\varphi)(x)|dx = +\infty$, il n'y a rien à démontrer.

– Sinon, en vertu de la régularité (propriété 1.1.1) de la mesure Borélienne $|D(\varphi)(x)|dx$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert Ω vérifiant $B \subset \Omega \subset U$ et :
$\int_\Omega |D(\varphi)(x)|dx \leq (1+\varepsilon) \int_B |D(\varphi)(x)|dx$,
on en déduit en vertu de l'inégalité obtenu à la proposition 3.2.3
$\lambda(\varphi(B)) \leq \lambda(\varphi(\Omega)) \leq \int_\Omega |D(\varphi)(x)|dx \leq (1+\varepsilon) \int_B |D(\varphi)(x)|dx$
d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0. ■

Proposition 3.2.5 : *Sous les hypothèses de la proposition 3.2.3; l'image $\varphi(E)$ de tout ensemble mesurable $E \subset U$ est mesurable et vérifie : $\lambda(\varphi(E)) \leq \int_E |D(\varphi)(x)|dx$*

Preuve: Nous avons vu en préliminaire (Proposition 1.1.1) que tout ensemble Lebesgue-mesurable $E \subset U$ est réunion d'un borélien $B \subset U$ et d'un ensemble négligeable $N \subset U$, ainsi il suffit de montrer que l'image par φ d'un ensemble négligeable est négligeable. Mais tout ensemble négligeable est inclus dans un borélien négligeable (cf Proposition 1.1.1), de sorte qu'il suffit de montrer que l'image par φ d'un borélien négligeable est négligeable, ce qui résulte de la proposition ci-dessus. ■

Proposition 3.2.6 : *Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, soit $f : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. Alors la fonction $f \circ \varphi$ est mesurable sur U et on a :*
$\int_V f(y)dy \leq \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx$

Preuve: Supposons que $f : V \longrightarrow [0, +\infty]$ soit Lebesgue-mesurable. Pour tout réel α, l'ensemble $E_\alpha = \{y \in V | f(y) \geq \alpha\}$ est alors Lebesgue-mesurable, ainsi que $\varphi^{-1}(E_\alpha) = \{x \in U | f(\varphi(x)) \geq \alpha\}$ en vertu de la proposition 3.2.5 ci-dessus appliquée à φ^{-1}. La fonction $f \circ \varphi$ est donc Lebesgue-mesurable et, puisque $|D(\varphi)|$ est continue, $(f \circ \varphi)|D(\varphi)|$ est Lebesgue-mesurable sur U. De l'inégalité obtenue dans la proposition 3.2.5, on en déduit que :
$\int_V f(y)dy \leq \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx$ pour toute fonction Lebesgue-mesurable positive étagée $f : V \longrightarrow [0, +\infty]$. L'inégalité de la proposition est pour toute fonction $f : V \longrightarrow$

$[0, +\infty]$ Lebesgue-mesurable positive résulte alors du théorème de convergence monotone pour les intégrales supérieures, puisque f est limite d'une suite croissante de fonctions Lebesgue-mesurables positives étagées. ■

Lemme 3.1 *Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout pavé compact $Q \subset U$, $\lambda(\varphi(Q)) \leq \int_Q |D(\varphi)(x)|dx$. Si $f : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est Lebesgue-mesurable, alors*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx$$

Preuve: D'après la proposition 3.2.6, on a : $\int_V f(y)dy \leq \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx$. Compte tenu du fait que $D(\varphi)(\varphi^{-1}(y)) \times D(\varphi^{-1})(y) = 1$, l'autre inégalité résulte de la proposition 3.2.6 en substituant $\varphi^{-1} : V \longrightarrow U$ à $\varphi : U \longrightarrow V$ et $x \longmapsto f \circ \varphi(x)|D(\varphi)(x)|$ à f ■

Lemme 3.2 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire inversible. Pour tout pavé compact $Q \subset \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\lambda(\varphi(Q)) = |det(\varphi)|\lambda(Q)$$

Preuve: Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, il suffit d'établir cette formule pour le pavé $Q = [0, h]^n$. Dans ce cas, on a $\lambda(Q) = h^n$. Comme $\varphi(Q)$ est engendré par les vecteurs $\varphi(he_1), \varphi(he_2), ..., \varphi(he_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda(\varphi(Q)) &= |det(\varphi(he_1), \varphi(he_2), ..., \varphi(he_n))| \\
&= h^n|det(\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_n))| \\
&= h^n|det(\varphi)det(e_1, e_2, ..., e_n)| \\
&= h^n|det(\varphi)| \\
&= |det(\varphi)|\lambda(Q).
\end{aligned}$$

d'où le lemme 3.2 ■

Si f est une application différentiable, on note df sa différentielle.

Lemme 3.3 *Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout pavé compact $Q \subset U$, on a :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel qu'on ait pour $x, x' \in Q$: $\|x - x'\| \leq \delta \Rightarrow \|d\varphi(x')^{-1}d\varphi(x)\| \leq 1 + \varepsilon$.

Preuve: Soit $Q \subset U$ un pavé compact fixé et notons $d\varphi$ la différentielle de φ. Comme φ est un difféomorphisme, $d\varphi(x)$ est une application linéaire inversible pour tout $x \in U$. En outre, puisque φ est un difféomorphisme de classe C^1, les applications $x \mapsto d\varphi(x)$ et $x \mapsto d\varphi(x)^{-1}$ sont continues sur U.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, posons $T(x) = d\varphi(x)$. Comme l'application $x \mapsto T(x)$ est continue sur le compact Q, elle est uniformément continue. Par ailleurs, puisque l'application $x \mapsto T(x)^{-1}$ est continue sur le compact Q, $\exists C > 0$ tel que l'on ait $\forall x \in Q$, $\|T(x)^{-1}\| \leq C$.
Pour $x, x' \in Q$ on a :

$$\begin{aligned}
|T(x')^{-1}T(x)| &= |T(x')^{-1}(T(x) - T(x')) + Id| \\
&\leq |T(x')^{-1}|.|(T(x) - T(x'))| + 1 \leq 1 + C|(T(x) - T(x'))|
\end{aligned}$$

et l'uniforme continuité de $x \mapsto T(x)$ sur Q implique l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel qu'on ait pour $x, x^{'} \in Q$: $\|x - x^{'}\| \leq \delta \Rightarrow \|d\varphi(x^{'})^{-1}d\varphi(x)\| \leq 1 + \varepsilon$.
d'où le résultat. ∎

Théorème 3.2.1 (de changement de variable) : *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V. Pour toute fonction Lebesgue-mesurable positive $f : V \longrightarrow [0, +\infty]$, la fonction $(f \circ \varphi)|D(\varphi)|$ est Lebesgue-mesurable sur U et on a :*

$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx$, où $D(\varphi)(x)$ est le déterminant de la matrice Jacobienne de φ au point $x \in U$.

Preuve: Soit $f : V \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable. φ étant continue, $f \circ \varphi$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables et par suite $f \circ \varphi|D(\varphi)|$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. D'après le lemme 3.1, l'égalité $\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)|dx$ est établie si pour tout compact $Q \subset U$, $\lambda(\varphi(Q)) \leq \int_Q |D(\varphi)(x)|dx$. Donc il nous suffit de prouver que pour tout pavé compact $Q \subset U$, $\lambda(\varphi(Q)) \leq \int_Q |D(\varphi)(x)|dx$
A cet effet, munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme, $\|x\| = sup_{1 \leq i \leq n}|x_i|$ et notons
$\|T\| = sup_{\|x\| \leq 1}||Tx||$ la norme associée sur l'espace des applications linéaires T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. La boule fermée de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ est donc un pavé compact de côté $2r$ dont la mesure de Lebesgue est égale à $(2r)^n$. Soit $Q \subset U$ un pavé compact fixé. Comme φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le lemme 3.3 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel qu'on ait pour $x, x^{'} \in Q$:

(1) $\|x - x'\| \le \delta \Rightarrow \|d\varphi(x')^{-1} d\varphi(x)\| \le 1 + \varepsilon.$

Subdivisons Q en un nombre fini de petits pavés Q_i d'intérieurs mutuellement disjoints et de côté c inférieur à δ. La relation (1) entraine :

$x, x' \in Q_i \Rightarrow \|d\varphi(x')^{-1} d\varphi(x)\| \le 1 + \varepsilon.$

Puisque $x \mapsto |D(\varphi)(x)|$ est continue sur le pavé Q_i, elle possède un minimum m_i et un maximum M_i et on a :

$m_i \lambda(Q_i) \le \int_{Q_i} |D(\varphi)(x)| dx \le M_i \lambda(Q_i).$

D'après le théorème de la moyenne (première forme), il existe un point $a_i \in Q_i$ tel qu'on ait :

(2) $\int_{Q_i} |D(\varphi)(x)| dx = |D(\varphi)(a_i)| \lambda(Q_i).$

Montrons que l'on a pour tout i :

(3) $|D(\varphi)(a_i)| \lambda(Q_i) \le (1 + \varepsilon)^n \int_{Q_i} |D(\varphi)(x)| dx.$

A cet effet, écrivons $\varphi = d\varphi(a_i) \circ \psi_i$, où $\psi_i = d\varphi(a_i)^{-1} \circ \varphi$. Pour tout $x \in Q_i$, on a en vertu de (1) :

$\|d\psi_i(x)\| = \|d\varphi(a_i)^{-1} d\varphi(x)\| \le 1 + \varepsilon,$

et l'inégalité des accroissements finis implique alors :

$x, x' \in Q_i \Rightarrow \|\psi_i(x) - \psi_i(x')\| \le (1 + \varepsilon)\|x - x'\|.$

Il s'ensuit que $\psi_i(Q_i)$ est inclus dans le pavé C_i de côté $(1 + \varepsilon)c$ dont le centre est l'image par ψ_i du centre de Q_i. De la relation : $\varphi(Q_i) = d\varphi(a_i)(\psi_i(Q_i)) \subset d\varphi(a_i)(C_i)$, on en déduit grâce au lemme 3.2 sachant que $\lambda(C_i) = (1 + \varepsilon)^n \lambda(\varphi(Q_i))$:

$\lambda(\varphi(Q_i)) \le \lambda(d\varphi(a_i))(C_i)) = |det(d\varphi(a_i)| \lambda(C_i)) = |D(\varphi)(a_i)|(1 + \varepsilon)^n \lambda(\varphi(Q_i)),$

et l'inégalité (4) résulte alors de (3). En sommant sur les pavés Q_i, on obtient :

$\lambda(\varphi(Q)) \le \sum_i \lambda(\varphi(Q_i)) \le (1 + \varepsilon)^n \sum_i \int_{Q_i} |D(\varphi)(x)| dx = (1 + \varepsilon)^n \int_Q |D(\varphi)(x)| dx,$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient finalement l'inégalité : $\lambda(\varphi(Q)) \le \int_Q |D(\varphi)(x)| dx$, qui achève la démonstration du théorème de changement de variables. ∎

Le théorème ci-dessus démontré implique le résultat suivant :

Théorème 3.2.2 : *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V. Une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur V pour la mesure de Lebesgue si et seulement si la fonction $(f \circ \varphi)|D(\varphi)|$ est intégrable sur U pour la mesure de Lebesgue et on a : $\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x))|D(\varphi)(x)| d(x)$, où $D(\varphi)(x)$ est le déterminant de la matrice Jacobienne de φ au point $x \in U$.*

Preuve: Le difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ échange les boréliens de U et de V et le théorème 3.2.1 prouve qu'il échange aussi les ensembles négligeables. Il s'ensuit que $\varphi : U \longrightarrow V$ échange les ensembles Lebesgue-mesurables, de sorte que $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est Lebesgue-mesurable si et seulement si $f \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est Lebesgue-mesurable. Comme l'application $x \mapsto |D(\varphi)(x)|$ est continue et inversible, l'application $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est Lebesgue-mesurable si et seulement si la fonction la fonction $(f \circ \varphi)|D(\varphi)| : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est Lebesgue-mesurable. Pour une fonction positive, le théorème 3.2.2 résulte alors du théorème 3.2.1 On en déduit, en considérant le module de f,que f est Lebesgue-intégrable si et seulement si la fonction $(f \circ \varphi)|D(\varphi)|$ est Lebesgue-intégrable. En décomposant une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ en parties positive et négative, on montre alors la formule du changement de variable pour les fonctions à valeurs réelles. Le cas des fonctions à valeurs complexes s'obtient enfin en décomposant $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ en parties réelle et imaginaire. ∎

Du théorème 3.2.2, on déduit que :

Théorème 3.2.3 : *Une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue si et seulement si l'application $(\rho, \theta) \mapsto f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ est intégrable sur $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ pour la mesure $\rho d\rho d\theta$, et alors :*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \iint_{[0,+\infty[\times[0,2\pi[} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))\rho d\rho d\theta.$$

Preuve: L'application $(\rho, \theta) \mapsto (x, y)$ définie par $x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2$ privé du demi axe des réels positifs ou nuls D=$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x; y = 0\}$. Comme le Jacobien de cette application est égal à ρ, le théorème 3.2.2 implique le résultat si l'on remplace $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^2$-D et $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ par $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$. Comme D est négligeable pour la mesure de Lebesgue et que $([0, +\infty[\times[0, 2\pi[)\backslash(]0, +\infty[\times]0, 2\pi[)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue,le théorème 3.2.3 s'ensuit. ∎

3.3 Quelques exemples d'applications

Exemple 3.3.1: Soit à déterminer en fonction de α, la valeur de l'intégrale suivante : $I_\alpha = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

Solution: Par passage en coordonnées polaires, la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est Lebesgue-intégrable sur $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$ si et seulement si la fonction $(\rho,\theta) \mapsto \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\rho = \rho^{1-2\alpha}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0,R]\times[0,2\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas, on a :
$I_\alpha = \iint_{x^2+y^2\leq R^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = 2\pi \int_0^R \rho^{1-2\alpha} d\rho = \frac{\pi}{(1-\alpha)R^{2(\alpha-1)}}$. Dans les autres cas $(\alpha \geq 1)$, on a $I_\alpha = +\infty$. ∎

Exemple 3.3.2: Soit à montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution: Posons $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. On a en vertu du théorème de Fubini :

$$I^2 = (\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx)(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

où D= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0; y \geq 0\}$. En utilisant les coordonnées polaires, on obtient alors :

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

D'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ∎

Exemple 3.3.3: Calcul de l'aire du domaine $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$
L'aire de B est définie par $\mathcal{A}(B) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B(x,y) dxdy$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(B) &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x,y) dx) dy && \text{(par le théorème de Fubini)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x|\leq 1} (\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy) dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(u)\cos(u) du && \text{(par le changement de variable } x = \sin(u)) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2u)+1) du \\ &= [\frac{\sin(2u)}{2}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Exemple 3.3.4: Calculons $I = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)^2-(x-y)^2}dxdy$

Opérons le changement de variable

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y. \end{cases} \quad Alors \quad \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Le difféomorphisme} \quad \begin{array}{rcll} \Phi : & \Omega = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0; |b| \leq a\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \mapsto & (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) \end{array}$$

a pour matrice Jacobienne

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc $|detJ_\Phi| = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.

Par la formule de changement de variable, on a

$$\begin{aligned} I &= \int\int_\Omega e^{-u^2-v^2}\frac{1}{2}dudv \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{2}(\int_{-u}^{u} e^{-v^2}dv)du \qquad \text{par Fubini} \end{aligned}$$

Posons $F(u) = \int_{-u}^{u} e^{-v^2}dv$,alors $F(u) = 2\int_0^u e^{-v^2}dv$ car $v \mapsto e^{-v^2}$ est pair.

Nous avons $F'(u) = 2e^{-u^2}$.Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} F'(u)F(u)du \\ &= [\frac{1}{8}(F(u))^2]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{8}(2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}dv)^2 \\ &= \frac{1}{8}(2\frac{\sqrt{\pi}}{2})^2 \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

3.4 Passage en coordonnées polaires

L'application $(r,\theta) \longmapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ vue plus haut définit le passage en coordonnée polaire dans $\mathbb{R}^2$ et on a la configuration suivante :

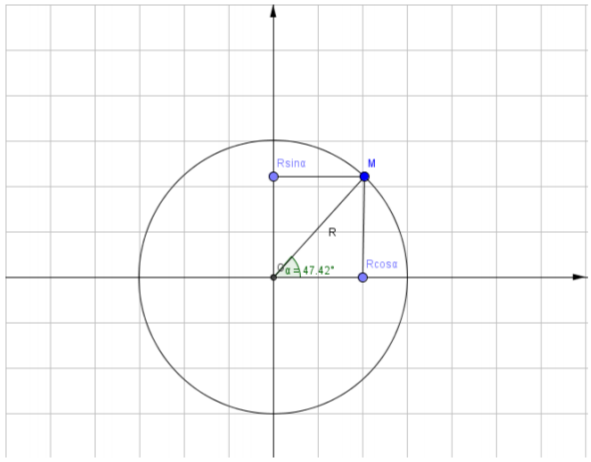

FIGURE 3.1 – Coordonnées polaire d'un point M

Nous voulons généraliser cela en dimension n.

Théorème 3.4.1 : *Soit* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Alors il existe un* $n-$*uplet* $(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$ *avec* $r > 0, 0 \leq \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-2} \leq \pi$ *et* $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ *tel que :*

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \vdots &= \vdots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{aligned}$$

De plus, on a $|x| = r$ *et le jacobien de cette transformation* ϕ *est donné par :*

$$J_\phi = r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}(\sin\theta_2)^{n-3}...(\sin\theta_{n-2})^2(\sin\theta_{n-2})$$

Preuve: cf.[3] ∎

Remarque 3.4.1 :

1 Cette transformation peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin\theta_1 \\ x_k &= r\sin\theta_k \prod_{j=1}^{n-2}\cos\theta_j \quad 2 \leq k \leq n-1 \\ x_n &= r\prod_{j=1}^{n-1}\cos\theta_j \end{aligned}$$

Dans ce cas, le jacobien devient : $J_\phi = r^{n-1}\Pi_{j=1}^{n-2}(\cos\theta_j)^{n-1-j}$

2 Cette transformation est une représentation paramétrique de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ d'équation :

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$$

Définition 3.4.1 : On dit que le n-uplet $(r, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$ du théorème ci-dessus est une représentation en coordonnées polaires (où sphériques) de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

En dimension n=3, on a la configuration suivante :

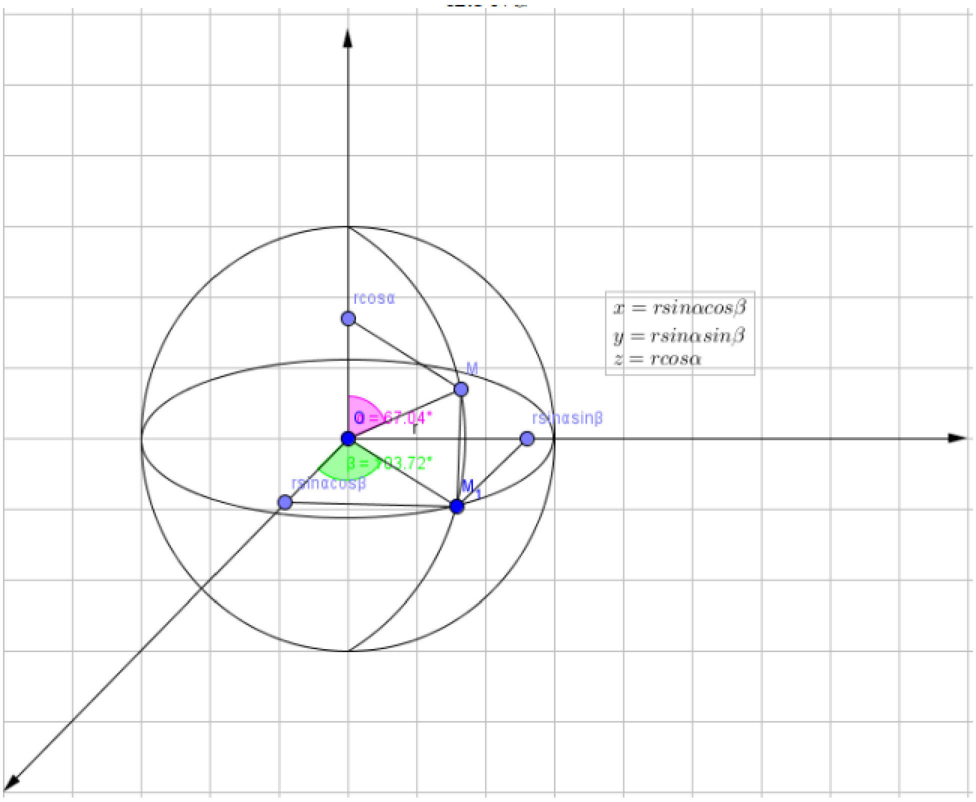

Figure 3.2 – Coordonnées sphérique d'un point M

Corollaire 3.4.1 *soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta_1=0}^{\pi}\cdots\int_{\theta_{n-2}=0}^{\pi}\int_{\theta_{n-1}=0}^{2\pi} f(x(r,\theta))|J_\phi| dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1}$$

avec $x(r,\theta) = (x_1(r,\theta), ..., x_n(r,\theta))$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1})$

Preuve: cf.[3] ∎

Définition 3.4.2 : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ est radiale, lorsqu'il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \tilde{f}(|x|)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 3.4.1: Les fonction suivante sont radiales sur $\mathbb{R}^n$:

1. $f(x) = e^{-|x|^2}$, on a $\tilde{f}(r) = e^{-r^2}$.
2. $f(x) = \frac{1}{1+|x|^2}$, on a $\tilde{f}(r) = \frac{1}{1+r^2}$.

Remarque 3.4.2 : Si f est radiale dans le corollaire 3.4.1, alors $f(x) = F(r)$,est une fonction de r et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta_1=0}^{\pi}\cdots\int_{\theta_{n-2}=0}^{\pi}\int_{\theta_{n-2}=0}^{\pi}\int_{\theta_{n-1}=0}^{2\pi} F(r)|J_\phi|drd\theta_1\cdots d_{\theta_{n-1}}$$

Exercice d'application: 1. Mesure de la boule $B_n(R)$ définie par :

$$B_n(R) = \{\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ /\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\ \}.$$

2. Calculer l'intégrale I $= \int_{B_n(R)} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}\right)^\alpha dx$ où α est un réel.

Solution: 1. Si nous désignons par V_n la mesure de cette boule, alors nous aurons :

$$\begin{aligned}
V_n &= \int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_n}(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta_1=0}^{\pi}\ldots\int_{\theta_{n-2}=0}^{\pi}\int_{\theta_{n-1}=0}^{2\pi} J_\phi drd\theta_1\ldots d\theta_{n-2}d\theta_{n-1} \\
&= \frac{2\pi R^n}{n}\int_{\theta_1=0}^{\pi}\ldots\int_{\theta_{n-2}=0}^{\pi} J_\phi d\theta_1\ldots d\theta_{n-2} \\
&= \frac{2\pi R^n}{n}\prod_{j=1}^{n-2}\int_0^\pi (\sin\theta_j)^{n-1-j}d\theta_j \qquad\qquad \text{(par Fubini)} \\
&= \frac{2\pi R^n}{n}\prod_{j=1}^{n-2} I_{n-1-j}
\end{aligned}$$

où $I_{n-1-j} = \int_0^\pi (\sin\theta_j)^{n-1-j}d\theta_j = \dfrac{n-2-j}{n-1-j}I_{n-3-j}$. Observons que

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\ldots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\pi = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\pi$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}I_{2p-3} = 2\frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

La détermination des $I_k, 1 \leq k \leq n-2$ permet d'obtenir V_n. remarquons que :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^\pi (\sin x)^k dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin x)^k dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx + \int_0^{\pi/2} (\cos x)^k dx \\
&= 2\int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx.
\end{aligned}$$

Les intégrales $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^m dx, \int_0^{\pi/2}(\cos x)^m dx$ sont égales pour $m \in \mathbb{N}$ et sont appelées intégrales de Wallis.

2. La fonction $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}\right)^\alpha$ est radiale et on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{B_n(R)} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}\right)^\alpha dx \\
&= = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \cdots \int_{\theta_{n-2}=0}^{\pi} \int_{\theta_{n-1}=0}^{2\pi} \frac{1}{r^\alpha} |J_\phi| dr d\theta_1 ... d\theta_{n-1} \\
&= \left(2\pi \prod_{j=1}^{n-2} I_{n-1-j}\right) \int_0^R r^{n-1-\alpha} dr
\end{aligned}$$

Les I_{n-1-j} ont été calculés au 1). Il suffit alors de calculer $\displaystyle\int_0^R r^{n-1-\alpha} dr = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^R r^{n-1-\alpha} dr$ pour avoir I . Or $\int_\varepsilon^R r^{n-1-\alpha} dr = \begin{cases} \frac{1}{n-\alpha}(R^{n-\alpha} - \varepsilon^{n-\alpha}) & si \quad n \neq \alpha \\ ln(R) - ln(\varepsilon) & sinon \end{cases}$

Donc I est infinie si $n \leq \alpha$ et finie dans le cas contraire.

Remarque 3.4.3 : On déduit de ce qui précède que :

$$J = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_n(R)} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}\right)^\alpha dx = \left(2\pi \prod_{j=1}^{n-2} I_{n-1-j}\right) \int_R^{+\infty} r^{n-1-\alpha} dr.$$

Mais $\displaystyle\int_R^{+\infty} r^{n-1-\alpha} dr = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_R^\varepsilon r^{n-1-\alpha} dr = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \begin{cases} \frac{1}{n-\alpha}(R^{n-\alpha} - \varepsilon^{n-\alpha}) & si \quad n \neq \alpha \\ ln(\varepsilon) - ln(R) & sinon \end{cases}$

Donc J est infinie si $n \geq \alpha$ et finie dans le cas contraire.

3.5 Coordonnées cylindriques

Pour calculer une intégrale, on peut être amené à faire des changements de variables autres que polaire (sphérique), cartésien.

Définition 3.5.1 : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors il existe un 3−uplet $(r, \theta, t) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} x = rcos\theta, \\ y = rsin\theta, \\ z = t. \end{cases}$$

Cette transformation a pour jacobien $J = r$ et définit le changement de coordonnées cylindriques.

Exemple 3.5.1: calculer les intégrales $I = \iiint_D e^{x^2+y^2} dxdydz$, $K = \iiint_D dxdydz$ où D est le domaine défini par : $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } 0 \leq z \leq h\}$ avec $R, h > 0$.

Solution:

$$\begin{aligned} I = \iiint_D e^{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^h e^{r^2}rdrd\theta dz \\ &= 2\pi h\int_0^R re^{r^2}dr \\ &= \pi h(e^{R^2}-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K = \iiint_D dxdydz &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^h rdrd\theta dz \\ &= \pi R^2 h \end{aligned}$$

■

Proposition 3.5.1 : *Soient R, h deux réels strictement positifs et $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :*

$$(S)\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \le R^2, \\ |x_n| \le h. \end{cases}$$

Alors il existe un $n-$uplet $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-2}, t)$ tel que :

$$\begin{aligned} x_1 &= rcos\theta_1 \\ x_k &= rcos\theta_k\prod_{j=1}^{k-1}sin\theta_j \qquad 2 \le k \le n-2 \\ x_{n-1} &= r\prod_{j=1}^{n-2}sin\theta_j \\ x_n &= t \end{aligned}$$

avec $0 \le r \le R; 0 \le \theta_1, \cdots, \theta_{n-3} \le \pi; 0 \le \theta_{n-2} \le 2\pi$ et $-h \le t \le h$. De plus, le jacobien de cette transformation Φ est : $J_\Phi = r^{n-2}\prod_{j=1}^{n-2}(sin\theta_j)^{n-2-j}$.

Preuve: D'après le théorème 3.4.1, il existe un $(n-1)-$uplet tel que :

$$\begin{aligned} x_1 &= rcos\theta_1 \\ x_k &= rcos\theta_k\prod_{j=1}^{k-1}sin\theta_j \qquad 2 \le k \le n-2 \\ x_{n-1} &= r\prod_{j=1}^{n-2}sin\theta_j \end{aligned}$$

avec $0 \le r \le R; 0 \le \theta_1, \cdots, \theta_{n-3} \le \pi; 0 \le \theta_{n-2} \le 2\pi$. Comme $|x_n| \le h$ alors $x_n = t$ avec $-h \le t \le h$. La matrice jacobienne de cette transformation est tel que la dernière ligne et la dernière colonne n'ont que des zéros excepté l'élément de la diagonale qui vaut 1. Ainsi, le jacobien de la transformation se déduit du théorème 3.4.1. ■

Définition 3.5.2 : – Le n−uplet de la proposition ci-dessus définit une représentation en coordonnée cylindrique dans $\mathbb{R}^n$.

- Le système (S) ci-dessus est l'équation du cylindre (plein).
- Si la première inégalité du système (S) devient une égalité, alors on a un cylindre creux.
- Si on omet la deuxième inégalité du système (S), on obtient un cylindre infini.

Remarque 3.5.1 : 1. Soient h un réel strictement positif et $x = (x_1; \cdots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$(S_1)\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0, \\ 0 \leq x_n \leq h. \end{cases}$$

C'est l'équation d'un cône en dimension n ; une paramétrisation de ce cône se déduit de la proposition 3.5.1.

2. Soient h un réel strictement positif et $x = (x_1; \cdots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$(S_2)\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n = 0, \\ 0 \leq x_n \leq h. \end{cases}$$

Cette équation est celle d'une parabole à n dimensions. En dimension 3, elle est connue sous le nom de paraboloïde. Une paramétrisation de (S_2) se déduit de la proposition 3.5.1.

Exemple 3.5.2: Soit D le compact de $\mathbb{R}^3$ défini par les inégalités : $x \geq 0; y \geq 0;$ $z \geq 0$; $x + y + z \leq 1$

a) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$.

b) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers naturels positifs. Calculer l'intégrale

$$J = \iiint_D x^\alpha y^\beta z^\gamma (1-x-y-z)^\delta dxdydz.$$

Solution: En effectuant un changement de variable

$$\begin{cases} u = x + y + z, \\ uv = y + z, \\ uvw = z. \end{cases} \quad \text{alors} \begin{cases} x = u(1-v), \\ y = uv(1-w), \\ z = uvw. \end{cases}$$

Cette transformation définit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ et permet de quitter du domaine D au domaine $\Delta = \{(u;v;w) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq u, v, w \leq 1\}$. Le jacobien de cette transformation est

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1-v & v(1-w) & vw \\ -u & u(1-w) & uw \\ 0 & -uv & uv \end{vmatrix} = u^2 v$$

Ainsi, on a :

a) L'intégrale I devient $I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^2 v}{(1+u)^3} dudvdw = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^2}{(1+u)^3} du$, mais

$$\int_0^1 \frac{u^2}{(1+u)^3} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+u} - \frac{2}{(1+u)^2} + \frac{1}{(1+u)^3} \right) du = ln2 - \frac{5}{8}.$$

D'où $I = \frac{1}{2}(ln2 - \frac{5}{8})$.

b) L'intégrale J devient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 u^{\alpha+\beta+\gamma+2}(1-u)^{\delta} du \int_0^1 v^{\beta+\gamma+1}(1-u)^{\alpha} dv \int_0^1 w^{\gamma}(1-w)^{\beta} dw \\ &= \Gamma(\alpha+\beta+\gamma+2, \delta)\Gamma(\beta+\gamma+1, \alpha)\Gamma(\gamma, \beta) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma(m;n) = \int_0^1 u^m (1-w)^n du &= \tfrac{n}{m+1}\Gamma(m+1; n-1), \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \\ &= \tfrac{n}{m+1} \tfrac{n-1}{m+2} \cdots \tfrac{1}{m+n} \Gamma(m+n; 0) \\ &= \tfrac{n!m!}{(m+n)!} \int_0^1 u^{m+n} du \\ &= \tfrac{n!m!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$J = \Gamma(\alpha+\beta+\gamma+2, \delta)\Gamma(\beta+\gamma+1, \alpha)\Gamma(\gamma, \beta) = \frac{\delta!(\alpha+\beta+\gamma+2)!}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+3)!} \frac{\alpha!(\beta+\gamma+1)!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \frac{\beta!\gamma!}{(\gamma+\beta+1)!}.$$

■

PORTÉE PÉDAGOGIQUE

Le changement de variables est un outil important dans le calcul des intégrales et autres notions faisant intervenir les intégrales. Son intérêt est certain tant chez l'enseignant que chez l'élève.

4.1 Intérêts du changement de variables

4.1.1 Pour l'enseignant

C'est un outil qui aide à éviter de lourds travaux dans le calcul intégral en ce sens que :

1. Il permet d'être mieux outillé pour le calcul intégral (simple ou multiple).
2. Il permet de mieux s'adapter, d'être plus à l'aise et d'avoir une longueur d'avance par rapport aux élèves dans le calcul intégral.
3. Il permet de donner une interprétation graphique (si possible) après le calcul intégral.
4. Il permet d'avoir un calcul plus aisé et moins difficile à effectuer.
5. Il aide dans le calcul d'aires/volumes des figures « assez tordues »de l'espace, faire des calculs de la géométrie plane ou de l'espace.
6. Il aide dans le traitement des suites définies avec les intégrales.
7. Il aide l'enseignant à mieux faire la transposition du savoir savant au savoir à enseigner puis du savoir à enseigner au savoir enseigné et permet que le triangle didactique soit bien établi.
8. Intensifie la culture scientifique et développe l'esprit de recherche.

Retenons que la pédagogie n'a pas pour seul cible le secondaire, elle s'applique aussi au supérieur. Ainsi l'intérêt de de notre travail pour un enseignant du supérieur est : outre les champs cités ci-dessus, il permet d'être mieux outiller dans le calcul des probabilités (définies avec des variables en continu), des statistiques, dans le calcul des processus stochastiques et dans certains problèmes d'économies et finances débouchant sur les intégrales.

4.1.2 Pour l'élève

Retenons que les programmes d'enseignement du secondaire de notre pays traitent uniquement les intégrales en dimension d'espace un (intégrales simples). Ainsi le calcul des intégrales dans nos établissements requiert une bonne maitrise du calcul des primitives, de l'intégration par parties,...etc. Un condensé des méthodes d'intégration avec des exemples à l'appui a été donné au chapitre deux ; tout lecteur intéressé pourra outre Daniel Guinin et al.[4], consulter la collection CIAM (Collection Inter Africain de Mathématiques) en classe de terminale, et bien d'autres manuels au programme (en classe de terminale) définis par le ministère des enseignements secondaires. Le changement de variables bien que très peu introduit dans nos établissements secondaire, permet que l'enfant soit :

1. mieux outillé pour le calcul intégral ;
2. outiller dans le traitement des suites définies avec les intégrales ;
3. capable de faciliter et d'alléger ses calculs ;
4. capable de calculer les aires/volumes des figures « assez tordues », faire des calculs de la géométrie plane ou de l'espace.
5. Intensifie la culture scientifique et développe l'esprit de recherche.

4.2 Illustrations

Nous travaillons ici en dimension inférieure ou égale à trois.

4.2.1 Calcul du volume d'un cône de hauteur $h > 0$ et de rayon de base $R > 0$

Les élèves savent que ce volume vaut $\frac{\pi R^2 h}{3}$ (S.U.I.) [1]

Comme indice de faciliter pour mieux transposer le savoir, le professeur pourra faire ceci

1. système d'unité internationale

(voir figure ci-contre) :

- Considérer un point z (situé sur l'axe de révolution) entre la base et le sommet du cône,
- Considérer l'aire $S(z)$ du cercle définissant la section du cône en ce point,
- Lorsqu'on fait varier z entre 0 et $h, S(z)$ décrit entièrement le cône ; ainsi on intègre $S(z)$ entre 0 et h. $S(z) = \pi r^2$ où $0 \leq r \leq R$, en utilisant la propriété de Thalès on écrit : $r = \frac{R(h-z)}{h}$. D'où $S(z) = \pi R^2(1 - \frac{z}{h})^2$ et par suite, $\int_0^h S(z)dz = \pi R^2 \int_0^h (1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2})dz = \frac{\pi R^2 h}{3}$; résultat prévisible car ce volume vaut $\frac{1}{3}Bh$, B étant l'aire de base.

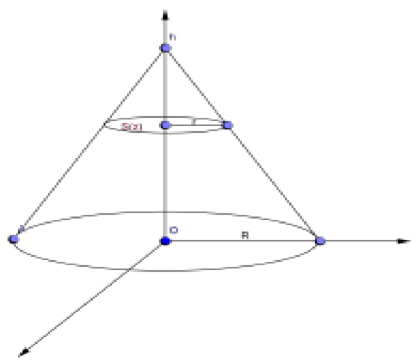

FIGURE 4.1 – Cône

4.2.2 Calcul du volume de la sphère de rayon R > 0

Les élèves savent que ce volume vaut $\frac{4\pi R^3}{3}$ (S.U.I.)

Comme indice de faciliter pour mieux transposer le savoir, le professeur pourra faire ceci (voir figure ci-contre) :

- Considérer un point z (situé sur l'axe de révolution) entre le centre et le bord de la sphère,
- Considérer l'aire $S(z)$ du cercle définissant la section de la sphère en ce point,
- Lorsqu'on fait varier z entre $-R$ et$R, S(z)$ décrit entièrement la sphère ; ainsi on intègre $S(z)$ entre $-R$ et$R.S(z) = \pi r^2$ où $-R \leq r \leq R$, en utilisant la propriété de Thalès on écrit : $r^2 = R^2 - z^2$. D'où $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$ et par suite, $\int_{-R}^R S(z)dz = 2\int_0^R S(z)dz = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)dz = 4\frac{\pi R^3}{3}$;
résultat connu.

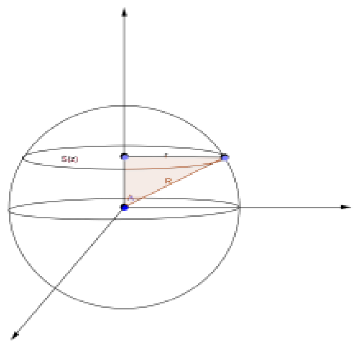

Figure 4.2 – Sphère

4.2.3 Calcul du volume d'un cylindre de rayon $R > 0$ et de hauteur $h = h_2 - h_1 > 0$

Les élèves savent que ce volume vaut $\pi R^2 h$(S.U.I.) Comme indice de faciliter pour mieux transposer le savoir, le professeur pourra faire ceci (voir figure ci-contre) :

- Considérer un point z (situé sur l'axe de révolution) entre les deux bases du cylindres,
- Considérer l'aire $S(z)$ du cercle définissant la section du cylindre en ce point,
- Lorsqu'on fait varier z entre h_1 et h_2, $S(z)$ décrit entièrement un cylindre ; ainsi on intègre $S(z)$ entre h_1 et h_2. $S(z) = \pi R^2$ et on obtient : $\int_{h_1}^{h_2} S(z)dz = \pi R^2(h_2 - h_1)dz$; résultat prévisible car ce volume vaut l'aire de base multiplier par la hauteur.

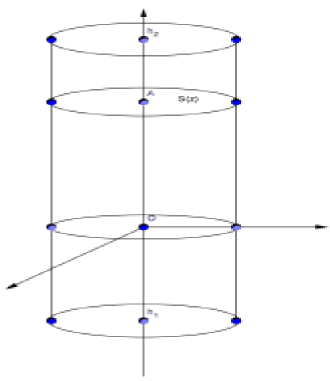

Figure 4.3 – Cylindre

4.2.4 Calcul du volume d'une pyramide de hauteur $h > 0$ et dont la base est rectangulaire de longueur $2a$ et de largeur $2b$.

Les élèves savent que ce volume vaut $\frac{4abh}{3}$ (S.U.I.)

Comme indice de faciliter pour mieux transposer le savoir, le professeur pourra faire ceci (voir figure ci-contre) :

- Considérer un point z (situé sur la hauteur) entre la base et le sommet de la pyramide,
- Considérer l'aire $S(z)$ du rectangle définissant la section de la pyramide en ce point,
- Lorsqu'on fait varier z entre 0 et$h, S(z)$ décrit entièrement la pyramide ; ainsi on intègre $S(z)$ entre 0 et$h.S(z) = xy = 4x_1y_1$ avec $x = 2x_1, y = 2y_1$, en utilisant la propriété de Thalès on écrit : $x_1 = \frac{b}{h}(h-z), y_1 = \frac{a}{h}(h-z)$. D'où $S(z)$ devient $S(z) = \frac{4ab}{h^2}(h-z)^2$ et on obtient, $\int_0^h S(z)dz = \frac{4ab}{h^2}\int_0^h (h-z)^2dz = 4\frac{abh}{3}$ (S.U.I) ;

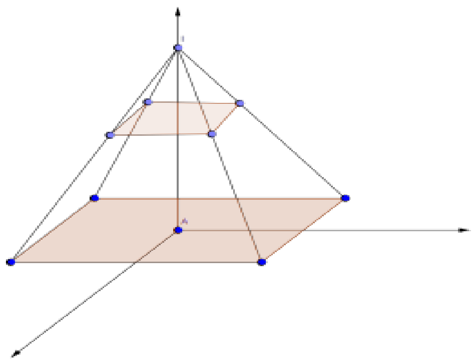

FIGURE 4.4 – Pyramide

résultat prévisible car ce volume vaut le tiers de l'aire de base multipliée par la hauteur.

Remarque 4.2.1 : 1. On peut ainsi de proche en proche calculer les volumes des figures beaucoup plus complexes en dimension 3. Observons que si l'on trace une courbe f sur un intervalle $[a; b]$ et on la fait tourner autour de l'axe des abscisses ; le volume de la figure obtenu est donnée par $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

2. L'intégrale $\pi\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx$ représente le volume obtenu en faisant tourner l'aire S (délimité par les inégalités $a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq f(x)$) autour de l'axe des abscisses. On peut aussi le faire en tournant par rapport à un autre axe.
3. De façon générale, l'intégrale $\dfrac{\theta}{2}\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx$ représente le volume obtenu en faisant tourner l'aire S (délimité par les inégalités $a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq f(x)$) d'un angle de θ radian autour de l'axe des abscisses.
4. Lorsqu'on passe en dimension deux, l'intégrale $\int_a^b (f(x)-g(x))dx$ représente l'aire délimité par les inégalités ; $a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq f(x)$.

5. S'il existe une subdivision $(a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b)$ de l'intervalle $[a;b]$ tel que la fonction f traverse l'axe des abscisses en chaque a_i, alors l'aire $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$ est donnée par :$\mathcal{A} = \sum_{i\in I}\mathcal{A}_i + \sum_{j\in J}\mathcal{A}_j = \sum_{i\in I}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \sum_{j\in J}\int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)dx$ où I et J forment une partition de $\{0;1;\cdots;n-1\}$; $\mathcal{A}_i$ étant le domaine délimité par les inégalités du type $a_i \leq x \leq a_{i+1}; 0 \leq y \leq f(x)$ et $\mathcal{A}_j$ le domaine délimité par les inégalités du type $a_j \leq x \leq a_{j+1}; f(x) \leq y \leq 0$.
6. En ce qui concerne les suites, on peut regarder les intégrales suivantes : pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cost)^n dt, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sint)^n dt, K_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt, L_n = \int_{-1}^{1}(t^2-1)^n dt, M_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nt}(cost)^n dt, N_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nt}(sint)^n dt$;
   I_n, J_n, K_n et L_n sont des intégrales de Wallis et font intervenir une récurrence ; M_n et N_n sont les intégrales liées.

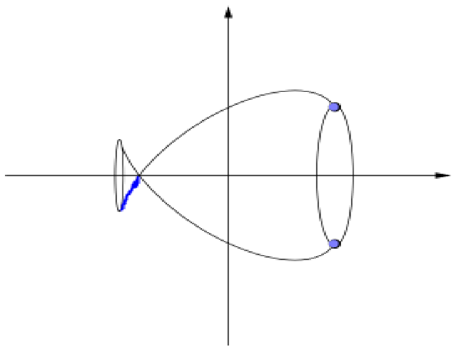

FIGURE 4.5 – Exemple de volume obtenu en tournant une courbe autour de l'axe des abscisses

CONCLUSION

Dans ce mémoire portant sur le changement de variables dans les intégrales, il était question pour nous de démontrer le théorème de changement de variables. Après avoir rassemblé quelques notions utiles pour établir les différents résultats, nous avons décomposé la preuve du théorème de changement de variables en lemmes et propositions, nous avons également prouvé les résultats qui s'en déduisent ; ceci pour des fonctions mesurables et pour un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ et dégagé des applications.

Bibliographie

[1] Marc Briane et Gilles Pagès (2012). Théorie de l'intégration- Convolution et transformée de Fourier, Vuibert.

[2] Dixmier, J. (1963). L'intégrale de Lebesgue (Vol. 1). Centre de documentation universitaire.

[3] L. Grafakos (2008). Classical Fourrier Analysis, graduate texts in mathematics, GTM 249, Sprinter-Verlay.

[4] Daniel Guinin et al. (Mars 1984). Precis de Mathematiques Tome 3, Analyse, 394p, 3ieme edition, Rome.

[5] THIERRY GALLAY (2009). *théorie de la mesure et de l'intégration*. transcrit par tancrède LEPOINT, Université Joseph FOURIER, Grenoble. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ gallay/ - Thierry.Gallay@ujf-grenoble.fr
http ://www.kilomaths.com/ tanc/ Tancrede.Lepoint@e.ujf-grenoble.fr

[6] Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin (10 février 2016). MESURE, INTÉGRATION, PROBABILITÉS,640p.

[7] Jean Marie Monier, Algèbre et géométrie PC-PSI-PT, DUNOD, 5ième édition, 486p, Paris

[8] Riesz, F. (1949). L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue. In Annales de l'institut Fourier (Vol. 1, pp. 29-42).

[9] Rubenthaler, S. (2010). Intégration et probabilités (Doctoral dissertation, École Doctorale en Sciences Fondamentales et Appliquées).

[10] Troyanov, M. (2005). Notes du cours de Mesures et Intégration.