GEOMETRIE SUR UNE VARIÉTÉ DE FINSLER

Mémoire de DIPES II de mathématiques

De

WATSA Hervé

Matricule: **10V0491**

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

MBA Alphonse

Chargé de Cours

École normale supérieure

Année Académique 2018-2019

♠ Dédicace ♠

Je dédie ce mémoire à :

ma mère FOUGUE Françoise et à ma fiancée YOMENE Charnelle

♠ Remerciements ♠

Je remercie le Dieu tout puissant pour sa grâce, sa protection et sa miséricorde.
J'adresse mes vifs remerciements au Dr MBA ALPHONSE , qui au delà de ses multiples occupations m'a attribué un sujet et a guidé mes premiers pas dans la recherche. Mes remerciements vont également à :

- ☞ Ma maman Mme FOUOGUE Françoise pour le soutien moral et financier sans faille qu'elle m'a apporté toutes ces dernières années.
- ☞ Aux camarades de la promotion pour leur soutien moral durant la formation.
- ☞ Tous mes frères et soeurs pour leur grande affection.
- ☞ Tous les parents, amis et connaissances que nous n'avons pas mentionné, mais qui de près ou de loin, ont contribué à ma formation d'universitaire jusque là.

♠ Déclaration sur l'honneur ♠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

WATSA Hervé

♠ Résumé ♠

Ce travail est consacré à l'étude du volume de certains ensembles sur une variété de finsler. Nous utilisons pour cela les propriétés des champs de vecteurs , des formes volumes ainsi que l,utilisation de l,opérateur divergence d,un champ de vecteurs qui nous permettra de construire des formes volumes sur des hypersurfaces .

Mots clés : variétés,variété de finsler,espace tangent,champ de vecteurs ,forme volume,variété differentiable.

♠ Abstract ♠

This work is devoted to the study of geometry on a variety of finsler,for this we use the properties of vector fields , geometry differentielle and in particular properties on finsler variety

Key words : varieties, finsler variety, tangent space, vector field, volume shape, differentiable variety.

♠ Table des matières ♠

♠ Introduction ♠

Une variété de finsler est une variété differentielle admettant sur des espaces tangents une norme notée F appelée norme de finsler dont les propriétés seront données dans ce document .
Dans ce travail, il est question de faire une étude sur le volume sur une variété de finsler . Notre travail est donc axé comme suit : d'abord un premier chapitre où nous donnons les notions de base et les définitions mathématiques relatives à la théorie de la géometrie de finsler , et nous rappelons les notions de base de la géometrie differentielle et champs de vecteurs nécessaire à la compréhension de ce document ensuite un deuxième chapitre où nous détaillons les notions et les définitions relatives aux espaces de finsler et dans un troisième chapitre où nous développons via les deux première chapitres les m espaces de finsler et enfin un quatrième chapitre où nous donnons l,implication pédagogique de notre travail,en bref son apport dans notre métier d,enseignant.

Chapitre Un

Variétés différentiables

1.1 Sous variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition et propriétés

Définition 1.1.1 : *Une partie* $V \neq 0$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* $m(\leq n)$ *et de classe* C^q *si, pour tout* x *de* V*, il existe un ouvert* U_x *de* $\mathbb{R}^n$ *contenant* x *et un* C^q *difféomorphisme* g *de* U_x *sur l'ouvert* $g(U_x)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *telque :*

$$g(U_x \cap V) = g(U_x) \cap \mathbb{R}^m (\mathbb{R}^m = \{0\}_{\mathbb{R}^{n-m}} \times \mathbb{R}^m).$$

En mathématiques, les variétés différentielles ou variétés différentiables sont les objets de base de la topologie différentielle et de la géométrie différentielle. Il s'agit de variétés sur lesquelles il est possible d'effectuer les opérations du calcul différentiel et intégral. Une variété différentielle se définit d'abord par la donnée d'une variété topologique, espace topologique localement homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$. Les homéomorphismes locaux sont appelés cartes et définissent des systèmes de coordonnées locales. La structure différentielle est définie en exigeant certaines propriétés de régularité des applications de transition entre les cartes. Cette structure permet par exemple de donner une définition globale de la notion d'application différentiable.

Définition 1.1.2 : (i) *Soient* M *et* N *deux variétés differentiables* $f : M \to N$ *une application differentiable soit* (U, φ) *une carte de* M*,*(V, ϕ) *une carte de* N
On appelle matrice jacobienne de f *en* x *dans les cartes* (U, φ, m) *et* (V, ϕ, n)*, la matrice jacobienne de* $F = \phi o f o \varphi^{-1}$ *au point* $\varphi(x)$.

(ii) *On appelle rang de* f *en* x*, le rang de la matrice jacobienne de* F *au point* $\varphi(x)$*. Il est noté* $rang(f)(x)$.

Définition 1.1.3 : (i) *On dit que f est une submersion si pour tout $x \in M$, $rang(f)(x) = dimN = n$.*

(ii) *On dit que f est une immersion si pour tout $x \in M$, $rang(f)(x) = dimM = m$.*

1.2 Quelques propriétés

Si $f : U(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^q est une immersion au point x de U, alors il existe un ouvert V_x de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ contenant x telque $V_x \cap \mathbb{R}^n \subset U$, un ouvert $V_{f(x)}$ de $\mathbb{R}^m$ contenant $f(x)$ et un C^q difféomorphisme $g : V_x \longrightarrow V_{f(x)}$ ayant la même restriction que f à $V_x \cap \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.2.1 : - *Soit $f^j : U(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq j \leq m$ m fonctions de classe C^q, $V = \{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n / f^j(x^1, ..., x^n) = 0, \forall j \in \{1, ..., m\}\}$. Si pour tout x de V, le rang de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)\right), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ est $m(\leq n)$, alors V est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$.*

preuve : La découle de la preuve de 1.2.3 car f est une submersion en x si et seulement si sa matrice jacobienne en x est de rang m et où f est défnie par l,élément de $\mathbb{R}^m$: .

$$f(x^1, ..., x^n) = (f^1(x^1, ..., x^n), ..., f^m(x^1, ..., x^n)) \text{ et où le point } y \text{ est } (0, ..., 0)$$

Proposition 1.2.2 : -*Soit $f : U(\subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^q, y une valeur régulière de $\mathbb{R}^m$, $V = f^{-1}(y)$.*
Si f est une submersion en tout point de V, alors V est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$.

Preuve : de la proposition 1.2.3

Soit $x \in V$. D'après la proposition précédente il existe un ouvert U_x(de U) contenant x, un ouvert U_y de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ contenant y et un C^q difféomorphisme $g : U_x \longrightarrow U_y : x' \longmapsto g(x')$ tel que pour tout x' de U_x : $\pi(g(x')) = f(x')$. π étant la projection canonique de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ sur $\mathbb{R}^m$.

On a pour tout x' :

$$\begin{aligned} x' \in U_x \cap V &\iff x' \in U_x \text{ et } x' \in V \\ &\iff x' \in U_x \text{ et } f(x') = y \\ &\iff x' \in U_x \text{ et } \pi(g(x')) = y \\ &\iff x' \in U_x \text{ et } g(x') \in \{y\} \times \mathbb{R}^{n-m}. \end{aligned}$$

On a donc $g(U_x \cap V) = g(U_x) \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{n-m})$.

D'où V est une sous variété de dimension $n - m$.

Exemple 1.1 : L'hyperboloïde a une nappe d'équation : $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

En effet, f est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$ et $\vec{\Delta}_f = \left(\frac{2X}{a^2}, \frac{2Y}{b^2}, \frac{-2Z}{c^2}\right)$ est non nul en tout point de l'hyperboloïde (l'origine ne lui appartient pas). De façon analogue, on montre qu'une sphère de rayon $r > 0$ $(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0)$, qu'un ellipsoïde $\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0\right)$, qu'un hyperboloïde à deux nappes $\left(\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0\right)$, qu'un paraboloïde elliptique $\left(Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right)$ et qu'un paraboloïde hyperbolique $\left(Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}\right)$ sont des sous variétés de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Par contre le cône de sommet O, d'axe Oz, et d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^3$ car $\vec{\Delta}_f = (2x, 2y, -2z)$ s'annule en 0. Cependant il devient une variété lorsqu'on la prive de son origine.

Une proposition intéressante va permettre de conclure à l'existence de sous variétés de $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Proposition 1.2.3 : - *Si $f : U(\subset \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion $(m \leq n)$ injective. Si $f^{-1}|_V : V = f(U) \longrightarrow U$ est une application continue, alors V est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m*

.

Preuve :Soit y un point de V telque $y = f(x)$, x étant un point de V d ,après la proposition 1.2 il existe un ouvert V_x de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m}$ contenant x telque $V \cap \mathbb{R}^m \subset U$;et un ouvert $V_{f(x)}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant y ,un C^q-difféomorphisme $g : V_x \longrightarrow V_{f(x)}$ ayant même restriction à $V_x \cap \mathbb{R}^m$ que f .La continuité f^{-1} en y impliqu,il existe un ouvert $V'_{f(x)}$ de $\mathbb{R}^n$ cotenant y et inclus à $V_{f(x)}$ telque :

$$\forall y' \in V'_{f(x)} \cap V \Longrightarrow f^{-1}(y') \in V_x$$

La restriction de g^{-1} à $V'_{f(x)}$ est un C^q-difféomorphisme de $V'_{f(x)}$ sur l,ouvert V'_x de V_x .La restriction de g à V'_x est un C^q-difféomorphisme noté :

$$g_{|V'_x} : V'_x \longrightarrow V'_{f(x)}$$

D,une part ,puisque g et f ont même restriction à V'_x ,on a :

$$\forall t \in V'_x \cap \mathbb{R}^m : g_{|V'_x}(t) = f(t) \in V'_{f(x)} \cap V.(1)$$

D,autre part ona :

$$y' \in V'_{f(x)} \cap V \Longrightarrow f^{-1}(y') \in V_x \ (2)$$

Cela signifie qu,il existe $t \in V_x \cap \mathbb{R}^m$ telque $f(t) = y'$.Or $y' \in V'_{f(x)}$ donc $t \in V'_x \cap \mathbb{R}^m$.
De (1) et (2) on déduit que $V'_{f(x)} \cap V$ est l,image $V'_x \cap \mathbb{R}^m$ par $g|V'_x$ c,est dire

$$g_{|V'_x}(V'_{f(x)} \cap V) = V'_x \cap \mathbb{R}^m.$$

Ceci signifie bien que V est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension m (car $V'_x = g^{-1}_{|V'_x}(V'_{f(x)})$).

Exemple 1.2 : Si $U =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[$,

$$\begin{array}{rccc} f: & U(\subset \mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\lambda, \phi) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x = -cos\lambda cos\phi \\ y = cos\lambda sin\phi \\ z = sin\lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

, alors $f(U)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

En effet, les trois conditions de la dernière proposition sont remplies :

- La matrice jacobienne de f est $\begin{pmatrix} -sin\lambda cos\phi & -cos\lambda sin\phi \\ -sin\lambda sin\phi & cos\lambda cos\phi \\ cos\lambda & 0 \end{pmatrix}$ est de rang maximum 2 car pour tou $(\lambda, \phi) \in U$ il existe une matrice 2×2 inversible, les déterminants étant respectivement :

  $\begin{vmatrix} -sin\lambda cos\phi & -cos\lambda sin\phi \\ -sin\lambda sin\phi & cos\lambda cos\phi \end{vmatrix} = -sin\lambda cos\lambda$ (nul si $\lambda = 0$).

  $\begin{vmatrix} -sin\lambda cos\phi & -cos\lambda sin\phi \\ cos\lambda & 0 \end{vmatrix} = -cos^2\lambda cos\phi$ (nul si $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$).

  $\begin{vmatrix} -sin\lambda sin\phi & cos\lambda cos\phi \\ cos\lambda & 0 \end{vmatrix} = cos^2\lambda sin\phi$ (nul si $\phi = 0$).

ainsi f est une immersion.

- L'application f est injective car $\forall(\lambda, \phi), (\lambda', \phi') \in U, f(\lambda, \phi) = f(\lambda', \phi') \Longrightarrow (\lambda, \phi) = (\lambda', \phi')$.

En effet de $sin\lambda = sin\lambda'$ on déduit $\lambda = \lambda'$. Des égalités $cos\lambda cos\phi = cos\lambda cos\phi'$ et $cos\lambda sin\phi = cos\lambda sin\phi'$ on déduit que $cos\phi = cos\phi'$ et $sin\phi = sin\phi'$ (car $cos\lambda \neq 0$) $\Longrightarrow \phi = \phi'$.

- L'application $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ est continue puisque $\lambda = arcsinz$ et $\phi = arctg\frac{y}{x}$.

En conséquence, $f(U)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Fibrés Vectoriels réels

Soient M et E deux variétés différentiables de classe C^∞ et $\pi : E \longrightarrow M$ une application différentiable telle que pour tout $x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(x) = \{z \in E/\pi(z) = x\}$ soit un espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 1.3.1 : *On dit que le triplet (E, M, π) est un fibré vectoriel réel de fibre type $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x_0 et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tel que :*

(i) $\pi = p_1 \circ \phi$;

(ii) La restriction de $p_2 \circ \phi$ à chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$ est linéaire où p_1 et p_2 désignent respectivement les projections suivant le premier et le deuxième facteurs.

On dit que (U, φ) est une trivialisation locale de M au dessus de x_0, $E_x = \pi^{-1}(x)$ est la fibre de E au dessus de x .

Exemple 1.3 : Soient M une variété différentiable de dimension $n \geq 1$ et V un espace vectoriel réel. Soit l'application $\begin{array}{rccc} \pi : & M \times V & \longrightarrow & M \\ & (x, v) & \longmapsto & x \end{array}$ le triplet $(M \times V, M, \pi)$ est un fibré vectoriel de fibre type V. Un tel fibré est dit trivial.

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel réel de fibre type $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$.

Définition 1.3.2 : *On appelle section différentiable de E, toute application différentiable $\sigma : M \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \sigma = Id_M$. On dit que $\sigma : M \longrightarrow E$ est une section locale au dessus de U si $\pi \circ \sigma |_U = Id_U$. On désigne par $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections différentiables sur E. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ et $f \in C^\infty(M)$.*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_1 + \sigma_2 : & M & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f\sigma_1 : & M & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & f(x)\sigma_1(x) \end{array}.$$

Exemple 1.4 : Soit $E = M\times\mathbb{R}$, $\begin{array}{cccc}\pi : & E & \longrightarrow & M \\ & (x,t) & \longmapsto & x\end{array}$. $(M\times\mathbb{R}, M, \pi)$ est un fibré vectoriel réel.

Si $\sigma \in \Gamma(M\times\mathbb{R})$, alors $\sigma : M \longrightarrow M\times\mathbb{R}$ est différentiable et $\pi\circ\sigma = Id_M$, c'est-à-dire σ est de la forme $\sigma(M) = (Id_M, \tilde{\sigma})$ où $\tilde{\sigma} \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

.

1.3.1 Espace Tangent

On se donne une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ dimension p et un point $x \in M$.

Définition 1.3.3 : *Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à M en x s'il existe $\delta > 0$ et $C :]-\delta,\delta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 à images dans M telle que : $C(0) = x$ et $\dot{C}(0) = v$.*

On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M au point x .

(Fibré tangent)

Soit M une variété différentielle.

$TM = \bigcup\limits_{x\in M} T_xM$ union deux à deux disjoints est une variété différentielle de dimension égale à deux fois la dimension de M.Le triplet (TM, M, π_M) appelée fibré tangent à M.

1.3.2 Espace cotangent

Soit M une variété differentiable de classe C^∞ et de dimension $n \geqslant 1$. on note T_x^*M l,espace vectoriel dual de T_xM . De manière précise,$T_x^*M = \mathcal{L}(T_xM,\mathbb{R})$.

En particulier $(T_x^*M)^* \cong T_xM$.

1.4 Champ de vecteurs

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n et de C^p.

Définition

On dit que $f : M \longrightarrow N$ est différentiable et de classe C^p au point x soient (V,ψ) une carte de N en $y = f(x)$ telle que $f(U) \subset V$, (U,φ) une carte de M de classe C^p alors l'application $F : \psi\circ f\circ\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ est différentiable et de classe C^p au point $\varphi(x)$.

Définition

On dit que f est différentiable et de classe C^p si f est différentiable et de classe C^p en tout point de M

.

Définition

Soit M une variété différentielle. Un champ de vecteurs sur M est une application :
$X: \ M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X : M \longrightarrow M$ soit l'application identité (π étant la projection canonique). Un champ de vecteurs est dit différentiable si l'application qui le définit est une application C^p. On note par $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs différentiables définis sur M.

Remarque

Un champ de vecteurs est simplement la section d'un fibré tangent

Dérivation

Soit M une variété différentielle.

$$\begin{array}{rccc} X: & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & g & \longmapsto & Xg \end{array} \text{ vérifiant :}$$

i) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in C^\infty(M), X(ag + bh) = aXg + bXh$;

ii) $\forall g, h \in C^\infty(M), X(gh) = gXh + hXg$.

Crochet

Soit M une variété différentielle.

On appelle crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y le champ de vecteurs noté $[.,.]$ et défini par :

$$\begin{array}{rccc} [.,.]: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X, Y) & \longmapsto & [X, Y] \end{array}.$$

L'opérateur crochet définit une dérivation sur $C^\infty(M)$. En coordonnées locales, on a : $[X, Y] = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)\, \partial_i$.

Dérivée de Lie

La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs X par rapport à un autre champ de vecteurs Y est le champ de vecteurs $L_X Y$ défini par : $L_X(Y) = [X, Y]$.

Définition(Champ de vecteurs sur une variété $\mathcal{M}$)

Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle. Un champ de vecteurs X sur $\mathcal{M}$ est la donnée en chaque point $M \in \mathcal{M}$ d'un vecteur $X(M) \in T_M\mathcal{M}$.

Dans toute ce qui suivra, M désigne une variété différentiable de dimension n.

1.5 Tenseurs

Tenseur covariant

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ ou p fois covariant au point $x \in M$ est une forme p linéaire sur $(T_xM)^p$.

On désigne par $\overset{p}{\bigotimes} T_x^* M \equiv T_{x_p}^0$ l'espace des formes p linéaires sur T_xM.

Exemple 1.5 : Un tenseur 2 fois covariant ou de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ au point x est une forme bilinéaire symétrique sur $T_xM \times T_xM$.

Tenseur contravariant

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ ou q fois contravariant au point x est une forme q linéaire définie sur $(T_x^*M)^q$. On désigne par $\overset{q}{\bigotimes} T_x^* M \equiv T_{x^0}^q$ l'espace de toutes les formes q linéaires sur T_x^*M

Tenseur mixte

Un tenseur mixte de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ ou tenseur p fois covariant et q fois contravariant au point $x \in M$ est une forme $(p+q)$ linéaire définie pour $(T_xM)^p \times (T_x^*M)^q$.

On désigne par $T_{x_p}^q$ l'ensemble des tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point $x \in M$.

Chapitre Deux

Les espaces de Finsler

2.1 Espaces métriques

Plus précisément, une métrique sur un ensemble M est une fonction $d : M \times M \longrightarrow R$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $p, q \in M$,

$$d(p,q) \geq 0$$

. L'égalité s'obtient si et seulement si $p = q$.

(ii) Pour tout $p, q, r \in M$,

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q).$$

Dans l'addition, si d est symétrique c'est-à-dire :

(iii) Pour tous points $p, q \in M$,

$$d(p,q) = d(q,p).$$

alors d est ce qu'on appelle métrique symétrique.

Désignons par :

$$\mathbb{R}^n = \{(x^i) = (x^1, ..., x^n) | x^i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}.$$

l'espace vectoriel réel canonique de dimension n. La norme euclidienne canonique $|.|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y^i)^2},\ y = (y^i) \in \mathbb{R}^n.$$

Définissons $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$ par :

$$d_E(u,v) := |v - u|.$$

Nous l'appellerons d_E la métrique canonique euclidienne. Pour simplifier, nous désignerons la paire $(R^n, |.|)$

Soit V l'espace vectoriel réel de dimension finie et $< .,. >$ un produit scalaire sur V. Définissons :

$$||y|| := \sqrt{< y, y >},\ y \in V.$$

Nous obtenons une métrique d sur V,

$$d(u,v) := ||v - u||,\ u, v \in V.$$

Nous appelons $||.||$ et d la norme euclidienne et la métrique euclidienne sur V, respectivement.

Exemple 2.1 : Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $||.|| : V \longrightarrow R$ une fonction avec les propriétés suivantes :

(i) $||u|| \geq 0$, l'égalité s'obtenant si et seulement si $u = 0$;

(ii) $||\lambda u|| = \lambda ||u||, \lambda > 0$;

(iii) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, u, v \in V$.

Définissons $d : V \times V \longrightarrow [0, +\infty[$ par :

$$d(u,v) := ||u - v||.$$

d est une métrique sur V.

Exemple 2.2 : Soit Ω un domaine délimité dans $\mathrm{R}^n = (R^n, |.|)$. Supposons que Ω est strictement convexe, c'est-à-dire, pour tout segment linéaire L dans $\mathbb{R}^n$, si les points finaux de L sont contenus dans Ω, alors L est complètement contenu dans Ω. Pour une paire ordonnée de points $p, q \in \Omega$, soit L_{pq} rayon issue de p et passant à travers q. Puisque Ω est strictement convexe, il existes un point d'intersection unique $z_{pq} := L_{pq} \cap \partial\Omega$.

Définissons :

$$d(p,q) := ln\left(\frac{|z_{pq} - p|}{|z_{pq} - q|}\right). \tag{2.1}$$

Nous montrerons que d est une métrique antisymétrique sur Ω. d est appelée la métrique aérobique.

Prouvons l'inégalité triangulaire :

$$d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q).$$

Supposons que r n'est pas une ligne passant par p et q. Soient :

$$\theta := \widehat{pxz_{pr}}, \phi := \widehat{pz_{pr}z_{rq}}, \psi := \widehat{rz_{rq}z_{pr}}.$$

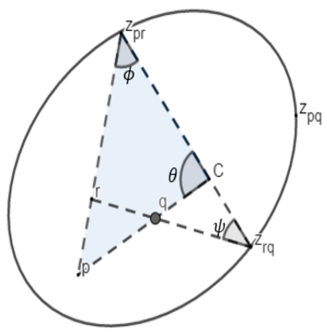


FIGURE 2.1

Par la loi des sinus, nous avons les identités suivantes.
$\frac{|z_{pr}-p|}{sin\theta} = \frac{|x-p|}{sin\phi}, \frac{|z_{rq}-q|}{sin\theta} = \frac{|x-q|}{sin\psi}, \frac{|z_{rq}-r|}{sin\phi} = \frac{|z_{pr}-r|}{sin\psi}.$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{|x-p|}{x-q} &= \frac{|z_{pr}-p|\frac{sin\phi}{sin\theta}}{|z_{rq}-q|\frac{sin\psi}{sin\theta}} \\
&= \frac{|z_{pr}-p|sin\phi}{|z_{rq}-q|sin\psi} \\
&= \frac{|z_{pr}-p|}{|z_{rq}-q|}\frac{sin\phi}{sin\psi} \\
&= \frac{|z_{pr}-p|}{|z_{rq}-q|}\frac{|z_{rq}-r|}{|z_{pr}-r|}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{|z_{pq}-p|}{|z_{pq}-q|} \leq \frac{|z_{pq}-x|+|x-p|}{|z_{pq}-x|+|x-q|} < \frac{|x-p|}{|x-q|}.$$

Combinant ces rapports,

$$\frac{|z_{pq}-p|}{|z_{pq}-q|} < \frac{|z_{pq}-p|}{|z_{pq}-r|}\frac{|z_{rq}-r|}{|z_{rq}-q|}.$$

Cela donne :
$d(p,q) = ln\left(\dfrac{|z_{pq}-p|}{|z_{pq}-q|}\right) = ln\left(\dfrac{|z_{pq}-p|}{|z_{pq}-r|}\right) + \left(\dfrac{|z_{pq}-r|}{|z_{pq}-q|}\right) = d(p,r) + d(r,q).$
Puis d est une métrique sur Ω.

Maintenant nous prenons le cas spécial où $\Omega = \mathbb{B}$ est la boule unité standard dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Pour une paire de points $p, q \in \mathbb{B}^n$, soit :

$$z_{pq} = p + \lambda(q-p) \in \partial \mathrm{B}^n, \lambda > 1.$$

Partant de l'équation $|z|^2 = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sqrt{< p, q-p >^2 + |q-p|^2(1-|p|^2)} - < p, q-p >}{|q-p|^2} \\ &= \frac{\sqrt{|p-q|^2 - (|q|^2|p|^2 - < p, q >^2)} - < p, q-p >}{|q-p|^2}. \end{aligned}$$

Par (1.1), nous obtenons une formule pour la métrique plate sur $\mathbb{B}^n$
$d(p,q) = ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) = ln\left(\dfrac{\sqrt{|p-q|^2 - (|q|^2|p|^2 - < p, q >^2)} - < p, q-p >}{\sqrt{|p-q|^2 - (|q|^2|p|^2 - < p, q >^2)} - < q, q-p >}\right).$
Notons que :

$$\lim_{q \longrightarrow \partial \mathbb{B}^n} d(0,q) = \infty, \lim_{p \longrightarrow \partial \mathbb{B}^n} d(p,0) = \ln(2).$$

Exemple 2.3 : (Klein) Désignons par d la métrique antisymétrique sur un domaine convexe épais $\Omega \subset \mathrm{R}^n$. Définissons $d_K : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty[$ par :

$$d_K(p,q) := \frac{1}{2}\{d(p,q) + d(q,p)\}, \tag{2.2}$$

Observons que pour tous $p, q, r \in \Omega$,

$$\begin{aligned} d_K(p,q) &= \tfrac{1}{2}\{d(p,q) + d(q,p)\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}\{d(p,r) + d(r,q)\} + \tfrac{1}{2}\{d(q,r) + d(r,p)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{d(p,r) + d(r,p)\} + \tfrac{1}{2}\{d(q,r) + d(r,q)\} \\ &= d_K(p,r) + d_K(r,q). \end{aligned}$$

Puis que d_K est aussi une métrique.

Nous l'appelons la métrique de Klein.

Soit (M,d) un espace métrique. Pour une courbe lipschitzienne continue $c : [a,b] \longrightarrow M$, définissons :

$$L_d(c) := \sup \sum_{i=0}^{k-1} d\left(c(t_i, c(t_{i+1}))\right), \tag{2.3}$$

où le supremum est pris au dessus des partitions $a = t_0 < .... < t_k = b$. L_d est appelé la structure longueur induite par d. La structure longueur $L = L_d$ induits une métrique d_L sur M par :

$$d_L(p,q) := \inf\{L(c), c \text{ est lipschitzienne }, c(a) = p, c(b) = q\}.$$

Par la définition,

$$d \leq d_L.$$

d est appelé la métrique chemin lorsque $d = d_L$.

Exemple 2.4 : Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_{n+1}$. Définissons deux métriques d_1 et d_2 sur $\mathbb{S}^n$ par :

$$d_1(u,v) := \theta(u,v), u, v \in \mathbb{S}^n,$$
$$d_2(u,v) := |u-v|, u, v \in \mathbb{S}^n,$$

où $\theta(u,v)$ désignes l'arc-longueur de la petite portion du grand cercle passant par u et v. d_1 et d_2 définissent la même structure de longueur $L_{d_1} = L_{d_2}$ sur $\mathbb{S}^n$. C'est facile de vérifier que d_1 est la métrique chemin, mais d_2 n'est pas une métrique chemin.

2.2 Espaces de Minkowski

Dans cette section, nous parlerons des espaces métriques plats les plus réguliers.

Définition 2.2.1 : *Une norme de Minkowski sur un espace vectoriel V est une fonction non négative $F : V \longrightarrow [0, +\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(M1) F est C^∞ sur $V \backslash \{0\}$.

(M2) $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, pour tous $\lambda > 0$ et $y \in V$.

(M3) Pour tous $y \in V\backslash\{0\}$, la forme bilinéaire symétrique g_y sur un espace vectoriel V est définie positive, où :
$g_y(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y+su+tv)\right]|_{s=t=0}$

La paire (V,F) est appelé espace de Minkowski.
Nous montrerons que toute norme de Minkowski F sur un espace vectoriel V satisfait :

$$F(u+v) \leq F(u) + F(v), u, v \in V. \tag{2.4}$$

Regarder le lemme 2.2 ci-dessous. En effet il induits une métrique d sur V par :

$$d(u,v) := F(v-u), u, v \in V.$$

Nous appellerons une métrique d sur V une métrique de Minkowski si elle est induite par une norme de Minkowski F sur V.

Il existe plusieurs normes de Minkowski sur un espace vectoriel.

Exemple 2.5 : *(Normes Randers) Soit α une norme euclidienne et β une forme linéaire sur un espace vectoriel réel V de dimension n. Définissons :*

$$F(y) := \alpha(y) + \beta(y). \tag{2.5}$$

Clairement, F satisfait $(M1)$ et $(M2)$ dans la définition 2.1. Nous montrerons à présent que $(M3)$ s'obtient si et seulement si $\|\beta\| < 1$.
Fixons une base $\{b_i\}_{1\leq i\leq n}$ pour V et exprimons :
$\alpha(y) = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ et $\beta(y) = b_i y^i, y = y^i b_i \in V$,
où (a_{ij}) est une matrice symétrique définie positive. Nous avons :

$$\|\beta\| := \sup_{\alpha(y)=1} \beta(y) = \sqrt{a^{ij}b_i b_j},$$

où $(a^{ij}) = (a_{ij})^{-1}$. Soit :

$$g_{ij}(y) := g_y(b_i, b_j) = \tfrac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(y).$$

Un calcul rapide de rapports donne :

$$g_{ij}(y) = \frac{F}{\alpha}(a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha} + (\frac{y_i}{\alpha} + b_i)(\frac{y_j}{\alpha} + b_j), \tag{2.6}$$

où $y_i := a_{is}y^s$. De (2.6), nous pouvons montrer que g_y est définie positive pour tous $y \neq 0$ si et seulement si $\|\beta\| < 1$. Puis $F = \alpha + \beta$ est une norme de Minkowski si et seulement si $\|\beta\| < 1$. Une fonction $F = \alpha + \beta$ sur V avec $\|\beta\| < 1$ est appelée une norme Randers.
Maintenant nous vérifions (1.4) dans un cheminement direct. Observons que :

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \alpha(u+v) + \beta(u) + \beta(v) \\ &\leq \alpha(u) + \alpha(v) + \beta(u) + \beta(v) \\ &= F(u) + F(v). \end{aligned}$$

Par un argument élémentaire en algèbre linéaire, nous obtenons :

$$det(g_{ij}) = (\frac{F}{\alpha})^{n+1} det(a_{ij}). \tag{2.7}$$

L'inverse $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$ *peut être exprimé dans la forme suivante :*

$$g^{ij}(y) = \frac{\alpha}{y} a^{ij} + (\frac{\alpha}{F})^2 \frac{\beta + ab^2}{F} \frac{y^i}{\alpha} \frac{y^j}{\alpha} - (\frac{\alpha}{F})^2 (b^j \frac{y^i}{\alpha} + b^i \frac{y^j}{\alpha}). \tag{2.8}$$

où $b^i := a^{ij} b_j$. *Les relations* (2.7) *et* (2.8) *sont utiles dans l'étude des normes Randers.*

Prenons un domaine ouvert Ω *dont l'origine est dans* V *avec une frontière régulière* $S = \partial\Omega$. *Supposons que* Ω *est convexe, c'est-à-dire, n'importe quel segment linéaire est contenu dans la clôture* $\bar{\Omega}$ *si ses points finaux se rencontrent au sein de* $\bar{\Omega}$. *Définissons* $F : V \longrightarrow [0, +\infty[$ *par :*

$$F(\lambda y) := \lambda, \lambda > 0, y \in S.$$

Alors $S = F^{-1}(1)$. *Nous appelons* F *la fonction de définition de* S. *Clairement,* F *satisfait* $(M1)$ *et* $(M2)$ *dans la définition* (2.1). *Plus loin, la convexité de* Ω *impliques que :*

$$F(u + v) \leq F(u) + F(v), u, v \in V.$$

Puis $d(u, v) := F(v - u)$ *est une métrique sur* V. *La convexité de* Ω *aussi impliques que pour tous* $y \neq 0$, *la forme bilinéaire induite* g_y *sur* V *est semi-définie. Un domaine convexe* Ω *est dit fortement convexe si la fonction définissante* F *satisfaits* $(M3)$ *dans la définition* $(1.2.1)$.

Exemple 2.6 : Considérons le domaine suivant dans R^n :

$$\Omega := \{y | \sum_{i=1}^{n} (y^i)^4 < 1\}. \tag{2.9}$$

Ω est strictement convexe. La fonction définissant $S = \partial\Omega$ est donné par :

$$F(y) := \{\sum_{i=1}^{n} (y^i)^4\}^{\frac{1}{4}}. \tag{2.10}$$

La forme bilinéaire induite g_y est semi-définie positive pour tous $y \in S$, mais n'est pas définie positive en certains points $y \in S$. Puis Ω n'est pas fortement convexe.

Exemple 2.7 : Considérons la fonction suivante sur R^2 :

$$F(u,v) := \{u_4 + 3cu^2v^2 + v^4\}^{\frac{1}{4}}, (u,v_) \in R^2.$$

Soit :

$$g_{11} := \tfrac{1}{2}[F^2]_{uu}, g_{12} := \tfrac{1}{2}[F]_{uv} =: g_{21}, g_{22} := \tfrac{1}{2}[F^2]_{uv}.$$

Un calcul direct donnes :

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{2u^6 + 9cu^4v^2 + 6u^2v^4 + 3cv^6}{2F^6(u,v)} \\ g_{12} &= \frac{(9c^2-4)u^3v^3}{2F^6(u,v)} = g_{21} \qquad \text{et } det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \frac{6cu^4 + 3(4-3c^2)u^2v^2 + 6cv^4}{4F^4(u,v)}. \\ g_{22} &= \frac{3cu^6 + 6u^4v^2 + 9cu^2v^4 + 2v^6}{2F^6(u,v)}, \end{aligned}$$

Clairement, $g_{11} > 0$ et $g_{22} > 0$ si et seulement si $c > 0$. Supposons que $c > 0$. Étudions le signe de $det(g_{ij})$. Écrivons :

$$6cu^4 + 3(4-3c^2)u^2v^2 + 6cv^4 = 6c(u^4 + 2\delta u^2v^2 + v^4),$$

où $\delta := \frac{(4-3c^2)}{4c}$. Le polynôme ci-dessus est positif pour tous $(u,v) \neq (0,0)$ si et seulement si $\delta > -1$. Clairement, $\delta > -1$ si et seulement si $c < 2$(sous l'hypothèse $c > 0$). Puis g_y est définie positive pour tous $y = (u,v) \neq 0$ si et seulement si $0 < c < 2$.

Soit (V,F) un espace de Minkowski. Il suit depuis $(M2)$ dans la définition $(1.2.1)$ que :

$$g_y(y,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}[F^2(y+su)]\,|_{s=0}, g_y(y,y) = F^2(y). \tag{2.11}$$

Pour un vecteur $y \in S = F^{-1}(1)$, l'espace tangent T_yS peut être naturellement identifié avec l'hyperplan suivant :

$$W_y := \{w \in V, g_y(y,w) = 0\} \subset V.$$

Nous obtenons une décomposition pour V :

$$V = \mathbb{R}.y \oplus W_y.$$

Soit :

$$h_y(u,v) = g_y(u,v) - \tfrac{1}{F^2(y)}g_y(y,u)g_y(y,v).$$

h_y est appelé forme angulaire. Notons que :

$$h_y(y,y) = 0, h_y(y,w) = 0, \forall w \in W_y.$$

Puis pour tous $v = w + \lambda y \in V$, où $w \in W_y$,

$$h_y(v, v) = g_y(w, w) \geq 0.$$

L'égalité s'obtient si et seulement si $v = \lambda y$. Puis h_y est semi-définie positive sur V et définie positive sur W_y. F satisfaits :

$$F(y + v) \leq F(y) + F(v), y, v \in V. \tag{2.12}$$

L'égalité s'obtient si et seulement si $y = \lambda v$ pour un certain $\lambda \geq 0$.

Preuve : de (2.12) Fixons un vecteur $v \in V$ et supposons $y(t) := (1 - t)y + tv \neq 0$ et

$$\phi(t) := F(y(t)).$$

Supposons que $y(t) \neq 0$ pour tous $0 \leq t \leq 1$. Alors $\phi(t)$ est C^∞ sur $[0, 1]$.
Observons que :

$$\phi''(t) = \frac{1}{F(y(t))} h_{y(t))}(v - y, v - y) \geq 0.$$

Cela impliques :

$$2\phi(\tfrac{1}{2}) \leq \phi(0) + \phi(1).$$

Nommément, :
$F(y + v) \leq F(y) + F(v)$.
Supposons que $y(t_0) = 0$ pour un certain $0 < t_0 < 1$. Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer que $t_0 \geq \frac{1}{2}$. Alors $v = -\frac{1-t_0}{t_0} y$ et $y + v = \frac{2t_0-1}{t_0} y$. Puis :

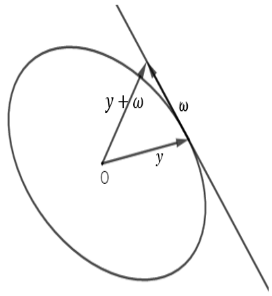
$$F(y + v) = \tfrac{2t_0-1}{t_0} F(y) = F(y) - \tfrac{2t_0-1}{t_0} F(y) \leq F(y) + F(v).$$

Ce qui prouves (2.12). ■

Par un argument similaire, on obtiens que :

$$F(y) \leq F(y + w), w \in W_y. \tag{2.13}$$

L'égalité s'obtient si et seulement si $w = 0$.



$S = F^{-1}(1)$

Lemme 2.1 : *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit (V, F) un espace de Minkowski. Pour tous $y \neq 0$,*

$$g_y(y, v) \leq F(y)F(v), \forall v \in V. \tag{2.14}$$

L'égalité s'obtient si et seulement si $v = \lambda y$ pour un certain $\lambda \geq 0$.

Preuve : Soit $v = \lambda y + w \in V$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in W_y$. Observons que :

$$g_y(y, v) = \lambda g_y(y, y) = \lambda F^2(y). \tag{2.15}$$

Si $\lambda \leq 0$, alors (2.15) impliques (2.14), et l'égalité dans (2.14) s'obtient si et seulement si $\lambda = 0$ et $v = 0$. Supposons que $\lambda > 0$. Alors (2.13) impliques :

$$g_y(y, v) = \lambda F(y)F(y) \leq \lambda F(y + \tfrac{1}{\lambda}w)F(y) = F(v)F(y).$$

L'égalité s'obtient si et seulement si $w = 0$, c'est-à-dire, $v = \lambda y$ pour un certain $\lambda \geq 0$. ■

Le lemme (2.1) a l'application suivante.

Lemme 2.2 : *Soit (V, F) un espace de Minkowski. Supposons que $y, v \in V\backslash\{0\}$ satisfaits l'équation suivante :*

$$g_y(y, w) = g_v(v, w), w \in V.$$

Alors $y = v$.

Preuve : En prenant $w = v$ produit :

$$F^2(v) = g_v(v, v) = g_y(y, v) \leq F(y)F(v).$$

Cela impliques :

$$F(v) \leq F(y).$$

En prenant $w = y$, on obtient :

$$F(y) \leq F(v).$$

Puis $F(y) = F(v)$ et

$$g_y(y, v) = F^2(v) = F(y)F(v).$$

Par le lemme (1.2.3), nous concluons que $y = v$. ■

2.3 Espaces de Finsler

Dans cette section, nous introduirons les espaces de Finsler. Les espaces de Finsler seront vu comme les espaces métriques réguliers.

2.4 Définitions et propriétés

Définition 2.4.1 : *Une fonction $F : TM = \cup_{x\in M} T_xM \longrightarrow [0, \infty[$ est appelé une métrique de Finsler si il a les propriétés suivantes :*

(F1) F est C^∞ sur $TM\backslash\{0\}$;

(F2) Pour chaque $x \in TM$, $F_x := F|_{T_xM}$ est une norme de Minkowski sur T_xM.

La paire (M, F) est appelé espace de Finsler. Une métrique de Finsler F est dite réversible si $F(-v) = F(v)$ pour tous $v \in TM$.

Soit F une métrique de Finsler sur une variété M. Pour une courbe continue lipschitzienne differentiable $c : [a, b] \longrightarrow M$, la fonction $t \longmapsto F(\dot{c}(t))$ est mesurable. Définissons :

$$L_F(c) := \int_a^b F(\dot{c}(t))dt.$$

L_F induits une fonction d_F sur $M \times M$ par :

$$d_F(p, q) := \inf_c L_F(c),$$

où l'infinimum est pris au dessus de toutes les courbes continues lipschitziennes $c : [0, 1] \longrightarrow M$ avec $c(0) = p$ et $c(1) = q$.
C'est facile de vérifier que :

En tout point $x \in M$, il existes un voisinage ouvert U_x de x, une constante $C \geq 1$ et un difféomorphisme $\varphi : U_x \longrightarrow \mathrm{B}^n \subset \mathrm{R}^n$ tel que :

$$C^{-1}|u-v| \leq d_F(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)) \leq C|u-v|, u, v \in \mathbb{B}^n. \tag{2.16}$$

Puis, $d_F(p,q) = 0$ si et seulement si $p = q$. Nous concluons que d_F est une métrique sur M et la topologie de variété coincides avec la topologie métrique.
La métrique induite d_F définit aussi une structure longueur l_{d_F} par (2.3). Il a été prouvé (cf BUMA) que :

$$L_F = L_{d_F}.$$

Cela impliques :

$$d_F(p,q) = \inf_c L_{d_F}(c).$$

où l'infinimum est pris au dessus des courbes lipschitziennes $c : [0,1] \longrightarrow M$ avec $c(0) = p$ et $c(1) = q$. Plus loin, la métrique d_F est relaté à F comme suit :

$$F(y) = \lim \sup_{t_1<t_2, \max|t_i| \longrightarrow 0} \frac{d\left(c(t_1), c(t_2)\right)}{t_2 - t_1}, y \in T_xM. \tag{2.17}$$

où $c : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow M$ est une courbe arbitraire C^1 avec $\dot{c}(0) = y$. Une classe importante des métriques de Finsler est celle des métriques riemanniennes.

Exemple 2.8 : (Métrique riemannienne) Soit $g = \{g_x\}_{x \in M}$, où g_x est une forme bilinéaire symétrique définie positive dans T_xM tel que les coordonnées locales (x^i),

$$g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\,|_x, \frac{\partial}{\partial x^j}\,|_x\right)$$

sont des fonctions C^∞. g est appelé métrique riemannienne. Soit :

$$F_x(y) = \sqrt{g_x(y,y)}, y \in T_xM. \tag{2.18}$$

Venant de la définition, nous avons vu que F_x est une norme euclidienne. La famille des normes euclidiennes $F = \{F_x\}_{x \in M}$ est une métrique de Finsler sur M. Une métrique de Finsler F est dite riemannienne si il peut être exprimer par (2.18) pour une certaine métrique riemannienne g. La métrique de Finsler est généralement appelé une métrique riemannienne dans ce livre.

Exemple 2.9 : (Métriques Randers) Soit $\alpha(y) = \sqrt{a_{ij}(x)y_iy^j}$ et $\beta(y) = b_i(x)y^i$ respectivement une métrique riemannienne et une 1-forme sur une variété M. Supposons que

$$||\beta||_x = \sup_{y \in T_x M} \frac{\beta(y)}{\alpha(y) - 1} < 1, x \in M.$$

Par l'exemple 2.1,

$$F(y) := \alpha(y) + \beta(y)$$

est une métrique de Finsler sur M. $F = \alpha + \beta$ métrique de Randers.

Exemple 2.10 : (Fonction psychométrique[DzCo]) Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. Une fonction psychométyrique sur Ω est une fonction $\psi : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

(a) Pour chaque $x \in \Omega$, la fonction $\psi(x, .)$ atteint le minimum absolu $\psi(x, x)$ en x ;

(b) Il existes une fonction continue croissante $\phi : [0, \varepsilon[\longrightarrow [0, \infty[$ avec $\phi(0) = 0$ telle que la limite suivante existes pour tous $x \in \Omega$ et $y \in T_x\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$F(x, y) = \lim_{s \longrightarrow 0^+} \frac{\phi[\psi(x, x + sy) - \psi(x, x)]}{s}.$$

Nous obtenons une fonction non négative $F = F(x, y)$ sur $T\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n$. Nous appelons F la fonction de Fechner et ϕ une transformation psychométrique associée avec ψ. Clairement, F satisfaits :

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \lambda > 0.$$

Une fonction psychométrique est dit Finslérien si la fonction de Fetchner associée est une métrique de Finsler. De par la définition, si l'on se donne une métrique de Finsler quelconque F sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $\mu > 0$, la fonction :

$$\psi(x, y) := [F(x, y)]^\mu$$

est une fonction psychométrique sur Ω.

Exemple 2.11 : Soit d une métrique de Funk sur un domaine strictement convexe Ω dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que Ω est fortement convexe. Par la définition, il existes une norme de Minkowski φ sur $\mathbb{R}^n$ et un point $p \in \Omega$, :

$$\Omega - \{p\} = \{y \in \mathbb{R}^n | \varphi(y) < 1\}.$$

La métrique de Funk d sur Ω est actuellement induites d'une métrique de Finsler. Pour trouver le candidat, nous prenons un point $x \in \Omega$ et $y \in T_x\Omega \backslash \{0\}$. Soit L_y le rayon issue de x dans la direction y et $z = L_y \cap \partial\Omega$. De (2.1), le candidat F satisfaits nécessairement :

$$\begin{aligned} F(y) &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{d(x, x+\varepsilon y)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} ln\left(\frac{|z-x|}{|z-x-\varepsilon y|}\right) \\ &= \frac{< y, z-x >}{|z-x|^2}, y \in T_x\Omega = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Clairement, l'équation ci-dessus est équivalente à l'équation suivante :

$$x + \frac{y}{F(y)} = z \in \partial\Omega. \tag{2.19}$$

Puis si d est induite par une métrique de Finsler, alors F est déterminée par (2.19). Nous pouvons aisément montrer que F déterminée par (2.19) est en fait une métrique de Finsler et cette métrique de Finsler induits la métrique de Funk d. Nous pouvons aussi appeler F la métrique de Funk sur Ω.

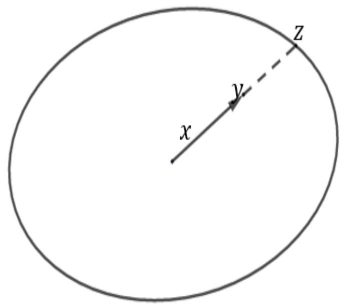
La métrique de Klein d_K sur Ω est définie par :

$$d_K(p,q) := \tfrac{1}{2}\left(d(p,q) + d(q,p)\right).$$

Nous pouvons montrer que d_K est induite par la métrique de Finsler suivante :

$$F_K(y) := \frac{1}{2}\left(F(-y) + F(y)\right), \tag{2.20}$$

où F est la métrique de Funk sur Ω. Nous appellerons aussi F_K la métrique de Klein sur Ω.



Prenons le cas spécial où $\Omega = \mathbb{B}$ est la boule unité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Un calcul direct donnes une formule explicite pour la métrique de Funk,
$F(y) := \dfrac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - < x, y >^2)} + < x, y >}{1 - |x|^2}, y \in T_x\mathbb{B}^n = R^n$, puis La métrique de Klein sur $\mathbb{B}^n$ est une métrique riemannienne.

Le lemme suivant est due à Okada [Ok].

Lemme 2.3 : *(Okada) La métrique de Funk $F : T\Omega = \Omega \times R^n \longrightarrow [0, \infty[$ satisfaits :*

$$F_{x^k} = F F_{y^k}. \tag{2.21}$$

Preuve : Par hypothèse, Ω est fortement convexe, c'est-à-dire, qu'il existes une norme de Minkowski φ sur $\mathbb{R}^n$ et un point $p \in \Omega$ tels que $\varphi(y-p) = 1, y \in \partial\Omega$. Puis :

$$\varphi\left(x + \frac{y}{F(y)} - p\right) = 1 \tag{2.22}$$

En différentiant (2.22) respectivement par rapport à x^j et y^j, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\delta^i_j - F^{-2}F_{x^j}y^i)\varphi_{z^i}(z) &= 0 \quad (2.23)\\ (\delta^i_j - F^{-1}F_{y^j}y^i)F^{-1}\varphi_{z^i}(z) &= 0 \quad (2.24)\end{aligned}$$

où $z := x + \frac{y}{F(y)} - p$. Il suit de (2.23) et (2.24) que :

$$(F_{x^j} - FF_{y^j})\varphi_{z^i}(z)y^i = 0. \tag{2.25}$$

Observons que $v = (v^i) \in T_z\mathbb{R}^n$ est tangent à $\partial\Omega$ si et seulement si

$$\varphi_{z^i}(z)v^i = 0.$$

Puis $\varphi_{z^i}(z)v^i \neq 0$. Il suit de (2.25) que

$$F_{x^j} - FF_{y^j} = 0.$$

Cela impliques (2.22). ∎

Chapitre Trois

Les m-espaces de Finsler

3.1 Espaces mesurables

Soit M une n variété C^∞. Une forme volume $d\mu$ sur M est une collection non dégénérée de n formes $d\mu_i = \sigma_i(x)dx^1....dx^n$ sur les voisinages coordonnées $\{\varphi_i, U_i\}$ telles que :

(V1) $M = \bigcup\limits_i U_i$;

(V2) Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, alors $d\mu_i = d\mu_j$ sur $U_i \cap U_j$,

Nommément, si $d\mu_i = \sigma_i(x)dx^1....dx^n$ et $d\mu_j = \sigma_j(x)du^1....du^n$, alors :

$$\sigma_i(x) = \left|det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)\right|\sigma_j(u).$$

Par $(V2)$, on a :

$$\int\limits_{U_i \cap U_j} f d\mu_j = \int\limits_{U_i \cap U_j} f d\mu_i, f \in C_c^\infty(U_i \cap U_j).$$

Prenons une partition de l'unité $\{\psi_i\}$ pour le recouvrement $\{U_i\}$, c'est un ensemble de fonctions C^∞ positives $\psi_i \in C_c^\infty(U_i \cap U_j)$ avec les propriétés suivantes :

(a) Pour chaque $x \in M$, on ne peut trouver qu'un nombre fini de U_i tels que $\psi_i(x) \neq 0$;

(b) $\sum\limits_i \psi_i(x) = 1$ pour tous $x \in M$.

Chaque forme volume $d\mu = \{d\mu_i\}$ définie une mesure μ sur M par :

$$\mu(f) := \sum_{i=1} \int\limits_{U_i} \psi f d\mu_i, f \in C_c^\infty(U_i \cap U_j).$$

Pour deux formes volumes quelconques $d\mu_1$ et $d\mu_2$ sur M, il existes une fonction positive C^∞ φ telle que :

$$d\mu_2 = \varphi d\mu_1.$$

Puis si nous fixons un volume $d\mu_0$ sur M, les formes volumes $d\mu$ deux à deux correspondent aux fonctions positives C^∞ φ par $d\mu = \varphi d\mu_0$.

Remarques

La forme volume la plus simple sur R^n est la forme volume euclidienne :

$$dV := dx^1...dx^n. \tag{3.1}$$

Le volume euclidien de la frontière de l'ensemble ouverte $\Omega \subset R^n$ est donné par :

$$Vol(\Omega) = \int_\Omega dV = \int_\Omega dx^1...dx^n.$$

Plus généralement, sur une variété riemannienne (M, F), où $F(y) = \sqrt{g_{ij}(x)y_i j y^j}$, la métrique riemannienne F détermines une forme volume canonique :

$$dV_g := \sqrt{det\left(g_{ij}(x)\right)}dx^1...dx^n. \tag{3.2}$$

Nous appellerons dV_g la forme volume riemannienne de F.

Remarques

Nous considérons une variété orientée M munie d'une forme volume $d\mu$. Nous pouvons voir $d\mu$ comme une n forme sur M. Soit X un champ de vecteurs sur M. Définissons une $n-1$ forme $X\rfloor d\mu$ sur M par :

$$X\rfloor d\mu(X_2, ..., X_n) := d\mu(X, X_2, ..., X_n).$$

Définissons :

$$d(X\rfloor d\mu) = div(X)d\mu. \tag{3.3}$$

Definition

Nous appellerons $div(X)$ la divergence de X. Clairement, $div(X)$ dépends seulement de la forme volume $d\mu$. Dans un système de coordonnées locales (x^i), exprimons $d\mu = \sigma(x)dx^1...dx^n$. Alors pour un champ de vecteurs $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ sur M,

$$div(X) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma X^i\right) = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^i}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}. \tag{3.4}$$

Propriétés

En appliquant le théorème de stokes à $\eta = X\rfloor d\mu$, nous obtenons :

$$\int_M div(X)d\mu = \int_M d\left(X\rfloor d\mu\right) = 0, \text{si } \partial M = \varnothing \tag{3.5}$$

$$\int_M div(X)d\mu = \int_M d\left(X\rfloor d\mu\right) = \int_{\partial M} X\rfloor d\mu, \text{si } \partial M \neq \varnothing.(cflivresd, électromagnétisme) \tag{3.6}$$

Volume sur un espace de Finsler(cf FINSLER GEOMETRY)

Il existe deux formes volumes canoniques sur un espace de Finsler. Ces deux métriques sont cependant réduites à la forme volume riemannienne quand la métrique de Finsler deviens riemannienne.

Supposons que (M, F) est un espace de Finsler de dimension n. Soit $\{b_i\}_{i=1}^n$ soit une base arbitraire pour T_xM et $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ la base duale pour $_x^*M$. L'ensemble

$$B_x^n := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n, F(y^i b_i) < 1\} \tag{3.7}$$

est attaché à un sous ensemble ouvert fortement convexe de $\mathbb{R}^n$. Définissons :

$$dV_F := \sigma_F(x)\theta^1 \wedge ... \wedge \theta^n,$$

où

$$\sigma_F(x) := \frac{Vol(\mathbb{B}^n)}{Vol(B_x^n)}. \tag{3.8}$$

Notation

La forme volume dV_F détermines une mesure régulière noté Vol_F.

Définition

dV_F est appelée forme volume de Busemann-Hausdorff.

Remarque

En général, le volume euclidien de B_x^n dans (3.8) ne peut pas être exprimé par F dans une forme explicite. Ci-dessous nous discuterons sur certains métriques spéciales pour lesquelles on peut calculer dV_F.

Exemple 3.1 : Soit (V, F) un espace de Minkowski de dimension n et

$$B := \{y \in V, F(y) < 1\}$$

désignes la boule unité de F. Soit (x^i) le système de coordonnées locales déterminé par la base $\{b_i\}_{i=1}^n$. Soit

$$B^n := \{(y^i) \in R^n, F(y^i bi) < 1\}.$$

Alors

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(\mathbb{B}^n)}{Vol(B_x^n)} = constant.$$

Nous obtenons

$$Vol_F(B) = \int_B dV_F = \int_{B^n} \sigma_F(x)dx^1...dx^n = Vol(\mathbb{B}^n).$$

Exemple 3.2 : Considérons la métrique de Randers $F = \alpha + \beta$ sur une variété M, où $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ est une métrique riemannienne et $\beta = b_i(x)y_i$ est une 1− satisfaisant :

$$||\beta||_x := \sup_{\alpha_x(y)=1} \beta(y) = \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < 1,$$

où $(a^{ij}(x)) = (a_{ij}(x))^{-1}$. Soit dV_F et dV_α les formes volumes de Hausdorff de F et α, respectivement. Par un simple calcul, nous obtenons :

$$dV_\alpha = \sqrt{det(a_{ij}(x))}dx^1....dx^n.$$

C'est juste la forme volume riemannienne de α définie en (3.2). Pour trouver dV_F, nous prenons une base orthonormée $\{b_i\}_{i=1}^n$ pour (T_xM, α_x) telle que $\beta_x(y) = ||\beta||_x y^1$, où $y = y^i b_i$. Alors le sous ensemble ouvert B_x^n dans (3.7) est un corps convexe dans $\mathbb{R}_n$ donné par :

$$(1 - ||\beta||_x^2)^2 \left(y^1 + \frac{||\beta||_x}{1 + ||\beta||_x^2} \right)^2 + (1 - ||\beta||_x^2) \sum_{\alpha=2}^n (y^\alpha)^2 < 1.$$

Le volume euclidien de B_x^n est donné par :

$$Vol(B_x^n) = \frac{Vol(\mathbb{B}^n)}{(1 - ||\beta||_x^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{3.9}$$

Puis

$$dV_F = (1 - ||\beta||_x^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha. \tag{3.10}$$

Ceci impliques :

$$Vol_F \leq Vol_\alpha. \tag{3.11}$$

Supposons que M est fermé. Alors :

$$Vol_F(M) = \int_M (1 - ||\beta||_x^2)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha \leq Vol_\alpha(M)$$

et l'égalité s'obtient si et seulement si $\beta = 0$.

Exemple 3.3 : Soit :

$$u := \sqrt{\sum_{\mu=1}^n ((u^\mu)^2} + \sum_{\mu=1}^n B_\mu u^\mu, u = (u^\mu) \in R^m,$$

avec $\sqrt{\sum_{\mu=1}^n (B_\mu)^2} < 1$. Considérons une immersion $\varphi = (\varphi^\mu) : M \longrightarrow (R^{m+1}, ||.||)$. φ induits une métrique de Finsler sur M,

$$F(y) := \sqrt{\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}(x)\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^j}(x)y^i y^j} + \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}(x)y^i, y = y^i \frac{\partial}{\partial x_i}\mid_x.$$

Soient $\alpha := \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ et $\beta := b_i(x)y^i$, où :

$$a_{ij}(x) := \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}(x)\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^j}(x), b_i(x) = \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^i}(x).$$

Alors la norme de β en utilisant celle de α est donné par :
$\beta = \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} \leq \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(B_\mu)^2} < 1$, où $(a^{ij})(x) = (a_{ij}(x))^{-1}$. Puis $F = \alpha + \beta$ est une métrique de Randers sur M.

Soit b avec $|b| < 1$ et :

$$||u||_b := \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n}(u^\mu)^2} + bu^{n+1}, u = (u^i) \in R^{n+1}.$$

Considérons un graphe dans l'espace de Randers $(\mathbb{R}^{n+1}, ||.||)$,

$$u^{n+1} = f(u), u = (u^i) \in \Omega \subset R^n.$$

L'immersion standard $\varphi : \Omega \longrightarrow R^{n+1}$ est donné par :

$$\varphi(x^1, ..., x_n) = (x^1, ..., x_n, f(x^1, ..., x_n)).$$

Nous obtenons :

$$a_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\frac{\partial f}{\partial x^j}(x), b_i = b\frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Ceci donnes :

$$det(a_{ij}) = 1 + |df|^2,$$

où

$$|df| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + ...\left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)^2}.$$

L'inverse de (a_{ij}) est donné par :

$$a^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{1+|df|^2}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\frac{\partial f}{\partial x^j}(x), b_i = b\frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

Puis donnes :

$$||\beta||^2 := b^2 \frac{|df|^2}{1+|df|^2}.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} dV_F &= \left(1 - b^2\frac{|df|^2}{1+|df|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} dV_\alpha \\ &= \left(1 - b^2\frac{|df|^2}{1+|df|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{1+|df|^2}dx^1...dx^n. \end{aligned}$$

Exemple 3.4 : Soit Ω un domaine fortement convexe de $\mathbb{R}^n$. La métrique de Funk est définie par :

$$z = x + \frac{y}{F(y)}, y \in T_x\Omega \approx \mathbb{R}^n. \tag{3.12}$$

où $z \in \partial\Omega$(confère exemple (3.4)). Notons que :

$$B_x^n := \{(y^i) \in R^n, F(y^i b_i) < 1\} = \bar{\Omega} - \{x\}.$$

Puis :

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(\mathbb{B})}{Vol(B_x^n)} = \frac{Vol(\mathbb{B})}{Vol(\Omega)} = constant. \tag{3.13}$$

Ceci impliques que le volume de Busemann-Hausdorff est constant :

$$Vol_F(\Omega) = \int_\Omega \sigma_F(x) dx^1 ... dx^n = Vol(\mathbb{B}^n). \tag{3.14}$$

C'est une autre forme volume important sur les espaces de Finsler. Soit (M, F) un espace de Finsler de dimension n. En un point $x \in M$, fixons une base $\{b_i\}_{i=1}^n$ pour T_xM et sa base duale $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ pour T_x^*M. Pour un vecteur $y = y^i b_i \in T_xM \backslash \{0\}$, posons :

$$g_{ij}(y) := g_y(b_i, b_j).$$

Chaque $g_{ij}(y)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Définissons :

$$\tilde{\sigma}_F := \frac{\int_{B_x^n} det(g_{ij}(y)) dy^1 ... dy^n}{Vol(\mathbb{B}^n)},$$

où B_x^n est défini dans (3.7). La n forme :

$$d\tilde{V}_F := \tilde{\sigma}_F(x) \theta^1 .... \theta^n \tag{3.15}$$

est bel et bien une forme volume sur M.

Soit :

$$\omega := g_{ij}(y) y_j dx^i.$$

ω est appelée la forme de Hilbert. Observons que :

$$d\omega = \frac{\partial g_j^k}{\partial x^i} y^k dx^i \wedge dx^j - g_{ij} dx^i \wedge dy^i.$$

La forme de Hilbert ω est une forme volume définie sur $TM\backslash\{0\}$ par :

$$dV := (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{n!} (d\omega)^n. \tag{3.16}$$

P. Dazord a parlé de $(d\omega)^n$ dans sa thèse Ph.D [Da1]. Il a défini plus loin le volume d'un espace de Finsler compact (M, F) par :

$$Vil(M) := \frac{1}{\omega_n} \int_{BM} dV, \tag{3.17}$$

où $\pi : BM \longrightarrow M$ désignes le fibré de la boule unité de M. Dazord est maintenant défini le volume en utilisant le fibré tangent de la sphère SM. Mais cette définition est essentielle comme celle du (3.17) due à l'homogénéité de F(cf. [Da2]).
Observons que pour une fonction f sur M,

$$\int_{BM} \pi^* f dV = \omega_n \int_M d\bar{V}_F.$$

Puis la forme volume dV sur BM donne naissance à la forme volume $d\bar{V}_F$ sur M.
R.D Holmes et A.C Thompson [Th] ont pris une approche différente pour étudier la géométrie de Minkowski et ont découvert cette forme volume spéciale $d\bar{V}_F$. Par conséquent, $d\bar{V}_F$ est appelé la forme volume de Holmes-Thompson dans la littérature [Al][AlFe].

3.2 Hyperplans dans un m-espace de Minkowski

Étant donné une forme volume sur une variété M d_μ, il n'existes pas de chemin canonique pour définir une forme volume sur les hypersurfaces en utilisant $d\mu$. Si M est aussi muni d'une métrique de Finsler F, alors F détermines un champ de vecteurs normal (local) le long de n'importe quel hypersurface. En utilisant le champ de vecteurs normal, on peut définir une forme volume sur des hypersurfaces en utilisant $d\mu$.

Soit $(M, F, d\mu)$ un m-espace de Finsler. Soit dV_F la forme volume de Busemann-Hausdorff de F. La forme volume $d\mu$ peut s'écrire :

$$d\mu = \varphi dV_F,$$

où φ est une fonction positive C^∞ sur M. Puis il suffit de définir la forme volume induite sur une hypersurface pour la forme volume dV_F de Busemann-Hausdorff. Puisque dVF en chaque point $x \in M$ est déterminée complètement par la norme de Minkowski F_x sur T_xM, nous pouvons d'abord étudier les espaces de Minkowski.
Considérons un espace de Minkowski (V, F). Étant donné un hyperplan $W \subset V$, nous

prétendons qu'il existes un vecteur unité $n \in V$ tel que :

$$W = \{v \in V | g_n(n, \omega) = 0\}. \tag{3.18}$$

Pour prouver cette prétention, prenons un vecteur $v \notin W$ et soit :

$$\phi(\omega) := F(v - \omega), \omega \in W.$$

Clairement, ϕ atteint son minimum $m := min\phi$ en un unique point $\omega_0 \in W$. Soit :

$$n := \frac{v-\omega_0}{m}.$$

Si $\bar{v} = \lambda v + \bar{\omega}, \lambda 0$, est un autre vecteur du même côté de W, alors $\bar{\phi} := F(\bar{v} - \omega)$ atteint ce minimum $\bar{m} = \lambda m$ en $\bar{w}_0 = \bar{\omega} - \lambda\omega_0$. Cela impliques que :

$$\frac{\bar{v}-\bar{\Omega}_0}{m} = \frac{(\lambda v + \bar{\omega}) - (\bar{\omega} - \lambda\omega_0)}{\lambda m} = \frac{v-\omega_0}{m}.$$

Puis n est indépendant des vecteurs du même côté de W que v. Soit n un vecteur normal à W.

Fixons un vecteur $\omega \in W$ et soit :

$f(t) := \frac{1}{2m^2}\phi^2(\omega_0 + tm\omega) = \frac{1}{2m^2}F^2(v - \omega_0 - tm\omega) = \frac{1}{2^2}F^2(n + t\omega)$.

En différentiant f on a :

$$0 = f'(0) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[F^2(n + t\omega)\right]|_{s=0} = g_n(n, \omega).$$

Cela impliques (3.18).

Pour n'importe quel plan quelconque $W \subset V$, il existe exactement deux vecteurs normaux $n, n' \in V$ à W. En général, n et n' ne sont pas parallèles à moins que F est réversible.

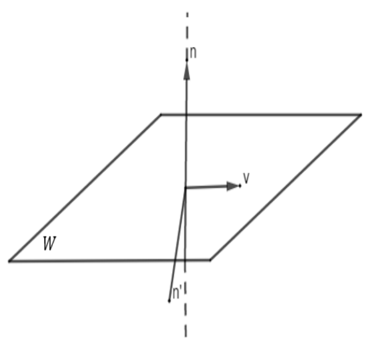


FIGURE 3.1

Dans ce qui suit, nous introduirons une fonction importante sur un espace de Minkowski. Cette fonction serait utilisé pour définir la forme volume sur les hyperplans dans un espace de Minkowski.

Soit (V, F) un espace de Minkowski. Pour un vecteur $y \in V \backslash \{0\}$, nous obtenons un hyperplan :

$$W_y := \{\omega \in V, |g_y(y, v) = 0\}.$$

Prenons une base $\{b_i\}_{i=2}^n$ pour W_y et $b_1 = y$ tel que $\{b_i\}_{i=1}^n$ est une base de V. Soit :

$$B^n := \{(y^i) \in \mathbb{R}^n, F\left(\sum_{i=1}^n y^i b_i\right) < 1\},$$

$$B_y^{n-1} := \{(y^\alpha) \in R^{n-1}, F\left(\sum_{\alpha=2}^n y^\alpha b_\alpha\right) < 1\}.$$

B^n et B_y^{n-1} dépendent du choix de $\{b_a\}_{a=2}^n$. Définissons :

$$\zeta(y) := \frac{Vol(\mathbb{B}^n)}{Vol(\mathbb{B}^n - 1)} \frac{Vol(B_y^{n-1})}{F(y) Vol(B^n)}. \tag{3.19}$$

Remarque

La fonction ζ est indépendante du choix de $\{b_i\}_{i=2}^n$. Également, ζ a la propriété d'homogénéité suivante :

$$\zeta(\lambda y) = \zeta(y), \lambda > 0, y \neq 0.$$

Notons que si F est euclidien, alors $\zeta(y) = 1$. Une question naturelle est : F est-il euclidien ou pas quand $\zeta = 1$. .

Lemme 3.1 : *Soit (V, F) un espace de Minkowski de dimension n. Soient $c(n) := \dfrac{Vol(\mathbb{B}^n)}{Vol(\mathbb{B}^n - 1)}$ et $\lambda := \sup\limits_{y \in V \backslash \{0\}} \frac{F(y)}{F(-y)}$. Alors :*

$$(1 + \lambda)^{-n} c_n \leq \zeta(y) \leq 2^n c(n), y \neq 0. \tag{3.20}$$

En particulier, si F est réversible $(\lambda = 1)$, alors :

$$2^{-n} c_n \leq \zeta(y) \leq 2^n c(n).(cf Zhongmin Shen) \tag{3.21}$$

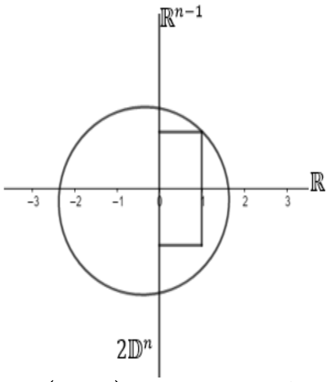
Preuve : Fixons un vecteur unité $y = y^i b_i \in V$. Pour tout $t \in [0, 1]$ et $(v^\alpha \in B_y^{n-1}$,

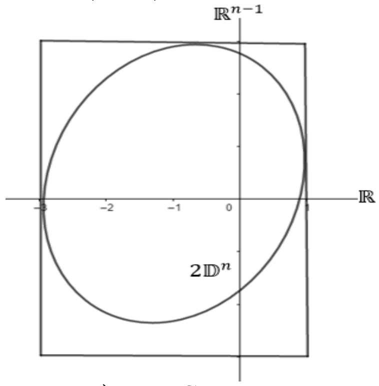
$$F(ty + v^a b_a \leq t F(y) + F(v^a b_a) \leq 2.$$

Puis $[0, 1] \times B_y^{n-1} \subset 2B^n$ et

$$Vol(B_y^{n-1}) \leq 2 Vol(B^n).$$

Cela donnes le membre droit de l'inégalité (3.20).





Soit $(t, v^\alpha) \in B^n$, c'est-à-dire, $F(ty + v^a b_a) \leq 1$. Si $t > 0$, alors il suit de (2.13) que :

$$t = F(ty) < F(ty + v^a b_a) \leq 1,$$
$$F(v^a b_a) \leq F(ty + v^a b_a) + F(-ty) \leq 1 + \lambda.$$

Si $t < 0$, alors il suit de (2.13) encore que :

$$-t = F(-ty) < F(-ty - v^a b_a) + F(-ty) \leq 1 - t \leq 1 + \lambda.$$

Puis :

$$B^n \subset [-\lambda, 1] \times (1 + \lambda) B_y^{n-1}.$$

Puis donne le membre de gauche de l'inégalité de (3.20). ■

Hypersurface dans un m espace de Finsler

Maintenant nous allons définir le forme volume sur les hypersurfaces dans un m espace de Finsler.

Soit $(M, F, d\mu)$ un m-espace de Finsler et $i : N \longrightarrow M$ un mono.

Notre but est de trouver un volume dA_F sur les hypersurfaces tel que l'égalité suivante soit obtenue,

$$A_F(S(x,\rho)) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{Vol_F(B(x, \rho + \varepsilon) - Vol_F(B(x,\rho)}{\varepsilon}. \tag{3.22}$$

Cependant, (3.22) ne permet pas d'obtenir la forme volume de Busemann-Hausdorff $dV_{\bar{F}}$ de la métrique de Finsler induite $\bar{F} := i^* F$ sur N.

Rappelons que pour la norme de Minkowski $F_x = F\mid_{T_x M}$, il existes une importante quantité $\zeta_x : T_x M \backslash \{0\} \longrightarrow [0, +\infty[$ (cf. (3.19)). Puis nous obtenons une fonction scalaire $\zeta = \{\zeta_x\}_{x \in M}$ sur $TM \backslash \{0\}$. Avec cette fonction scalaire, nous pouvons définir la forme volume désirée sur les hypersurfaces.

Définition 3.2.1 : *Soit N une hypersurface dans un espace de Finsler (M, F) et n un champ de vecteur normal le long de N. Soit $dV_{\bar{F}}$ la forme volume de Finsler de la métrique de Finsler induite $\bar{F}$ sur N. On obtient :*

$$dA_F := \zeta(n) dV_{\bar{F}}, \tag{3.23}$$

où ζ est défini dans (3.19).

Definition

dA_F est appelé la forme volume induite de dV_F relativement à n.

Pour une forme volume arbitraire $d\mu$ sur M, écrivons $d\mu := \varphi dV_F$, où $\varphi \in C^\infty(M)$ et définissons :

$$d\nu := \varphi dA_F.$$

Definition

$d\nu$ est appelé la forme volume induite par $d\mu$ relativement à n.

Remarques

De la définition de dA_F, on voit que dA_F dépends du choix des vecteurs normaux à moins que F soit réversible. Par le lemme (3.1)*, nous savons que si F est réversible, alors ζ est bornée par deux nombres universels constants $c_1(n)$ et $c_2(n)$. Puis : **

$$c_1(n) dV_{\bar{F}} \leq dA_F \leq c_2(n) dV \bar{F}.$$

C'est un autre chemin pour exprimer dA_F sur une hypersurface $i : N \longrightarrow M$. Fixons un champ de vecteurs normal n le long de N. Pour un point $x \in N \subset M$, soit $\{b_i\}_{i=1}^n$ une base de T_xM telle que $b_1 = n_x$ et $\{b_a\}_{a=2}^n$ une base de T_xN. Posons,

$$dV_F = \sigma_F(x) \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n,$$

où σ_F est donné dans (3.8)*. Soit $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ la base duale de T_x^*M et $\{\bar{\theta}^a\}_{a=1}^n$ le pull-back de $\{\theta^a\}_{a=1}^n$ sur N. Exprimons :*

$$dV_{\bar{F}} = \sigma_{\bar{F}}(x) \bar{\theta}^2 \wedge \dots \wedge \bar{\theta}^n.$$

De la définitions de $\zeta(n_x)$, on a :

$$\sigma_F(x) = \zeta(n_x) \sigma_{\bar{F}}(x)$$

et

$$dA_F = \sigma_F(x)\bar{\theta}^2 \wedge ... \wedge \bar{\theta}^n. \quad (3.24)$$

Soit X un champ de vecteur sur M. Écrivons :

$$X\mid_N = g_n(n, X)n + \bar{X},$$

où $\bar{X} \in TN$. Alors pour tout ensemble de vecteurs tangents $X_2, ..., X_n \in TN$

$$X\rfloor d\mu(X_2, ..., X_n) = g_n(n, X)\dagger\mu(n, X_2, ..., X_n). \quad (3.25)$$

En chaque point $x \in N$, soit $\{b_i\}_{i=1}^n$ et $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ comme ci-dessus. Posons :

$$d\mu = \sigma(x)\theta^1 \wedge ... \wedge \theta^n.$$

Par (3.24)*, on obtient la forme volume induite ν sur N,*

$$d\nu = \sigma(x)\bar{\theta}^2 \wedge ... \wedge \bar{\theta}^n.$$

Puis :

$$d\mu(n, X_2, ..., X_n) = d\nu(X_2, ..., X_n).$$

Il suit de (3.25) *que :*

$$i^*(X\rfloor d\mu) = g_n(n, X)d\nu. \quad (3.26)$$

Supposons que M est une variété compacte orientée telle que ∂M soit lisse. Par le théorème e Stokes, pour n'importe quelle $(n-1)$ forme η sur M,

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} i^*\eta.$$

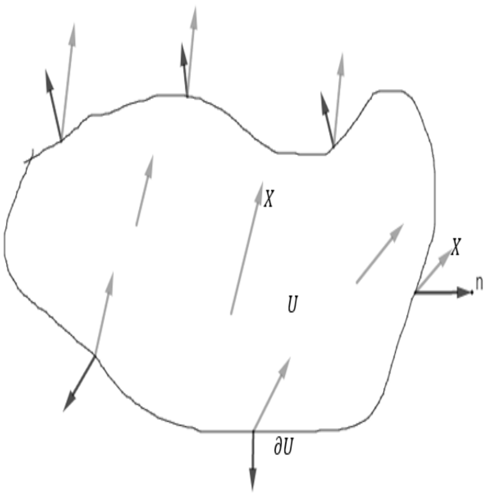
En appliquant le théorème de Stokes à $\eta = X\rfloor d\mu$, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 : *Soit $(M, F, d\mu)$ un m-espace de Finsler orienté et compact et n le vecteur normal extérieur à ∂M. Alors pour tout champ de vecteurs X sur M,*

$$\int_M div(X)d\mu = \int_{\partial M} g_n(n, X)d\nu. \quad (3.27)$$

En particulier, si M est une variété orientée et fermée, alors :

$\int_M div(X)d\mu = 0$.*(cf FINSLER GEOMETRY) Maison d'édition :World scientific 2011*


X
X
n
U
∂U

Chapitre Quatre

IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUES

Le présent mémoire est un travail de recherche qui nous prépare à l'exercice du métier d'enseignant du secondaire. Ce mémoire nous a offert l'occasion de faire nos premiers pas d'autonomie en terme d'investigations scientifiques et littéraires et de déploiements de nos aptitudes dans la perception, la compréhension et la construction d'un raisonnement logique. Nous allons tout au long de cette partie faire ressortir brièvement les apports de notre travail pour l'exercice de notre futur métier d'enseignant. Nous insisterons tour à tour sur les apports en didactique, les apports en terme de connaissances mathématiques et enfin l'initiation aux nouvelles technologies de l'information et de la communication.

4.1 Apport en didactique

L'une de nos tâches principales en tant qu'enseignant est la préparation de nos cours et pendant celle-ci, nous utilisons souvent des livres et autres manuels dans lesquels le savoir n'est pas toujours présenter de façon à être directement accessible aux apprenants. Notre travail consiste à faire une transposition didactique de ce savoir afin de le rendre accessible aux apprenants pour que ces derniers soient aptes à mobiliser et à construire leurs propres connaissances. Ainsi, la didactique nous permet de développer chez les apprenants les capacités telles que :

— *l'importance et la pertinence d'un nouveau savoir.*

— *l'aptitude à construire et à intégrer les nouvelles connaissances.*

— *la qualité de la présentation selon les normes d'un travail scientifique*

4.2 Apport en connaissances mathématiques

En terme d'apport en connaissances mathématiques, ce mémoire nous permet de faire un fort rapprochement avec les notions du calcul intégral ,des distances et du calcul d'aires dispensés dans certaines classes de terminales.

Limites sur le calcul intégral *: Elle nous a permis d'avoir une vision plus large sur la notion du calcul intégral enseigné en classe de terminale à savoir : comment déterminer l'intégrale d'une fonction continue sur un domaine mais n'admettant pas de primitive connue sur ce domaine ?*

Au primaire nous avons vu comment calculer l'aire de certaines figures particulières (carré, rectangle, trapèze ...) ensuite au secondaire on montre comment calculer l'aire d'un domaine délimité par plusieurs fonctions. Mieux encore, on montre comment faire l'approximation de cette aire lorsque le domaine peut être approximativement subdivisé en un nombre fini de rectangle de même largeur (Méthode des rectangles) ou par un nombre fini de trapèze de même hauteur (Méthodes des trapèzes). Dans le cas oú les deux méthodes précédentes ne sont pas applicables, comment y procéder ? Nos études menées dans ce mémoire nous permettent d'apporter des solutions à cette question. Ainsi, les connaissances mentionnées dans ce mémoire nous outilleront d'avantage pour mieux dispenser certains enseignements au lycée car ayant une vision plus large et une connaissance plus approfondies de la notion à enseigner.

4.3 Initiation aux nouvelles technologies de l'information et de la communication

Le présent travail a été rédigé à l'aide du logiciel de saisie LaTeX qui est approprié aux saisies mathématiques. Les outils technologiques tels que le vidéo-projecteur, les logiciels (LaTeX, Word,...), internet et le logiciel R ont été d'un grand apport pour la rédaction de ce mémoire. Ces outils nous seront utiles dans la mesure oú nous devons nous servir de cela et en particulier de l'Internet pour compléter le déficit ou l'insuffisance des informations contenus dans les manuels scolaires et du LaTeX pour la saisie de nos cours et de la confection de nos fascicules ou livres et également de nos épreuves.

♠ Conclusion et perspectives ♠

Au terme de notre étude, l'on peut dire que notre étude sur la géometrie sur une variété de finsler nous a permis d'apprehender comment calculer le volume de certains domaines en dimension n sur un espace de finsler (par exemple domaine convexe) en utilisant les espaces de finsler,et plus précisement la métrique finslerienne et riemannienne, ainsi que l'utilisation de l'opérateur divergence d'un champ de vecteurs pour construire des formes volumes de finsler relativement à une métrique induite sur une variété M et d'autre part cet étude nous a également permis de comprendre qu'on peut définir des formes volumes sur des hypersurfaces en utilisant un champ de vecteur normal et la forme volume $d\mu$. Cependant, nous remarquons que le calcul des formes volumes utilise des métriques spéciales à l'instar de la métrique de finsler et la métrique riemannienne, mais alors comment calculer les formes volumes à partir d,une métrique quelconque ?

♠ Bibliographie ♠

[1] *Alessandra Frabetti*(2010) *:Géométrie différentielle appliquée à la physique cours* $M_2.Lyon1$.

[2] *D.Bao,S.Chern,Z.Shen*(2000) *:An Introduction to riemann-finsler Géometry.Springer-Verlag NEw York.*

[3] *Ratiba DJELID*(2011) *:Déformations conformes des variétés de Finsler-Ehresmann.Thèse de Doctorat ph.D,Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.*

[4] *Shaoqiang Deng :Homogeneous Finsler Spaces.*

[5] *Z.Shen*(2001) *:LECTURES ON FINSLER GEOMETRY. World Scientific.*

[6] *Xinyue Cheng and Zhongmin Shen* (2012) *:Finsler Geometry, An Approach via Randers Spaces.Springer-Verlag Berlin Heidelberg.*