

**FAMILLES DE CHAMPS DE  
VECTEURS SUR DES VARIÉTÉS  
DIFFÉRENTIELLES**

**Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de  
l'obtention du Diplôme de Professeur des Lycées  
d'Enseignement Secondaire Général de deuxième grade  
(DI.P.E.S II)  
de Mathématiques.**

**Par :**

**NGWEM II NICOLAS BERTRAND**

**Matricule : 12V0412**

**Sous la direction de :**

**Dr. MBA ALPHONSE**

**CHARGE DE COURS**

**Ecole Normale Supérieure**

**Année académique 2018-2019**

---

---

## ✠ Dédicace ✠

---

---

Je dédie ce travail,  
À  
Mr. MBA Alphonse

---

---

## ✠ Remerciements ✠

---

La rédaction d'un mémoire nécessite en plus de la motivation de l'auteur, le soutien et la collaboration de plusieurs personnes. C'est pourquoi je tiens à dire merci :

- À Dieu pour toutes les grâces qu'il m'accorde ;
- Au Dr. **MBA Alphonse** pour m'avoir accordé le privilège de diriger les travaux de ce mémoire. Il s'est toujours montré disponible à me transmettre ses connaissances en lien avec le thème de mon mémoire ;
- À mes professeurs de l'école Normale Supérieure de Yaoundé et de l'université de Yaoundé 1 pour la formation reçue ;
- À mes parents Mr **NGWEM Jean** et Mm **NGO NGWEM MARIE Thérèse**(paix à son âme) pour tous leurs multiples sacrifices pour mes études et l'éducation à fin de faire de moi un fils responsable ;
- À mon bienfaiteur **Père NDEBE Emmanuel** ;
- À mes frères et sœur : **NOLGA NGWEM Fils, NGO NGWEM Marie Sandrine, NGWEM Jean Junior** et **OUM Pacom David** qui me soutiennent sur tous les plans ;
- À mon beau-frère **Yves BISSECK** ;
- À toute ma grande famille pour le soutien moral, financier et matériel qu'elle m'a accordé en particulier tantine **Yvette NGO NGWEM** ;
- À tous mes amis en particulier **MASSOCK NYOBE ARTHUR, OMRAM NGIFFO Boris, NDAKAM SAMEN Dylane, Vanessa MEZATIO, NGANSO NUCHA Brenda, KAMLA Emmanuel, ABDOUHAYIMOU Deme, Mm KHIKISHY Mélanie, TCHIDJO MEGAPT-CHEU Yvan** • À mes camarade de promotion en particulier À **ZAPOUE Paulin, EHONE SAMBO Denis, KAMGA Romaric, ACHABA André, OMBODOU TCHALA Thierry** pour m'avoir appris à utiliser en Latex.

---

---

## ✠ Déclaration sur l'honneur ✠

---

---

**Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.**

**Signature du candidat**

**NGWEM II Nicolas Bertrand**

---

---

# ✠ Table des matières ✠

---

---

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Déclaration dur l'honneur</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 RAPPELS SUR LES COURBES ET SURFACES</b>	<b>2</b>
1.1 Courbes . . . . .	2
1.1.1 Courbes paramétrées : généralités . . . . .	2
1.1.2 Etude locale d'une courbe . . . . .	3
1.2 Surfaces . . . . .	5
1.2.1 Paramétrisation . . . . .	5
1.2.2 Etude locale . . . . .	6
<b>2 VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES</b>	<b>9</b>
2.1 Généralités . . . . .	9
2.1.1 Applications différentiables . . . . .	11
2.1.2 Sous-Variétés . . . . .	14
2.2 Fibré tangent . . . . .	16
2.2.1 Vecteurs tangents . . . . .	16
2.2.2 Espace tangent . . . . .	17

## Table des matières

---

2.3	Dérivations . . . . .	17
2.3.1	Différentielle d'une application . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Familles de champs de vecteurs</b>	<b>24</b>
3.1	Champs de vecteurs et équations différentielles . . . . .	24
3.1.1	Champs de vecteurs . . . . .	24
3.1.2	Équations différentielles . . . . .	26
3.2	Flots et groupes de difféomorphismes . . . . .	28
3.3	Familles de champs de vecteurs sur une variété . . . . .	32
3.4	Systèmes commandés . . . . .	32
3.5	Crochets et algèbre de Lie . . . . .	36
3.6	Orbite d'une famille de champs de vecteurs . . . . .	39
<b>4</b>	<b>IMPLICATION PÉDAGOGIQUE</b>	<b>42</b>
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

---

---

## ✠ Résumé ✠

---

---

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la géométrie différentielle. Il s'agit dans un premier temps de présenter quelques objets de la géométrie différentielle (courbes, surfaces, variétés différentiables, vecteurs et espaces tangents à une variété) nécessaires pour le développement du thème (**familles de champs de vecteurs sur une variété différentielle**) sur deux chapitres. Dans un second temps de présenter au chapitre 3 ce que c'est qu'une famille de champs de vecteurs sur une variété différentielle où l'on introduit une paramétrisation de cette famille par un système commandé pour étudier le groupe de difféomorphisme qu'elle engendre et la nature de son orbites.

**Mots-clés** :

Variétés, champ de vecteurs, système commandé, ensemble atteignable

---

---

## ✠ Abstract ✠

---

This work is part of the differential geometry. The first step is to present some basic notions of differential geometry (curves surfaces, differential varieties, vectors and spaces tangential to a variety) necessary for the development of the theme (vectorfield family on a differential variety) on two chapters. In a second step to present in chapter 3 what it is a family of vector fields on a differential variety where one introduces a parameterisation of this family by a system commissioned to study the Group of diffeomorphism it generates and the nature of its orbit.

**Keys words** :variety, vector field, controlled system, attainable set, orbit



---

---

## ✧ Introduction générale ✧

---

Jusqu'à maintenant nous avons vu les notions d'espace et de vecteur tangents en un point, qui correspondent aux mouvements infinitésimaux à partir d'une configuration donnée. En considérant toutes les configurations possibles, nous sommes maintenant en mesure de définir les mouvements sur toute la variété : Ces mouvements vont être introduits comme des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles. Du point de vue des espaces de configurations, cela signifie que l'on caractérise les mouvements par la donnée en tout point de la vitesse. L'outil principal sera ainsi la notion de champ de vecteur : il s'agit d'une application assignant à chaque point  $p$  de la variété un vecteur  $X_p$  de l'espace tangent. Toutefois on suppose que le système peut suivre un certain nombre de directions de l'espace tangent. Ces directions peuvent être vues comme les valeurs d'une famille de champs de vecteurs. Cependant quelle est la nature de l'orbite d'une famille de champs de vecteurs ?

# RAPPELS SUR LES COURBES ET SURFACES

---



---

## 1.1. Courbes

Dans ce cours, on se place dans un espace affine de dimension  $d$ . Un point  $M$  dans un espace de dimension  $d$  sera repéré par ses coordonnées  $(u_1, \dots, u_d)$  dans le repère orthonormé  $(0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ . Cet espace est naturellement identifié à  $\mathbb{R}^d$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $u=(u_1, \dots, u_d)$  et  $v=(v_1, \dots, v_d)$  est donnée par  $u \cdot v = \sum_{i=1}^d u_i v_i$ .

### 1.1.1. Courbes paramétrées : généralités

Intuitivement, une courbe dans un espace de dimension  $d$  est un objet qui peut être décrit par un point qui évolue au cours du temps. Autrement dit, il suffit d'un paramètre pour le décrire, le temps. On dit d'un tel objet qu'il est 1-dimensionnel. Le fait de décrire une courbe par un paramètre qui évolue revient à considérer une application  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Quand le paramètre  $t$  parcourt  $I$ ,  $\gamma(t)$  parcourt la courbe. Une telle application est une courbe paramétrée.

#### Définition des courbes paramétrées

##### Définition 1.1.1

On appelle courbe paramétrée de classe  $C^k$  une application de classe  $C^k$

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble  $C := \gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$  est appelé le support géométrique de  $\gamma$ . On dit que  $C$  est une courbe géométrique et que  $\gamma$  est une paramétrisation de  $C$ .

Exemple : Le support géométrique de la courbe paramétrée  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t), t)$  est une hélice.

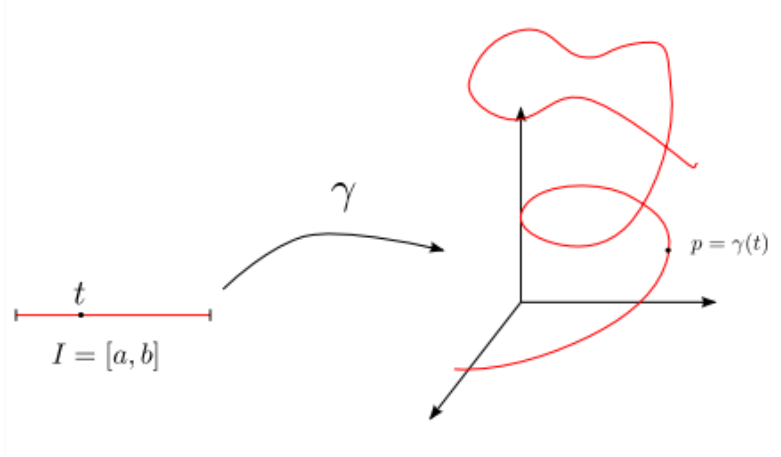


figure 1.1-courbe paramétrée

### Définition 1.1.2

Soient  $U$  et  $V$  deux domaines ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . Une application  $f : U \rightarrow V$  est un  $C^1$  difféomorphisme si :

- $f$  est une bijection de  $U$  dans  $V$
- $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $C^1$ .

Considérons une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  et un difféomorphisme  $\varphi : J \rightarrow I$  où  $J$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Alors  $\gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une courbe paramétrée qui a exactement le même support que  $\gamma$ .

On dit que  $\varphi$  est un changement de variable admissible et  $\gamma \circ \varphi$  est une autre paramétrisation de  $\gamma$ .

## 1.1.2. Etude locale d'une courbe

### Courbes régulières, espace tangent

Intuitivement, la tangente en un point  $\gamma(t_0)$  à une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la limite des droites passant par  $\gamma(t)$  et  $\gamma(t_0)$  quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Cela peut se formaliser de la manière suivante.

### Définition 1.1.3

On dit que  $\vec{v}_0$  est un vecteur tangent à la courbe  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$  si  $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \lambda(t)(\varepsilon(t) + \vec{v}_0)$  avec  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon(t) \rightarrow (0, 0)$  quand  $t \rightarrow t_0$ .

La droite passant par  $\gamma(t_0)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{v}_0$  est alors appelé la droite tangente à  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ .

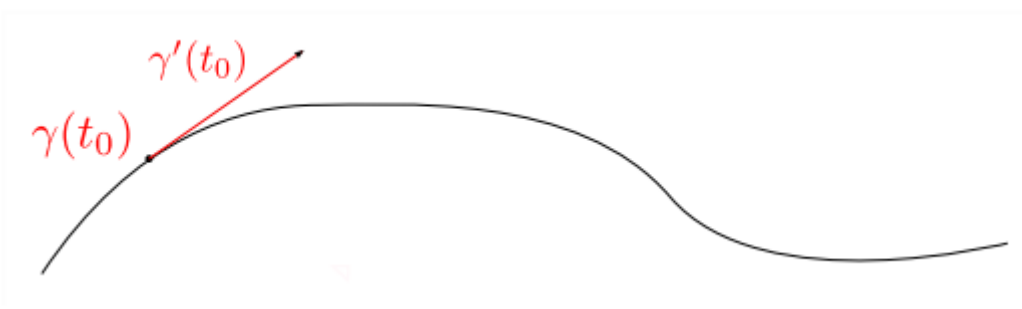
La proposition suivante indique qu'une dérivée non nulle de la paramétrisation donne un vecteur tangent.

### Proposition 1.1.1

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ . Si  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , alors  $\gamma'(t_0)$  est un vecteur tangent à la courbe  $\gamma$  en  $\gamma(t_0)$ .

**Preuve.** Comme  $\gamma$  est de classe  $C^1$ , on a :

$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t)$  avec  $\varepsilon(t) \rightarrow (0, 0)$  quand  $t \rightarrow 0$ . Ainsi  $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \gamma'(t_0)(t - t_0)\varepsilon(t)$ . Ce qui permet de conclure par définition du vecteur tangent.



**Figure 1.2-tangente à une courbe paramétrée** ■

### Définition 1.1.4

Une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  est dite régulière si  $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$

**Remarque 1.1.1.** 1) Si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  est régulière et  $\phi = \gamma \circ \varphi$  est une reparamétrisation de  $\gamma$ , alors  $\phi$  est aussi régulière.

En effet, comme  $\varphi : J \rightarrow I$  est un difféomorphisme, on a  $\forall t \in J, \phi'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) \neq 0$  car  $\varphi'(t) \neq 0$  puisque  $\varphi$  est un difféomorphisme.

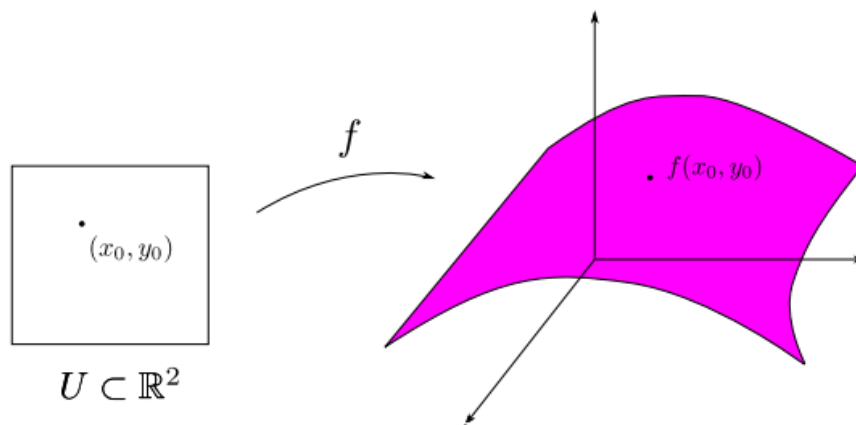
2) Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point. **La réciproque n'est pas vraie.** Considérons  $\gamma(t) = (t^2, t^4)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ . La courbe géométrique associée est la parabole d'équation  $y = x^2$  qui a un vecteur tangent en  $\gamma(0)$  pourtant,  $\gamma'(0)$ .

## 1.2. Surfaces

### 1.2.1. Paramétrisation

**Définition 1.2.1.** Une surface paramétrée de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) est une application de classe  $C^k$   $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  où  $U$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$

L'ensemble  $S = f(U) = \{f(x, y), (x, y) \in U\}$  est appelé le support géométrique de la surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$



**Figure 1.3**

Comme dans le cas des courbes, il est possible de reparamétriser les surfaces paramétrées par des difféomorphismes. Prenons une surface paramétrée  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  et  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  un  $C^1$ -difféomorphisme. Alors  $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que  $f$ . On dit que  $\varphi$  est un changement de variable admissible et que  $f \circ \varphi$  est une reparamétrisation de  $f$ .

**Définition 1.2.2.** Deux surfaces paramétrées  $(U, f)$  et  $(V, g)$  de classe  $C^k$  sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme  $\varphi : V \rightarrow U$  de classe  $C^k$  tel que  $g = f \circ \varphi$ . Une classe

d'équivalence est appelée une surface de classe  $C^k$ .

**Définition 1.2.3.** Une surface géométrique  $S$  définie par paramétrage  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite régulière si la différentielle de  $f$  en chaque point de  $U$  est de rang 2.

**Exemple :** Considérons le cône de révolution paramétré par l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) & \mapsto & (kz \cos(\theta), kz \sin(\theta), z) \end{array}$$

On s'attend, si la définition est bonne à ce que la surface soit régulière, sauf au sommet du cône. Et en effet, la matrice de la différentielle est :

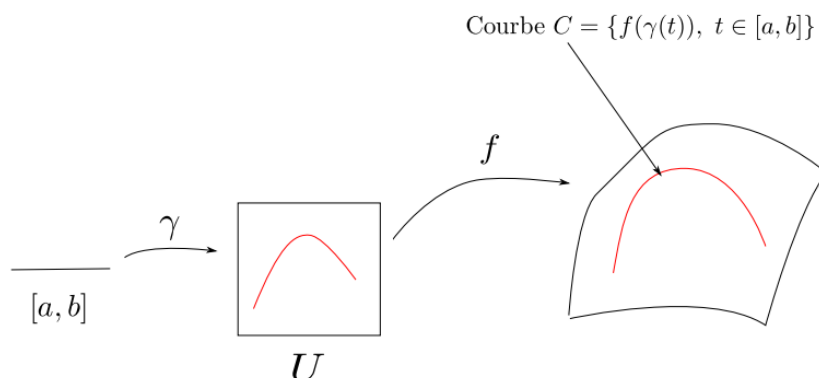
$$df_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -kz \sin(\theta) & k \cos(\theta) \\ kz \cos(\theta) & k \sin(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 2 tant que le premier vecteur colonne n'est pas nul, c'est à dire pour  $z \neq 0$ . Le point  $(0,0,0)$  sommet du cône est un point singulier.

**Remarque 1.2.1.** Comme on vient de le voir sur cet exemple, pour que  $f$  soit de rang 2 au point  $(u,v)$  de  $U$  il faut et il suffit que les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$  soient indépendants

## 1.2.2. Etude locale

Prenons une surface paramétrée  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ . Remarquons que si  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  est une courbe paramétrée plane dont le support géométrique est dans l'espace des paramètres  $U$ , alors l'application  $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support  $S = f(U)$

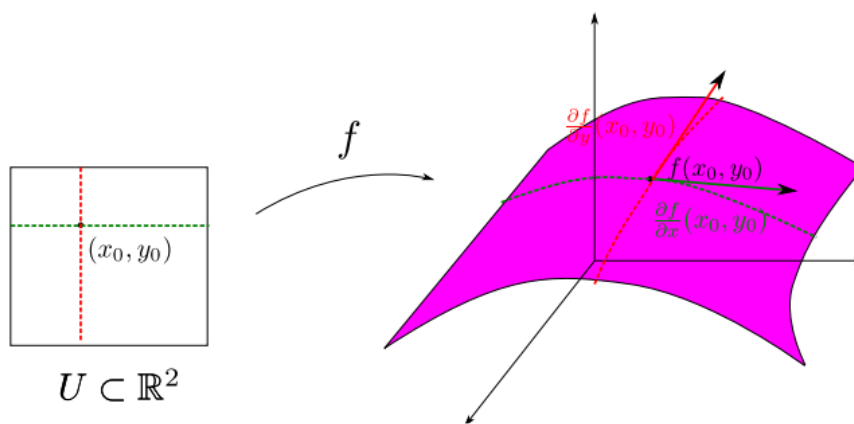


**Figure 1.4**

En particulier, prenons un point  $m_0 = f(x_0, y_0)$  de la surface et considérons les intervalles  $I_1$  et  $I_2$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2 \subset U$ . On peut considérer la courbe  $\gamma_{x_0}$  avec  $(x_0 \in I_1)$   $\gamma_{x_0} : y \in I_2 \mapsto f(x_0, y)$ . Clairement,  $\gamma_{x_0}$  est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans  $S = f(U)$ . Si cette courbe est régulière en  $y = y_0$  cela signifie que le vecteur  $\gamma'_{x_0}(y_0)$  est tangent à la courbe  $\gamma_{x_0}$  au point  $m_0 = \gamma_{x_0}(y_0)$ . De même, on peut considérer la courbe coordonnées  $\gamma_{y_0}$  (avec  $y_0 \in I_2$ ),  $\gamma_{y_0} : x \in I_1 \mapsto f(x, y_0)$ . Si cette courbe est régulière en  $x = x_0$ , cela signifie que le vecteur  $\gamma'_{y_0}(x_0)$  est tangent à la courbe  $\gamma_{y_0}$  au point  $m_0 = \gamma_{y_0}(x_0)$ . Or par définition des dérivées partielles, nous avons :  $\gamma'_{x_0}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\gamma'_{y_0}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ; ceci motive la définition d'espace tangent à une surface :

**Définition 1.2.4.** L'espace tangent à une surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  au point  $m_0 = f(x_0, y_0)$  est l'espace affine noté  $T_{m_0}S$  (avec  $S=f(U)$ ) passant par  $m_0$  et engendré par les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

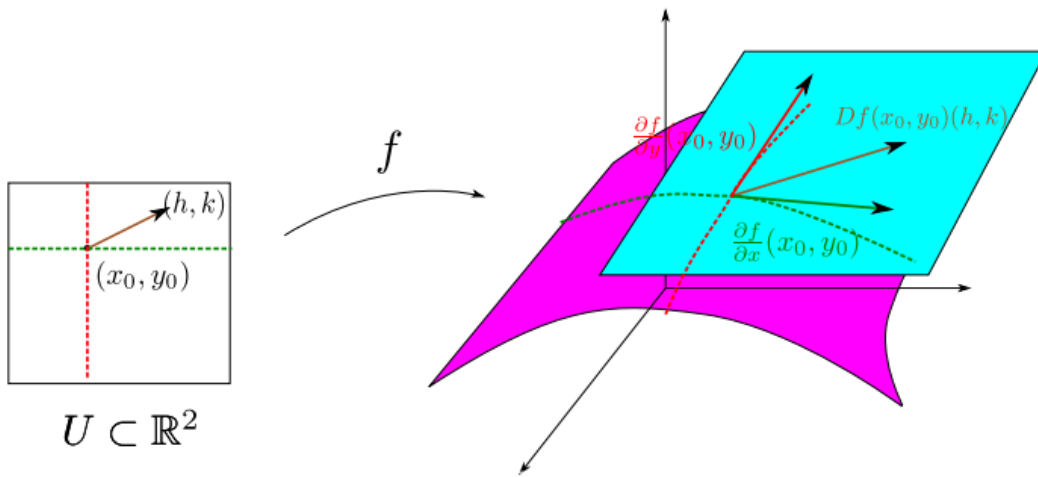
**Définition 1.2.5.** La surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite régulière au point  $m = f(x, y)$  si les deux vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  sont libres.



**Figure 1.5**

La surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite régulière si elle est régulière en tout point de  $U$ .

On peut montrer que les définitions 1.2.4 et 1.2.5 ne dépendent pas de la paramétrisation choisie. Au final, on peut retenir que si la surface est régulière, alors l'espace tangent  $T_mS$  défini en tout point  $m$  par l'application  $f$  est de dimension 2 : on l'appelle aussi plan tangent.





# VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

---



---

Ce chapitre est consacré à la généralisation des courbes et surfaces en dimension supérieure. considère un espace topologique  $M$ . On suppose que cet espace est à :

- à base dénombrable : La topologie de  $M$  a une base dénombrable d'ouverts.
- Séparé : Deux points distincts ont des voisinages disjoints

## 2.1. Généralités

**Définition 2.1.1.** Une carte de dimension  $n$  sur  $M$  est un couple  $(U, \varphi)$  où :

- $U$  est un ouvert de  $M$
- $\varphi$ , est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$

L'ouvert  $U$  est le domaine de la carte. Pour  $p \in U, \varphi(p) = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in \mathbb{R}^n$  :  $\varphi$  est ce que l'on appelle fonction coordonnée. Ainsi une carte permet de définir les coordonnées d'un point  $p \in U$ .

**Définition 2.1.2.** Deux cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sur  $M$  sont compatibles si  $U \cap V = \emptyset$  ou si  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est un difféomorphisme entre les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  que sont  $\psi(U \cap V)$  et  $\varphi(U \cap V)$

Remarques :

A priori les dimensions des cartes n'ont pas été fixées. On pourrait donc avoir  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  et  $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$  avec  $n \neq m$ . Cependant, si  $U \cap V \neq \emptyset$  le fait que  $\varphi \circ \psi^{-1}$  et  $\psi \circ \varphi^{-1}$  soient des difféomorphismes impose que les deux cartes soient de même dimension.

**Définition 2.1.3.** Un atlas de dimension  $n$  de  $M$  est un ensemble  $A = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de cartes cartes de dimension  $n$  telles que :

- Les ouverts  $U_\alpha$  recouvrent  $M$

- Toutes les cartes de  $A$  sont compatibles deux à deux

Un atlas permet donc de définir les coordonnées locales partout sur  $M$ . On dit que deux atlas sont équivalentes si toutes les cartes sont compatibles deux à deux.

**Définition 2.1.4.** Une structure différentiable de dimension  $n$  sur  $M$  est une classe d'équivalence d'atlas de dimension  $n$  de  $M$ .

En pratique on définit une structure différentiable en donnant un atlas représentant la classe.

**Définition 2.1.5.** Une variété différentiable de dimension  $n$  est un espace topologique  $M$  séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension  $n$

### Exemple de variétés différentiables

1.  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$  pour l'atlas à une seule carte  $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$
2. Tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  est une variété différentielle de dimension  $n$  : Tout isomorphisme  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit un atlas  $(E, \varphi)$ .
- 3 - La sphère est une variété de dimension 2 : On peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique. Les points S et N désignant respectivement le pôle sud et nord, on considère les ouverts  $U_N = S^2 \setminus \{N\}$  et  $U_S = S^2 \setminus \{S\}$  et les applications :

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \varphi_S : U_S &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right) \end{aligned}$$

$(U_N, \varphi_N)$  et  $(U_S, \varphi_S)$  forment un atlas de  $S^2$ .

### Opérations :

Tout sous-ensemble ouverts  $\Omega$  d'une variété différentiable  $M$  est lui même une variété différentiable. Sa structure est définie par la restriction à  $\Omega$  d'un atlas de  $M$  c'est-à-dire à la classe de l'atlas  $A_\Omega = \{U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega}\}$  où  $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  est un atlas de  $M$ . On dit parfois que  $\Omega$  est une sous-variété ouverte de  $M$ .

Exemple : L'ensemble des matrices inversibles  $GL_n(\mathbb{R})$  est une variété en tant que sous variété ouverte de  $M_n(\mathbb{R})$  ( qui est un espace vectoriel donc une variété).

---

**Lemme 2.1.1**

Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentiables respectivement de dimension  $n$  et  $k$  et d'atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  et  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ . Alors l'espace produit  $M \times N$  est une variété de dimension  $n+k$  dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme :  $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ , où  $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{n+k}$

**Preuve.** Voir [1] ■

- Le tore  $\pi^2 = S^1 \times S^1$  est une variété de même que le tore plat de dimension  $n$  :  $\pi^n = S^1 \times \dots \times S^1$   $n$  fois.
- Le cylindre  $\mathbb{R} \times S^1$  et le cylindre de dimension  $n+1$ ,  $\mathbb{R} \times S^n$  sont des variétés.

## 2.1.1. Applications différentiables

On connaît les notions de différentiabilité et de difféomorphisme entre espaces vectoriels normés. On va définir ces notions pour les applications entre variétés. Le principe est toujours le même. On dira qu'une application entre variétés est différentiable (ou est un difféomorphisme) si, dans une carte, elle l'est. Formalisons cette définition.

Soient  $M$  et  $N$  des variétés différentiables de dimension respectives  $n$  et  $k$  et  $F : M \rightarrow N$  une application. Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  contenant  $p$  et  $(V, \psi)$  une carte de  $N$  contenant  $F(p)$ , avec  $F(U) \subset V$ , on dit que  $F^{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$  est l'application  $F$  lue dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$ . Dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$  ou  $N = \mathbb{R}^k$ , l'application de carte correspondante est l'identité et on note :

$$g^\varphi = g^{\varphi id} = g \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k \text{ si } g : M \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ et si } h : \mathbb{R}^n \rightarrow N \text{ alors}$$
$$h^\varphi = h^{id\varphi} = \varphi \circ h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^k.$$

**Définition 2.1.6.** L'application  $F$  est différentiable (ou de classe  $C^\infty$ ) en  $p \in M$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  contenant  $p$  et une carte  $(V, \psi)$  de  $N$  contenant  $F(p)$ , avec  $F(U) \subset V$  telles que  $F^{\varphi\psi}$  est de classe  $C^\infty$ .

On dit que  $F$  est une application différentiable de  $M$  dans  $N$  si elle est différentiable en tout point  $p$  de  $M$ .

Cette définition est correcte car la notion de différentiabilité ne dépend pas des cartes choisies dans la variétés. En effet si on choisit deux systèmes de coordonnées locales différents  $\varphi_1, \varphi_2$  (resp  $\psi_1, \psi_2$ ) sur  $M$  (resp  $N$ ) on a :  $\psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ (\psi_1 \circ F \circ \psi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  et les applications  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$  et  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  sont de classe  $C^\infty$ .

**Définition 2.1.7.** Une application  $F : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme de  $M$  sur  $N$  si  $F$  est une bijection et si  $F$  et  $F^{-1}$  sont différentiables. On a alors nécessairement  $\dim M = \dim N$ .

### 2.1.1.1. Rang d'une application

Rappel : Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application dérivable en  $x \in \mathbb{R}^n$ , le rang de  $f$  en  $x$  est définie comme le rang de l'application linéaire  $Df(x)$  (c'est à dire  $\dim Df(x)$ ) ou encore  $n - \dim \ker Df(x)$ .

Soient  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable et  $p \in M$ .

#### Proposition 2.1.1

Le rang de  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  est en  $\varphi(p)$  ne dépend pas des cartes  $(U, \varphi)$  de  $M$  et  $(V, \psi)$  de  $N$  telles que  $P \in U$  et  $F(p) \in V$ . Cette quantité est appelée le rang de  $F$  en  $p$  et est notée  $rg_p F$

**Preuve.** Soient  $(U', \varphi')$  et  $(V', \psi')$  d'autres cartes sur l'intersection des domaines :

$$\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$$

$$\text{Et donc } D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(x) = D(\psi' \circ \psi^{-1})(x) \circ D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x) \circ D(\varphi \circ \varphi'^{-1})(x)$$

Comme  $D(\psi' \circ \psi^{-1})$  et  $D(\varphi \circ \varphi'^{-1})$  sont des isomorphismes, on obtient  $rg D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(p)) = rg D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ .

■

Lire en coordonnées locales, l'application  $F$  devient :

$F^{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^n) = (F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^k(x^1, \dots, x^n))$ . et le rang de  $F$  en  $p$  est celui de la matrice

---


$$\text{jacobienne : } \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Le rang permet de caractériser les difféomorphismes.

**Définition 2.1.8.** -  $F : M \rightarrow N$  est une immersion si  $F$  est différentiable et  $\text{rg}F = \dim M$ . En tout point de  $M$  (autrement dit, en coordonnées locales  $DF^{\varphi\psi}(x)$  est injective pour tout point  $x$ ) dans ce cas, on a nécessairement  $\dim M \leq \dim N$ .

-  $F : M \rightarrow N$  est une submersion si  $F$  est différentiable et  $\text{rg}F = \dim N$  en tout point de  $M$  (Autrement dit, en coordonnées locales  $DF^{\varphi\psi}(x)$  est surjective pour tout  $x$ ) on a en particulier  $\dim M \geq \dim N$ .

Une immersion n'est pas forcément injective.

Exemple :

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ , est une immersion mais pas injective puis que  $F(t+k) = F(t)$  pour tout entier  $k$ .

De même pour  $F(t) = (2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(2t - \pi))$ .

Considérons maintenant une immersion injective  $F : M \rightarrow N$ , c'est une bijection de  $M$  dans  $\tilde{M} = F(M)$ . Si on utilise  $F$  pour munir  $\tilde{M}$  d'une topologie et d'une structure différentiable,  $F$  devient un difféomorphisme entre les variétés  $M$  et  $\tilde{M}$ . Cependant la structure différentiable et la topologie sur  $\tilde{M}$  ne dépend que de  $M$  et de  $F$ . Il n'y a donc aucune raison en général pour que  $\tilde{M}$  soit un sous-espace de la variété  $N$  (pour la topologie induite).

exemple :

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (2\cos(2\cos(t + \frac{\pi}{2})), \sin(4\cos t + \pi))$  n'est pas un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $F(\mathbb{R})$  muni de la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$ .

On introduit donc une nouvelle définition qui permet d'éviter ces problèmes.

**Définition 2.1.9.** On dit que  $F : M \rightarrow N$  est un plongement si  $F$  est une immersion injective et un homéomorphisme de  $M$  dans  $F(M)$  pour la topologie induite.

Remarquons qu'une immersion injective est déjà une bijection de  $M$  dans  $F(M)$  et est continue, car différentiable. Pour qu'elle soit de plus un difféomorphisme, il suffit donc que  $F^{-1}$  soit

---

continue sur  $F(M)$ .

## 2.1.2. Sous-Variétés

### 2.1.2.1. Sous-Variétés de $\mathbb{R}^n$

**Définition 2.1.10.** Un sous-ensemble  $N \subset \mathbb{R}^n$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k \leq n$  si pour tout point  $x$  de  $N$ , il existe un ouvert  $U_x \subset \mathbb{R}^n$  contenant  $x$  et un difféomorphisme  $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^k$ .

Autrement dit une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble que l'on peut localement redresser en un sous-espace vectorielle de  $\mathbb{R}^k$ .

Il est clair qu'une sous variété de  $\mathbb{R}^n$  est une variété, les  $(U_x \cap N, \varphi|_{U_x \cap N})$  formant un atlas pour  $N$ . La structure différentiable et la topologie sont induites par celle de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Lemme 2.1.2

Soient  $U \subset \mathbb{R}^k$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un plongement. Alors  $N = f(U)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ .

Preuve. Voir [1] ■

#### Lemme 2.1.3

Soient  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une application différentiable et  $y \in F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-k}$ . Si  $F$  est une submersion sur  $N = F^{-1}(y)$ , alors  $N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ .

#### Exemples

- Soit  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ . La surface  $f^{-1}(1)$ , qui peut être soit un ellipsoïde, soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, est une sous-variété de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ .

- Soit  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Le cône de sommet l'origine  $f^{-1}(0)$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  car la différentielle de  $f$  à l'origine est nulle, En revanche le cône privé de l'origine est une sous-variété.

## 2.1.2.2. Sous-variétés d'une variétés

**Définition 2.1.11.** Une partie  $N$  d'une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k \leq n$  si, pour tout point  $q$  de  $N$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  contenant  $q$  telle qu  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$ .

La carte  $(U, \varphi)$  est dite adaptée à  $N$ . Elle vérifie :

$$\varphi(U \cap N) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) \mid x^{k+1} = x^{k+2} = \dots = x^n = 0\}$$

### Lemme 2.1.4

Soient  $M$  et  $N$  des variétés de dimension respectives  $n$  et  $k$  et  $F : N \rightarrow M$  un plongement. Alors  $W = F(N)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k$ .

**Exemple 2.1.1.** Considérons une courbe  $c(t) = (x^1, \dots, x^n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $\mathbb{C}^\infty$ , qui est un plongement sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ . L'ensemble de la courbe  $C = c(I)$  est alors une sous-variété.

### Lemme 2.1.5

Soient  $M$  et  $N$  des variétés de dimension respectives  $n$  et  $k$  et  $F : M \rightarrow N$  une submersion et  $y \in F(M)$ . Alors  $W = F^{-1}(y)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $n - k$ .

On aura besoin ultérieurement d'une notion moins forte que celle de sous-variété pour caractériser les sous-ensembles d'une variétés. On vient de voir dans le lemme 3.2.1 qu'une sous-variété peut être vue comme l'image d'un plongement. On introduit alors la définition suivante.

---

**Définition 2.1.12.** Un sous-ensemble  $W$  d'une variété  $M$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k \leq n$  s'il existe une immersion injective  $f : N \rightarrow M$ , où  $N$  est une variété de dimension  $k$ , dont l'image  $f(N)$  est égale à  $W$ .

Remarques :

- Une sous variété immergée peut aussi être définie comme une variété contenue dans  $M$  telle que l'inclusion  $i : W \rightarrow M$  est une immersion (Alors que c'est un plongement pour les vraies sous-variétés)
- Des ouverts suffisamment petits de  $W$  sont des vraies sous variétés de  $M$ . En revanche  $W$  lui-même n'en est pas forcément une, sa topologie étant en générale plus fine que celle induite par  $M$ .

## 2.2. Fibré tangent

### 2.2.1. Vecteurs tangents

Le but de ce chapitre est de formaliser dans une variété la notion de direction, de déplacement ou encore de mouvements possibles à partir d'un point donné.

Considérons une variété différentiable  $M$  et un point  $p$  de  $M$ . On s'intéresse aux courbes dans  $M$  qui sont différentiables et qui passent par  $p$ .

$$C : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$$

$$t \mapsto c(t) \quad , c(0) = p$$

**Définition 2.2.1.** Deux courbes  $c_1, c_2$  sont tangentes au point  $p$  si  $c_1(0) = c_2(0) = p$  et s'il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  telle que  $p \in U$  et  $\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0)$

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si  $(V, \psi)$  est une autre carte autour de  $p$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ c_2)(0) \end{aligned}$$



---

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par  $p$  :  $c_1 \sim c_2$  si elles sont tangentes en  $p$ .

**Définition 2.2.2.** Un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  est une classe d'équivalence des courbes tangentes en  $p$ .

### 2.2.2. Espace tangent

L'espace tangent à  $M$  en  $p$  noté  $T_pM$ , est l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ .

Exemple : Dans  $\mathbb{R}^n$ , il est clair que  $c_1$  et  $c_2$  sont tangentes au point  $p$  dès que  $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$ . Il y a donc un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes de courbes tangentes  $T_p\mathbb{R}^n$  et l'ensemble des directions  $\dot{c}(0)$ .

La définition de  $T_pM$  fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passant par  $p$ , qui n'est pas aisé à manipuler. Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition équivalente des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés

## 2.3. Dérivations

Considérons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe  $\mathbb{C}^\infty$  définies sur un ouvert de  $M$  contenant un voisinage de  $p$ , dans lequel on définit les fonctions qui sont égales sur un voisinage de  $p$ . On note  $\mathbb{C}^\infty(p)$  cet ensemble.

**Définition 2.3.1.** Une dérivation en  $p$  est une application linéaire  $D_p : \mathbb{C}^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement,  $D_p$  est une dérivation si pour tout  $\alpha, \beta$  et toute fonctions  $f, g \in \mathbb{C}^\infty(p)$

(i)  $D_p(\alpha f + \beta g) = \alpha D_p f + \beta D_p g$  (linéarité)

(ii)  $D_p(fg) = g(p)D_p f + f(p)D_p g$  (Leibniz)

L'ensemble  $D(p)$  des dérivées en  $p$  forme un espace vectoriel pour les opérations  $+$  et  $\cdot$ .

Remarque : Toute dérivation vérifie  $D_p \text{cte} = 0$  (car  $D_p 1 = D_p(1 \times 1) = 0$ )

Nous allons montrer que l'espace vectoriel tangent  $T_pM$  s'identifie à  $D(p)$ . Nous avons besoin pour cela du résultat suivant :

---

**Lemme 2.3.1** (Lemme d'Hadamard)

Soit  $(U, \varphi)$ ,  $\varphi(x) = (x^1, \dots, x^n)$  une carte de  $M$  centrée en  $p$ . Pour toute fonction  $g \in \mathbb{C}^\infty(p)$  il existe  $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathbb{C}^\infty(p)$  telle que :

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^n x^i \chi_i$$

**Preuve.** Quitte à réduire  $U$  on suppose  $\varphi(U)$  convexe (par exemple une boule). On travaille sur la fonction  $g$  lue dans la carte  $\varphi$  c'est à dire  $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$ . C'est une fonction de classe  $\mathbb{C}^\infty$  de  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

On peut calculer  $g$

varié en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} g^\varphi(x^1, \dots, x^n) - g^\varphi(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [g^\varphi(tx^1, \dots, tx^n)] dt \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(tx) dt \end{aligned}$$

Posons alors  $\chi_i^\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(tx) dt$ . On a obtenu

$$g^\varphi(x) = g^\varphi(0) + \sum_{i=1}^n x^i \chi_i^\varphi(x)$$

Comme  $g = g^\varphi \circ \varphi$  et  $\varphi(p) = 0$ , il suffit de composer la formule ci-dessus par  $\varphi$  pour achever la démonstration

■

**Lemme 2.3.2**

$\dim D(p) = \dim M$ .

**Remarque 2.3.1.** Ce lemme montre que sur  $\mathbb{R}$ , toute dérivation est une dérivée directionnelle.

En effet, à toute direction  $v \in \mathbb{R}^n$  est associée une dérivation  $g$  en  $x$ ,  $g \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x + tv) - g(x))$

qui est la dérivée directionnelle en  $x$  dans la direction  $v$ . L'ensemble des dérivées directionnelles en  $x$  est ainsi un sous-espace vectoriel de  $D(x)$  de dimension  $n$  et est donc égale à  $D(x)$ .

Faisons maintenant le lien entre les dérivations et les vecteurs tangents.

---

**Proposition 2.3.1**

Soient  $g \in C^\infty(p)$  et  $X_p$  un vecteur tangent en  $p$ . Alors la dérivée  $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$  est la même pour toutes les courbes  $c(s)$  passant par  $p$  et appartenant à la classe d'équivalence  $X_p$ .

**Preuve.** Choisissons des coordonnées locales  $\varphi$  et écrivons  $g \circ c$  comme la composée de  $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$  avec  $c^\varphi = g \circ c$ . On obtient alors  $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = D(g \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$ . La proposition résulte alors du fait que  $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$  ne dépend que de la classe d'équivalence  $X_p$ . On note par  $X_p g$  la valeur de cette dérivée. ■

**Proposition 2.3.2**

L'application  $g \mapsto X_p g$  est une dérivation.

**Preuve.** Il suffit de choisir les coordonnées locales  $\varphi$  et un représentant  $c(t)$  de la classe  $X_p$ . La linéarité et Leibniz se déduisent aisément de l'expression

$$X_p g = \frac{d}{dt}(g^\varphi \circ c^\varphi)(0)$$

■

**Théorème 2.3.1.** *L'ensemble des vecteurs tangents  $T_p M$  s'identifie à l'espace vectoriel  $D(p)$  de dimension  $n$  des dérivations en  $p$ .*

Cette identification permet de définir une structure vectorielle sur l'espace tangent  $T_p M$  (appelé également espace tangent). Notons que cette structure vectorielle coïncide avec celle que l'on peut obtenir à partir de la lecture dans une carte.

**Preuve.** Soit  $\psi : T_p M \rightarrow D(p)$  qui à un vecteur tangent  $X_p$  fait correspondre la dérivation définie par  $X_p g$ . Ainsi, si  $c$  est un représentant de la classe d'équivalence  $X_p = [c]_p$ ,  $\psi(X_p)$  est la dérivation  $X_p g = \frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$ . Montrons d'abord que  $\psi$  est bijective.

Soient  $X_p = [c]_p$  et  $X'_p = [c']_p$  des vecteurs de  $T_p M$  tels que  $\psi(X_p) = \psi(X'_p)$ , alors  $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ c')(0)$ . Fixons des coordonnées locales  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , on a pour chaque  $i$ ,  $\frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(x^i \circ c')(0)$  ce qui implique  $\dot{c}^\varphi(0) = \dot{c}'^\varphi(0)$  et donc  $X_p = X'_p$ .

Montrons que  $\psi$  est aussi surjective. Soit  $D_p$  une dérivation, on a vu que dans une carte donnée,  $D_p$  est déterminée par les réels  $d^i = D_p x^i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Considérons alors la courbe  $c(t) =$

$\varphi^{-1} \circ (td^1, \dots, td^n)$  et notons  $X_p$  son vecteur tangent en  $p$ . On a  $X_p x^i = \frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = d^i = D_p x^i$ .  
Ce qui montre que  $D_p = \psi(X_p)$  et donc que  $\psi$  est surjective.

Dans la suite nous identifions systématiquement  $T_p M$  et  $D(p)$ . Ainsi, le terme vecteur tangent désignera indifféremment la classe d'équivalence de courbes tangentes à la dérivation associé alors que l'espace  $T_p M$  sera employé à la place de  $D(p)$ . ■

### 2.3.1. Différentielle d'une application

Soit  $M$  et  $N$  des variétés différentiables de dimension respectives  $m$  et  $n$  et  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction sur  $N$ ,  $F$  permet de lui faire correspondre une fonction sur  $M$  notée  $F^*g := g \circ F$  appelé image réciproque de  $g$  par  $F$ . On définit ainsi l'application

$$F^* : C^\infty(F(p)) \longrightarrow C^\infty(p)$$

$$g \longmapsto F^*g = g \circ F.$$

#### Proposition 2.3.3

L'application  $dF_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$  définie par  $dF_p(X_p).g = X_p(F^*g), \forall g \in C^\infty(F(p))$  est linéaire. On l'appelle la différentielle de  $F$  en  $p$  ( ou encore application tangente à  $F$  en  $p$ )

**Remarque 2.3.2.** L'élément  $dF_p(X_p)$  de  $T_{F(p)} N$  est donc un vecteur tangent à  $N$ . On peut également le caractériser de la façon suivante : soit la courbe  $c(s) \subset M$  passant par  $p$  de vecteur tangent  $X_p$  en  $p$ . Alors  $dF_p(X_p)$  est le vecteur tangent en  $F(p)$  de la courbe  $F \circ c$  inclut dans  $N$ .

**Preuve.** La linéarité de  $dF_p$  découle immédiatement de celle de  $X_p$ . En effet :

$$\begin{aligned} dF_p(\lambda X_p + \mu Y_p)g &= (\lambda X_p + \mu Y_p)(F^*g) \\ &= \lambda X_p(F^*g) + \mu Y_p(F^*g) \\ &= \lambda dF_p(X_p)g + \mu dF_p(Y_p)g \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.3.2. (de décomposition)** Soient  $F : M \rightarrow N$  une application différentiable en  $p \in M$  et  $G : N \rightarrow W$  une application différentiable en  $F(p) \in N$ . Alors  $G \circ F$  est différentiable en  $p$  et  $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ .

---

**Corollaire 2.3.1.** Si  $F : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme, alors  $\forall p \in M$   $dF_p$  est un isomorphisme.

La réciproque à ce problème n'est vraie que localement. Elle nécessite d'introduire la notion de difféomorphisme local.

**Définition 2.3.1**

Une application  $F : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme local en  $p$  s'il existe un voisinage  $U \subset M$  de  $p$  et un voisinage  $V \subset N$  tels que l'application  $F|_U : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme.

On s'intéresse à l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tous les points de la variété.

**Définition 2.3.2**

L'ensemble  $TM = \{(p, X_p), p \in M, X_p \in T_p M\}$  est appelé le *fibré tangent* de la variété  $M$ .

Le fibré tangent est l'union des espaces tangents

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \text{ ou simplement } \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

mais il faut bien préciser que cette union est disjointe : on ne peut pas additionner des éléments  $X_p$  et  $Y_p$  appartenant à des espaces tangents différents.

**Définition 2.3.3**

On appelle *projection canonique* sur  $TM$  la projection :

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (p, X_p) &\longmapsto p \end{aligned}$$

et la fibre au-dessus de  $p$  la pré-image  $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M$  d'un point  $p$ .

**Théorème 2.3.3.** Le fibré tangent a une structure naturelle de variété différentiable de dimension  $2n$ .

---

**Preuve.** Voir ATO13 ■

**Exemples 2.3.1.** – Le fibré tangent à  $\mathbb{R}^3$  admet une trivialisat on globale  $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  via l’identificat on canonique  $T_x\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$

– Le fibré tangent au cercle  $S^1$  admet une trivialisat on globale car il est difféomorphe au cylindre :  $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ . En revanche le fibré tangent  $TS^2$  n’admet pas de trivialisat on globale.

Remarquons que l’application  $\Phi$  permet de définir des coordonnées locales sur  $TS$  en utilisant les coordonnées de l’espace tangent. En effet, si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $S$ , avec  $\varphi = (x^1, x^2)$ , le difféomorphisme  $\Phi$  sur  $\pi^{-1}(U)$  s’écrit :

$$\Phi(p, X_p) = (x^1, x^2, X^1, X^2) \in \mathbb{R}^4,$$

avec  $(x^1, x^2) = \varphi(p)$  et  $X^i = X_p \cdot x^i$ . Ce sont bien des coordonnées locales sur  $TM$ .

En s’appuyant sur la construction de  $\Phi$ , on peut prolonger une application entre deux surfaces en une application entre leurs fibré tangents.

#### Définition 2.3.4

Soit  $F : M \longrightarrow N$  une application différentiable. On définit le prolongement (ou différentielle) de  $F$  comme l’application différentiable :

$$\begin{aligned} dF : TM &\longrightarrow TN \\ (p, X_p) &\longmapsto (F(p), dF_p(X_p)) \end{aligned}$$

Il est clair que  $\Phi$  est le prolongement de l’application de carte  $\varphi$  :  $\Phi = d\varphi$ . Le prolongement vérifie de plus les propriétés suivantes

– Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

c’est-à-dire  $F \circ \pi = \pi \circ dF$ .

– Si  $F : M \longrightarrow W$  et  $G : W \longrightarrow N$  sont des applications différentiables, alors  $d(G \circ F) = dG \circ dF$ .

- 
- Si  $F : M \longrightarrow N$  est un difféomorphisme, alors le prolongement  $dF : TM \longrightarrow TN$  est un difféomorphisme également et  $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$ .

# Familles de champs de vecteurs

## 3.1. Champs de vecteurs et équations différentielles

### 3.1.1. Champs de vecteurs

Considérons une variété  $M$  de dimension  $n$ .

#### Définition 3.1.1

Un champ de vecteurs différentiable (ou champ de vecteurs) sur  $M$  est une application différentiable  $X : M \rightarrow TM$  qui, à un point  $p \in M$ , associe un couple formé de  $p$  et d'un vecteur tangent à  $M$  en  $p$  :  $X(p) = (p, X_p)$ . Autrement dit,  $\pi \circ X = id_M$ .

On notera  $\mathcal{X}(M)$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs différentiables sur  $M$ . De même qu'un vecteur tangent en  $p$  définit une dérivation sur l'ensemble des germes  $C^\infty(p)$ , un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble  $C^\infty(M)$  des fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . En effet l'application

$$C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$g \mapsto X \cdot g, \text{ t.q. } X \cdot g(p) = X_p \cdot g$$

définie par un champ de vecteurs  $X$  est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble  $\mathcal{X}(M)$  s'identifiera donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur  $C^\infty(M)$ .

**Exemple 3.1.1** (Champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ ). En utilisant la base naturelle de  $T_x\mathbb{R}^3$ , tout champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  s'écrit comme

$$X(x) = \left( x, \sum_{i=1}^3 X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right), \tag{3.1}$$



où  $X^i$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ . En particulier, pour  $i = 1, 2, 3$ , l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : x \mapsto \left( x, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right)$$

est un champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^3$ . Bien entendu, en tant que dérivation, ce champ est tout simplement la dérivée partielle par rapport à  $x^i$ , c'est-à-dire l'application  $g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}$ . On pourra donc réécrire le champ de vecteur  $X$  donné en (3.1) comme la dérivation

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3 \frac{\partial}{\partial x^3} : g \mapsto \sum_{i=1}^3 X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

Enfin un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  peut aussi être considéré comme une application différentiable de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en l'identifiant à  $x \mapsto (X^1(x), X^2(x), X^3(x))$ .

Considérons maintenant une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ , avec  $\varphi = (x^1, x^2, x^3)$ . Sur le domaine  $U$  de la carte, tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  s'écrit

$$X : p \in U \mapsto \left( p, \sum_{i=1}^3 X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), \quad (3.2)$$

où  $X^i = X \cdot x^i \in C^\infty(M)$ .

Définissons le champ  $X$  lu dans la carte  $\varphi$  comme le champ de vecteur sur  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$

$$X^\varphi(x) = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3(x) \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Considérons alors d'autres coordonnées locales  $\psi = (y^1, y^2, y^3)$ , dans lesquelles le champ  $X$  se lit

$$X^\psi(y) = Y^1(y) \frac{\partial}{\partial y^1} + Y^2(y) \frac{\partial}{\partial y^2} + Y^3(y) \frac{\partial}{\partial y^3}.$$

Alors, en notant  $y(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ , on obtient la formule suivante pour le changement de coordonnées :

$$Y^j(y) = X^\varphi \cdot y_j(\varphi \circ \psi^{-1})(y).$$

**Exemple 3.1.2.** Champ de gravité d'un objet de masse  $m$  : la variété est ici  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et le champ de vecteurs est

$$X(x) = \frac{m}{r} \left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

où  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ .

Comment trouver d'autres champs de vecteurs ? Une première possibilité est de restreindre les champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  aux sous-variétés de  $\mathbb{R}^3$ . Le résultat suivant indique sous quelle condition une telle restriction est possible.

### Lemme 3.1.1

Soient  $N$  une sous-variété de  $M$  et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  tel que,

$$\forall p \in N, X(p) \in T_p N.$$

Alors la restriction  $X_N$  de  $X$  à  $N$  est un champ de vecteurs sur  $N$ .

**Preuve.** Voir [1] ■

On peut enfin se demander s'il est possible de transporter un champ de vecteurs : étant donnée une application différentiable  $F : M \rightarrow N$  et un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ , existe-t-il un champ de vecteurs sur  $N$  dont les valeurs soient les images de celles de  $X$  par  $dF$  ?

En général la réponse est non (prendre par exemple  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \mathbb{R}$ ,  $F$  = la projection sur la première coordonnée et  $X(x) = (x^2, 0)$ ). Ce n'est possible que dans certains cas, en particulier quand  $F$  est un difféomorphisme.

### Définition 3.1.2

Soient  $F : M \rightarrow N$  un difféomorphisme et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Alors le transport de  $X$  par  $F$ , noté  $F_*X$ , est le champ de vecteurs sur  $N$  ( défini par

$$F_*X = dF(X) \circ F^{-1} \text{ ou } F_*X(q) = dF_{F^{-1}(q)}(X(F^{-1}(q))).$$

## 3.1.2. Équations différentielles

Nous allons maintenant étudier le mouvement sur une variété.

### Définition 3.1.3

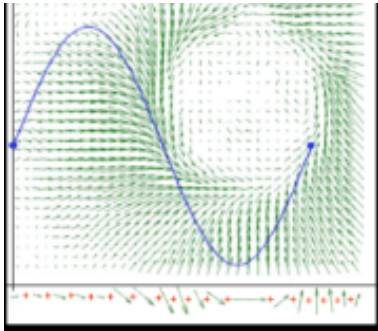
On appelle *équation différentielle* sur la variété  $M$  une équation de la forme

$$\dot{q} = X(q), \quad q \in M,$$

où  $X$  est un champ de vecteurs sur  $M$ .

La donnée d'une équation différentielle est ainsi équivalente à celle du champ de vecteurs  $X$ . Une solution de l'équation différentielle, c'est-à-dire une courbe intégrale du champ  $X$ , est une courbe  $c(t) \in M$ , telle que le montre la figure ci-dessous définie sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ , telle que

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t)), \quad \forall t \in J.$$



### Courbe intégrale d'un champ de vecteurs

Comme pour les équations différentielles dans les espaces vectoriels normés, nous allons avoir des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions et une dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales.

**Théorème 3.1.1** (Existence et unicité des solutions). *Soit  $\dot{q} = X(q)$ ,  $q \in M$ , une équation différentielle sur  $M$ . Pour tout point  $p \in M$ , il existe  $\eta > 0$  suffisamment petit tel qu'il existe une unique courbe intégrale  $c_p(t)$  de  $M$ , définie pour  $t \in ]-\eta, \eta[$ , satisfaisant la condition initiale  $c_p(0) = p$ .*

**Preuve.** Le résultat est local : il suffit donc de le prouver dans une carte c'est-à-dire dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . C'est alors un résultat classique voir[2] . ■

Dans la suite, nous parlerons de la courbe intégrale de  $X$  issue de  $p$  : il s'agit de la solution  $c_p(t)$  pour laquelle l'intervalle de définition  $]a, b[ \subset ]-\eta, \eta[$  est maximal.

Mentionnons ici une conséquence du théorème d'existence et d'unicité qui sera utile pour les sous-variétés.

**Corollaire 3.1.1.** *Soient  $\dot{q} = X(q)$  une équation différentielle sur  $M$  et  $N \subset M$  une sous-variété de  $M$  tels que, pour tout  $q \in N$ ,  $X(q) \in T_q N$ . Alors la courbe intégrale de  $X$  issue d'un point  $p \in N$  est incluse dans  $N$  pour  $t$  suffisamment petit.*

**Preuve.** D'après le lemme (3.1.1), la restriction  $X|_N$  est un champ de vecteurs sur  $N$ . L'équation

différentielle  $\dot{q} = X|_N(q)$ ,  $q \in N$ , a donc une solution  $c_p(t) \subset N$  pour  $p \in N$  et  $t$  suffisamment petit.

Or cette courbe est aussi solution de l'équation différentielle  $\dot{q} = X(q)$  sur  $M$ , pour la condition initiale  $p$ . Le théorème d'unicité montre que c'est bien une courbe intégrale de  $X$ . ■

**Théorème 3.1.2** (Dépendance par rapport aux conditions initiales). *La solution d'une équation différentielle  $\dot{q} = X(q)$  sur  $M$  dépend de façon différentiable de la condition initiale : pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U_p \subset M$  de  $p$  et un intervalle  $I = \{|t| < \varepsilon_p\}$  tels que l'application*

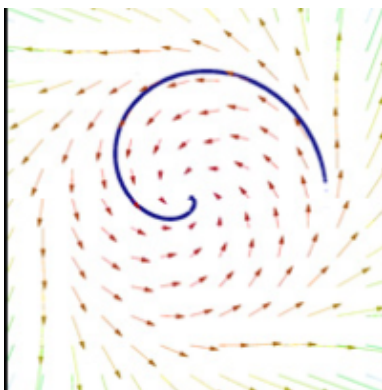
$$\begin{aligned} \phi : I \times U_p &\longrightarrow M \\ (t, q) &\longmapsto \phi(t, q) = c_q(t) \end{aligned}$$

est différentiable, ainsi que  $p \mapsto \varepsilon_p$ .

**Preuve.** Comme pour le théorème 3.1.1, il suffit de se restreindre à une carte et d'utiliser les résultats sur  $\mathbb{R}^n$ . ■

## 3.2. Flots et groupes de difféomorphismes

L'étude de la sensibilité à la condition initiale impose un vocabulaire et une représentation géométrique plus poussée. Pour une bonne compréhension de ce qui va suivre, le simple est de considérer dans le théorème précédent que  $M$  est la surface d'une eau en équilibre,  $U_p$  est une partie de ce plan d'eau contenant le point  $p$  et  $I$  représente le temps. La partie  $U_p$  est agitée par un courant représenté par la fonction  $X$  appelé champ de vecteurs. En dimension 2, on représente ce champ de vecteurs en associant à certains point  $q$  de  $U_p$  une représentation graphique du vecteur  $X(x)$ , à l'image de la figure ci dessous



Une courbe intégrale satisfaisant à la condition initiale peut s'imaginer comme la trajectoire d'un bouchon placé dans l'eau à l'instant initial 0 et au point  $p$ . Pour connaître d'un seul coup toutes les solutions de l'équation différentielle, il suffit de connaître le mouvement de la surface de l'eau, appelé flot, coulée ou encore courant. Dans le cas général on a la définition suivante :

**Définition 3.2.1.** Étant donné un point  $p \in M$ , on peut définir pour chaque  $t \in I$  une application

$$\begin{aligned}\phi_t : U_p &\longrightarrow M \\ q &\longmapsto \phi_t(q) = \phi(t, q).\end{aligned}$$

Il résulte des deux précédents théorèmes que pour chaque  $t$  l'application  $\phi_t$  est un difféomorphisme sur  $U_p$ , autrement dit un difféomorphisme local sur  $M$ . La famille de ces difféomorphismes locaux  $\phi_t$  est appelée le *flot* de  $X$ .

**Remarque 3.2.1.** Il est parfois pratique de se représenter  $X$  comme le champ de vitesse d'un fluide se déplaçant sur  $M$ . Le flot transporte alors une particule de liquide de la position  $q$  au temps 0 à la position  $\phi_t(q)$  au temps  $t$ .

Par définition de  $\phi$ , et donc de  $\phi_t$ , le flot peut également être caractérisé comme la famille de difféomorphismes locaux solution de

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t, \quad \phi_0 = id.$$

Ainsi  $\phi_t(x)$  est la courbe sur la variété  $M$  qui passe par  $x$  et telle que la tangente en chaque point est le vecteur  $X(\phi_t(x))$

Cette caractérisation permet de montrer que les flots se transportent par conjugaison.

**Lemme 3.2.1**

Soient  $F : M \longrightarrow N$  un difféomorphisme et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ , de flot  $\phi_t$ . Le flot du transport  $F_*X$  de  $X$  par  $F$  est  $F \circ \phi_t \circ F^{-1}$ , c'est-à-dire le conjugué du flot de  $X$ .

**Preuve.** Posons  $\phi'_t = F \circ \phi_t \circ F^{-1}$ . Comme  $\phi'_0 = id_N$ , il suffit de vérifier que

$$\frac{\partial \phi'_t}{\partial t} = F_*X \circ \phi'_t.$$

Avec les notations du théorème 3.1.2,  $\phi'_t(q) = F \circ \phi(t, F^{-1}(q))$ , et la dérivée partielle par rapport à  $t$  s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'_t}{\partial t}(q) &= dF \circ \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(t, F^{-1}(q)) \\ &= dF \circ X \circ \phi_t \circ F^{-1}(q) \\ &= dF \circ X \circ F^{-1} \circ F \circ \phi_t \circ F^{-1}(q) = F_* X \circ \phi'_t(q). \end{aligned}$$

■

Le flot forme un groupe local à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ . Un tel groupe est défini par les propriétés suivantes :

- (i)  $\phi_t$  est un difféomorphisme local  $\forall t \in I$  ;
- (ii)  $t \mapsto \phi_t$  est différentiable ;
- (iii)  $\phi_0 = id$  ;
- (iv)  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$ ,  $\forall t, s, t + s \in I$ .

Pour le flot, les trois premières propriétés viennent des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. Pour la quatrième, on remarque que  $c(t) = \phi_{t+s}(q)$  et  $c'(t) = \phi_t(\phi_s(q))$  sont solutions de la même équation différentielle avec la condition initiale  $c(0) = c'(0) = \phi_s(q)$ , ce qui montre l'égalité. Résumons ceci dans une proposition.

### Proposition 3.2.1

Tout champ de vecteurs sur  $M$  engendre un groupe local à un paramètre de difféomorphismes sur  $M$ .

## Champs de vecteurs complets.

### Définition 3.2.1

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est complet si, pour tout  $p \in M$ , la courbe intégrale de  $X$  issue de  $p$  est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 3.2.2.** Même dans  $\mathbb{R}$  tous les champs ne sont pas complets. Par exemple  $X(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  est complet mais  $X(x) = x^2$  ne l'est pas (la solution est de la forme  $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$ ).

Un champ de vecteurs complet engendre un flot constitué de difféomorphismes (globaux) de  $M$ . Ce flot forme un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur  $M$  (défini comme un groupe local par les propriétés (i) – (iv) dans lesquelles on remplace local par global et  $I$  par  $\mathbb{R}$ ).

Dans la suite de ce cours nous ferons souvent l’hypothèse de complétude pour simplifier les résultats et les preuves. Il est généralement aisé de retrouver le résultat sans cette hypothèse. Il faut remarquer toutefois qu’en mécanique la plupart des champs de vecteurs hamiltoniens ne sont pas complets. On peut également noter qu’il existe une condition suffisante simple : si  $M$  est une variété compacte, tout champ sur  $M$  est complet.

On se pose maintenant la question de la réciproque de la proposition 3.2.1 : étant donné un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur  $M$ , est-ce le flot d’un champ de vecteurs ?

**Lemme 3.2.2**

Tout groupe à un paramètre de difféomorphismes  $\phi_t$  sur  $M$  est le flot d’un champ de vecteurs, appelé générateur infinitésimal du groupe et obtenu comme

$$X = \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right|_{t=0} .$$

**Preuve.** Notons  $\phi_t$  les difféomorphismes de ce groupe. En tout point  $p \in M$ , on définit un vecteur tangent à  $M$  :

$$X(p) = \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} (p) \right|_{t=0} \in T_p M .$$

Comme la famille  $\phi_t$  dépend de façon différentiable de  $t$  et de  $p$  (propriétés (i) et (ii) des groupes à un paramètre),  $p \mapsto X(p)$  définit bien un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ .

Montrons maintenant que le flot de  $X$  est  $\phi_t$ . Comme  $\phi_0 = id$  (propriété (iii)), il suffit de montrer que  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t$ . Or, d’après la propriété (iv),

$$\frac{\partial \phi_{t+s}}{\partial t} (p) = \frac{\partial \phi_{t+s}}{\partial s} (p) = \frac{\partial}{\partial s} (\phi_s(\phi_t(p))) .$$

En choisissant  $s = 0$  dans cette relation, on obtient

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} (p) = \left. \frac{\partial}{\partial s} (\phi_s(\phi_t(p))) \right|_{s=0} ,$$

ce qui prouve le lemme. ■

Le tableau ci-dessous résume les relations entre les champs de vecteurs et les groupe de difféomorphismes.

Champ de vecteurs	$\implies$	Groupe local à 1 paramètre
Champ de vecteurs complet	$\iff$	Groupe global à 1 paramètre

**Exemples 3.2.1.** – Dans  $M = \mathbb{R}^3$  : soient  $a \in \mathbb{R}^3$  et le groupe de translations à 1 paramètre  $\phi_t(x) = x + ta$ .

Le générateur infinitésimal de ce groupe est  $X(x) = a$ , ou plus exactement

$$X(x) = a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Inversement, considérons l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\dot{x} = X(x) = a$ . La courbe intégrale issue d'un point  $x_0$  est  $\phi_t(x_0) = x_0 + ta$

### 3.3. Familles de champs de vecteurs sur une variété

Nous avons vu que, pour un système dynamique, c'est-à-dire un système dont la loi d'évolution ou dynamique est donnée par une équation différentielle, le futur  $\phi(t, p)$ ,  $t > 0$ , est complètement déterminé par l'état présent  $p = \phi(0, p)$ .

Nous allons maintenant étudier des systèmes dont la dynamique est certes contrainte, mais possède un certain nombre de degrés de libertés. Nous supposons qu'à partir de chaque configuration, le système peut suivre un certain nombre de directions de l'espace tangent. Ces directions peuvent être vues comme les valeurs d'une famille de champs de vecteurs (en supposant bien entendu qu'elles soient suffisamment régulières) ou, en introduisant une paramétrisation de cette famille, comme un système commandé.

### 3.4. Systèmes commandés

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$



### Définition 3.4.1

Un système commandé est une famille d'équations différentielles

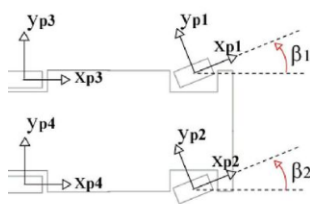
$$\dot{q} = X_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U, \quad (3.3)$$

où

- l'ensemble de commande  $U$  est un sous-ensemble (quelconque) de  $\mathbb{R}^n$  ;  $n$  est donc la taille de la commande  $u$ , ou encore le nombre de commandes scalaires  $u_i$  ;
- les  $X_u$  forment une famille de champs de vecteurs sur  $M$  paramétrés par  $u$  ; autrement dit, on a une application  $X : M \times U \rightarrow TM$  telle que, pour  $u \in U$  fixé,  $X_u(q) = X(q, u)$  est un champ de vecteurs sur  $M$ .

On peut aussi représenter un système commandé sans faire apparaître explicitement les commandes, en insistant au contraire sur la famille de champs de vecteurs. Pour cela on définit la famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs associée au système commandé  $\mathcal{F} = \{X_u, u \in U\}$ . Le système commandé s'écrit alors  $\dot{q} \in \mathcal{F}$ . Il est important de noter que cette notation est équivalente à l'équation (3.3)

**Exemple 3.4.1** (La voiture (modèle simplifié)). Considérons une voiture constituée d'un essieu se déplaçant dans le plan. Une configuration est donnée par les coordonnées  $(x^1, x^2)$  du milieu de l'essieu et par l'angle  $\theta$  que fait la voiture avec l'axe  $0x^1$ .



L'espace des configurations est donc  $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ . Les deux commandes sont la vitesse tangentielle  $u^1$  et la vitesse angulaire  $u^2$ . Le système commandé prend alors la forme :

$$\dot{q} = X_u(q) = u^1 X_1 + u^2 X_2, \quad q = (x, y, \theta) \in M, \quad u = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$

Où  $X_1$  et  $X_2$  qui correspondent respectivement aux déplacements rectilignes et aux rotations sur place, sont donnés en coordonnées par

$$X_1(q) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad X_2(q) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

La famille de champs de vecteurs associée à ce système commandé est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients constants de  $X_1$  et  $X_2$ , c'est à dire  $\mathcal{F} = Vect\{X_1, X_2\}$

**Définition 3.4.1.** On appelle loi de commande une fonction  $u(t) : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$

Dans la suite on considère que les lois de commandes sont constantes par morceaux : nous obtiendrons ainsi une bonne formulation géométrique tout en évitant des techniques délicates sur les mesures.

**Définition 3.4.2.** Une trajectoire d'un système commandé est une solution de la famille d'équations différentielles 3.6 c'est à dire une courbe  $c(t)$  dans  $M$  défini sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$ , pour laquelle il existe une loi de commande  $u(t) \ t \in J$ , constante par morceaux et telle que

$$\frac{dc}{dt}(t) = X_{u(t)}(c(t)),$$

Pour tout  $t \in J$  excepté aux points de discontinuité de  $u(t)$ .

On peut écrire une trajectoire du système en fonction des flots des champs de vecteurs  $X_u$ . En effet soit  $p$  un point de  $M$  et  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , une loi de commande constante par morceaux, caractérisée par ses points de discontinuités  $0 < t_1 < \dots < t_s < T$  et sa valeur  $u_i$  dans chacun des intervalles  $]t_i, t_{i+1}[ \ i = 0, \dots, s$  (on pose  $t_0 = 0$  et  $t_{s+1} = T$ ).

Quand elle existe (problème de complétude), la trajectoire issue de  $p$  et correspondant à la loi de commande  $u(t)$  est donnée par :

$$c(t) = \phi_{t-t_i}^{u_i} \circ \phi_{t_i-t_{i-1}}^{u_{i-1}} \circ \dots \circ \phi_{t_1-t_0}^{u_0}(p) \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Où  $\phi_t^{u_i}$  désigne le flot du champ de vecteurs  $X_{u_i}$

**Définition 3.4.3.** Pour un système commandé  $\dot{q} = X_u(q) \ u \in U$ , sur  $M$ , l'ensemble atteignable à partir d'un point  $p \in M$ , noté  $\mathcal{A}_p$  est l'ensemble des points pouvant être atteints par une trajectoire issue de  $p$  c'est-à-dire  $\mathcal{A}_p = \{\phi_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{u_1}(p) | t_i \geq 0, u_i \in U, k \in \mathbb{N}\}$ .

Essayons de comprendre la nature de cette ensemble. Considérons d'abord le cas où l'ensemble  $U$  ne contient qu'une commande : Le système se réduit alors à une équation différentielle et l'ensemble atteignable à partir de  $p$  est la demi-trajectoire  $\{\phi_t(p), t \geq 0\}$ . Ainsi  $\mathcal{A}_p$  est contenu dans une variété de dimension 1. Prenons ensuite le cas où la commande ne peut prendre que deux valeurs,  $U = \{1, 2\}$ . On a alors :

$$\{\phi_{t_{2k}}^2 \circ \phi_{t_{2k-1}}^1 \circ \dots \circ \phi_{t_2}^2 \circ \phi_{t_1}^1(p) | t_i \geq 0, k \in \mathbb{N}\}$$

La commutativité des flots  $\phi_t^1$  et  $\phi_s^2$  va alors jouer un rôle essentiel.

Supposons en effet que ces flots commutent, ce qui s'écrit  $\phi_t^1 \circ \phi_s^2 = \phi_s^2 \circ \phi_t^1$  pour tous  $t, s$ . Dans l'expression de  $\mathcal{A}_p$ , on peut alors regrouper tout les flots  $\phi^1$  d'un côté et tous les  $\phi^2$  de l'autre, ce qui donne

$$\mathcal{A}_p = \{\phi_s^2 \circ \phi_t^1 | s, t \geq 0\}.$$

Dans ce cas l'ensemble atteignable est donc un morceau de variété de dimension 2.

Que se passe-t-il lorsque les flots ne commutent pas (ce qui est généralement le cas) ?

A t-on encore un résultat du type  $k$  valeurs pour la commande  $\implies \mathcal{A}_p$  inclus dans une variété de dimension  $k$  ?

Evidemment non comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 3.4.2.** Reprenons l'exemple de la voiture. Le système commandé est donné ici par deux champs de vecteurs sur la variété tridimensionnelle  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ . Il est cependant clair que l'on peut joindre toute paire de point de  $M$  en alternant les flots de  $X_1$  et de  $X_2$ . En particulier,  $\mathcal{A}_p = M$  pour tout point  $p$ . Ce ci est possible parce que les flots de  $X_1$  et  $X_2$  ne commutent pas. On peut en effet montrer que  $\phi_t^1 \circ \phi_t^2 \neq \phi_t^2 \circ \phi_t^1$  en calculant directement la composée  $\phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2 \circ \phi_t^1$ , par exemple à partir de 0 :

$\phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2 \circ \phi_t^1(0) = \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2(t, O, 0) = \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1(t, 0, t) = \phi_{-t}^2(t(1 - \cos t), -t \sin t, t) = (t(1 - \cos t), -t \sin t, 0) = \gamma(t)$ . Cette courbe est bien différente de 0 ce qui montre la non commutativité des flots

Pour continuer l'étude des ensembles atteignables, il est nécessaire de caractériser la commutativité des flots. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante. L'objectif est de faire cette caractérisation à partir des champs de vecteurs, sans avoir à calculer les flots. C'est l'un des principes essentiels de l'étude des équations différentielles et des systèmes commandés : il faut caractériser le comportement des solutions à partir des équations elles-mêmes c'est-à-dire à partir des champs de vecteurs qui les constituent, sans calculer les solutions (ce que l'on ne sait généralement pas faire)

## 3.5. Crochets et algèbre de Lie

**Définition 3.5.1.** Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  est le champ de vecteurs

$$[X, Y] = XY - YX$$

En coordonnées locales, un champ de vecteurs étant donné sous la forme  $X(x) = X^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x)\frac{\partial}{\partial x^2}$  les composantes du crochet de Lie sont

$$[X, Y]^i = \sum_{j=1}^2 (X^j(x)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x) - Y^j(x)\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)) = X.Y^i(x) - Y.X^i(x).$$

### Proposition 3.5.1

Soit  $X_1, X_2$  des champs de vecteurs sur  $M$  de flots respectifs  $\phi_t^1, \phi_t^2$  et  $p$  un point de  $M$ . On considère la courbe

$$\gamma(t) = \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p)$$

pour  $t$  suffisamment petit.

Alors, dans les coordonnées locales  $\varphi = (x^1, x^2)$  centrée en  $p$ ,

$$\gamma^\varphi(t) = t^2[X_1, X_2]^\varphi(p) + 0(t^2)$$

Où l'on identifie le champ  $[X_1, X_2]^\varphi$  sur  $\mathbb{R}^n$  avec le vecteur de ses coordonnées.

**Preuve.** Voir [1] ■

**Définition 3.5.2.** Soient  $g \in \mathbb{C}^\infty(M)$  une fonction et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  de flot  $\phi_t$ . La dérivée de LIE de  $g$  par rapport à  $X$ , noté  $L_X g$ , est la fonction sur  $M$  dont la valeur en un point  $p$  est :

$$L_X g(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(g(\phi_t(p)) - g(p))$$

Cette dérivée  $L_X g$  n'est en fait rien d'autre que l'action de l'opérateur de dérivation  $X$  sur  $g$

$$L_X g = X \cdot g$$

**Définition 3.5.3.** Soient  $X, Y$  des champs de vecteurs sur  $M$  et  $\phi_t$  le flot de  $X$ . La dérivée de LIE de  $Y$  par rapport à  $X$ , notée  $L_X Y$ , est le champ de vecteurs sur  $M$  dont la valeur en un point  $p$  est :

$$L_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [d\phi_{-1}(Y(\phi_t(p))) - Y(p)] = \frac{d}{dt}(\phi_{-t} * Y)(p) |_{t=0}$$

### Lemme 3.5.1

Deux champs de vecteurs sur  $M$  satisfont  $[X_1, X_2] \equiv 0$  si et seulement si leurs flots commutent pour tout  $s$  et  $t$  suffisamment petits.

**Preuve.** Soient  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$  et  $\phi_t^1, \phi_s^2$  leurs flots respectifs. Ces deux flots commutent si et seulement si, pour tout  $t$  et  $s$  suffisamment petit,

$$\phi_{-t}^1 \circ \phi_s^2 \circ \phi_t^1 = \phi_s^2.$$

Posons  $\theta_s = \phi_{-t}^1 \circ \phi_s^2 \circ \phi_t^1$ . C'est un groupe local à un paramètre de difféomorphismes. Il existe donc localement un champ  $Z_t$  générateur infinitésimal de ce groupe :

$$Z_t = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} |_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}(\phi_{-t}^1 \circ \phi_s^2) |_{s=0} \circ \phi_t^1 = d\phi_{-t}^1 \circ X_2 \circ \phi_t^1 = \phi_{-t}^1 * X_2.$$

Ainsi les flots commutent si et seulement si ce champ  $Z_t$  est indépendant de  $t$ , c'est-à-dire  $Z_t = Z_0 = X_2$ . Or

$$\frac{\partial d}{\partial t} Z_t = \frac{d}{dt}(\phi_{-t}^1 * X_2) = \frac{d}{dt}(\phi_{-t-s}^1 * X_2 |_{s=0}) = d\phi_{-t}^1 \frac{d}{ds}(\phi_{-s}^1 * X_2 |_{s=0}) = d\phi_{-t}^1 * L_{X_1} X_2$$

Ce qui implique que  $Z_t$  est indépendante de  $t$  si et seulement si,  $L_{X_1} X_2 = [X_1, X_2] = 0$

■

Une autre propriété du crochet de Lie est qu'il est préservé par transport par un difféomorphisme

### Lemme 3.5.2

Soient  $F : M \rightarrow N$  un difféomorphisme entre deux variétés, et  $X, Y$  des champs de vecteurs sur  $M$ . Alors

$$F * [X, Y] = [F * X, F * Y]$$

**Preuve.** Rappelons qu'en tant que dérivation, le champ  $F * X$  s'écrit

$$\begin{aligned} F * X : \mathbb{C}^\infty(S_2) &\rightarrow \mathbb{C}^\infty(S_2) \\ g &\mapsto X \cdot (g \circ F) \cdot F^{-1} \end{aligned}$$

Le transport par  $F$  du crochet  $[X, Y]$  Vérifie donc

$$\begin{aligned} F * [X, Y] \cdot g &= [X, Y] \cdot (g \circ F) \cdot F^{-1}, \quad \forall g \in \mathbb{C}^\infty(S_2) \\ &= (X \cdot (Y \cdot (g \circ F)) - Y \cdot (X \cdot (g \circ F))) \circ F^{-1} \forall g \in \mathbb{C}^\infty(S_2) \end{aligned}$$

Or  $Y \cdot (g \circ F)$  est égale à  $F * Y \circ F$  (de même avec  $X$ ). L'égalité ci dessus devient donc, pour toute fonction  $g \in \mathbb{C}^\infty(S_2)$ ,

$$F * [X, Y] \cdot g = F * X \cdot (F * Y \cdot g) - F * Y \cdot (F * X \cdot g) = [F * X, F * Y] \cdot g$$

D'où le resultat ■

### Lemme 3.5.3

Pour tout  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$   $L_X Y = [X, Y]$  ,Où  $\mathcal{X}(M)$  est l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$

Preuve. voir [1] ■

### Définition 3.5.4.

 (Algèbre de LIE)

$\mathcal{X}(M)$  munit de l'addition est un espace vectoriel. Muni en plus de la loi interne (produit) défini par le crochet de LIE, il devient une algèbre sur  $\mathbb{R}$

Le crochet vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1 L'anti-symétrie :  $[X, Y] = -[Y, X]$  ;
- 2 L'identité de JACOBI :  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ .

En particulier un sous espace vectoriel de  $\mathcal{X}(M)$  qui est stable par le crochet de LIE est aussi une algèbre de LIE.

Si  $\mathcal{F}$  est une famille de champs de vecteurs sur  $M$  , on appelle algèbre de LIE engendrée par  $\mathcal{F}$ , notée  $Lie(\mathcal{F})$ , le plus petit espace  $T$  de  $\mathcal{X}(M)$  qui contient  $\mathcal{F}$  et qui est stable par crochet.

En un point  $p \in M$ , on note

$$Lie_p(\mathcal{F}) = \{X(p) / X \in Lie(\mathcal{F})\}$$

---

## 3.6. Orbite d'une famille de champs de vecteurs

On supposera tous les champs complets

**Définition 3.6.1.** Le groupe des difféomorphismes engendré par  $\mathcal{F}$  noté par  $G(\mathcal{F})$  est le groupe engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{F}$  :

$$G(\mathcal{F}) = \{\phi_{t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{X_1} / t_i \in \mathbb{R}, X_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\}$$

Où  $\phi_t^X$  désigne le flot du champ de vecteurs  $X$ .

**Définition 3.6.2.** Soit  $p \in M$ . L'orbite de  $\mathcal{F}$  issue de  $p$  est l'ensemble

$$Orb_p(\mathcal{F}) = \{\phi_{t_k}^{X_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{X_1} / t_i \in \mathbb{R}, X_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\}$$

Ou encore

$$Orb_p(\mathcal{F}) = \{\varphi(p) / \varphi \in G(\mathcal{F})\}$$

Quand  $\mathcal{F} = \{X_u, u \in U\}$  est la famille des champs associée à un système commandé l'orbite  $Orb_p(\mathcal{F})$  ressemble beaucoup à l'ensemble atteignable  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F})$  avec une différence importante : Dans l'orbite, il est permis de se déplacer en avant et en arrière dans chaque direction  $X_u \in \mathcal{F}$  alors que dans  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F})$  seul le mouvement en avant (c'est-à-dire pour un temps positif) est permis. On a donc  $\mathcal{A}_p(\mathcal{F}) \subset Orb_p(\mathcal{F})$ . Bien entendu les deux notions coïncident si les champs  $-X_p$  appartiennent aussi à  $\mathcal{F}$

### Proposition 3.6.1

Soit  $\mathcal{F}$  la famille associée à un système commandé. Si  $\mathcal{F}$  est une famille symétrique, c'est-à-dire

$$X \in \mathcal{F} \implies -X \in \mathcal{F}$$

L'orbite de  $\mathcal{F}$  et l'ensemble atteignable par le système commandé coïncident pour tout point  $p \in M$  :  $Orb_p(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_p(\mathcal{F})$ .

Nous nous intéressons maintenant à la nature des orbites. Est-ce que ce sont des sous-variétés de  $M$  ? ou au moins des variétés ? Commençons par le cas le plus simple, celui d'une

famille à un élément  $X$ .

Dans ce cas le groupe engendré par  $\mathcal{F}$  est simplement le flot de  $X$  et l'orbite issue d'un point  $p$  est la courbe intégrale de  $X$  issue de ce point :  $Orb_p(\mathcal{F}) = \{\phi_t(p), t \in \mathbb{R}\}$ . Cette orbite peut être :

- Soit réduit à un point : Si  $X_p = 0$ ,  $Orb_p(\mathcal{F}) = \{p\}$  ;
- Soit une sous variété  $M$  isomorphe à  $\mathbb{S}^1$  ( si  $X(p) \neq 0$  et  $x \mapsto \phi_t(p)$  n'est pas injective).
- Soit une sous variété immergé de dimension 1 ( si  $X(p) \neq 0$  et  $x \mapsto \phi_t(p)$  est injective) : En effet, dans ce cas  $Orb_p(\mathcal{F})$  est l'image de l'application  $t \mapsto \phi_t(p)$ , qui est une immersion injective (Car  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(p) = X(\phi_t(p)) \neq 0$ ).

Dans les trois cas  $Orb_p(\mathcal{F})$  est une sous-variété immergée. Est-ce-une sous variété ? En général non, comme le montre l'exemple ci-dessous ( rappelons qu'une sous variété est l'image d'un plongement alors qu'une sous-variété immergée est l'image d'une immersion injective).

**Exemple 3.6.1.** Sur le tore  $\mathbb{T}^2$  on considère le champ de vecteurs (Donner dans les coordonnées locales induit par  $\mathbb{R}^2$ )

$$X(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial x^1} + \beta \frac{\partial}{\partial x^2}$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels dont le rapport  $\frac{\alpha}{\beta}$  est irrationnel. L'orbite de  $X$  issue d'un point quelconque  $x_0$  s'écrit en coordonnées locales  $x^1(t) = x_0^1 + \alpha t$ ,  $x^2(t) = x_0^2 + \beta t$ ; cette orbite est dense dans le tore. Il n'est donc pas possible que ce soit une sous variété de  $\mathbb{T}^2$

**Théorème 3.6.1.** *Les orbites d'une famille  $\mathcal{F}$  de champs de vecteurs sur  $M$  sont des sous-variétés immergées connexes de  $M$ . L'espace tangent à une orbite est*

$$T_q Orb_p(\mathcal{F}) = Vect\{\varphi_* X(q)\} \text{ pour } q \in Orb_p(\mathcal{F})$$

**Preuve.** La preuve de ce théorème est longue et difficile. On y développe de nouveaux outils par, tout particulièrement la construction des coordonnées locales. Nous allons présenté le plan de cette preuve. Fixons un point  $p \in M$  et son orbite  $Orb_p(\mathcal{F})$ . Pour  $q \in M$ , on désigne par  $\Pi_q$  le sous espace vectorielle de  $T_q M$  :

$$\Pi_q = Vect\{\varphi_* X(q) / X \in \mathcal{F}, \varphi \in G(\mathcal{F})\}$$

Voici le plan de démonstration.

- (i) Immersion locale : Pour chaque point  $q \in Orb_p(\mathcal{F})$  on construit une application :

$G_p : \mathbb{R}^m \longrightarrow M$ , Où  $m = \dim \Pi_q$  à valeurs dans  $Orb_p(\mathcal{F})$ , qui est une immersion sur un voisinage  $U_p \subset \mathbb{R}^m$ .



- 
- (ii) Topologie : On munit  $Orb_p(\mathcal{F})$  d'une topologie  $\mathcal{T}$  dont la base est formée des  $G_q(U)$ ,  $U \subset U_q$  ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .
- (iii) Structure différentiable : L'ensemble des cartes  $(G_q(U), G_q^{-1})$  forme un atlas et définit donc une structure différentiable sur  $Orb_p(\mathcal{F})$ .
- (iv) Variété connexe :  $Orb_p(\mathcal{F})$  est un espace topologique connexe, séparé et à base dénombrable. Muni de la structure différentiable du (iii), il forme donc une variété connexe, dont l'espace tangent en un point  $q$  est  $\prod_q$ .
- (v) Sous variété immergée : L'inclusion  $i : Orb_p(\mathcal{F}) \rightarrow M$  est une immersion, ce qui fait de la variété  $Orb_p(\mathcal{F})$  une sous-variété immergée de  $M$ .
-

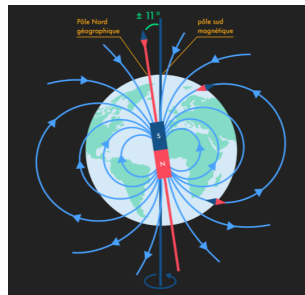
# IMPLICATION PÉDAGOGIQUE

---



---

Une connaissance poussée sur les familles de champ de vecteurs permet aux enseignants de science physique d’avoir une bonne conception des notions étudiées au collège tel que le mouvement d’une particule dans un champs électrique ou dans un champ magnétique, les ondes mécaniques etc... En effet, sur la figure ci-dessous l’ensemble des lignes de champs du champ de vecteurs magnétique représente l’orbite de ce champ



Par ailleurs, quand on considère une particule chargée en mouvement entre les armatures d’un condensateur plan, la nature de son mouvement est influencé par la famille de champs de vecteurs composée d’un champ de pesanteur et d’un champ électrique.

Dans le cadre des ondes mécanique, une pointe qui vibre verticalement sur la surface d’une eau en équilibre créé un champ de vecteurs qui provoque des rides circulaires à la surface de l’eau ; En effet tous les points de la surface d’eau atteint par l’onde mécanique évoluent suivant la loi horaire  $x : t \mapsto x(t)$  telle que  $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$  où  $a$  est l’amplitude,  $\omega$  est la pulsation et  $\varphi$  est la phase à l’origine satisfaisant à l’équation différentielle  $x'' + \omega^2 x = 0$ . Le champ de vecteurs associée à cette équation différentielle est :  $X(x, y) = (y, -\omega^2 x)$ , le flot de ce champ est l’application  $x : t \mapsto x(t)$ .

---

---

## ✠ Conclusion et perspectives ✠

---

Parvenu au terme de notre analyse sur **les familles de champs de vecteurs sur une variété différentielle**, il en ressort un double constat à savoir : Le premier est que, ce travail nous a permis de faire une étude sur : les variétés différentielles qui généralise les notion de courbes et surfaces et de différentiabilité sur  $\mathbb{R}^n$ , le flot d'un champ de vecteurs qui généralise la résolution des équations différentielles. Le deuxième est que notre analyse nous a permis de comprendre que les familles de champs de vecteurs ont plusieurs domaines d'applications notamment dans la résolution des équations différentielles ; dans la synthèse des loi de commande d'un système dynamique.

---

---

## ✠ Bibliographie ✠

---

- [1] Frédéric, J. (2011) *Géométrie Différentielle et Applications au contrôle Géométrique*.  
Note de cours. ENSTA
- [2] Frédéric, J. (2012). *Systèmes dynamiques. Stabilité et commande*. Note de cours. ENSTA
- [3] Thibert. B, *Courbes et surfaces*. Note de cours. Université Joseph Fourier, Grenoble I
- [4] Frédérick. P (2006). *géométrie différentielle élémentaire*. Note de cours. École Normale Supérieur.