

**Modèles Proie-Prédateur avec interactions non
locales pour la formation des patterns.**

Mémoire Présenté et soutenu publiquement en vue de
l'obtention du

DIPES II en Mathématiques

Par

Simon Rodrigue TEGA II.

Matricule: 09Y730

Sous la direction de :

Pr. Jean Jules TEWA

Maître de Conférences, Université de Yaoundé 1

Année Académique 2018/2019

Dédicace

Je dédie ce travail à mes parents, Monsieur **TEGA Justin** et Madame **TEGA Jean-**
nette pour tous les efforts consentis pour mon éducation.

Remerciements

Ce travail est le fruit de deux années d'efforts et de sacrifices. Je tiens à adresser mes sincères remerciements à tous ceux qui de près ou de loin ont participé à l'élaboration de ce travail.

- ♡ Je remercie **Dieu** le père de **Jésus Christ**, pour tout l'amour qu'il a placé en ma personne. Merci Seigneur de m'avoir guidé dans l'élaboration de ce travail.
- ♡ Je ne remercierai jamais assez mon père, monsieur **TEGA Justin** pour tous les efforts et sacrifices consentis, pour faire de moi ce que je suis. C'est d'une part grâce à toi que j'ai choisi ce métier d'enseignant.
- ♡ Monsieur **TEWA Jean Jules**, je vous remercie d'avoir accepté, de diriger ce travail. Vous m'avez donné l'opportunité d'apprendre auprès de vous. Merci d'avoir accorder de votre temps pour me guider dans la construction et l'élaboration de ce travail. Pour cela veuillez agréer l'expression de ma profonde gratitude.
- ♡ Je tiens également à adresser mes remerciements à tous les enseignants du Département de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé qui ont participé à notre formation.
- ♡ L'aboutissement d'un tel travail nécessite qu'il règne autour de soi une ambiance conviviale et chaleureuse. J'adresse mon amitié à tous mes camarades "Retour sur titre" avec qui nous avons passé ces deux années, particulièrement à : **SAO TOUKAK Eymard**, **TACHAGO Anderson**, **IROUME Blanche**, **TCHOMTE Serge**, **TCHE-LIMBO Gilles**, **FONING Jacques**, **MPONO Sabine**. À tous mes camarades de promotion et particulièrement à ceux qui sont devenus des amis le long de la formation ; je pense à **TENKEU Gael**, **MEFOTSE Valérie**, **MELI Delmas**, **MEDAH Mariane** merci pour votre soutien.
- ♡ À **NTEP ALIX CHANTAL**, merci pour tout l'amour et encouragement porté à mon endroit. Que le seigneur continue de guider nos pas.
- ♡ Je ne saurais terminer ces remerciements sans exprimer mon affection et mon amour à mes frères et soeur : **NGO TEGA Nicolette**, **TEGA TEGA Josaphat**, **DJOB**

LI TEGA Emmanuel, que le seigneur continue de vous protéger et bénir dans toutes vos actions. Merci pour votre soutien.

Déclaration sur l'honneur

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

TEGA II Simon Rodrigue

Table des matières

| | |
|---|----------|
| Dédicace | i |
| Remerciements | ii |
| Déclarations sur l'honneur | iv |
| Résumé | x |
| Abstract | xi |
| Introduction générale | 1 |
| 1 MODELES PROIE-PREDATEUR POUR LA FORMATION DES PAT- TERNS ET OUTILS D'ANALYSE MATHEMATIQUES | 3 |
| 1.1 Introduction | 3 |
| 1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur | 4 |
| 1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns | 8 |
| 1.3.1 Description des modèles proie-prédateur pour la formation des Patterns | 8 |
| 1.3.2 Méthode d'analyse des équations de reactions diffusion pour la forma- tion des patterns | 9 |
| 1.3.3 Modèles spatio-temporel proie-prédateur non locaux | 11 |
| 1.4 Quelques outils mathématiques | 14 |
| 1.4.1 Généralités sur les systèmes dynamiques continus | 14 |
| 1.4.2 Système dynamique autonome | 15 |
| 1.4.3 Quelques notions sur les E.D.P | 19 |
| 1.5 Conclusion | 21 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | ETUDE DE DEUX MODELES PROIE-PREDATEUR AVEC INTERAC- | 22 |
| | TIONS NON LOCALES POUR LA FORMATION DES PATTERNS | |
| 2.1 | Introduction | 23 |
| 2.2 | Etude d'un modèle proie-prédateur avec compétition non locale pour la formation des patterns | 23 |
| 2.2.1 | Construction du modèle | 23 |
| 2.2.2 | Propriété de la fonction noyau | 25 |
| 2.3 | Analyse mathématique du modèle | 25 |
| 2.3.1 | Analyse du modèle temporel | 26 |
| 2.3.2 | Analyse du modèle spatio-temporel | 31 |
| 2.3.2.1 | Analyse de stabilité linéaire du modèle spatio-temporel local | 32 |
| 2.3.2.2 | Analyse de stabilité du modèle spatio temporel non local. | 33 |
| 2.4 | Extension du modèle de Banerjee et Volpert | 40 |
| 2.4.1 | Construction du modèle | 40 |
| 2.4.2 | Propriétés de la fonction noyau | 42 |
| 2.4.3 | Analyse mathématique du modèle | 43 |
| 2.4.3.1 | Analyse du modèle temporel | 43 |
| 2.4.3.2 | Analyse de stabilité du modèle spatio-temporel local | 48 |
| 2.4.3.3 | Analyse de stabilité du modèle Spatio-temporel non Local | 49 |
| 2.5 | Conclusion | 56 |
| 3 | SIMULATIONS NUMERIQUES | 57 |
| 3.1 | Introduction | 57 |
| 3.2 | Principe de construction des méthodes numériques non-standards. | 58 |
| 3.2.1 | Principe de construction d'un schéma non-standard. | 58 |
| 3.2.2 | Exemples | 59 |
| 3.3 | Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert | 60 |
| 3.3.1 | Schémas numériques | 60 |
| 3.3.2 | Simulation numérique du modèle non locale de banerjee et Volpert (2016) | 64 |
| 3.4 | Simulation du modèle reformulé | 68 |
| 3.4.1 | Schémas numériques | 68 |
| 3.4.2 | Simulation numérique du modèle reformulé | 72 |
| 3.5 | Conclusion | 75 |
| | Portée pédagogique | 76 |

Table des matières

Conclusion 77

Bibliographie 78

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 3.1 | Absence de Patterns pour les proies $M = 1; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$ | 65 |
| 3.2 | Absence de Patterns pour les proies $M = 1; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$ | 66 |
| 3.3 | Profil pour les proies et prédateurs avec : $M = 1; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$ | 66 |
| 3.4 | Patterns pour les proies $M = 10; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$ | 66 |
| 3.5 | Patterns pour les prédateurs $M = 10; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$ | 67 |
| 3.6 | Profil pour les proies et prédateurs, $M = 10; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$. | 67 |
| 3.7 | Pas de Patterns sur la population des proies $M = 20; a = 1; \sigma_1 = 0.1; \sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335; \beta = 0.4; \theta = 0.335$ et $d = 50$ | 73 |
| 3.8 | Pas de Patterns sur la population des prédateurs $M = 20; a = 1; \sigma_1 = 0.1; \sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335; \beta = 0.4; \theta = 0.335$ et $d = 50$ | 73 |
| 3.9 | Pas de Patterns sur la population des proies et des prédateurs $M = 20; a = 1; \sigma_1 = 0.1; \sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335; \beta = 0.4; \theta = 0.335$ et $d = 50$ | 74 |
| 3.10 | Patterns sur la population des proies $M = 87; a = 1; \sigma_1 = 0.1; \sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335; \beta = 0.4; \theta = 0.335$ et $d = 50$ | 74 |
| 3.11 | Patterns sur la population des proies $M = 87; a = 1; \sigma_1 = 0.1; \sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335; \beta = 0.4; \theta = 0.335$ et $d = 50$ | 75 |
| 3.12 | Profil au temps initial et final de la population des proies et celle des prédateurs $M = 87; a = 1; \sigma_1 = 0.1; \sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335; \beta = 0.4; \theta = 0.335$ et $d = 50$ | 75 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Réponses fonctionnelles pour la croissance et la décroissance naturelle | 6 |
| 1.2 | Réponses fonctionnelles pour la prédation | 7 |
| 3.1 | Valeurs données aux paramètres du modèle pour simulation | 65 |
| 3.2 | Valeurs données aux paramètres du modèle pour simulation | 73 |

Résumé

Dans ce travail, nous analysons la dynamique spatio-temporelle de deux modèles "proie-prédateur" avec fonction réponse de Holling type II dans lesquels des interactions non locales sont introduites. Ces interactions non-locales expriment principalement la **compétition intra-spécifique** : entre les proies pour la **consommation des ressources environnementales** présentes, et la **consommation non locales des proies** par les prédateurs. Elles sont modélisées au travers d'une fonction noyau et d'un produit de convolution exprimant la probabilité qu'une des espèces étudiées puisse interagir avec une autre et que cette interaction ait un impact positif ou négatif. Pour chacun des modèles étudiés, nous arrivons à expliciter l'analyse de stabilité linéaire. De cette analyse de stabilité linéaire, nous précisons les conditions d'apparitions des structures spatiales périodiques sur la population des proies et sur celles des prédateurs. Nous montrons qu'il est nécessaire dans les deux modèles étudiés de considérer les interactions non locales pour qu'il y ait émergence de structures spatiales. En effet, sans ces interactions non-locales, nous constatons que les conditions de Turing pour l'apparition des patterns ne sont pas remplies. Grâce aux simulations numériques, nous arrivons à illustrer les conditions d'apparitions des patterns établies théoriquement. Le choix de la méthode numérique est celle du **non standard aux différences finies**, ceci pour être sûr de conserver la positivité de nos solutions numériques.

Mots clés : *Proies, Prédateurs, Pattern, fonction réponse de Holling type II, interactions non locales, différences finies*

Abstract

In this work, we analyze the spatio-temporal dynamics of two prey-predator models with Holling's Type II response function in which non-local interactions are introduced. These non-local interactions primarily express the **intra-specific competition** : between prey for **consumption of the environmental resources** present, and **non-local consumption of prey** by predators. They are modeled through a kernel function and a convolution product expressing the probability that one of the species studied can interact with another and that this interaction has a positive or negative impact. For each of the models studied, we let us explain the linear stability analysis. Of this linear stability analysis, we specify the appearances conditions of periodic spatial structures on the population of prey and predators. We show that he is necessary in both models to consider non-local interactions for emergence of spatial structures . Indeed without these non-local interactions, we find that the conditions of Turing for the appearance of patterns are not met. Thanks to numerical simulations, we let's illustrate the conditions of appearance of the patterns established theoretically. The choice of the numerical method is the one of **non-standard to finite differences** this to be on to maintain the positivity of our numerical solutions.

Key words : *Prey, Predator, Pattern, Holling II function response, non-local interaction, nonstandard finite differences schemes*

Introduction générale

La théorie de la formation des structures spatiales (patterns), date des travaux d'Alan Turing qui, en 1952 étudiait dans un modèle de réaction diffusion, la dynamique spatio-temporelle de deux espèces chimiques qu'il appela activateur et inhibiteur (Borgogno et al. (2009)[6]). Turing découvre dans ce travail que, lorsque les deux espèces ont des coefficients de diffusion différents (plus précisément, lorsque la diffusion de l'espèce inhibitrice est supérieure à celle de l'espèce activatrice), on a l'émergence des patchs ou de motifs des deux populations qui s'étendent sur l'étendu du domaine considéré et ses motifs ont pris le nom de "**Turing Pattern**". Dès lors, les études sur la formation de structures spatiales (patterns) ont intéressées plusieurs chercheurs ; une variété de structures spatiales ressortent de ces travaux : les Turing patterns et les non Turing patterns (par exemple les ondes voyageuses connu sous l'appellation anglo saxon "traveling wave"). En écologie des plantes par exemple, plus précisément dans les régions arides et semi-arides, des travaux ont été réalisés par plusieurs chercheurs à l'instar de R.Lefever(2012 [16]), Pierre Couteron (2001 [8]) et montrent la présence de motifs de végétations qui alternent entre des zones de sols nus et sont appelés "patterns de végétation".

Remarquons qu'en dynamique des populations, les études sur la structuration spatiale des populations prend une place de plus en plus importante. Notons qu'au préalable, dans ces modèles purement temporels, il est supposé que les populations en interactions ont une distribution homogène sur le domaine considéré (Tewa et al. (2012)[22]),(Tankam et al. (2017)[21]).Cependant, il est possible que les populations modélisées effectuent des mouvements à l'intérieur du domaine qui impact leur dynamique. On fait donc recours aux modèles spatio-temporels (plus précisément aux équations de réaction-diffusion) pour prendre en compte les mouvements à l'intérieur du domaine, qui peuvent être causés par exemple par la reproduction, la compétition entre les espèces. De ce fait, plusieurs travaux sur l'apparition des patterns dans les modèles proies-prédateurs ont été effectués (Baumann et al. (2016) [5]),(Fuentes et al. (2004) [9]). Initialement, dans les modèles spatio-temporel "proie-prédateur", les interactions entre les éléments du systèmes sont supposées locales dans le domaine consi-

déré. En d'autres termes, un individu peut interagir juste avec ceux qui se trouvent dans la même position spatiale que lui. Or le devenir d'un individu situé à un point x d'un domaine peut être influencé par un second individu situé en un point y autre de x . D'où l'ajout dans ces modèles spatio-temporels de la notion "**d'interactions non locales** qui se modélisent généralement au travers d'un produit de convolution entre une fonction noyau et la densité de la population considérée (Tian et al. (2017) [23]),(Nimomiya et al. (2017) [19]).

Dans le cadre de notre mémoire de DIPES II, il nous a été proposé de travailler sur la formation des patterns dans un modèle proie-prédateur. Ce modèle est une extension d'un travail de Banerjee et volpert paru en 2016 dans le Journal scientifique Elsevier [4]. L'objectif étant de donner à travers l'analyse mathématique du modèle, les conditions d'apparitions des structures spatiales (patterns) et d'illustrer numériquement ces conditions grâce à des simulations numériques. Pour ce faire, nous avons subdivisé notre travail en trois chapitres :

- Au chapitre 1, nous faisons une revue de la littérature sur l'étude des modèles proies prédateurs. Ensuite nous présentons le processus d'étude de certains modèles "spatio-temporel" aboutissant à la formation des patterns et enfin nous donnons quelques outils mathématiques.
- Au chapitre 2, nous analysons mathématiquement d'une part le modèle de Banerjee et volpert 2016 [4] , et d'autre part, nous proposons une extension de ce modèle où nous faisons ressortir la condition d'apparition des patterns.
- Au chapitre 3 nous illustrons numériquement les conditions d'apparition des patterns sur les deux modèles étudiés au chapitre 2.

MODELES PROIE-PREDATEUR POUR LA FORMATION DES PATTERNS ET OUTILS D'ANALYSE MATHEMATIQUES

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| 1.1 Introduction | 3 |
| 1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur | 4 |
| 1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns | 8 |
| 1.3.1 Description des modèles proie-prédateur pour la formation des Pat- terns | 8 |
| 1.3.2 Méthode d'analyse des équations de reactions diffusion pour la for- mation des patterns | 9 |
| 1.3.3 Modèles spatio-temporel proie-prédateur non locaux | 11 |
| 1.4 Quelques outils mathématiques | 14 |
| 1.4.1 Généralités sur les systèmes dynamiques continus | 14 |
| 1.4.2 Système dynamique autonome | 15 |
| 1.4.3 Quelques notions sur les E.D.P | 19 |
| 1.5 Conclusion | 21 |

1.1 Introduction

Dans un écosystème, aucune espèce ne vit réellement de façon complètement isolée. Il y a, en général, des interactions avec d'autres espèces qui d'une façon ou d'une autre, ont un

1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur

impact plus ou moins considérable dans l'évolution de chacune des espèces. La modélisation mathématique, principalement celle basée sur l'étude des phénomènes naturels et artificiels permet de rendre compte des interactions qui peuvent exister entre différentes espèces d'un écosystème (Augier et al. (2006) [1]). L'étude de la dynamique de deux populations ou espèces et leurs interactions dans l'espace a dès lors, fait l'objet de plusieurs études de la part des chercheurs dans les domaines de l'écologie, de la dynamique des populations (démographie), de l'épidémiologie et bien d'autres encore. Dans ce chapitre, nous présentons la genèse de l'étude des modèles "proie-prédateur". Ensuite, nous présentons des modèles spatio-temporel étudiés pour la formation des patterns. Nous nous attarderons dans la suite sur la méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns et enfin nous donnerons quelques outils mathématiques.

1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur

Dans la première moitié du $XX^{ième}$ siècle, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interactions a connu un essor considérable. Parmi ces interactions on peut citer, entre autres :

- **La symbiose** : relation dans laquelle les espèces ont un bénéfice réciproque. Comme l'orchidée et l'abeille (Augier et al. (2006)[1]).
- **Le parasitisme** : relation dans laquelle le parasite profite de son hôte. Comme entre les puces et les chiens (Augier et al. (2006)[1]).
- **La compétition** : relation dans laquelle les espèces agissent défavorablement l'une envers l'autre. Il y'a compétition au niveau des ressources disponibles (Augier et al. (2006)[1]).
- **La prédation** : de prime à bord, l'on peut l'assimiler au parasitisme, mais la différence réside au niveau de l'espèce qui tire profit de l'autre. En effet, dans le parasitisme, le parasite est, en général, plus petit que l'hôte alors que dans la prédation, le prédateur est, en général, plus grand que la proie. (Augier et al. (2006)[1])

C'est à cette époque appelée " l'âge d'or de l'écologie théorique " que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition et des relations prédateur-proie. La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions a fait l'objet d'une querelle de priorité entre **Alfred J. Lotka** et **Vito Volterra** (Ginoux (2006) [10]). **G. Israel** établit dans ces travaux que c'est à **V. Volterra** que revient le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique. En

1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur

effet, l'intérêt de Volterra pour les problèmes d'équilibre entre les espèces animales dans les écosystèmes fut suscité par son beau-fils, le zoologiste **Umberto d'Ancona** qui s'occupait depuis quelques années de statistiques portant sur la pêche dans le nord de la mer Adriatique. Ces données concernaient le pourcentage de poissons prédateurs (Sélaciens) pêchés dans trois ports italiens : Trieste, Fiume et Venise pendant la période 1905 – 1923 (Ginoux (2006) [10]). Elles prouvaient que pendant la période 1915 – 1920, où la pêche était moins intense à cause de la guerre, il y avait eu un accroissement relatif de la classe des Sélaciens. Selon l'hypothèse de D'Ancona, la pêche perturbait l'équilibre naturel entre les espèces. Elle favorisait une augmentation relative des espèces " proies ", c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent seulement de plancton, et une diminution des espèces " prédatrices ", c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent d'autres poissons. La diminution de la pêche due à la première guerre mondiale avait donc rétabli, au moins en partie, l'équilibre naturel. D'Ancona s'adressa à Volterra en lui demandant de trouver une démonstration mathématique de son hypothèse. La réponse de Volterra publiée en 1926 prit la forme du célèbre modèle " prédateur-proie ". Considérant deux espèce, la première, la proie $x(t)$, aurait si elle était seule une croissance *malthusienne*. La seconde, le prédateur $y(t)$, se nourrit exclusivement de la première et en l'absence de proie " s'épuiserait progressivement et disparaîtrait ". La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborées par Volterra. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose. Le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontre. La seconde consiste à supposer qu'il existe " un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres ", i.e., que la prédation de la proie est équivalente à la croissance du prédateur. Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

où a représente le *taux de croissance* de la proie en l'absence de prédateur, b le *taux de prédation* du prédateur sur la proie, c le *taux de mortalité* du prédateur en l'absence de proie et d le *taux de croissance* du prédateur du fait de sa prédation (Ginoux (2006) [10]).

Le phénomène observé par D'Ancona est ainsi expliqué : l'accroissement du nombre de prédateurs et la diminution du nombre de proies résultaient de la disparition de la pêche

1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur

qui, avant la guerre, avait modifié l'équilibre naturel de cette " association biologique ". En pêchant moins, on favorise les espèces plus voraces aux détriment des autres.

Dans ce modèle, deux types de comportements sont représentés : ceux liés à la **croissance** et ceux liés à la **décroissance**. La **natalité** et la **prédation** sont liées à la **croissance** alors que la **mortalité naturelle** et la **mortalité par prédation** correspondent à une **décroissance** du nombre d'individus. Chacun de ces comportements possède une forme mathématique, appelée **réponse fonctionnelle**(Ginoux (2006) [10]).

La croissance naturelle, c'est-à-dire, par *natalité* de la proie représentée par une *réponse fonctionnelle* de type Malthus a été modifiée par Verhulst afin de rendre compte d'une certaine limitation. La *décroissance* par *mortalité naturelle* a été envisagée de manière symétrique de celle de la **croissance** naturelle. Nous résumons ces réponses fonctionnelles dans le tableau suivant : La réponse fonctionnelle choisie par Volterra pour décrire la prédation était propor-

| Auteurs\Modèles | croissance naturelle | mortalité naturelle |
|-----------------|---|--|
| Malthus | $rx(t)$ | $-mx(t)$ |
| Verhulst | $rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$ | $-mx(t) \left(1 + \frac{x(t)}{K}\right)$ |

TABLE 1.1 – Réponses fonctionnelles pour la croissance et la décroissance naturelle

tionnelle au produit du nombre d'individus de chaque espèce : $bx(t)y(t)$. À la fin des années cinquante, l'entomologiste **C.S. Holling** élaborera deux nouvelles réponses fonctionnelles pour la prédation visant également à transcrire une certaine satiété du prédateur vis-à-vis de ses proies : *la fonction de Holling type II* et *la fonction de Holling type III*. Cette formulation suppose que le prédateur divise son temps en deux sortes d'activités : la recherche de sa proie et sa capture qui comprend le temps mis pour la chasser, la tuer, la dévorer et la digérer. La fonction de Holling type II est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux " d'attaque " du prédateur augmente lorsque le nombre de proies est faible puis devient constant lorsque le prédateur atteint la satiété. En d'autres termes, **le prédateur cause une mortalité maximum à de faibles densités de proies**. La fonction de Holling type II est représentée par :

$$\frac{B\alpha x(t)y(t)}{1 + B\beta x(t)},$$

1.2 Génèse des modèles Proie-Prédateur

où α et β représentent respectivement le temps de recherche et de capture de la proie et B le taux de prédation par unité de temps.

La fonction de Holling type III est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux " d'attaque " du prédateur augmente tout d'abord lorsque le nombre de proies est faible puis ralentit lorsque le prédateur atteint la satiété. En d'autres termes, **le prédateur augmente son activité de recherche lorsque la densité des proies augmente**. La fonction de Holling type III est représentée par :

$$\frac{B\alpha x^2(t)y(t)}{1 + B\beta x^2(t)},$$

où α et β représentent respectivement le temps de recherche et de capture de la proie et B le taux de prédation par unité de temps (Ginoux (2006) [10]).

Toutes ces *réponses fonctionnelles* sont résumées dans le tableau suivant :

| Auteurs | Volterra | Holling type II | Holling type III |
|-------------------------|-------------|--|--|
| Réponses fonctionnelles | $bx(t)y(t)$ | $\frac{B\alpha x(t)y(t)}{1 + B\beta x(t)}$ | $\frac{B\alpha x^2(t)y(t)}{1 + B\beta x^2(t)}$ |

TABLE 1.2 – Réponses fonctionnelles pour la prédation

Cependant d'autres réponses fonctionnelles pour la prédation peuvent être rencontrées dans la littérature (Augier et al. (2006)[1]). Par exemple nous avons :

- La fonction réponse dite "**ratio-dépendente**". Elle est obtenue en substituant dans la réponse fonctionnelle de Holling type II le terme désignant la densité des proies (x) par le ratio (x/y). On obtient :

$$\frac{B\alpha x(t)y(t)}{y(t) + B\beta x(t)}$$

- **Beddington** et **De Angelis** propose de manière générale une réponse fonctionnelle ratio-dépendente :

$$\frac{ax(t)y(t)}{1 + bx(t) + cy(t)}$$

1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns

1.3.1 Description des modèles proie-prédateur pour la formation des Patterns

Dans la continuité des modèles temporels proies-predateurs, les chercheurs dans le domaine de l'écologie se sont rendus compte que, se restreindre à une étude purement temporelle ne permettait pas de rendre compte de toutes les interactions qui se passent dans le système étudié. En effet, le mouvement des espèces dans l'espace considéré n'intervient pas dans la précédente modélisation. Or, il est important d'intégrer dans la modélisation une composante spatiale pour rendre compte de la propagation des espèces dans le domaine.

On a donc aboutit à la conception des équations dites de **réaction-diffusion** pour décrire le comportement temporel et l'évolution spatiale des espèces dans le domaine considéré. Les équations de réaction-diffusion sont de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (1.2)$$

où $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = (u_i(x, t))_{i=1, \dots, n}$ est le vecteur d'état décrivant la densité ou la concentration de la population en une position $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ à un instant t , (Ω est une partie ouverte). Δ désigne l'opérateur de Laplace ($\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_i)_{i=1, \dots, n}$) et D une matrice carrée d'ordre n de diffusion. La fonction vectorielle \mathbf{f} est un terme généralement non linéaire décrivant toutes les interactions et réactions considérées.

Dans cet optique, A.Turing dans ses travaux sur les systèmes chimiques linéaires (Turing(1952) [24]) découvre que la diffusion de deux substances avec des coefficients de diffusion différents aboutit à la formation de motifs périodiques appelés communément **pattern** ou **structures spatiales périodiques**. En effet Turing montre qu'en absence de diffusion, le mélange des deux substances doit converger vers un état stationnaire stable et dès lors, la différence de diffusion sera capable de destabiliser l'état stationnaire initialement stable conduisant à la formation de patterns. Ce phénomène menant au pattern est connu sous le nom de **Instabilité de Turing** ou "**diffusion driven-instability**" ou **instabilité briseuse de symétrie**. Il s'est donc avéré important, dans l'étude des modèles proies predateurs d'introduire une composante spatiale. Plusieurs travaux dans cette optique ont été mené par les chercheurs. L'objectif étant de pouvoir rendre compte de la propagation effective des espèces dans l'espace et de l'origine de cette propagation.

1.3.2 Méthode d'analyse des équations de réactions diffusion pour la formation des patterns

Considérons l'équation de réaction-diffusion suivante dans le cas de deux substances u et v diffusant en un domaine infini de dimension 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (1.3)$$

où t est le temps, f, g la dynamique locale, $d = \frac{d_2}{d_1}$ le ratio entre les taux de diffusion d_2 et d_1 de v et u respectivement.

Turing démontre que le système (1.3) présente (sous certaines conditions) en l'absence de diffusion un état homogène linéairement stable et quand la diffusion entre en jeu, l'état homogène stable devient instable. On parle d' **instabilité de Turing**. L'équation obtenue en l'absence de diffusion est dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v). \end{cases} \quad (1.4)$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire. On considère (u_0, v_0) l'état stationnaire uniforme homogène. Pour qu'il y ait instabilité briseuse de symétrie, on se doit en premier lieu d'étudier la stabilité de l'état stationnaire (u_0, v_0) en recherchant les conditions pour lesquelles cet état stationnaire est linéairement stable en l'absence de diffusion. Pour ce faire on linéarise l'équation (1.4) au voisinage (u_0, v_0) . En considérant une perturbation

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

L'équation linéarisée de (1.4) est :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{J} \mathbf{W}, \text{ avec } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Dès lors (u_0, v_0) sera **linéairement stable** (Augier et al. (2006)[1] page 35) lorsque :

$$a_{11} + a_{22} < 0 \text{ et } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \quad (1.7)$$

En second lieu, on doit étudier l'effet de la diffusion sur la stabilité de (u_0, v_0) . Pour ce faire nous devons linéariser l'équation (1.3) au voisinage de (u_0, v_0) . Ainsi, comme précédemment,

1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns

posons :

$$\begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation linéarisée de l'équation (1.3) est :

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + d\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (1.8)$$

Le problème aux valeurs propres associé au système linéaire (1.8) est :

$$\begin{cases} \sigma\Phi_1(x) = a_{11}\Phi_1(x) + a_{12}\Phi_2(x) + \Phi_1''(x) \\ \sigma\Phi_2(x) = a_{21}\Phi_1(x) + a_{22}\Phi_2(x) + d\Phi_2''(x) \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ la fonction propre associée à la valeur propre σ .

En passant à la transformée de Fourier sur l'équation (1.9)

$$\begin{cases} \sigma\bar{\Phi}_1(k) = a_{11}\bar{\Phi}_1(k) + a_{12}\bar{\Phi}_2(k) - k^2\bar{\Phi}_1(k) \\ \sigma\bar{\Phi}_2(k) = a_{21}\bar{\Phi}_1(k) + a_{22}\bar{\Phi}_2(k) - dk^2\bar{\Phi}_2(k) \end{cases} \quad (1.10)$$

C'est à dire :

$$\sigma \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1(k) \\ \bar{\Phi}_2(k) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1(k) \\ \bar{\Phi}_2(k) \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Avec :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_{11} - k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - dk^2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique associé à (1.11) est :

$$\sigma^2 + \left[-tr(\mathbf{J}) + (d+1)k^2 \right] \sigma + M(k) = 0 \quad (1.12)$$

avec $M(k) = \det(\mathbf{G}) = dk^4 + \det(\mathbf{J}) - \left[da_{11} + a_{22} \right] k^2$ et $tr(\mathbf{J})$, la trace de la matrice jacobienne \mathbf{J} et $\det(\mathbf{J})$ le déterminant de la matrice \mathbf{J} .

Pour que $(u_0; v_0)$ soit linéairement instable il faut qu'il existe un réel k pour lequel $\sigma > 0$. Or

d'après ce qui précède $tr(\mathbf{J}) < 0$. Ainsi : $\left[-tr(\mathbf{J}) + (d+1)k^2 \right] > 0$.

Donc pour avoir $\sigma > 0$ à partir de l'équation (1.12) on doit avoir $M(k) < 0$.

Or $M(k) = dk^4 + \det(\mathbf{J}) - \left[da_{11} + a_{22} \right] k^2$ et d'après ce qui précède on a $\det(\mathbf{J}) > 0$ et $dk^4 > 0$.

Ainsi, $M(k) < 0$ si et seulement si :

$$da_{11} + a_{22} > 0 \text{ et } \left[da_{11} + a_{22} \right] k^2 > dk^4 + \det(\mathbf{J}). \quad (1.13)$$

1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns

Pour récapituler, à ce niveau, on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{J}) > 0, \\ da_{11} + a_{22} > 0, \\ a_{11} + a_{22} < 0, \\ \left[da_{11} + a_{22} \right] k^2 > dk^4 + \det(\mathbf{J}). \end{cases} \quad (1.14)$$

De plus en analysant la fonction $M(k)$ on se rend aussi compte qu'une condition nécessaire pour que $M(k) < 0$ est que :

$$da_{11} + a_{22} > 2\sqrt{d}\sqrt{\det(\mathbf{J})}. \quad (1.15)$$

On peut donc, résumer les conditions d'apparition de structures spatiales (patterns) pour une équation de réaction diffusion par le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{J}) > 0, \\ da_{11} + a_{22} > 0, \\ a_{11} + a_{22} < 0, \\ da_{11} + a_{22} > 2\sqrt{d}\sqrt{\det(\mathbf{J})}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Il faut donc que $d \neq 1$. Ainsi, les espèces ne doivent pas avoir le même taux de diffusion. L'analyse du système (1.16) permet de dire que a_{11} et a_{22} sont de signes contraires. On suppose donc que $a_{11} > 0$ et $a_{22} < 0$. On dit que la substance u est **activatrice** et la substance v **inhibitrice**. On aboutit finalement à $d > 1$. Donc pour qu'il y ait apparition de patterns il faudrait que la substance inhibitrice se diffuse plus vite que celle activatrice.

1.3.3 Modèles spatio-temporel proie-prédateur non locaux

Initialement, dans l'étude des équations de réaction-diffusion, plus précisément dans l'étude des modèles spatio-temporel proie-prédateur sus évoqués, il est supposé que les deux populations interagissent entre elles dans la même position spatiale (on parle d'interactions locales). Cependant dans la réalité, les interactions peuvent se produire à des positions spatiales différentes (adjacentes). On parle d'interactions non locales (Nimomiya (2017) [19]). Ainsi depuis une quinzaine d'années, les modèles non locaux ont reçu une attention particulière dans plusieurs domaines tels que l'écologie, la génétique, la neurologie. Des exemples typiques de structuration spatiale tenant leur origine d'interactions non locales sont : la dispersion spatiale d'espèces animales, végétations en taches (Lefever et Turner (2012)[16]), les

1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns

cellules de pigments sur la peau du poisson zèbre, les décharges neurales dans le cerveau (Kondo et al. (2009) [15]), (Huston et al. (2003)[13]). Ces interactions sont caractérisées mathématiquement par un produit de convolution qui représente généralement la probabilité que l'interaction ait lieu.

Un exemple de modèle proie-prédateur non local est donné par le modèle de Tiang et al. (2017) [23] :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= d_1 \Delta u_1 + u_1 (a_1 - b_{11} \phi * u_1 - b_{12} \phi * u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= d_2 \Delta u_2 + u_2 (-a_2 + b_{21} \phi * u_1 - b_{22} \phi * u_2), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} &= 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec. $u_1(0, x) = u_{10}(x)$, $u_2(0, x) = u_{20}(x)$. $t > 0$ et $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

$u_1(t, x)$ et $u_2(t, x)$ représentent respectivement la densité de la population des proies et u_2 celle des prédateurs à l'instant t et à la position x . Ω est une partie bornée de \mathbb{R}^n avec $\partial\Omega$ comme frontière. Les interactions non locales sont représentées ici par un produit de convolution entre la fonction noyau ϕ et la densité de la population. Cette fonction noyau, mesure l'intensité à laquelle un individu donné peut interagir avec d'autres à des positions spatiales différentes.

Le terme de convolution dans l'équation (1.17) est représenté mathématiquement par :

$$\phi * u_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y) u_i(t, y) dy, \quad (1.18)$$

où ϕ est la fonction noyau satisfaisant :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy = 1. \quad (1.19)$$

Deux exemples, de fonctions noyaux généralement utilisées dans les modèles "proie-predateur" non locaux sont :

- Step Function (Banerjee and Volpert (2016) [4]) :

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2M} & , |z| \leq M \\ 0 & , |z| > M \end{cases} \quad (1.20)$$

$\phi(z)$ est une fonction paire vérifiant : $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) dz = 1$.

- The parabolic segments (Segal et al. (2013) [20]) :

$$\phi(z) = \begin{cases} \frac{3}{4M^3} (M^2 - z^2) & , |z| < M \\ 0 & , |z| > M \end{cases} \quad (1.21)$$

1.3 Présentation et méthode d'analyse des modèles spatio-temporel proie-prédateur pour la formation des patterns

Considérons un modèle assez simple intégro-différentiel et explicitons la méthode d'analyse de stabilité linéaire pour la formation des patterns. On désigne par u et v deux espèces quelconques dont la dynamique est décrite par le modèle (système) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial u(t, x)}{\partial x^2} + f(u(t, x)) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(y) [u(x + y, t) - u_0] dy \\ \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial v(t, x)}{\partial x^2} + g(v(t, x)) \end{cases} \quad (1.22)$$

avec $f(u)$ et $g(v)$ désignant respectivement la dynamique de u et v en absence d'interactions spatiales entre les différents points du domaine et $f(u_0) = g(v_0) = 0$. Le terme intégrale exprime les interactions spatiales qui ont lieu et dépend d'une fonction noyau w .

Le principe conduisant à la formation de structures spatiales périodiques est le même que celui des modèles de Turing. En effet, l'émergence de structures spatiales vient de la destabilisation d'un état stationnaire homogène en occurrence (u_0, v_0) , stable dans la dynamique en l'absence d'interaction. Ainsi pour étudier la stabilité de l'état stationnaire (u_0, v_0) , on linéarise l'équation (1.22) au voisinage de (u_0, v_0) . Pour ce faire, on considère une légère déviation :

$$n(t, x) = u(t, x) - u_0 \quad \text{et} \quad p(t, x) = v(t, x) - v_0;$$

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial n(t, x)}{\partial t} = d \frac{\partial n(t, x)}{\partial x^2} + f'(u_0)n(x, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(y)n(x + y, t)dy, \\ \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial p(t, x)}{\partial x^2} + g'(v_0)p(x, t). \end{cases} \quad (1.23)$$

Le problème aux valeurs propres associé au système linéaire (1.23) est donné par :

$$\begin{cases} \lambda n(x) = dn''(x) + f'(u_0)n(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} w(y)n(x + y, t)dy, \\ \lambda p(x) = p''(x) + g'(v_0)p(x). \end{cases} \quad (1.24)$$

En passant à la transformée de Fourier sur le système (1.24) on obtient :

$$\begin{cases} \lambda \bar{n}(k) = -dk^2 \bar{n}(k) + f'(u_0) \bar{n}(k) + \bar{w}(k) \bar{n}(k), \\ \lambda \bar{p}(k) = -k^2 \bar{p}(k) + g'(v_0) \bar{p}(k). \end{cases} \quad (1.25)$$

Ainsi,

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{n}(k) \\ \bar{p}(k) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \bar{n}(k) \\ \bar{p}(k) \end{pmatrix}$$

1.4 Quelques outils mathématiques

avec :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -dk^2 + f'(u_0) + \bar{w}(k) & 0 \\ 0 & g'(v_0) - k^2 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on désignera par $Tr(\mathbf{G})$ et $Det(\mathbf{G})$ respectivement la trace et le déterminant de :

$$Tr(\mathbf{G}) = Tr(k) = -(d+1)k^2 + f'(u_0) + g'(v_0) + \bar{w}(k)$$

et

$$Det(\mathbf{G}) = Det(k) = dk^4 - [f'(u_0) + g'(v_0) + \bar{w}(k)]k^2 + g'(v_0)(f'(u_0) + \bar{w}(k)).$$

L'équation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^2 - Tr(k)\lambda + Det(k) = 0, \quad (1.26)$$

avec λ la valeur propre associée à l'état stationnaire (u_0, v_0) , elle dépend de k appelé nombre d'onde. Lorsque $\mathcal{R}_e(\lambda(k)) < 0$ pour tout k , alors (u_0, v_0) est stable. Dans le cas contraire, il est instable.

L'état stationnaire (u_0, v_0) est stable si

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \quad Tr(k) < 0 \quad \text{et} \quad Det(k) > 0 \quad (1.27)$$

Dans le cas contraire (u_0, v_0) est instable.

Si la condition sur la trace n'est pas remplie, mais celle sur le déterminant oui, on a droit à une **bifurcation de Hopf**.

A contrario, si la condition sur la trace est remplie, et que celle sur le déterminant n'est pas remplie, on a une **bifurcation de Turing**. Ainsi l'instabilité de Turing provient du changement de signe du déterminant. On cherche donc le seuil k_T pour lequel, le déterminant $Det(k)$ initialement positif devient négatif. Donc k_T vérifie :

$$Tr(k_T) < 0 \quad \text{et} \quad Det(k_T) = 0 \quad (1.28)$$

1.4 Quelques outils mathématiques

1.4.1 Généralités sur les systèmes dynamiques continus

Définition 1.4.1. (*Système dynamique à temps continu*)[17]

On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω , une famille d'applications $\{\phi_t; t \in \Lambda\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{R}_+ des réels positifs ou nuls ($\Lambda = \mathbb{R}_+$), soit par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels ($\Lambda = \mathbb{R}$), et vérifiant les propriétés suivantes :

1.4 Quelques outils mathématiques

1. chaque application ϕ_t est définie sur une partie U_t de Ω et à valeurs dans Ω ;
2. l'application ϕ_0 définie sur Ω tout entier est l'application identité sur $\Omega, (id_\Omega)$;
3. si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subseteq U_{t_1}$;
4. soient t et s deux éléments de l'ensemble Λ qui paramètrent la famille des applications considérées, soit $x \in U_s$; alors $\phi_s(x)$ est un élément de U_t si et seulement si x est un élément de U_{s+t} et , lorsque c'est le cas, on a :

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{s+t}(x).$$

L'ensemble Ω est appelé espace de phases du système dynamique et ϕ est le flot du système dynamique.

Définition 1.4.2. (Système dynamique monotone)[17]

Soit un système dynamique dont le flot est $\phi_t : x \mapsto \phi_t(x)$.

Ce système dynamique est dit monotone s'il est défini sur un espace métrique ordonné et s'il possède la propriété suivante :

$$t \geq 0, \quad x \leq y \Rightarrow \phi_t(x) \leq \phi_t(y)$$

1.4.2 Système dynamique autonome

Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Considérons l'équation différentielle autonome définie par :

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.29}$$

On suppose que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et satisfait des conditions telles qu'une solution du système (1.29) existe en tout point, est unique et dépend de manière continue des conditions initiales, c'est à dire qu'on suppose que f est lipschitzienne. Pour chaque $x \in \Omega$, nous notons par $X_t(x)$ la solution du système (1.29) satisfaisant $X_0(x) = x$. L'équation différentielle (1.29) définit ainsi un système dynamique continu $\{\phi_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ où ϕ_t est égal à X_t .

Définition 1.4.3. (Point d'équilibre)[17]

Un point \bar{x} est un point d'équilibre, ou point critique, ou encore point singulier pour le système (1.29) si on a $f(\bar{x}) = 0$.

Définition 1.4.4. (Point d'équilibre stable)[17]

On dit qu'un point d'équilibre \bar{x} du système (1.29) est stable (au sens de Lyapunov) ou que

1.4 Quelques outils mathématiques

le système (1.29) est stable en \bar{x} si pour tout voisinage U de \bar{x} , il existe un voisinage V de \bar{x} tel que pour tout $y \in V$ et pour tout $t \geq 0$ on a $X_t(y) \in U$.

Dans le cas contraire, on dit que \bar{x} est instable.

Définition 1.4.5. (Point d'équilibre neutralement stable)[17]

On dit qu'un point d'équilibre \bar{x} du système (1.29) est **neutralement stable** si pour tout voisinage U de \bar{x} , il existe un plus petit voisinage $U' \subseteq U$ de \bar{x} tel que toute trajectoire traversant U' reste dans U lorsque t augmente.

Définition 1.4.6. (Point d'équilibre attractif)[17]

On dit qu'un point d'équilibre \bar{x} est attractif s'il existe un ouvert V contenant \bar{x} tel que pour tout $y \in V$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(y) = \bar{x}.$$

Définition 1.4.7. (Stabilité asymptotique)[17]

On dit que \bar{x} est localement asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Remarque 1.4.1. L'attractivité n'implique pas la stabilité. Cependant, c'est vrai pour les systèmes linéaires $\dot{x} = Ax$.

Définition 1.4.8. (Système Linéarisé)[17]

Soit \bar{x} un point d'équilibre de (1.29). Si f est de classe C^1 , on appelle système linéarisé de (1.29) en \bar{x} le système linéaire

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x, \tag{1.30}$$

où $Df(\bar{x})$ est la différentielle de f au point \bar{x} .

Proposition 1.4.1. [17]

Si \bar{x} est asymptotiquement stable pour (1.29), son bassin d'attraction est un sous-ensemble ouvert de U et contient un voisinage de \bar{x} .

Définition 1.4.9. (Stabilité globale)[17]

Un point d'équilibre est dit globalement asymptotiquement stable ou simplement globalement stable par rapport à un ouvert U_1 s'il est asymptotiquement stable et son bassin d'attraction contient U_1 .

Remarque 1.4.2. Notons que si \bar{x} est globalement stable par rapport à U_1 alors \bar{x} est nécessairement le seul point d'équilibre stable dans U_1 . De plus, il existe un voisinage compact K de \bar{x} tel que chaque sous ensemble compact $F \subset U_1$ vérifie $X_t(F) \subset K$ pour t suffisamment grand. Un tel K est dit absorbant dans U_1 .

1.4 Quelques outils mathématiques

Théorème 1.4.1. (de linéarisation de Poincaré-Lyapunov)[17]

On considère le Système (1.29) où f est de classe C^1 et \bar{x} un point d'équilibre.

1. Si $Df(\bar{x})$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative alors \bar{x} est localement asymptotiquement stable.

2. Si $Df(\bar{x})$ a (au moins) une valeur propre à partie réelle strictement positive alors \bar{x} est instable.

Les fonctions de Lyapunov jouent un grand rôle dans la stabilisation des systèmes dynamiques. Dans la section qui suit, nous donnons quelques résultats liés à ces fonctions.

Théorème 1.4.2. (Principe de comparaison)[17]

Soient les équations

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

et

$$\dot{y} = g(y) \quad (2).$$

Si de plus on a $f(x) \leq g(x)$ et que y_0 est un équilibre globalement asymptotiquement stable pour (2) alors $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) \leq y_0$.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.31)$$

Soient un point d'équilibre $\bar{X} = (\bar{x}; \bar{y})$ de (1.31) et λ_1, λ_2 les valeurs propres du linéarisé de (1.31) au voisinage de \bar{X} .

Définition 1.4.10. (Point d'équilibre non-hyperbolique)[17]

\bar{X} est un point non-hyperbolique, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$,

(ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,

(iii) $\mathcal{R}e(\lambda_i) = 0, i = 1, 2$

Définition 1.4.11. (Bifurcation)[17]

Une bifurcation est un changement qualitatif de la structure topologique des orbites d'un système.

1.4 Quelques outils mathématiques

Remarque 1.4.3. *Lorsqu'un tel changement se produit pour une valeur précise d'un paramètre du système, on dit que cette valeur est une valeur de bifurcation.*

Les changements qualitatifs considérés peuvent être :

- (i) *une perte de stabilité pour un point d'équilibre ou un cycle,*
- (ii) *une naissance ou une disparition de points d'équilibre ou de cycle.*

Lorsqu'un point d'équilibre est non-hyperbolique, la théorie de la linéarisation ne peut plus s'appliquer à ce point. Cependant pour étudier la stabilité de ce point d'équilibre, on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 1.4.3. (Variété centrale)[17]

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système différentiel où f est un champ de vecteur de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R}^n . On suppose que $f(0) = 0$ et on pose $A = df(0)$. On désigne par σ le spectre de A , par σ_s , σ_c , σ_u respectivement les sous-ensembles de σ tels que :

$$\operatorname{Re}(\lambda) \begin{cases} < 0 & \text{si } \lambda \in \sigma_s \\ = 0 & \text{si } \lambda \in \sigma_c \\ > 0 & \text{si } \lambda \in \sigma_u \end{cases}$$

Alors,

1. *Il existe deux variétés invariantes stable et instable noté W^s et W^u , de classe \mathcal{C}^k , passant par 0 et tangentes en ce point aux espaces propres généralisés E^s et E^u .*
2. *Il existe une variété invariante centrale W^c de classe \mathcal{C}^{k-1} , passant par 0 et tangente en ce point à l'espace propre généralisé E^c . Les variétés stable et instable sont uniques, mais la variété centrale ne l'est pas.*

Théorème 1.4.4. (Stabilité)[17]

Supposons que $(0,0)$ est point d'équilibre non hyperbolique de (1.31) tel que les valeurs propres du système linéarisé au voisinage de 0 sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$. Alors, il existe une variété centrale

$$W^c = \{y = h(x) | h(0) = h'(0) = 0\},$$

et l'équation réduite à la variété centrale s'écrit

$$\dot{x} = f(x, h(x)) \quad (\star)$$

telle que,

1. *$x = 0$ est solution de (\star)*
2. *Le point d'équilibre $(0,0)$ de (1.31) est asymptotiquement stable (instable) si et seulement si $x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable (instable) de (\star)*

1.4.3 Quelques notions sur les E.D.P

Il est question ici de présenter un théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une E.D.P.

Soit Ω une partie ouverte de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}^*$

Soit H un espace de Hilbert, B et K deux espaces de Banach.

Définition 1.4.12. *Pour $m \in \mathbb{N}$. On désigne par $H^m(\Omega)$, l'espace des classes de fonctions f de Ω dans \mathbb{C} admettant des dérivées au sens de distributions jusqu'à l'ordre m , qui sont (des classes) de fonctions de carrée intégrable.*

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}. \quad (1.32)$$

Définition 1.4.13. (Opérateur linéaire)[26]

On appelle opérateur linéaire de B dans K toute application linéaire $A : B \rightarrow K$ définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ de B appelé domaine de A défini par :

$$D(A) = \{u \in B \text{ tel que } Au \in K\}.$$

Définition 1.4.14. (Fonction propre, Valeur Propre)[26]

*φ est une **fonction propre** d'un opérateur A avec λ comme **Valeur propre** si : $A\varphi = \lambda\varphi$.*

Définition 1.4.15. (Opérateur m -accretif)[26]

*Un opérateur est $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ dit **m -accretif** s'il possède les propriétés suivantes :*

- $\forall u \in D(A), \langle Au, u \rangle \geq 0$.
- $D(A)$ est dense dans H .
- $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ dans H avec $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < 1$ avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ le crochet de dualité entre H et son dual H'

Définition 1.4.16. (Opérateur monotone)[26]

*Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. A est **monotone** si pour tout $u \in D(A)$:*

$$\langle Au, u \rangle_H \geq 0$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ le crochet de dualité entre H et son dual H'

Définition 1.4.17. (Maximal monotone)[26]

*Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. A est **maximal monotone** si :*

$$\forall f \in H \text{ il existe } u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

1.4 Quelques outils mathématiques

Définition 1.4.18. (*Opérateur Symétrique*)[26]

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. A est **Symétrique** si :

$$\langle Au, u \rangle_H = \langle u, Au \rangle_H$$

ceci $\forall u, v \in D(A)$.

Proposition 1.4.2. [7]

Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur maximal monotone. Alors :

- $D(A)$ est dense dans H .
- A est un opérateur fermé.
- $\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ dans H , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < 1$

Théorème 1.4.5. (*Cauchy, Lipschitz, Picard*)[26]

Soit B un espace de Banach et soit $F : B \rightarrow B$ une application Lipschitzienne alors : $\forall u_0 \in B$, il existe un unique $u \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[, B)$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Théorème 1.4.6. (*Théorème de Hille Yosida*)[26]

Soit B un espace de Banach, soit A un opérateur linéaire (non bornée) de B dans B . On suppose que :

- A est fermé.
- $D(A)$ est dense dans B .
- $\forall \lambda > 0$ $\lambda - A$ est une bijection de $D(A)$ sur B avec $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(B)$ et $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$, alors A est générateur infinitésimal d'un sémi-groupe de contraction G sur B .

Dans cette partie nous considérons le problème d'évolution semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = F(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.34)$$

où A est un opérateur défini de l'espace $D(A) \subset B$ vers un Banach B , et F un opérateur non linéaire de B dans B .

L'objectif étant de donner un théorème d'existence et d'unicité du problème (1.34).

A partir des théorèmes de Hille Yosida et Cauchy lipschitz, on aboutit au théorème suivant d'existence et d'unicité des solutions du problème donné par le système (1.34).

1.5 Conclusion

Théorème 1.4.7. [26]

Supposons que A est un opérateur **m -accrétif** et F un opérateur non linéaire et localement lipschitzien de l'espace de Banach B dans lui même. Alors :

- 1 il existe une constante T dépendant de $\|u_0\|_B$ tel que le problème (1.34) dans $[0; T]$ admet une unique solution locale faible telle que $u \in \mathcal{C}([0; T]; B)$ si $u_0 \in B$.
- 2 Pour u_0 dans $D(A)$ le problème (1.34) admet une unique solution locale forte u telle que $u \in \mathcal{C}([0; T]; B) \cap \mathcal{C}^1([0; T]; D(A))$

1.5 Conclusion

Parvenu au terme de ce chapitre, nous avons premièrement fait une présentation de manière générale des modèles proie-prédateur, ensuite nous sommes passé à la présentation d'une version non locale des modèles proie-prédateur. Deuxièmement, nous avons montré comment s'effectue l'analyse de stabilité linéaire pour les modèles spatio-temporel locaux et non locaux ceci dans le but d'obtenir les conditions d'apparitions de patterns et enfin nous avons donné quelques outils mathématiques nécessaire à l'analyse des modèles proie-prédateur. Au prochain chapitre nous ferons une analyse mathématique de deux modèles spatio-temporel dans l'optique de donner les conditions d'apparitions des patterns.

ETUDE DE DEUX MODELES PROIE-PREDATEUR AVEC INTERACTIONS NON LOCALES POUR LA FORMATION DES PATTERNS

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.1 | Introduction | 23 |
| 2.2 | Etude d'un modèle proie-prédateur avec compétition non locale pour la formation des patterns | 23 |
| 2.2.1 | Construction du modèle | 23 |
| 2.2.2 | Propriété de la fonction noyau | 25 |
| 2.3 | Analyse mathématique du modèle | 25 |
| 2.3.1 | Analyse du modèle temporel | 26 |
| 2.3.2 | Analyse du modèle spatio-temporel | 31 |
| 2.4 | Extension du modèle de Banerjee et Volpert | 40 |
| 2.4.1 | Construction du modèle | 40 |
| 2.4.2 | Propriétés de la fonction noyau | 42 |
| 2.4.3 | Analyse mathématique du modèle | 43 |
| 2.5 | Conclusion | 56 |

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons et analysons deux systèmes proie- prédateur intégrodifférentiels permettant d'expliquer l'apparition de structures spatiales périodiques (patterns). Le premier système a été formulé par les chercheurs Banerjee et Volpert, et publié dans le journal scientifique Ecological complexity (Elsevier) le 7 Mai 2016 [4]. Dans ce papier, il est supposé que les proies compétissent de manière non locale pour la ressource nutritive disponible. Le second système est une extension (que nous proposons) de la précédente formulation, à la différence qu'ici, à la compétition non locale de la part des proies pour les ressources nous rajoutons premièrement un effet allée (Banerjee et al. (2018)[2]) sur la croissance des proies et ensuite une prédation non locale liée à la compétition des prédateurs pour la consommation des proies (Banerjee and Volpert (2016) [3]). Pour chacun des deux systèmes nous ferons une analyse mathématique permettant à terme, de donner une condition d'apparition de patterns .

2.2 Etude d'un modèle proie-prédateur avec compétition non locale pour la formation des patterns

2.2.1 Construction du modèle

Ce modèle, comme nous l'avons dit plus haut, a été construit par Banerjee et Volpert en 2016 [4]. Ils se sont basés sur le modèle proie-prédateur de Rosenzweig-MacArthur dont les hypothèses de construction étaient les suivantes : On désigne par $u(t)$ et $v(t)$ respectivement, la densité des proies et des prédateurs à un instant t (Rappelons que u est normalisée par la capacité de charge du domaine (Haltham (2008) [12]).

- Hypothèse 1 : En absence de prédateur, les proies ont une croissance logistique.
- Hypothèse 2 : La réponse fonctionnelle des prédateurs est celle de Holling type II.
- Hypothèse 3 : La croissance des prédateurs est proportionnelle à leur prédation.

Sous ces hypothèses : Rosenzweig et MacArthur ont aboutit au modèle temporel suivant (Haltham (2008) [12]) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v, \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

2.2 Etude d'un modèle proie-prédateur avec compétition non locale pour la formation des patterns

- * α est le taux de consommation des proies par les prédateurs,
- * β est constante de saturation,
- * δ est le taux de mortalité des prédateurs.

En désignant maintenant par $u(x, t)$ et $v(x, t)$ respectivement la densité des proies et des prédateurs à l'instant t et à un point x , le modèle (2.1) peut être réécrit, en un système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) > 0$ et $v(x, 0) = v_0(x) > 0$, $x \in] - M; M[\subset \mathbb{R}$, $t \geq 0$, et les conditions aux bords de Newman homogène c'est -à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

d est le ratio entre le coefficient de diffusion des proies et celui des prédateurs.

Dans cette version locale (2.2), la compétition entre les proies pour les ressources se fait entre celles qui sont situées sur le même point x .

Banerjee et Volpert dans leur papier proposent de supposer que cette compétition est non locale. En effet, ils émettent l'idée selon laquelle, les proies situées en un point quelconque x de l'espace peuvent avoir accès à la ressource située en un autre point quelconque y autre que x . Ainsi pour introduire cette consommation non locale, le terme $-u^2(x, t)$ dans (2.2) est remplacé par l'expression :

$$u(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \quad (2.3)$$

où le noyau $\phi(y, M)$ représente l'intensité de la consommation des ressources suivant la distance M . En d'autre terme ce produit de convolution est vu comme étant la probabilité qu'une proie située en un point y puisse compétitionner pour la même ressource avec la proie située au point x . En injectant le terme (2.3) dans le système (2.2) on obtient le système d'équations non-linéaires intégral-différentielles (Banerjee and Volpert (2016) [4]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \right) - \frac{\alpha u(x, t) v(x, t)}{\beta + u(x, t)}, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha u(x, t) v(x, t)}{\beta + u(x, t)} - \delta v(x, t). \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3 Analyse mathématique du modèle

2.2.2 Propriété de la fonction noyau

Pour que l'équation (2.4) soit complète, il faudrait que la fonction noyau ϕ soit précisée. La forme mathématique, de la fonction noyau dépend du système et ne peut donc être fixée pour tout modèle spatio-temporel non local proie-prédateur. Néanmoins, certaines propriétés doivent être vérifiées de manière générale.

- (i) Elle est positive : $\phi(z, M) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\forall M \in \mathbb{R}_+$.
- (ii) Lorsque M tend vers 0 la dynamique devient strictement locale. Ainsi la fonction poids ϕ est réduite à une fonction de dirac sur \mathbb{R} .

$$\lim_{M \rightarrow 0} \phi(y, M) = \delta(y)$$

- (iii) La fonction ϕ est intégrable sur \mathbb{R} et :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y, M) dy = 1.$$

Cette condition exprime le fait que toutes les interactions générées dans le domaine prennent fin dans le domaine.

Dans le cadre de ce travail, la fonction noyau suivante a été choisie :

$$\phi(x, M) = \begin{cases} \frac{1}{2M} & , |x| \leq M \\ 0 & , |x| > M \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette fonction noyau exprime le fait que hors du domaine $[-M; M]$ les interactions non locales n'ont aucune intensité. Cependant à l'intérieur du domaine l'intensité de l'interaction est proportionnelle à la longueur du domaine. De plus, pour un point $x \in [-M; M]$ l'intensité de l'interaction est la même avec tous les points $y \in [-M; M]$ autre que x .

2.3 Analyse mathématique du modèle

2.3 Analyse mathématique du modèle

2.3.1 Analyse du modèle temporel

Proposition 2.3.1. (Système temporel)

Le système temporel du modèle donné par (2.4) est :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases} \quad (2.6)$$

Preuve: Il s'agit du système obtenu en négligeant la variabilité spatiale du système (2.4).

On obtient donc :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(t) \left(1 - u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) dy \right) - \frac{\alpha u(t)v(t)}{\beta + u(t)} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha u(t)v(t)}{\beta + u(t)} - \delta v(t) \end{cases}$$

or d'après la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) dy = 1.$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases}$$

■

Proposition 2.3.2. (existence et unicité des solutions)

Etant donné les conditions initiales $u(0)$ et $v(0)$ le système (2.6) admet une unique solution.

Preuve: Posons $U = (u, v)^T \in \mathbb{R}_+^2$, $F(U) = (F_1(U), F_2(U))$, avec :

$$\begin{cases} F_1(U) = u(1-u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ F_2(U) = \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases}$$

Le système (2.6) peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = F(U), \quad (2.7)$$

avec $U(0) = (u(0), v(0))$.

F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^2 car F_1 et F_2 le sont. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (2.6) avec la condition initiale $U(0)$ admet une unique solution maximale. ■

2.3 Analyse mathématique du modèle

Proposition 2.3.3. (*Etats stationnaires*)

Le système (2.6) admet au plus trois équilibres :

$$E_0 = (0, 0), E_1 = (0, 1) \text{ et pour } \alpha > \delta \text{ on pose } \mathcal{R}_1 = \frac{\alpha}{\delta(\beta + 1)}.$$

Si $\mathcal{R}_1 > 1$, on a l'apparition du troisième équilibre $E^* = (u^*, v^*)$ avec :

$$u^* = \frac{\delta\beta}{\alpha - \delta}$$

et

$$v^* = \frac{(1 - u^*)(\beta + u^*)}{\alpha}.$$

Preuve: Les états stationnaires de (2.6) sont donnée par la relation :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} u \left(1 - u - \frac{\alpha u}{\beta + u} \right) = 0 \\ v \left(\frac{\alpha u}{\beta + u} - \delta \right) = 0 \end{cases}$$

ainsi,

$$\begin{cases} u = 0 \text{ ou } \frac{1}{\alpha}(1 - u)(\beta + u) = v \\ v = 0 \text{ ou } u = \frac{\delta\beta}{\alpha - \delta} \end{cases}$$

On aboutit donc à :

$$u = 0 \text{ et } v = 0$$

ou

$$u = 1 \text{ et } v = 0$$

ou

$$u = \frac{\delta\beta}{\alpha - \delta} \text{ et } v = \frac{(1 - u)(\beta + u)}{\alpha}.$$

La dernière solution est écologiquement acceptable si : $\alpha > \delta$ et $\frac{\alpha}{\delta(\beta + 1)} > 1$. ■

Proposition 2.3.4. (*Stabilité des équilibres*)

- (i) E_0 est un point col, donc *instable*.
- (ii) E_1 est *localement asymptotiquement stable* si $\mathcal{R}_1 \leq 1$, *instable* si $\mathcal{R}_1 > 1$.

2.3 Analyse mathématique du modèle

Preuve: La matrice Jacobienne associée au système (2.6) est donnée par :

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2u - \frac{\alpha\beta v}{(\beta + u)^2} & -\frac{\alpha u}{\beta + u} \\ \frac{\alpha\beta v}{(\beta + u)^2} & \frac{\alpha u}{\beta + u} - \delta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Ainsi :

- Pour $E_0 = (0, 0)$ la matrice jacobienne est donnée par :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs propres sont de signes contraires. Donc E_0 est un **col** avec instabilité des proies et stabilité des prédateurs. Ce qui signifie qu'à long terme la population des prédateurs va tendre vers l'extinction si rien n'est fait. On en déduit que E_0 est un point d'équilibre instable.

- Pour $E_1 = (1, 0)$ la matrice jacobienne est donnée par :

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\alpha}{\beta + 1} \\ 0 & \frac{\alpha}{\beta + 1} - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\alpha}{\beta + 1} \\ 0 & \delta(\mathcal{R}_1 - 1) \end{pmatrix}.$$

Donc si $\mathcal{R}_1 < 1$ alors E_1 est **asymptotiquement stable**, si $\mathcal{R}_1 > 1$ E_1 est **instable**.

Si $\mathcal{R}_1 = 1$, E_1 est un point **non hyperbolique stable**. En effet, comme la théorie de linéarisation n'est plus valable dans ce cas, on va utiliser le théorème de la variété centrale.

Les valeurs propres de $J(E_1)$ sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 0$ et les sous espaces associés à ces valeurs propres sont :

$$E^{\lambda_1} = \langle (1, 0) \rangle$$

et

$$E^{\lambda_2} = \langle (-c, 1) \rangle,$$

$$\text{avec } c = \frac{\alpha}{\beta + 1}.$$

Le théorème de la variété centrale stipule qu'il existe une variété centrale qui est tangente à E^{λ_2} au point $E_1 = (1, 0)$.

Approximation de la Variété Centrale :

Tout d'abord désignons par $x = u$ et $y = v$. La variété centrale est donnée par :

$$E^c = \{x = h(y) \text{ tel que } h(0) = 1 \text{ et } h'(0) = -c\}.$$

2.3 Analyse mathématique du modèle

Supposons que h est analytique ; alors on a :

$$x = 1 + a_1y + a_2y^2 + \mathcal{O}(y^3)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x = h(y) &\Leftrightarrow \dot{x} = h'(y)\dot{y} \\ &\Leftrightarrow x(1-x)(\beta+x) = h'(y)[(\alpha-\beta)xy - \beta\delta y] + \alpha xy. \end{aligned}$$

On a

$$x(1-x)(\beta+x) = -(\beta+1)a_1y - [(\beta+1)a_2 + a_1^2 + (\beta+1)a_1^2]y^2 \quad (2.10)$$

et

$$h'(y)[(\alpha-\delta)xy - \beta\delta y] + \alpha xy = [a_1((\alpha-\delta) - \beta\delta) + \alpha]y + [2a_2((\alpha-\delta) - \beta\delta) + a_1^2(\alpha-\delta) + \alpha a_1]y^2. \quad (2.11)$$

Or $\mathcal{R}_1 = 1 \Leftrightarrow (\alpha - \delta) = \beta\delta$.

On obtient :

$$h'(y)[(\alpha-\delta)xy - \beta\delta y] + \alpha xy = \alpha y + (a_1^2\delta\beta + \alpha a_1)y^2. \quad (2.12)$$

En identifiant les relations (2.10) et (2.12) on obtient :

$$a_1 = -\frac{\alpha}{\beta+1}$$

et

$$a_2 = -\frac{\alpha a_1 + [(a_1^2 + \delta)\beta + 2a_1^2]}{\beta+1}.$$

L'équation réduite à la variété centrale est :

$$\dot{y} = -\delta y + \frac{\alpha(y + a_1y^2)}{\beta+1 + a_1y + a_2y^2} = g(y). \quad (2.13)$$

Une étude du signe de g au voisinage de 0 donne le résultat suivant :

- i)* si $y > 0$ alors $g(y) < 0$.
- ii)* si $y < 0$ alors $g(y) > 0$.

Ainsi le point d'équilibre $E_1 = (1, 0)$ est un noeud stable ■

Proposition 2.3.5. (*Stabilité locale de l'équilibre de coexistence*)

- (i)* Si $1 < \mathcal{R}_1 < \frac{1}{\beta-1}$, alors E^* est foyer *localement asymptotiquement stable*.
- (ii)* Si $\mathcal{R}_1 > \frac{1}{\beta-1}$, alors E^* est foyer *instable*

2.3 Analyse mathématique du modèle

(iii) Si $\mathcal{R}_1 = \frac{1}{\beta - 1}$, alors E^* est un point de type centre. Donc **neutralement stable**.

Preuve: La matrice jacobienne en $E^* = (u^*, v^*)$ est donnée par :

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} -u^* + \frac{\alpha u^* v^*}{(\beta + u^*)^2} & -\frac{-\alpha u^*}{\beta + u^*} \\ \frac{\alpha \beta v^*}{(\beta + u^*)^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Désignons par $Det(J)$ et $Tr(J)$ respectivement le déterminant et la trace de la matrice donnée en (2.14). Alors :

$$Det(J) = \frac{\alpha u^* v^*}{(\beta + u^*)^3} > 0$$

et

$$Tr(J) = \frac{u^*}{(\beta + u^*)(\alpha - \delta)} [\alpha(1 - \beta) - \delta(1 + \beta)].$$

Puisque $Det(J) > 0$ alors E^* est un foyer. Sa stabilité dépendra du signe de $Tr(J)$. On remarque que :

$$\begin{aligned} Tr(J) < 0 &\Leftrightarrow \alpha \left[(1 - \beta) - \frac{1}{\mathcal{R}_1} \right] < 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}_1 < \frac{1}{1 - \beta}. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} Tr(J) > 0 &\Leftrightarrow \alpha \left[(1 - \beta) - \frac{1}{\mathcal{R}_1} \right] > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}_1 > \frac{1}{1 - \beta}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Tr(J) = 0 &\Leftrightarrow \alpha \left[(1 - \beta) - \frac{1}{\mathcal{R}_1} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}_1 = \frac{1}{1 - \beta}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.1. (Stabilité globale)

- (i) Si $\mathcal{R}_1 < 1$, alors E_1 est un nœud globalement asymptotiquement stable.
- (ii) Si $\mathcal{R}_1 > 1$, alors E_1 est un point de type col, donc instable et l'équilibre E^* existe.
- (iii) Si $\mathcal{R}_1 = 1$, alors E_1 est un nœud globalement asymptotiquement stable.

Preuve:

2.3 Analyse mathématique du modèle

- (i) Si $\mathcal{R}_1 < 1$, alors E_1 est un nœud localement asymptotiquement stable. De plus il est sous cette condition l'unique équilibre du système (2.6) qui soit localement asymptotiquement stable. On en déduit que E_1 est un nœud globalement asymptotiquement stable.
- (ii) D'après la proposition (2.3.4).
- (ii) Se fait comme dans l'article de Ying yen and Chin kwei (2008) [25].

■

Théorème 2.3.2. (*stabilité globale de l'équilibre de coexistence*)

- (i) Si $1 < \mathcal{R}_1 < \frac{1}{\beta - 1}$, alors E^* est foyer **globalement asymptotiquement stable**.
- (ii) Si $\mathcal{R}_1 > \frac{1}{\beta - 1}$, alors E^* est un foyer instable et le système (2.6) admet un cycle limite stable.

Preuve: Voir l'article de Ying yen and Chin kwei (2008) [25]. ■

Remarque 2.3.1. *L'apparition du cycle limite lorsque \mathcal{R}_1 traverse la valeur $\frac{1}{\beta + 1}$ est connue sous le nom de **bifurcation de Höpf**. Le cycle limite étant stable, on dit que la bifurcation de Höpf est **super critique**. Dans le cas contraire elle est dite **sous critique**.*

2.3.2 Analyse du modèle spatio-temporel

Dans cette section, on s'intéresse juste à l'analyse de stabilité linéaire permettant de donner les conditions d'apparition de structures spatiales périodiques (patterns). En d'autres termes, on recherche les conditions de l'instabilité de Turing provoquée par l'état stationnaire homogène $E^* = (u^*, v^*)$ lorsqu'il est stable dans la dynamique locale. De manière simple on recherche les conditions pour lesquelles E^* stable (sous certaines conditions) dans la dynamique purement temporelle devient instable dans la dynamique spatio-temporelle pour former les patterns.

Cette étude de stabilité linéaire sera faite en deux parties. La première consistera à l'analyse de la dynamique spatio-temporelle locale puis la seconde la dynamique spatio-temporelle non locale.

2.3 Analyse mathématique du modèle

2.3.2.1 Analyse de stabilité linéaire du modèle spatio-temporel local

Le modèle spatio-temporel du modèle temporel (2.6) est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) > 0$ et $v(x, 0) = v_0(x) > 0$, $x \in \Omega =]-M; M[\in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, et les conditions aux bords de Newman homogène c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Notons qu'en posant $\mathbf{u} = (u, v)^T$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = (L^2(\Omega))^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$, avec :

$$\begin{cases} F_1(u, v) = u(1-u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ F_2(u, v) = \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases}$$

le système (2.15) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}\Delta \mathbf{u}.$$

En définissant l'opérateur $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X$ par :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -\mathbf{D}\Delta \mathbf{u},$$

avec :

$$D(\mathbf{A}) = (H_N(\Omega))^2,$$

et :

$$H_N^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^2(\Omega) : \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Donc \mathbf{A} m-accréatif et F est localement lipschitzienne, donc le théoème (1.4.7) assure l'existence d'une unique solution locale faible.

Pour effectuer l'analyse de stabilité linéaire, nous allons linéariser le système (2.15) au voisinage de E^* . Pour cela on va poser une légère déviation :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{pmatrix}.$$

2.3 Analyse mathématique du modèle

Proposition 2.3.6. (*Système Linéarisé*)

Le système linéarisé au voisinage de E^* est :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{J}\mathbf{W} + \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{W}, \quad (2.16)$$

avec \mathbf{J} la matrice jacobienne associée au système temporel (2.6) en E^* ,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ où :}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -u^* + \frac{\alpha u^* v^*}{(\beta + u^*)^2}, \\ a_{12} &= -\frac{\alpha u^*}{\beta + u^*}, \\ a_{21} &= \frac{\alpha \beta v^*}{(\beta + u^*)^2}, \\ a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.3. (*Absence de structures spatiales périodiques*)

Le système (2.15) ne produit aucune structure spatiale périodique.

Preuve: D'après la condition (1.16) trouvée au chapitre 1 pour qu'il y ait apparition de structures spatiales dans un système de réaction diffusion, on doit avoir simultanément :

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} < 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0, \\ a_{11} + da_{22} > 2\sqrt{d}\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Or, ce système de conditions donné par (2.17) ne peut être vérifié simultanément car $a_{22} = 0$.

On conclut donc qu'il est impossible d'avoir apparition de patterns. ■

Nous allons dans la suite passer à l'analyse de stabilité linéaire du modèle non local.

2.3.2.2 Analyse de stabilité du modèle spatio temporel non local.

Rappelons que, le modèle non local est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \right) - \frac{\alpha u(x, t) v(x, t)}{\beta + u(x, t)}, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha u(x, t) v(x, t)}{\beta + u(x, t)} - \delta v(x, t). \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans la sous section précédente on recherche les conditions pour lesquelles E^* , qui est stable dans la dynamique purement temporelle, va se déstabiliser dans la dynamique non locale

2.3 Analyse mathématique du modèle

pour former les patterns. Pour ce faire, on fera une analyse de stabilité linéaire du modèle non local en considérant une déviation :

$$n(x, t) = u(x, t) - u^*$$

et

$$p(x, t) = v(x, t) - v^*$$

Proposition 2.3.7. (Système linéarisé)

Le système linéarisé du système intégro-différentiel (2.18) est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} + (a_{11} + u^*) n(x, t) + a_{12} p(x, t) - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x + y) dy, \\ \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + a_{21} n(x, t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Preuve: $n = u - u^* \Rightarrow u = n + u^*$ d'où $\partial_t n = \partial_t u$ et $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

De même,

$$\partial_t p = \partial_t v \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Ainsi, :

$$\partial_t n = d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (n + u^*) \left[1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) (n(x + y) + u^*) dy \right] - \frac{\alpha(n + u^*)(p + v^*)}{\beta + n + u^*}. \quad (2.20)$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta + n + u^*} &= \frac{1}{\beta + u^*} \left[\frac{1}{1 + \frac{n}{\beta + u^*}} \right] \\ &= \frac{1}{\beta + u^*} - \frac{n}{(\beta + u^*)^2} + \mathcal{O}(n^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3 Analyse mathématique du modèle

Ainsi, en injectant (2.21) dans (2.20) on a :

$$\begin{aligned}
 \partial_t n &= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (n + u^*) \left[1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) (n(x + y) + u^*) dy \right] - \left(\frac{\alpha u^* v^*}{\beta + u^*} + \left[\frac{\alpha v^*}{\beta + u^*} - \frac{\alpha u^* v^*}{(\beta + u^*)^2} \right] n + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha u^*}{\beta + u^*} p \right) \\
 \partial_t n &= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (n + u^*) \left[(1 - u^*) - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x + y) dy \right] - \left(\frac{\alpha u^* v^*}{\beta + u^*} + \left[\frac{\alpha \beta v^*}{(\beta + u^*)^2} - \right] n + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\alpha u^*}{\beta + u^*} p \right) \\
 \partial_t n &= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \left[u^*(1 - u^*) - \frac{\alpha u^* v^*}{\beta + u^*} \right] + \left[(1 - u^*) - \frac{\alpha \beta v^*}{(\beta + u^*)^2} \right] n - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x + y) dy \\
 &\quad - \frac{\alpha u^*}{\beta + u^*} p.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Puisque (u^*, v^*) est un état stationnaire du système (2.18) alors on a :

$$u^*(1 - u^*) - \frac{\alpha u^* v^*}{\beta + u^*} = 0,$$

et

$$(1 - u^*) - \frac{\alpha \beta v^*}{(\beta + u^*)^2} = \frac{\alpha u^* v^*}{(\beta + u^*)^2} = a_{11} + u^*.$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (a_{11} + u^*) n + a_{12} p - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x + y) dy.$$

De la même manière, on a :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{\alpha u^* v^*}{\beta + u^*} - \delta v^* \right) + \frac{\alpha \beta v^*}{(\beta + u^*)^2} n + \left[\frac{\alpha u^*}{\beta + u^*} - \delta \right] p.$$

Puisque (u^*, v^*) est un état stationnaire, alors :

$$\frac{\alpha u^* v^*}{\beta + u^*} - \delta v^* = 0,$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a_{21} n.$$

■

Proposition 2.3.8. (Problème Aux Valeurs Propres)

Le problème aux valeurs associé au système linéaire (2.19) est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda n(x) &= dn''(x) + (a_1 + u^*) n(x) + a_{12} p(x) - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x + y) dy, \\ \lambda p(x) &= p''(x) + a_{21} n(x), \end{cases} \tag{2.23}$$

2.3 Analyse mathématique du modèle

où λ est la valeur propre associée à l'état stationnaire E^* .

Preuve: A partir du système linéaire (2.19) posons :

$$\mathbf{n} = (n, v) \quad \mathbf{G}(\mathbf{n}) = \mathbf{G}(n, v) = (G_1(n, v), G_2(n, v))$$

avec :

$$\begin{aligned} G_1(n, v) &= (a_{11} + u^*)n + a_{12}p - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y)dy, \\ G_2(n, v) &= a_{21}n, \end{aligned}$$

et définissons les opérateurs :

$$\mathbf{A} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X \quad \text{et} \quad \mathbf{L} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X$$

tel que :

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = -\mathbf{D}\Delta\mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}\mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{G}(\mathbf{n})$$

L'équation linéaire (2.19) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \mathbf{L}\mathbf{n} \tag{2.24}$$

Le problème au valeur propre revient à chercher une valeur propre λ de l'opérateur \mathbf{L} . Ainsi en considérant \mathbf{n} comme fonction propre, on peut écrire :

$$\mathbf{L}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$$

il en résulte que :

$$\begin{cases} \lambda n(x) &= dn''(x) + (a_1 + u^*)n(x) + a_{12}p(x) - u^* \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y)dy, \\ \lambda p(x) &= p''(x) + a_{21}n(x), \end{cases}$$

■

Proposition 2.3.9. (Equation caractéristique)

L'équation caractéristique issue de la linéarisation est donnée par :

$$\lambda^2 + [-(a_{11} + u^*) + u^*\bar{\phi}(k) + (d+1)k^2] \lambda - a_{12}a_{21} + (u^*\bar{\phi}(k) - (a_{11} + u^*))k^2 + dk^4 = 0, \tag{2.25}$$

où $\bar{\phi}(k)$ correspond à la transformée de Fourier de la fonction ϕ appliquée au point k .

2.3 Analyse mathématique du modèle

Preuve: En appliquant la transformée de Fourier au système (2.23) on obtient :

$$\begin{cases} \lambda \bar{n}(k) &= -dk^2 \bar{n}(k) + (a_{11} + u^*) \bar{n}(k) + a_{12} \bar{p}(k) - u^* \bar{\phi}(k) \bar{n}(k), \\ \lambda \bar{p}(k) &= a_{21} \bar{n}(k) - k^2 \bar{p}(k), \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{n}(k) \\ \bar{p}(k) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \bar{n}(k) \\ \bar{p}(k) \end{pmatrix},$$

avec :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -dk^2 + (a_{11} + u^*) - u^* \bar{\phi}(k) & a_{12} \\ a_{21} & -k^2 \end{pmatrix}.$$

Posons $Tr(\mathbf{G})$ et $Det(\mathbf{G})$ respectivement la trace et le déterminant de \mathbf{G} . Alors :

$$Tr(\mathbf{G}) = (a_{11} + u^*) - u^* \bar{\phi}(k) - (d + 1)k^2$$

et

$$Det(\mathbf{G}) = -a_{12}a_{21} + (u^* \bar{\phi}(k) - (a_{11} + u^*))k^2 + dk^4;$$

d'où l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - [-(a_{11} + u^*) + u^* \bar{\phi}(k) + (d + 1)k^2] \lambda - a_{12}a_{21} + (u^* \bar{\phi}(k) - a_{11})k^2 + dk^4 = 0.$$

■

Posons

$$Tr(k, M) = (a_{11} + u^*) - u^* \bar{\phi}(k) - (d + 1)k^2$$

et

$$Det(k, M) = -a_{12}a_{21} + (u^* \bar{\phi}(k) - (a_{11} + u^*))k^2 + dk^4 = 0$$

l'équation caractéristique devient :

$$\lambda^2 + Tr(k, M)\lambda + Det(k, M) = 0 \tag{2.26}$$

Ainsi, l'équilibre (u^*, v^*) sera stable si :

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall M \in \mathbb{R}_+^* \quad \lambda(k, M) < 0.$$

Dans le cas contraire (u^*, v^*) est instable. Comme nous l'avons vu a chapitre 1 ceci revient à discuter sur le signe de $Tr(k, M)$ et celui de $Det(k, M)$

Notons que, lorsque $M = k = 0$, on revient au modèle temporel et E^* est un noeud stable donc $Tr(0, 0) < 0$ et $Det(0, 0) > 0$.

De ce fait, on veut trouver les seuils k_T et M_T au dela desquels, $Det(k, M)$ initialement positif devient négatif.

2.3 Analyse mathématique du modèle

Lemme 2.3.1. *Les seuils k_T et M_T au dela desquels on a l'apparition des structures spatiales sont les solutions du système(D'après Banerjee et Volpert (2016)[4]) :*

$$\begin{cases} Det(k, M) = 0, \\ \frac{\partial Det}{\partial k}(k, M) = 0, \\ \frac{\partial Det}{\partial M}(k, M) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Preuve: Remarquons que la valeur propre λ dépend de k . De plus k est appelé nombre d'onde ou mode permettant de déterminer la périodicité de la structure spatiale observée. En outre, chaque mode k est associé à une distance M au dela de laquelle la structure spatiale périodique est observée.

Le pattern apparait lorsque $Det(k, M)$ initialement positif devient négatif. Donc $Det(k_T, M_T) = 0$. De plus $Det(k, M)$ redevient positif car on doit avoir un nombre fini de modes instables pour que la distribution périodique n'intègre pas les hautes fréquences. En effet, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty; M \rightarrow +\infty} Det(k, M) = +\infty$ nous avons un changement de concavité. On conclut que $\frac{\partial Det}{\partial k}(k_T, M_T) = 0$ et $\frac{\partial Det}{\partial M}(k_T, M_T) = 0$. ■

Théorème 2.3.4. (Conditions d'apparition des patterns)

Si

$$M > M_{T_j} = z_j \left(\frac{d_{T_j}}{-a_{21}a_{12}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.28)$$

alors, on a l'apparition des patterns avec $z_j, j = 1, 2, \dots$, les solutions positives strictement croissante de l'équation $\tan z = z$, de plus on pose

$$\theta_j = \frac{\sin z_j}{z_j}.$$

on a

$$k_{T_j} = \left(\frac{-a_{12}a_{21}}{d_{T_j}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.29)$$

avec

$$d < d_{T_j} = \frac{(u^*(\theta_j - 1) - a_{11})^2}{-4a_{12}a_{21}}. \quad (2.30)$$

Preuve: on a

$$Det(k, M) = -a_{12}a_{21} + (u^*\bar{\phi}(k) - (a_{11} + u^*))k^2 + dk^4 = 0$$

et

$$\bar{\phi}(k) = \frac{\sin kM}{kM}.$$

2.3 Analyse mathématique du modèle

En différentiant $Det(k, M)$ par rapport à M on obtient

$$u^* k^2 \left(\frac{\cos kM}{kM} - \frac{\sin kM}{kM^2} \right) = 0$$

et par suite on obtient :

$$\tan kM = kM.$$

En posant $z = kM$, l'expression précédente nous donne :

$$\tan z = z \tag{2.31}$$

L'équation (2.31) admet une infinité de solution (sur \mathbb{R}), z_j satisfaisant :

$$0 < z_1 < z_2 < \dots < z_j < \dots \quad j = 1, 2, \dots$$

Posons

$$\theta_j = \frac{\sin z_j}{z_j}.$$

De l'équation $Det(k, M) = 0$ on obtient :

$$k_{T_j}^2 = \frac{a_{11} - u^*(\theta_j - 1) + \sqrt{(u^*(\theta_j - 1) - a_{11})^2 + 4da_{12}a_{21}}}{2d}. \tag{2.32}$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial Det(k, M)}{\partial k} = 0$, on obtient :

$$(u^*(\theta_j - 1) - a_{11})^2 = -4da_{12}a_{21}. \tag{2.33}$$

Ainsi :

$$k_{T_j}^2 = \frac{a_{11} - u^*(\theta_j - 1)}{2d} = \sqrt{\frac{-a_{21}a_{12}}{d}} \tag{2.34}$$

et la valeur de M associée est :

$$M_{T_j} = \frac{z_j}{k_{T_j}} = z_j \left(\frac{d}{-a_{21}a_{12}} \right)^{\frac{1}{4}}, j = 1, 2, \dots \tag{2.35}$$

■

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Le modèle de Banerjee et Volpert que nous avons analysé précédemment, montre qu'il est nécessaire de considérer la compétition de manière non locale entre les proies pour les ressources, pour qu'il y ait apparition des patterns. Dans cette optique, nous allons construire un modèle de même type en rajoutant dans la croissance des proies **l'effet allée** (prise de manière additive); nous allons supposer que la **prédation se déroule de manière non locale**. L'objectif dans la construction et l'analyse de ce nouveau modèle est de montrer qu'il conduit (lui aussi) à l'apparition de structures spatiales (patterns), ceci au voisinage de l'état stationnaire de coexistence.

2.4.1 Construction du modèle

Rappelons qu'en dynamique des populations, plusieurs fonctions de croissance ont été utilisées dans la littérature. Nous avons par exemple la croissance logistique :

$$\frac{du}{dt} = ru(k - u), \quad (2.36)$$

où r désigne la croissance intrinsèque de la population et k la capacité de charge.

D'un autre côté nous avons la loi de croissance avec "effet allée" de type multiplicatif :

$$\frac{du}{dt} = ru(k - u)(u - l). \quad (2.37)$$

L'équation (2.37) exprime deux effets : **la retroaction positive** sur la croissance dû à la **coopération** à basse densité de la population et la **retroaction négative** sur la croissance dû à la **compétition** à forte densité de population. Dans cette formulation $k - u$ représente le terme de compétition et $u - l$, le terme de coopération avec l le seuil de l'effet allée satisfaisant la relation $0 < l < k$.

Un inconvénient survient lorsqu'on considère l'effet Allée de manière multiplicative. En effet, avec cette configuration la compétition et la coopération s'influencent mutuellement ce qui ne permet pas de rendre compte de l'importance de chacune d'elles dans le modèle (Jankovic et Petrovskii (2014)[14] dans Banerjee et al. (2018)[2]).

Jankovic et Petrovskii, proposent une formulation **additive** de cette croissance avec effet allée :

$$\frac{du}{dt} = u(f(u) - \sigma_1 - g(u)), \quad (2.38)$$

où $f(u)$ désigne la croissance de la population liée à la reproduction, $g(u)$ désigne la mortalité liée aux effets de compétition et σ_1 la mortalité naturelle.

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Nous allons donc nous servir de l'équation (2.38) pour construire notre modèle.

- Nous considérons une croissance avec effet allée (prise de manière additive) avec dans la formulation de Jankovi et Petrovskii $f(u) = au$ et $g(u) = au^2$ [2]. On suppose comme dans le modèle analysé précédemment que la reponse fonctionnelle des prédateurs est celle de Holling type II, ensuite que la croissance des prédateurs est proportionnelle à leur prédation, et enfin que la densité des proies est normalisé par la capacité de charge. Sous ces hypothèses, on obtient le modèle temporel suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au^2(1-u) - \sigma_1 u - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\theta uv}{\beta + u} - \sigma_2 v. \end{cases} \quad (2.39)$$

- On désigne maintenant par $u(x, t)$ la densité des proies à l'instant t en un point x et $v(x, t)$ celle des prédateurs. Le modèle (2.39) peut être réécrit en un système de réaction diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au^2(x, t)(1-u(x, t)) - \sigma_1 u(x, t) - \frac{\alpha u(x, t)v(x, t)}{\beta + u(x, t)}, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\theta u(x, t)v(x, t)}{\beta + u(x, t)} - \sigma_2 v(x, t), \end{cases} \quad (2.40)$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) > 0$, et $v(x, 0) = v_0(x) > 0$, $x \in \Omega =]-M; M[\subset \mathbb{R}$, $t \geq 0$, et les conditions aux bords de Newman homogène. d est le ratio entre le coefficient de diffusion des proies et celui des prédateurs.

- Nous considérons que la compétition entre les proies pour les ressources ne se déroule pas de manière locale mais de manière non locale comme dans le modèle de Banerjee et Volpert (2016) [4] que nous avons analysé dans la section précédente. On a l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au(x, t)^2 \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x+y, t) dy \right) - \sigma_1 u(x, t) - \frac{\alpha u(x, t)v(x, t)}{\beta + u(x, t)}, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\theta u(x, t)v(x, t)}{\beta + u(x, t)} - \sigma_2 v(x, t). \end{cases} \quad (2.41)$$

- Nous allons supposer que, la prédation se déroule de manière non locale. En d'autres termes, un prédateur situé en un point x de l'espace peut consommer les proies qui sont

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

situer en un point quelconque y du domaine (Banerjee et Volpert (2016) [3]). Ainsi le taux de consommation des proies au point x devient :

$$\frac{\alpha u(x, t)}{\beta + u(x, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) v(x + y, t) dy. \quad (2.42)$$

- D'un autre coté la reproduction des prédateurs au point x est proportionnelle à leur concentration en ce point et aux ressources disponibles. Ainsi la quantité de ressources consommées est (Banerjee et Volpert (2016) [3]) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) \frac{u(x + y, t)}{\beta + u(x + y, t)} dy. \quad (2.43)$$

En remplaçant (2.42) et (2.43) dans le système (2.41) on obtient notre modèle donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au^2(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \right) - \sigma_1 u(x, t) - \\ \frac{\alpha u(x, t)}{\beta + u(x, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) v(x + y, t) dy, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \theta v(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) \frac{u(x + y, t)}{\beta + u(x + y, t)} dy - \sigma_2 v(x, t). \end{cases} \quad (2.44)$$

avec :

- * a est le taux de croissance intrinsèque.
- * σ_1 le taux de mortalité naturelle des proies
- * α est le taux de consommation des proies par les prédateurs.
- * θ est le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs.
- * β constante de saturation.
- * σ_2 la mortalité naturelle des prédateurs.
- * d est le ratio entre le coefficient de diffusion des proies et celui des prédateurs.

2.4.2 Propriétés de la fonction noyau

La fonction noyau choisie pour cette analyse est la même que celle du modèle précédent, donc vérifie les propriétés suivantes :

- Elle est positive : $\phi(z, M) \geq 0$, pour tout $z \in \mathbb{R}$.
- Lorsque M tend vers 0, la dynamique devient strictement locale. Ainsi la fonction poids ϕ est réduite à une fonction de dirac sur \mathbb{R} .

$$\lim_{M \rightarrow 0} \phi(y, M) = \delta(y).$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

(iii) La fonction ϕ est intégrable sur \mathbb{R} et :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(y, M) dy = 1.$$

Cette condition exprime le fait que toutes les interactions générées dans le domaine prennent fin dans le domaine.

Dans le cadre de ce travail, c'est la fonction porte qui a été choisie :

$$\phi(x, M) = \begin{cases} \frac{1}{2M} & , |x| < M \\ 0 & , |x| > M. \end{cases} \quad (2.45)$$

2.4.3 Analyse mathématique du modèle

2.4.3.1 Analyse du modèle temporel

Proposition 2.4.1. (Système temporel)

Le modèle purement temporel est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au^2(1-u) - \sigma_1 u - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\theta uv}{\beta + u} - \sigma_2 v. \end{cases} \quad (2.46)$$

Preuve: Il s'agit du système obtenu en négligeant la variabilité spatiale dans le système (2.44) c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = d \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} + au^2(t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(t) dy \right) - \sigma_1 u(t) - \frac{\alpha u(t)}{\beta + u(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) v(t) dy, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2} + \theta v(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \frac{u(t)}{\beta + u(t)} dy - \delta v(t). \end{cases}$$

En utilisant la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) dy = 1,$$

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au^2(1-u) - \sigma_1 u - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\theta uv}{\beta + u} - \sigma_2 v. \end{cases}$$

■

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Proposition 2.4.2. (*Existence et unicité des solutions*)

Etant données les conditions initiales $u(0)$ et $v(0)$, le système (2.46) admet une unique solution.

Preuve: Posons $U = (u, v)^T \in \mathbb{R}_+^2$, $F(U) = (F_1(U), F_2(U))$ avec :

$$\begin{cases} F_1(U) &= au^2(1-u) - \sigma_1 u - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ F_2(U) &= \frac{\theta uv}{\beta + u} - \sigma_2 v. \end{cases}$$

Le système (2.46) peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = F(U), \quad (2.47)$$

avec $U(0) = (u(0), v(0))$.

F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^2 car F_1 et F_2 le sont. Ainsi d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le système (2.46) avec la condition initiale $U(0)$ admet une unique solution maximale. ■

Proposition 2.4.3. (*Equilibres*)

Les équilibres du système (2.46) sont :

- ✓ $E_0 = (0, 0)$ l'équilibre trivial.
- ✓ Si $\sigma_1 < \frac{a}{4}$ alors on a l'existence de deux équilibres sans prédateurs $E_1 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2a}, 0\right)$ et $E_2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2a}, 0\right)$
- ✓ Si $\sigma_1 = \frac{a}{4}$ alors on a un unique équilibre sans prédateurs $E_{12} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- ✓ Si $0 < \sigma_2 < \frac{\theta}{\beta + 1}$ et $0 < \sigma_1 < \frac{a\beta\sigma_2}{\theta - \sigma_2} \left(1 - \frac{\beta\sigma_2}{\theta - \sigma_2}\right)$, alors on a un équilibre de coexistence (u_*, v_*) donné par :

$$\begin{cases} u_* &= \frac{\beta\sigma_2}{\theta - \sigma_2}, \\ v_* &= \frac{\beta + u_*}{\alpha} [au_*(1 - u_*) - \sigma_1]. \end{cases} \quad (2.48)$$

Preuve: Les équilibres du système (2.46) sont donnés par la relation :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} &= u \left[au(1-u) - \frac{\alpha v}{\beta + u} - \sigma_1 \right] = 0, \\ \frac{dv}{dt} &= v \left[\frac{\theta u}{\beta + u} - \sigma_2 \right] = 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

ceci entraîne :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{ou} & au(1-u) = \frac{\alpha v}{\beta+u} + \sigma_1, \\ v = 0 & \text{ou} & \frac{\theta u}{\beta+u} = \sigma_2, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{ou} & v = \frac{\beta+u}{\beta} [au(1-u) - \sigma_1], \\ v = 0 & \text{ou} & u = \frac{\beta\sigma_2}{\theta - \sigma_2}. \end{cases}$$

On aboutit à

$$u = 0 \quad \text{et} \quad v = 0$$

ou

$$au^2 - au + \sigma_1 = 0 \quad \text{et} \quad v = 0$$

ou

$$u = u^* = \frac{\beta\sigma_2}{\theta - \sigma_2} \quad \text{et} \quad v = v^* = \frac{\beta + u^*}{\alpha} [au^*(1-u^*) - \sigma_1]$$

L'équation :

$$au^2 - au + \sigma_1 = 0 \tag{2.50}$$

admet au plus deux solutions selon les cas. En effet, l'équation (2.50) :

- n'a aucune solution si $\sigma_1 > \frac{a}{4}$
- a une unique solution si $\sigma_1 = \frac{a}{4}$ qui est $u_0 = \frac{1}{2}$
- a deux solutions si $\sigma_1 < \frac{a}{4}$. Ces deux solutions sont :

$$u_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2a}$$

et

$$u_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2a}.$$

On a donc au plus 5 équilibres qui sont : $(0, 0)$; $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, (u_*, v_*) . ■

On s'intéresse principalement à la stabilité de l'équilibre de coexistence. Néanmoins nous allons donner les conditions de stabilité des autres équilibres.

Proposition 2.4.4. *(Stabilité asymptotique de l'équilibre de trivial)*

L'équilibre trivial $E_0 = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Preuve: La matrice Jacobienne associée à l'équilibre trivial est :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Ainsi, les valeurs propres associées à l'équilibre E_0 sont : $-\sigma_1$ et $-\sigma_2$. Ainsi l'équilibre $E_0 = (0,0)$ est localement asymptotiquement stable. ■

Proposition 2.4.5. (Stabilité des équilibres sans prédateurs)

- ✓ Supposons $\sigma_1 < \frac{a}{4}$; alors l'équilibre sans prédateurs E_1 est :
 - **localement asymptotiquement Stable** si $\sigma_2 > \frac{\theta [a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}$.
 - **instable** si $\sigma_2 < \frac{\theta [a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}$.
- ✓ Supposons $\sigma_1 < \frac{a}{4}$. L'équilibre E_2 est :
 - **localement asymptotiquement Stable** si $\sigma_2 > \frac{\theta [a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}$.
 - **instable** si $\sigma_2 < \frac{\theta [a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}$.

Preuve: Supposons que $\sigma_1 < \frac{a}{4}$. La matrice Jacobienne associée à l'équilibre $E_1 = (u_1, 0)$ avec : $u_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2a}$ est :

$$J(u_1, 0) = \begin{pmatrix} au_1(2 - 3u_1) - \sigma_1 & -\frac{\alpha u_1}{\beta + u_1} \\ 0 & \frac{\theta u_1}{\beta + u_1} - \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

En remarquant que :

$$au_1(2 - 3u_1) - \sigma_1 = \frac{(4\sigma_1 - a) - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2} < 0$$

et

$$\frac{\theta u_1}{\beta + u_1} - \sigma_2 = \frac{\theta [a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}},$$

alors les valeurs propres de $J(u_1, 0)$ sont de même signe négatif si $\sigma_2 > \frac{\theta [a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}$,

et de signe contraire si $\sigma_2 < \frac{\theta [a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}]}{(1 + 2\beta)a + \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}$. On fait de même pour $(u_2, 0)$ avec

$$u_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a\sigma_1}}{2a} \quad \blacksquare$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Proposition 2.4.6. (Stabilité locale de l'équilibre de coexistence)

On suppose $\theta > \sigma_2$. Posons $\mathcal{R}_{00} = \frac{(\beta + 1) \left(\frac{\theta}{\beta + 1} - \sigma_2 \right) (\theta + \sigma_2)}{\beta \theta \sigma_2}$ et $\mathcal{R}_{01} = \frac{\beta^2 a \theta \sigma_2}{\sigma_1 (\theta - \sigma_2)^2}$.

✓ Si $\mathcal{R}_{00} \leq 1$ alors (u_*, v_*) est **localement asymptotiquement stable**.

✓ Si $\mathcal{R}_{00} > 1$ alors :

† si $\mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) > 1$ alors (u_*, v_*) est **instable**.

† si $\mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) < 1$ alors (u_*, v_*) est **stable**.

† si $\mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) = 1$ alors (u_*, v_*) est un point de type centre donc **neutralement stable**.

Preuve: La matrice jacobienne associée à l'équilibre $E_* = (u_*, v_*)$ est :

$$J(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} au_*(2 - 3u_*) - \frac{\alpha\beta v_*}{(\beta + u_*)^2} - \sigma_1 & -\frac{\alpha u_*}{\beta + u_*} \\ \frac{\theta\beta v_*}{\beta + u_*} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Désignons par $Det(J)$ et $Tr(J)$ respectivement le déterminant et la trace de matrice donnée en (2.53). Alors

$$Det(J) = \frac{\alpha\beta\theta u_* v_*}{(\beta + u_*)^2} > 0 \quad (2.54)$$

et

$$\begin{aligned} Tr(J) &= \frac{u_*}{\beta + u_*} \left[\frac{\beta^2 a \theta \sigma_2}{(\theta - \sigma_2)^2} (\mathcal{R}_{00} - 1) - \sigma_1 \right], \\ Tr(J) &= \frac{u_*}{\sigma_1(\beta + u_*)} [\mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) - 1]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Puisque $Det(J)$ est strictement positif, la stabilité de (u_*, v_*) dépendra du signe de $Tr(J)$.

Ainsi :

si $\mathcal{R}_{00} \leq 1$ alors $Tr(J) < 0$ car $\mathcal{R}_{01} > 0$.

De même si $\mathcal{R}_{00} > 1$ alors :

$$Tr(J) < 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) < 1,$$

et

$$Tr(J) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) > 1.$$

On a aussi :

$$Tr(J) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) = 1.$$

■

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Remarque 2.4.1. Lorsque $\mathcal{R}_{00} > 1$ et $\mathcal{R}_{01}(\mathcal{R}_{00} - 1) = 1$, alors on a une bifurcation de Hopf.

Dans la section suivante on s'intéresse aux structures spatiales périodiques produites par l'état stationnaire de coexistence $E_* = (u_*, v_*)$. Pour cela, on va rechercher cette apparition de structures spatiales premièrement sur le système spatio-temporel local, ensuite sur le système spatio-temporel non local.

2.4.3.2 Analyse de stabilité du modèle spatio-temporel local

Rappelons que le système spatio-temporel local dans ce cas est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au^2(x, t)(1 - u(x, t)) - \sigma_1 u(x, t) - \frac{\alpha u(x, t)v(x, t)}{\beta + u(x, t)}, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\theta u(x, t)v(x, t)}{\beta + u(x, t)} - \sigma_2 v(x, t), \end{cases} \quad (2.56)$$

avec $u(x, 0) = u_0(x) > 0$, et $v(x, 0) = v_0(x) > 0$, $x \in \Omega =] - M; M[\subset \mathbb{R}$, $t \geq 0$, et les conditions aux bords de Newman homogène c'est -à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

En posant $\mathbf{u} = (u, v)^T$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = (L^2(\Omega))^2$ et $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$ avec :

$$\begin{cases} F_1(u, v) = au^2(1 - u) - \sigma_1 u - \frac{\alpha uv}{\beta + u} \\ F_2(u, v) = \frac{\theta uv}{\beta + u} - \sigma_2 v \end{cases}$$

le système (2.15) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}\Delta \mathbf{u}.$$

En définissant l'opérateur $\mathbf{A} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X$ par :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = -\mathbf{D}\Delta \mathbf{u},$$

avec :

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = (H_N^2(\Omega))^2$$

et :

$$H_N^2(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^2(\Omega) : \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

On a : \mathbf{A} m -accréatif et F est localement lipschitzienne, donc le théoème (1.4.7) assure l'existence d'une unique solution locale faible.

Comme pour le modèle de Banerjee et Volpert que nous avons étudié plus haut, le système (2.56), est incapable de produire des structures spatiales. En effet, en considérant la déviation :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.4.7. (Système Linéarisé)

Le système linéarisé au voisinage de E^* est :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{J}\mathbf{W} + \mathbf{D}\nabla^2 \mathbf{W} \quad (2.57)$$

Avec \mathbf{J} la matrice jacobienne associée au système temporelle (2.6) en E^* .

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ où :}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= au_*(2 - 3u_*) - \frac{\alpha\beta v_*}{(\beta + u_*)^2} - \sigma_1 = au^*(1 - 2u^*) + \frac{\alpha\beta u^* v^*}{(\beta + u^*)^2}, \\ a_{12} &= -\frac{\alpha u^*}{\beta + u^*}, \\ a_{21} &= \frac{\theta\beta v^*}{(\beta + u^*)^2}, \\ a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Comme $a_{22} = 0$, il est impossible que les conditions de d'instabilité de Turing soient remplies. Nous allons passer présentement au système non local.

2.4.3.3 Analyse de stabilité du modèle Spatio-temporel non Local

Le modèle non local est donné par le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au^2(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \right) - \sigma_1 u(x, t) - \\ &\quad \frac{\alpha u(x, t)}{\beta + u(x, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) v(x + y, t) dy, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \theta v(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \frac{u(x + y, t)}{\beta + u(x + y, t)} dy - \sigma_2 v(x, t). \end{aligned} \right. \quad (2.58)$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Il est question à travers l'analyse de stabilité linéaire au voisinage de $E_* = (u_*, v_*)$ de déterminer une condition nécessaire d'apparition de structures spatiales périodiques. Pour cela posons :

$$n = u - u_*$$

et

$$p = v - v_*$$

Proposition 2.4.8. (Système Linéarisé)

Le système linéarisé au voisinage de $E_* = (u_*, v_*)$ est :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (a_{11} + au_*)n - au_*^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy + a_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)p(x+y, t)dy, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = d \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy. \end{cases} \quad (2.59)$$

Preuve: Comme $n = u - u_*$ alors $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

De même : $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + a(n + u_*)^2 \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)(n(x+y, t) + u_*)dy \right) - \sigma_1(n + u_*) - \\ &\quad \frac{\alpha(n + u_*)}{\beta + (n + u_*)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)(p(x+y, t) + v_*)dy. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Remarquons d'une part que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta + n + u^*} &= \frac{1}{\beta + u^*} \left[\frac{1}{1 + \frac{n}{\beta + u^*}} \right] \\ &= \frac{1}{\beta + u^*} - \frac{n}{(\beta + u^*)^2} + \mathcal{O}(n^2), \end{aligned} \quad (2.61)$$

et d'autre part que :

$$(n + u_*)^2 = u_*^2 + 2nu_* + \mathcal{O}(n^2). \quad (2.62)$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

En injectant (2.61) et (2.62) dans (2.60), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + a(u_*^2 + 2nu_*) \left[(1 - u_*) - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy \right] - \sigma_1 n \\
&\quad - \sigma_1 u_* - \left[\frac{\alpha u_*}{\beta + u_*} + \frac{\alpha n}{\beta + u_*} - \frac{\alpha u_* n}{(\beta + u_*)^2} \right] \times \left[v_* + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)p(x+y, t)dy \right] \\
&= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (au_*^2 + 2anu_*) (1 - u_*) - (au_*^2 + 2anu_*) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy \\
&\quad - \sigma_1 n - \sigma_1 u_* - \frac{\alpha u_* v_*}{\beta + u_*} - \frac{\alpha u_*}{\beta + u_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)p(x+y, t)dy - \frac{\alpha v_* n}{\beta + u_*} + \frac{\alpha u_* v_* n}{(\beta + u_*)^2} \\
&= d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \left[au_*^2(1 - u_*) - \frac{\alpha u_* v_*}{\beta + u_*} - \sigma_1 u_* \right] + \left[2au_*(1 - u_*) - \frac{\alpha \beta v_*}{(\beta + u_*)^2} - \sigma_1 \right] n - \\
&\quad au_*^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy - \frac{\alpha u_*}{\beta + u_*} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)p(x+y, t)dy.
\end{aligned}$$

Puisque (u_*, v_*) est un équilibre, alors :

$$\begin{aligned}
au_*^2(1 - u_*) - \frac{\alpha u_* v_*}{\beta + u_*} - \sigma_1 u_* &= 0, \\
2au_*(1 - u_*) - \frac{\alpha \beta v_*}{(\beta + u_*)^2} - \sigma_1 &= a_{11} + au_*^2,
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\alpha u_*}{\beta + u_*} = a_{12}.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (a_{11} + au_*) n - au_*^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy + a_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)p(x+y, t)dy.$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \theta(p + v_*) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \left[\frac{n}{\beta + u_*} + \frac{u_*}{\beta + u_*} - \frac{u_* n}{(\beta + u_*)^2} \right] dy - \sigma_2(p + v_*) \\
&= d \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \theta(p + v_*) \times \left[\frac{u_*}{\beta + u_*} + \frac{\beta}{(\beta + u_*)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy \right] - \sigma_2 p - \sigma_2 v_* \\
&= d \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left[\frac{\theta u_*}{\beta + u_*} - \sigma_2 \right] p + \frac{\beta \theta v_*}{(\beta + u_*)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)n(x+y, t)dy.
\end{aligned}$$

Puisque (u_*, v_*) est un équilibre, alors :

$$\frac{\theta u_*}{\beta + u_*} - \sigma_2 = 0$$

et

$$\frac{\beta \theta v_*}{(\beta + u_*)^2} = a_{21}.$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Ainsi :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = d \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + a_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y, t) dy.$$

■

Proposition 2.4.9. (*Problème aux Valeurs Propres*)

Le problème au valeurs propre associé au système linéaire (2.59) est :

$$\begin{cases} \lambda n(x) = dn''(x) + (a_{11} + au_*) n(x) - au_*^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y) dy + a_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) p(x+y) dy, \\ \lambda p(x) = p''(x) + a_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y) dy, \end{cases} \quad (2.63)$$

où λ est la valeur propre associée à l'état stationnaire E_* .

Preuve: A partir du système linéaire (2.59) posons :

$$\mathbf{n} = (n, v) \quad G(n, v) = (G_1(n, v), G_2(n, v))$$

avec :

$$\begin{aligned} G_1(n, v) &= (a_{11} + au_*) n - au_*^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y, t) dy + a_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) p(x+y, t) dy, \\ G_2(n, v) &= a_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y, t) dy, \end{aligned}$$

et définissons les opérateurs :

$$\mathbf{A} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X \quad \text{et} \quad \mathbf{L} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset X \rightarrow X$$

tel que :

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = -\mathbf{D}\Delta\mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}\mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{G}(\mathbf{n})$$

L'équation linéaire (2.59) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \mathbf{L}\mathbf{n} \quad (2.64)$$

Le problème au valeur propre revient à chercher une valeur propre λ de l'opérateur \mathbf{L} . Ainsi en considérant \mathbf{n} comme fonction propre, on peut écrire :

$$\mathbf{L}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$$

il en résulte que :

$$\begin{cases} \lambda n(x) = dn''(x) + (a_{11} + au_*) n(x) - au_*^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y) dy + a_{12} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) p(x+y) dy, \\ \lambda p(x) = p''(x) + a_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) n(x+y) dy, \end{cases}$$

■

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Proposition 2.4.10. (*Equation caractéristique*)

L'équation caractéristique est donnée par la relation :

$$\lambda^2 + [k^2(d+1) - (a_{11} + au_*^2) + au_*^2\bar{\phi}(k)] \lambda + dk^4 + [au_*^2\bar{\phi}(k) - (a_{11} + au_*^2)] k^2 - a_{12}a_{21}\bar{\phi}^2(k) = 0, \quad (2.65)$$

avec k le nombre d'onde associé à la valeur propre λ et $\bar{\phi}$ la transformée de Fourier de ϕ .

Preuve: En appliquant la transformée de Fourier au système (2.63), on obtient :

$$\begin{cases} \lambda \bar{n}(k) &= -dk^2 \bar{n}(k) + (a_{11} + au_*^2) \bar{n}(k) - au_*^2 \bar{\phi}(k) \bar{n}(k) + a_{12} \bar{\phi}(k) \bar{p}(k), \\ \lambda \bar{p}(k) &= -k^2 \bar{p}(k) + a_{21} \bar{\phi}(k) \bar{n}(k). \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\lambda \begin{pmatrix} \bar{n}(k) \\ \bar{p}(k) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \bar{n}(k) \\ \bar{p}(k) \end{pmatrix},$$

avec :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -dk^2 + (a_{11} + au_*^2) - au_*^2 \bar{\phi}(k) & a_{12} \bar{\phi}(k) \\ a_{21} \bar{\phi}(k) & -k^2 \end{pmatrix}.$$

Posons $Tr(\mathbf{G})$ et $Det(\mathbf{G})$ respectivement la trace et le déterminant de \mathbf{G} . Alors :

$$Tr(\mathbf{G}) = -k^2(d+1) + (a_{11} + au_*^2) - au_*^2 \bar{\phi}(k)$$

et

$$Det(\mathbf{G}) = dk^4 + [au_*^2 \bar{\phi}(k) - (a_{11} + au_*^2)] k^2 - a_{12}a_{21} \bar{\phi}^2(k).$$

D'où l'équation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^2 + [k^2(d+1) - (a_{11} + au_*^2) + au_*^2 \bar{\phi}(k)] \lambda + dk^4 + [au_*^2 \bar{\phi}(k) - (a_{11} + au_*^2)] k^2 - a_{12}a_{21} \bar{\phi}^2(k) = 0.$$

■

Posons :

$$Tr(k, M) = -k^2(d+1) + (a_{11} + au_*^2) - au_*^2 \bar{\phi}(k)$$

et

$$Det(k, M) = dk^4 + [au_*^2 \bar{\phi}(k) - (a_{11} + au_*^2)] k^2 - a_{12}a_{21} \bar{\phi}^2(k).$$

Alors l'équation caractéristique devient :

$$\lambda^2 - Tr(k, M)\lambda + Det(k, M) = 0. \quad (2.66)$$

Maintenant, nous cherchons les conditions sur k et M pour que les valeurs propres issues de l'équation (2.66) soient toutes de parties réelles positives. Ainsi il suffit que $Det(k, M) < 0$ à

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

partir de certaines valeurs de k et M respectivement. En d'autres termes comme $D(0, 0) > 0$, nous cherchons les valeurs des seuils k_T et M_T pour lesquels $Det(k, M)$ initialement positif devient négatif.

Lemme 2.4.1. *Les seuils k_T et M_T pour lesquels on a l'apparition des structures spatiales périodiques sont données sont les solutions du système (D'après Banerjee et Volpert (2016)[4]) :*

$$\begin{cases} Det(k, M) = 0, \\ \frac{\partial Det}{\partial k}(k, M) = 0, \\ \frac{\partial Det}{\partial M}(k, M) = 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

Preuve: Remarquons que la valeur propre λ dépend de k . De plus k est appelé nombre d'onde ou mode permettant de déterminer la périodicité de la structure spatiale observée. En outre, chaque mode k est associé à une distance M au dela de laquelle la structure spatiale périodique est observée.

Le pattern apparait lorsque $Det(k, M)$ initialement positif devient négatif. Donc $Det(k_T, M_T) = 0$. De plus $Det(k, M)$ redevient positif car on doit avoir un nombre fini de modes instables pour que la distribution périodique n'intègre pas les hautes fréquences. En effet, comme $\lim_{k \rightarrow +\infty; M \rightarrow +\infty} Det(k, M) = +\infty$ donc nous avons un changement de concavité. Donc $\frac{\partial Det}{\partial k}(k_T, M_T) = 0$ et $\frac{\partial Det}{\partial M}(k_T, M_T) = 0$. ■

Théorème 2.4.1. (Conditions d'apparitions des patterns)

Pour que les structures spatiales périodiques émergent, il est nécessaire que :

$$M > M_{T_j} = \frac{z_j}{\sqrt{|\mu_j|}} \left(\frac{d_{T_j}}{-a_{12}a_{21}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.68)$$

et

$$k > k_{T_j} = \left(\sqrt{|\mu_j|} \left(\frac{-a_{12}a_{21}}{d_{T_j}} \right) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.69)$$

avec z_j les solutions strictements positives de l'équation $\tan z = z$;

$$\mu_j = \frac{\sin z_j}{z_j}, \quad (2.70)$$

et

$$d < d_{T_j} = \frac{(au_*^2 \mu_j - (a_{11} + au_*^2))^2}{-4a_{12}a_{21}\mu_j^2} \quad \text{ceci } \forall j = 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

2.4 Extension du modèle de Banerjee et Volpert

Preuve: On a :

$$Det(k, M) = dk^4 + [au_*^2\bar{\phi}(k) - (a_{11} + au_*^2)] k^2 - a_{12}a_{21}\bar{\phi}^2(k)$$

et :

$$\bar{\phi}(k) = \frac{\sin kM}{kM} \equiv \bar{\phi}(k, M).$$

En différentiant $Det(k, M)$ par rapport à M on obtient d'après le lemme précédent :

$$\frac{\partial Det(k, M)}{\partial M} = \frac{\partial \bar{\phi}(k, M)}{\partial M} [au_*^2 k^2 - 2a_{12}a_{21}\bar{\phi}(k, M)] = 0.$$

Supposons que :

$$\bar{\phi}(k, M) \neq \frac{au_* k^2}{2a_{12}a_{21}}.$$

Alors on obtient :

$$\frac{\partial \bar{\phi}(k, M)}{\partial M} = 0,$$

c'est à dire :

$$\left(\frac{\cos kM}{M} - \frac{\sin kM}{kM^2} \right) = 0.$$

On aboutit à :

$$\tan z = z \text{ avec } z = kM. \quad (2.72)$$

Désignons par z_j les solutions positives de l'équation (2.31), $0 < z_1 < z_2 < \dots$, et posons

$$\mu_j = \frac{\sin z_j}{z_j}, j = 1, 2, \dots$$

On a donc :

$$Det(k, M) = dk^4 + [au_*^2\mu_j - (a_{11} + au_*^2)] k^2 - a_{12}a_{21}\mu_j^2 = 0.$$

Ceci conduit à :

$$k_{T_j}^2 = \frac{(a_{11} + au_*^2 - au_*^2\mu_j) + \sqrt{(au_*^2\mu_j - (a_{11} + au_*^2))^2 + 4(\mu_j)^2 da_{12}a_{21}}}{2d}, j = 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

En utilisant le fait que : $\frac{\partial Det}{\partial k}(k, M) = 0$ on aboutit à

$$(au_*^2\mu_j - (a_{11} + au_*^2))^2 = -4da_{12}a_{21}\mu_j^2, j = 1, 2, \dots,$$

Il en résulte que :

$$k_{T_j}^2 = \frac{a_{11} + au_*^2 - au_*^2\mu_j}{2d} = \sqrt{|\mu_j|} \sqrt{\frac{-a_{12}a_{21}}{d}}, j = 1, 2, \dots, \quad (2.74)$$

2.5 Conclusion

et la valeur de M associée est :

$$M_{T_j} = \frac{z_j}{k_{T_j}} = \frac{z_j}{\sqrt{|\mu_j|}} \left(\frac{d}{-a_{12}a_{21}} \right)^{\frac{1}{4}}, j = 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

En début de preuve, nous avons supposé que $\bar{\phi}(k, M) \neq \frac{au_*k^2}{2a_{12}a_{21}}$. En effet, si :

$$\bar{\phi}(k, M) = \frac{au_*k^2}{2a_{12}a_{21}}$$

alors :

$$Det(k, M) = \left(d + \frac{a^2u_*^2(2u-1)}{4a_{12}a_{21}} \right) k^4 - (a_{11} + au_*^2) k^2$$

comme $Det(k, M) = 0$ et $\frac{\partial Det(k, M)}{\partial k} = 0$, alors on obtient de la résolution de ces deux équations $k = 0$ ce qui est absurde car $k \in \mathbb{R}_+^*$ ■

Notons que, le théorème (2.4.1) nous donne la distance (au delà de laquelle) et le coefficient de diffusion (en dessous duquel) la population des proies et celle des prédateurs sont dispersées de manière périodique sur tout l'étendu du domaine.

2.5 Conclusion

Au terme de ce chapitre où nous avons modélisé et analysé deux modèles proie prédateur non locaux, il en ressort que les modèles sont capables de produire des structures spatiales périodiques ceci au voisinage de l'équilibre de coexistence. En effet, grâce à l'analyse de stabilité linéaire au voisinage de l'équilibre de coexistence de chacun des modèles nous déterminons les conditions permettant de destabiliser (rendre instable) l'équilibre de coexistence, stable dans la dynamique temporel(non spatiale). Au prochain chapitre, nous allons illustrer numériquement les conditions obtenues pour l'apparition des patterns ceci pour chaque modèle.

SIMULATIONS NUMERIQUES

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Introduction | 57 |
| 3.2 | Principe de construction des méthodes numériques non-standards. | 58 |
| 3.2.1 | Principe de construction d'un schéma non-standard. | 58 |
| 3.2.2 | Exemples | 59 |
| 3.3 | Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert | 60 |
| 3.3.1 | Schémas numériques | 60 |
| 3.3.2 | Simulation numérique du modèle non locale de banerjee et Volpert (2016) | 64 |
| 3.4 | Simulation du modèle reformulé. | 68 |
| 3.4.1 | Schémas numériques | 68 |
| 3.4.2 | Simulation numérique du modèle reformulé | 72 |
| 3.5 | Conclusion | 75 |

3.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (E.D.P), apparaissent très souvent dans la modélisation de phénomènes physiques ou écologiques. Trouver la solution d'une E.D.P est un problème courant, souvent difficile à résoudre de façon analytique. Il est donc nécessaire de recourir, aux méthodes numériques (Goncalves (2005) [11]). Généralement les modèles mathématiques sont approximés numériquement en utilisant des méthodes dites "standard", par exemple la méthode d'Euler, ou les méthodes de Runge Kutta incluses dans les logiciels scilab et Matlab. Malheureusement, ces méthodes peuvent parfois présenter des comportements qui ne sont pas adéquats avec les propriétés du système (ou de l'équation) en continu qu'ils visent à approximer. Plus précisément, les méthodes standards peuvent conduire soit à des

3.2 Principe de construction des méthodes numériques non-standards.

solutions négatives présentant des instabilités numériques, soit à des solutions qui convergent vers le mauvais équilibre pour certaines valeurs du paramètre qui traduit la discrétisation du temps. Pour corriger cela, on utilise un formalisme dit non "non standard" (Mickens (1994) [18]).

3.2 Principe de construction des méthodes numériques non-standards.

3.2.1 Principe de construction d'un schéma non-standard.

Pour construire une méthode non-standard, l'on a besoin de respecter un certain nombre de règles à savoir :

règle 1 : L'ordre de la dérivée discrète doit être égal à l'ordre de la dérivée correspondante qui apparaît dans le problème continu.

Commentaire 1 : Si l'ordre de la dérivée discrète est plus grand que celui de la dérivée dans le problème continu, des situations d'instabilité du schéma numérique construit peuvent se produire.

règle 2 : La représentation discrète des dérivées doit, en général, ne pas avoir au dénominateur, des fonctions triviales du genre $f(h) = h$.

Commentaire 2 : Considérons la dérivée d'ordre 1 de $x(t)$. Ses représentations discrètes ont la forme générale suivante :

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_{k+1} - \psi(h)x_k}{\phi(h)},$$

où ψ et ϕ sont des fonctions du pas $h = \Delta t$ et sont appelées, respectivement, fonction "numérateur" et fonction "dénominateur"; $t_k = hk$ et $x(t_k) \rightarrow x_k$. (ϕ, ψ) ont les propriétés suivantes :

$$\psi(h) = 1 + O(h) \quad \text{et} \quad \phi(h) = h + O(h^2).$$

Il faut noter que les méthodes standards prennent $\psi(h) = 1$ et $\phi(h) = h$. Si par contre les solutions du problème continu sont bornées, alors on peut prendre $\psi(h) = 1$.

règle 3 : Les termes non linéaires doivent, en général, être remplacés par une approximation non locale.

Commentaire 3 : Pour illustrer cette règle, considérons l'équation logistique

$$\dot{x} = x(1 - x).$$

3.2 Principe de construction des méthodes numériques non-standards.

Alors,

$$x^2 \rightarrow x_{k+1}x_k$$

règle 4 : Si les solutions du problème continu vérifient certaines propriétés, alors les solutions produites par le schéma numérique doivent aussi vérifier ces conditions.

Définition 3.2.1. [18]

Un schéma non-standard aux différences finies est donc toute représentation discrète d'un système d'équations différentielles dont la construction intègre les règles précédentes.

3.2.2 Exemples

Exemple 1

Soit l'équation

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad x(0) = x_0 \text{ et } \lambda \geq 0. \quad (1)$$

La solution de cette équation a les propriétés suivantes :

- P_1) $x(t) = 0$ est un point d'équilibre.
- P_2) pour $x_0 > 0$, $x(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
- P_3) pour $x_0 \neq 0$, $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Le schéma standard décentré avant d'Euler donne :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = -\lambda x_k \Leftrightarrow x_{k+1} = (1 - \lambda h)x_k$$

qui viole les propriétés P_1 et P_2 si λh est grand.

Un schéma numérique non-standard peut donc être :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\phi(h)} = -\lambda x_k \text{ avec } \phi(h) = \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda},$$

et pour $h > 0$, P_1 , P_2 et P_3 sont vérifiées.

En effet, la solution explicite de (1) est

$$x(t) = x_0 \exp(-\lambda t).$$

Par suite,

$$x(t+h) - x(t) = \exp(-\lambda h)x(t) - x(t) = \left(\frac{1 - \exp(-\lambda h)}{\lambda} \right) (-\lambda x(t)).$$

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

D'où

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{\phi(h)} = -\lambda x(t).$$

Exemple 2

Soit l'équation,

$$\dot{x} = x^2,$$

l'on peut considérer le schéma suivant :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = x_k x_{k+1}.$$

Soit l'équation

$$\dot{x} = \lambda x(1 - \mu x),$$

l'on peut considérer le schéma suivant :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\phi(h)} = \lambda x_k(1 - \mu x_{k+1}),$$

où,

$$\phi(h) = \frac{e^{\lambda h} - 1}{\lambda}.$$

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

3.3.1 Schémas numériques

Nous allons débiter premièrement, par formuler un schéma numérique pour le modèle temporel local. Ensuite ce schéma numérique sera étendu au modèle non local.

La discrétisation du modèle temporel (2.6) consiste à remplacer la variable continue temporelle $t \in [0; +\infty[$ par des variables discrètes $t_n \Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. On désigne par u^n et v^n les solutions approchées de u et v au temps $t = t_n$.

Pour construire un schéma numérique, la dérivée temporelle du premier ordre est approximée par :

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n)}{\phi_1(\Delta t)} = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\phi_1(\Delta t)} \simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\phi_1(\Delta t)}$$

et

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{v(t_n + \Delta t) - v(t_n)}{\phi_2(\Delta t)} = \frac{v(t_{n+1}) - v(t_n)}{\phi_2(\Delta t)} \simeq \frac{v^{n+1} - v^n}{\phi_2(\Delta t)}.$$

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

Proposition 3.3.1. (*Schéma numérique du modèle temporel local*)

Le schéma numérique pour le modèle temporel local (2.6) de Banerjee et volpert (2016) est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} u^{n+1} = \frac{1 + \phi_1(\Delta t)}{1 + \left[u^n + \frac{\alpha v^n}{\beta + u^n} \right] \phi_1(\Delta t)} u^n, \\ v^{n+1} = \frac{1 - \delta \phi_2(\Delta t)}{1 - \frac{\alpha u^n}{\beta + u^n} \phi_2(\Delta t)} v^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec :

$$\phi_1(x) = \exp x - 1$$

et

$$\phi_2(x) = \frac{1 - \exp(-rx)}{r}$$

où $r = \max(\alpha; \delta)$.

Preuve: l'équation temporelle est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1 - u) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\phi_1(\Delta t)} = u^n - u^n u^{n+1} - \frac{\alpha u^{n+1} v^n}{\beta + u^n},$$

ce qui conduit à :

$$\left[1 + u^n \phi_1(\Delta t) + \frac{\alpha v^n}{\beta + u^n} \right] u^{n+1} = (1 + \phi_1(\Delta t)) u^n.$$

Il en résulte que :

$$u^{n+1} = \frac{1 + \phi_1(\Delta t)}{1 + \left[u^n + \frac{\alpha v^n}{\beta + u^n} \right] \phi_1(\Delta t)} u^n.$$

De même :

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\phi_2(\Delta t)} = \frac{\alpha u^n v^{n+1}}{\beta + u^n} - \delta v^n,$$

c'est-à-dire :

$$\left[1 - \frac{-\alpha u^n \phi_2(\Delta t)}{\beta + u^n} \right] v^{n+1} = (1 - \delta \phi_2(\Delta t)) v^n.$$

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

Il s'en suit que :

$$v^{n+1} = \frac{1 - \delta\phi_2(\Delta t)}{1 - \frac{\alpha u^n}{\beta + u^n}\phi_2(\Delta t)} v^n.$$

Le choix de ϕ_1 et ϕ_2 est fait pour garantir la positivité des solutions, donc des expressions de u^{n+1} et v^{n+1} respectivement. ■

Dans la suite, nous allons construire un schéma numérique pour le modèle non local suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x+y, t) dy \right) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases} \quad (3.2)$$

On utilisera d'une part, la méthode aux **différences finies** pour discrétiser la partie spatiale et d'autre part, la méthode **non standard aux différences finies** pour discrétiser la partie temporelle du problème donné par le système (3.2). La méthode des **différences finies** consiste à remplacer, les dérivées partielles qui apparaissent dans le problème par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou noeuds du maillage. On rappelle que les approximations des dérivées partielles proviennent de la formule de TAYLOR.

- **(Discrétisation en espace)**

On subdivise le domaine $]-M; M[$ en $N+1$ intervalles tels que :

$$x_0 = -M < x_1 < x_2 \dots < x_N < x_{N+1} = M$$

et :

$$\forall j = 1, \dots, N, \Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{M}{N+1} \text{ et } x_j = j\Delta x.$$

- **(Discrétisation en temps)**

On subdivise l'intervalle temps de la même façon que l'espace.

$$t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots \text{ et } t_i = i\Delta t.$$

Posons u_j^i la valeur approchée de u à l'instant t_i et au point x_j .

Proposition 3.3.2. *(schéma numérique du modèle non local)*

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

Le schéma numérique associé du modèle non local (3.2) est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} u_j^{i+1} = \frac{\frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i] + \left[\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) + \phi_1(\Delta t) \right]}{1 + \left(\phi * u_j^i + \frac{\alpha v_j^i}{\beta + u_j^i} \right) \phi_1(\Delta t)}, \\ v_j^{i+1} = \frac{\frac{\phi_2(\Delta t)}{\Delta x^2} [v_{j+1}^i + v_{j-1}^i] + \left[\left(1 - \frac{2\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) - \delta\phi_2(\Delta t) \right] v_j^i}{1 - \frac{\alpha u_j^i \phi_2(\Delta t)}{\beta + u_j^i}}, \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

$$\Delta(t) \leq \min \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2d} \right); -\frac{\ln \left(1 - \frac{r}{\frac{\Delta x^2}{2} + \delta} \right)}{r} \right],$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont définies dans le schéma du modèle local.

Preuve: On a :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\phi_1(\Delta t)} = d \frac{[u_{j+1}^i - u_{j-1}^i - 2u_j^i]}{\Delta x^2} + u_j^i - u_j^{i+1} \phi * u_j^i - \frac{\alpha u_j^{i+1} v_j^i}{\beta + u_j^i};$$

ce qui conduit à :

$$\left[1 + \phi * u_j^i \phi_1(\Delta t) + \frac{\alpha v_j^i \phi_1(\Delta t)}{\beta + u_j^i} \right] u_j^{i+1} = \frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i] + (1 + \phi_1(\Delta t)) u_j^i.$$

Il en résulte que :

$$u_j^{i+1} = \frac{\frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i] + \left[\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) + \phi_1(\Delta t) \right]}{1 + \left(\phi * u_j^i + \frac{\alpha v_j^i}{\beta + u_j^i} \right) \phi_1(\Delta t)}.$$

De plus pour garantir le fait que u_j^{i+1} soit positif, il suffit que $\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) > 0$, c'est-à-dire :

$$\phi_1(\Delta t) \leq \frac{\Delta x^2}{2d}.$$

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

En remplaçant ϕ_1 par sa valeur donnée dans le modèle local on aboutit à :

$$\Delta t \leq \ln \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2d} \right).$$

De la même manière, on montre que :

$$v_j^{i+1} = \frac{\frac{\phi_2(\Delta t)}{\Delta x^2} [v_{j+1}^i + v_{j-1}^i] + \left[\left(1 - \frac{2\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) - \delta\phi_2(\Delta t) \right] v_j^i}{1 - \frac{\alpha u_j^i \phi_2(\Delta t)}{\beta + u_j^i}},$$

et que :

$$\Delta t \leq - \frac{\ln \left(1 - \frac{r}{\frac{2}{\Delta x^2} + \delta} \right)}{r};$$

d'où :

$$\Delta(t) \leq \min \left[\ln \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2d} \right); - \frac{\ln \left(1 - \frac{r}{\frac{2}{\Delta x^2} + \delta} \right)}{r} \right].$$

■

3.3.2 Simulation numérique du modèle non locale de banerjee et Volpert (2016)

Le modèle que nous simulons ici, a été présenté dans le Chapitre 2. Son expression est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x+y, t) dy \right) - \frac{\alpha uv}{\beta + u}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\alpha uv}{\beta + u} - \delta v. \end{cases} \quad (3.4)$$

Notre objectif est d'illustrer numériquement le théorème (2.3.4) sur les conditions d'apparition des patterns pour l'état stationnaire de coexistence E^* .

On se fixe les valeurs des paramètres du modèle comme suit :

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

| Paramètres | Données | Références |
|------------|---------|-------------------------------|
| α | 1.2 | Banerjee et Volpert (2016)[4] |
| β | 0.4 | Banerjee et Volpert (2016)[4] |
| δ | 0.6 | Banerjee et Volpert (2016)[4] |

TABLE 3.1 – Valeurs données aux paramètres du modèle pour simulation

Dans ce cas, l'état stationnaire de coexistence est E^* de coordonnées

$$E^* = (0.4; 0.4).$$

Les conditions d'apparitions de structures spatiales périodiques (patterns) deviennent donc à partir du théorème (2.3.4) :

$$M > 4.66 \text{ et } d < 0.21. \quad (3.5)$$

Nous allons donc fixer la valeur de $d = 0.05$. On considère premièrement $M = 1 < 4.66$, on se rend compte du fait qu'il n'y a pas de structures spatiales périodiques, comme l'indique les figures(3.1) et (3.2) : Ceci s'explique donc par le fait que l'état stationnaire $E^* = (u^*, v^*)$

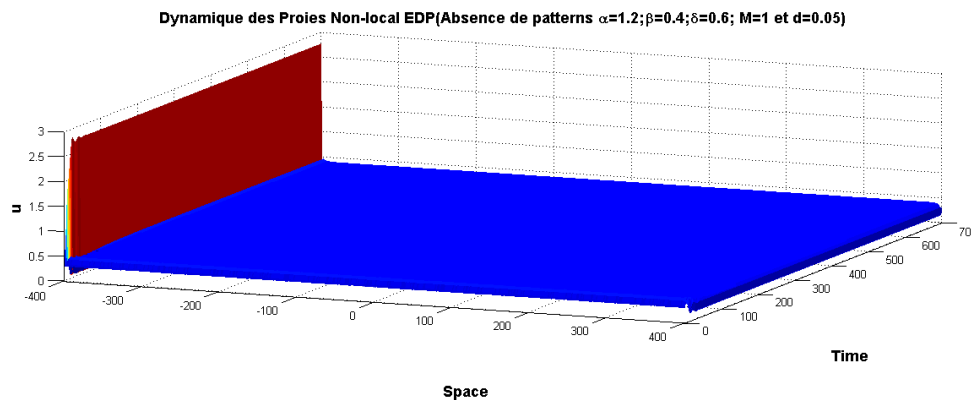


FIGURE 3.1 – Absence de Patterns pour les proies $M = 1; \alpha = 1.2; \beta = 0.4; \delta = 0.6$ et $d = 0.05$

stable dans la dynamique purement temporelle reste stable dans le modèle non local comme l'indique les deux profils suivants donnés par la figure (3.3) : Maintenant, plaçons nous dans le cas $M > 4.66$. Nous allons simuler sur l'intervalle temps allant de 0 à 3000. Considérons $M = 10$; alors on observe l'apparition de structures spatiales périodiques données sur les figures (3.4) et (3.5) : On remarque donc que pour ce modèle le fait de considérer la compétition entre les proies de manière non locale, permet de faire apparaître les patterns dans le modèle.

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

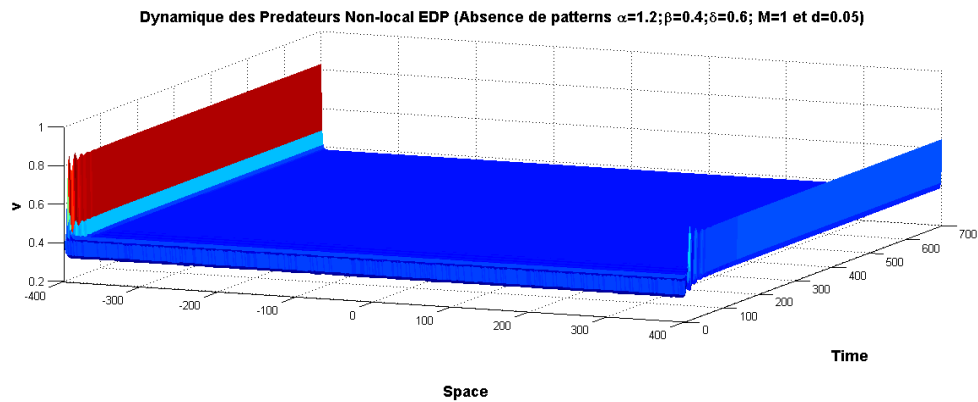


FIGURE 3.2 – Absence de Patterns pour les proies $M = 1$; $\alpha = 1.2$; $\beta = 0.4$; $\delta = 0.6$ et $d = 0.05$

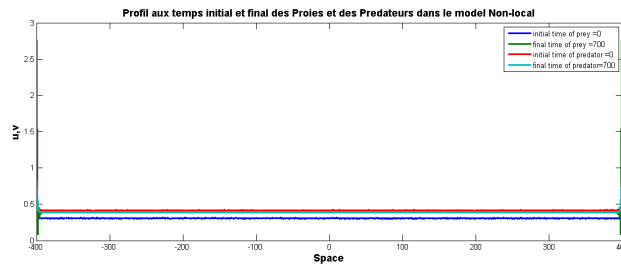


FIGURE 3.3 – Profil pour les proies et prédateurs avec : $M = 1$; $\alpha = 1.2$; $\beta = 0.4$; $\delta = 0.6$ et $d = 0.05$

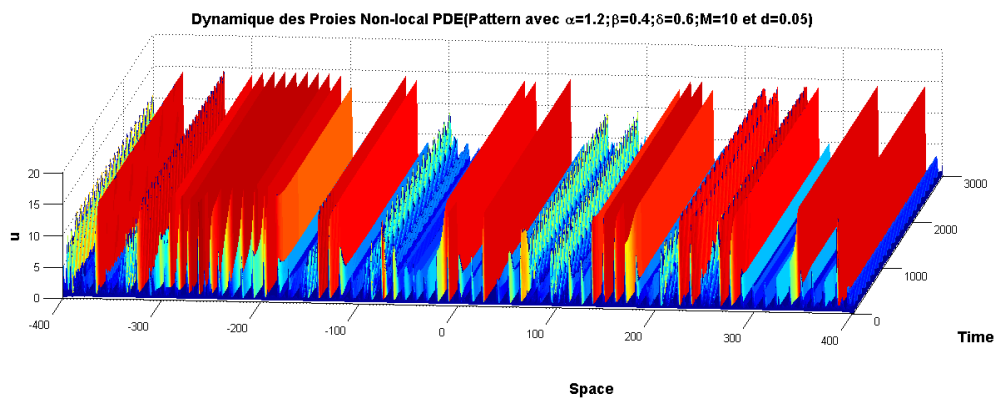


FIGURE 3.4 – Patterns pour les proies $M = 10$; $\alpha = 1.2$; $\beta = 0.4$; $\delta = 0.6$ et $d = 0.05$

3.3 Simulation numérique du modèle de Banerjee et Volpert

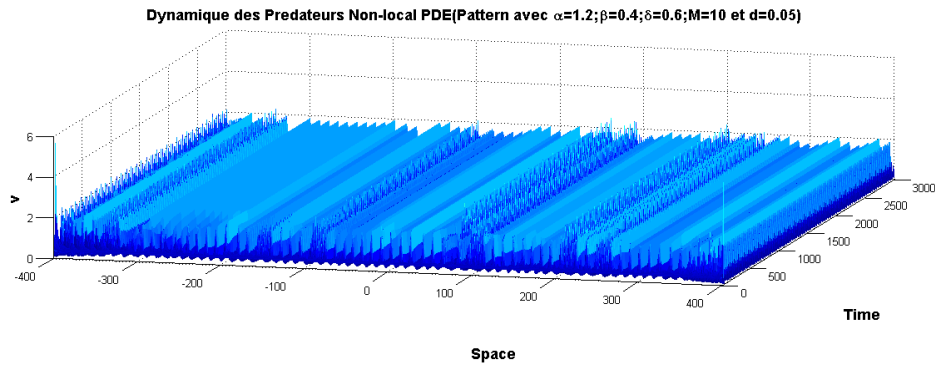


FIGURE 3.5 – Patterns pour les prédateurs $M = 10$; $\alpha = 1.2$; $\beta = 0.4$; $\delta = 0.6$ et $d = 0.05$

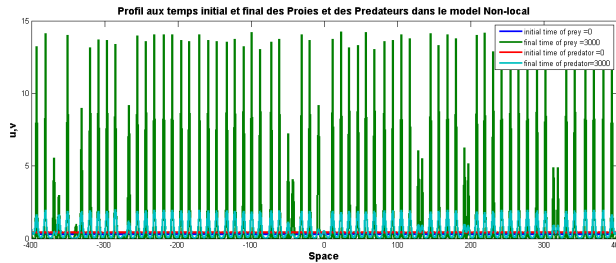


FIGURE 3.6 – Profil pour les proies et prédateurs, $M = 10$; $\alpha = 1.2$; $\beta = 0.4$; $\delta = 0.6$ et $d = 0.05$.

Rappelons que, l'apparition de patterns signifie juste que la population des proies et celle des prédateurs sous certaines conditions sont réparties de manière périodique sur l'étendue du domaine.

3.4 Simulation du modèle reformulé

3.4.1 Schémas numériques

Comme pour le modèle précédent, nous allons dans un premier temps formuler un schéma numérique pour le modèle local (purement temporel), et dans la suite, au travers du schéma local, construire un schéma numérique pour le modèle non local.

La discrétisation du modèle temporel (2.46) consiste à remplacer la variable continue temporelle $t \in [0; +\infty[$ par des variables discrètes $t_n \Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. On désigne par u^n et v^n les solutions approchées de u et v au temps $t = t_n$.

Pour construire un schéma numérique la dérivée temporelle du premier ordre est approximée par :

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n)}{\phi_1(\Delta t)} = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\phi_1(\Delta t)} \simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\phi_1(\Delta t)}$$

et

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{v(t_n + \Delta t) - v(t_n)}{\phi_2(\Delta t)} = \frac{v(t_{n+1}) - v(t_n)}{\phi_2(\Delta t)} \simeq \frac{v^{n+1} - v^n}{\phi_2(\Delta t)}.$$

Proposition 3.4.1. (*Schéma numérique du modèle local*)

Le schéma numérique associé au modèle temporel (2.46) est :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{[1 - \sigma_1 \phi_1(\Delta t)] u_n + a u_n^2 \phi_1(\Delta t)}{1 + \left[a u_n^2 + \frac{\alpha v_n}{\beta + u_n} \right] \phi_1(\Delta t)}, \\ v_{n+1} = \frac{[1 - \sigma_2 \phi_2(\Delta t)] v_n}{1 - \frac{\theta u_n}{\beta + u_n} \phi_2(\Delta t)}, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec :

$$\phi_1(x) = \frac{1 - \exp(-\sigma_1 x)}{\sigma_1}$$

et

$$\phi_2(x) = \frac{1 - \exp(-r x)}{r},$$

où $r = \max(\theta; \sigma_2)$.

Preuve: Le modèle temporel est donné par :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a u^2 (1 - u) - \sigma_1 u - \frac{\alpha u v}{\beta + u}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\theta u v}{\beta + u} - \sigma_2 v. \end{cases}$$

3.4 Simulation du modèle reformulé

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\phi_1(\Delta t)} = au_n^2 - au_n^2 u_{n+1} - \sigma_1 u_n - \frac{\alpha u_{n+1} v_n}{\beta + 1};$$

ce qui conduit à :

$$u_{n+1} - u_n = au_n^2 \phi_1(\Delta t) + au_n^2 u_{n+1} \phi_1(\Delta t) - \sigma_1 u_n \phi_1(\Delta t) - \frac{\alpha u_{n+1} v_n}{\beta + u_n} \phi_1(\Delta t).$$

Donc :

$$\left[1 + au_n^2 \phi_1(\Delta t) + \frac{\alpha v_n}{\beta + u_n} \phi_1(\Delta t) \right] u_{n+1} = (1 - \sigma_1 \phi_1(\Delta t)) u_n + au_n^2 \phi_1(\Delta t).$$

Il en résulte que :

$$u_{n+1} = \frac{[1 - \sigma_1 \phi_1(\Delta t)] u_n + au_n^2 \phi_1(\Delta t)}{1 + \left[au_n^2 + \frac{\alpha v_n}{\beta + u_n} \right] \phi_1(\Delta t)}.$$

De la même manière :

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\phi_2(\Delta t)} = \frac{\theta u_n v_{n+1}}{\beta + u_n} - \sigma_2 v_n;$$

ce qui conduit à :

$$\left[1 - \frac{\theta u_n}{\beta + u_n} \phi_2(\Delta t) \right] v_{n+1} = [1 - \sigma_2 \phi_2(\Delta t)] v_n,$$

et il en résulte que :

$$v_{n+1} = \frac{[1 - \sigma_2 \phi_2(\Delta t)] v_n}{1 - \frac{\theta u_n}{\beta + u_n} \phi_2(\Delta t)}.$$

Le choix de ϕ_1 et ϕ_2 se justifie par le choix de garantir la positivité de u_{n+1} et v_{n+1} . ■

Maintenant nous allons formuler un schéma numérique pour le modèle non local que nous avons reformulé. Rappelons que ce modèle est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au^2(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \right) - \sigma_1 u(x, t) - \\ \frac{\alpha u(x, t)}{\beta + u(x, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) v(x + y, t) dy, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \theta v(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \frac{u(x + y, t)}{\beta + u(x + y, t)} dy - \sigma_2 v(x, t). \end{cases} \quad (3.7)$$

Comme dans le modèle précédent, la construction du schéma numérique sera faite avec la méthode aux **Différences finies** pour la partie spatiale et la méthode **Non standard aux différences finies** pour la partie temporelle du système (3.7). On fera donc une discrétisation en temps et en espace.

3.4 Simulation du modèle reformulé

- (Discrétisation en espace)

On subdivise le domaine $]-M; M[$ en $N+1$ intervalles tels que :

$$x_0 = -M < x_1 < x_2 \dots < x_N < x_{N+1} = M$$

et :

$$\forall j = 1, \dots, N, \Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{M}{N+1} \text{ et } x_j = j\Delta x.$$

- (Discrétisation en temps)

On subdivise l'intervalle temps de la même façon que l'espace.

$$t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots \text{ et } t_i = i\Delta t.$$

Posons u_j^i la valeur approchée de u à l'instant t_i et au point x_j .

Proposition 3.4.2. (Schéma numérique du modèle non local)

le schéma numérique du modèle non local (3.7) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^{i+1} = \frac{\frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i] + a(u_j^i)^2 \phi_1(\Delta t) + \left[\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2}\right) - \sigma_1 \phi_1(\Delta t) \right] u_j^i}{1 + au_j^i \phi * u_j^i \phi_1(\Delta t) + \frac{\alpha}{\beta + u_j^i} \phi * v_j^i \phi_1(\Delta t)}, \\ v_j^{i+1} = \frac{\frac{\phi_2(\Delta t)}{\Delta x^2} [v_{j+1}^i - v_{j-1}^i] + \left[\left(1 - \frac{2\phi_2(\Delta t)}{\Delta x^2}\right) - \sigma_2 \phi_2(\Delta t) \right] v_j^i}{1 - \theta \frac{\phi * u_j^i}{\beta + u_j^i} \phi_2(\Delta t)}, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

avec d'une part

$$\Delta(t) \leq \min \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{\sigma_1}{\frac{2d}{\Delta x^2} + \sigma_1} \right)}{\sigma_1}; \frac{\ln \left(1 - \frac{r}{\frac{2}{\Delta x^2} + \sigma_2} \right)}{r} \right],$$

où $r = \max(\theta; \sigma_2)$, ϕ_1 et ϕ_2 sont données dans le schéma du modèle local (temporel).

D'autre part :

$$\Delta x \leq \sqrt{\frac{2}{r - \sigma_2}} \text{ pour } r > \theta_2$$

3.4 Simulation du modèle reformulé

Preuve: On a :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\phi_1(\Delta t)} = d \left[\frac{u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i}{\Delta x^2} \right] + a(u_j^i)^2 - au_j^i u_j^{i+1} (\phi * u_j^i) - \sigma_1 u_j^i - \frac{\alpha u_j^{i+1}}{\beta + u_j^i} \phi * v_j^i,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} u_j^{i+1} - u_j^i &= \frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i - 2u_j^i] + a(u_j^i)^2 \phi_1(\Delta t) - au_j^i u_j^{i+1} (\phi * u_j^i) \phi_1(\Delta t) - \sigma_1 u_j^i \phi_1(\Delta t) \\ &\quad - \frac{\alpha u_j^{i+1}}{\beta + u_j^i} \phi * v_j^i \phi_1(\Delta t); \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \left[1 + au_j^i (\phi * u_j^i) \phi_1(\Delta t) + \frac{\alpha}{\beta + u_j^i} \phi * v_j^i \phi_1(\Delta t) \right] u_j^{i+1} &= \frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i] + a(u_j^i)^2 \phi_1(\Delta t) + \\ &\quad \left[\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) - \sigma_1 \phi_1(\Delta t) \right] u_j^i; \end{aligned}$$

d'où :

$$u_j^{i+1} = \frac{\frac{d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} [u_{j+1}^i + u_{j-1}^i] + a(u_j^i)^2 \phi_1(\Delta t) + \left[\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) - \sigma_1 \phi_1(\Delta t) \right] u_j^i}{1 + au_j^i \phi * u_j^i \phi_1(\Delta t) + \frac{\alpha}{\beta + u_j^i} \phi * v_j^i \phi_1(\Delta t)}.$$

Pour garantir le fait que u_j^{i+1} soit toujours positif, il faut que :

$$\left(1 - \frac{2d\phi_1(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) - \sigma_1 \phi_1(\Delta t) > 0$$

c'est-à-dire que :

$$\phi_1(\Delta t) \leq \frac{1}{\frac{2d}{\Delta x^2} + \sigma_1}. \quad (3.9)$$

En utilisant la définition de ϕ_1 donnée dans le modèle temporel on aboutit la relation (3.9) devient :

$$\Delta t \leq - \frac{\ln \left(1 - \frac{\sigma_1}{\frac{2d}{\Delta x^2} + \sigma_1} \right)}{\sigma_1}$$

De la même manière on montre que :

$$v_j^{i+1} = \frac{\frac{\phi_2(\Delta t)}{\Delta x^2} [v_{j+1}^i - v_{j-1}^i] + \left[\left(1 - \frac{2\phi_2(\Delta t)}{\Delta x^2} \right) - \sigma_2 \phi_2(\Delta t) \right] v_j^i}{1 - \theta \frac{\phi * u_j^i}{\beta + u_j^i} \phi_2(\Delta t)}$$

3.4 Simulation du modèle reformulé

avec :

$$\Delta(t) \leq \frac{\ln \left(1 - \frac{r}{\frac{2}{\Delta x^2} + \sigma_2} \right)}{r}$$

Il en résulte que :

$$\Delta(t) \leq \min \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{\sigma_1}{\frac{2d}{\Delta x^2} + \sigma_1} \right)}{\sigma_1}; \frac{\ln \left(1 - \frac{r}{\frac{2}{\Delta x^2} + \sigma_2} \right)}{r} \right]$$

■

3.4.2 Simulation numérique du modèle reformulé

Le système simulé dans cette section a été analysé au chapitre 2. Son expression est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au^2(x, t) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) u(x + y, t) dy \right) - \sigma_1 u(x, t) - \\ \frac{\alpha u(x, t)}{\beta + u(x, t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) v(x + y, t) dy, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \theta v(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, M) \frac{u(x + y, t)}{\beta + u(x + y, t)} dy - \sigma_2 v(x, t). \end{cases}$$

Nous souhaitons illustrer numériquement le théorème (2.4.1) sur les conditions d'apparition des patterns à partir de l'état stationnaire non trivial de coexistence E_* . On se fixe les paramètres comme dans la table (3.2) : Dans ce cas l'état stationnaire E^* est de coordonnées :

$$E_* = (0.593; 0.419).$$

Les conditions d'apparition des patterns deviennent donc à partir du théorème (2.4.1) :

$$d < 73.64 \text{ et } M > 85.8221$$

Nous allons fixer la valeur de $d = 50$. On considère premièrement le cas où $M = 20 < 85.8221$. Alors les figures (3.7) et (3.8) ne nous montrent pas de patterns car, l'état stationnaire $E_* = (0.593; 419)$ stable dans la dynamique locale ne se destabilise pas dans le non local :

3.4 Simulation du modèle reformulé

| Paramètres | Données | Références |
|------------|---------|---------------------------|
| a | 1 | Banerjee et al. (2018)[2] |
| σ_1 | 0.1 | Banerjee et al. (2018)[2] |
| σ_2 | 0.2 | Banerjee et al. (2018)[2] |
| α | 0.335 | Banerjee et al. (2018)[2] |
| β | 0.4 | Banerjee et al. (2018)[2] |
| θ | 0.335 | Banerjee et al. (2018)[2] |

TABLE 3.2 – Valeurs données aux paramètres du modèle pour simulation

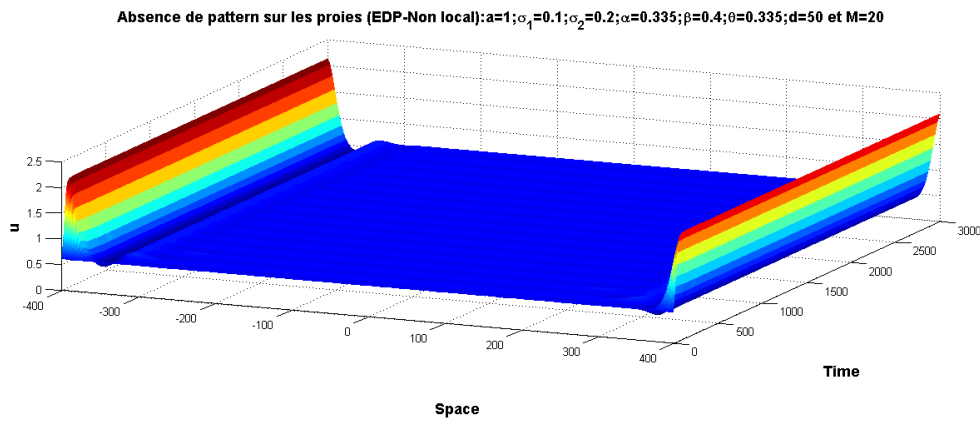


FIGURE 3.7 – Pas de Patterns sur la population des proies $M = 20$; $a = 1$; $\sigma_1 = 0.1$; $\sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335$; $\beta = 0.4$; $\theta = 0.335$ et $d = 50$

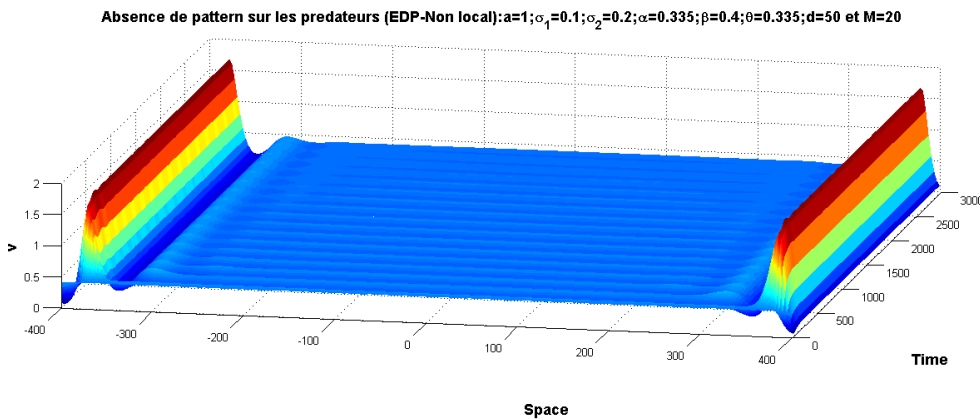


FIGURE 3.8 – Pas de Patterns sur la population des prédateurs $M = 20$; $a = 1$; $\sigma_1 = 0.1$; $\sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335$; $\beta = 0.4$; $\theta = 0.335$ et $d = 50$

3.4 Simulation du modèle reformulé

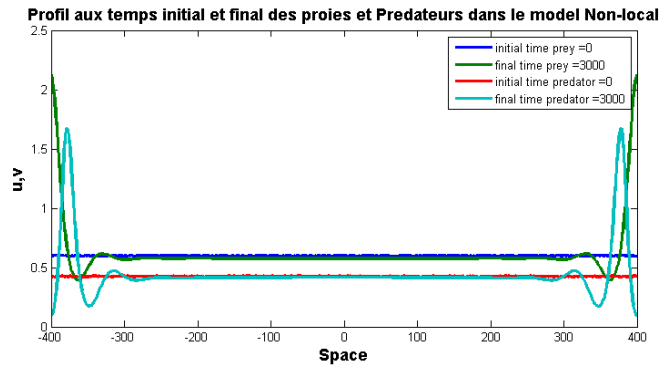


FIGURE 3.9 – Pas de Patterns sur la population des proies et des prédateurs $M = 20$; $a = 1$; $\sigma_1 = 0.1$; $\sigma_2 = 0.2$; $\alpha = 0.335$; $\beta = 0.4$; $\theta = 0.335$ et $d = 50$

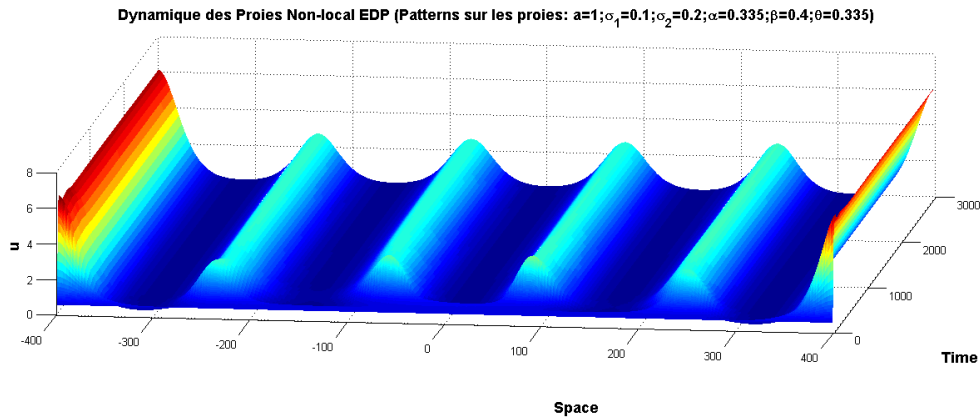


FIGURE 3.10 – Patterns sur la population des proies $M = 87$; $a = 1$; $\sigma_1 = 0.1$; $\sigma_2 = 0.2$; $\alpha = 0.335$; $\beta = 0.4$; $\theta = 0.335$ et $d = 50$

Maintenant, on se place dans le cas $M = 87 > 85.8221$. Nous sommes dans les conditions du théorème (2.4.1). On se rend compte numériquement grace aux figures (3.10) et (3.11) de l'apparition de structures spatiales périodiques.

On constate grace aux profils données par la figure (3.12) que, lorsque la population des proies est présente dans un domaine de l'espace (en forte quantité), il n'y a pas de prédateurs et de même lorsqu'il ya les prédateurs dans un domaine de l'espace en forte quantité il ya pas de proies.

3.5 Conclusion

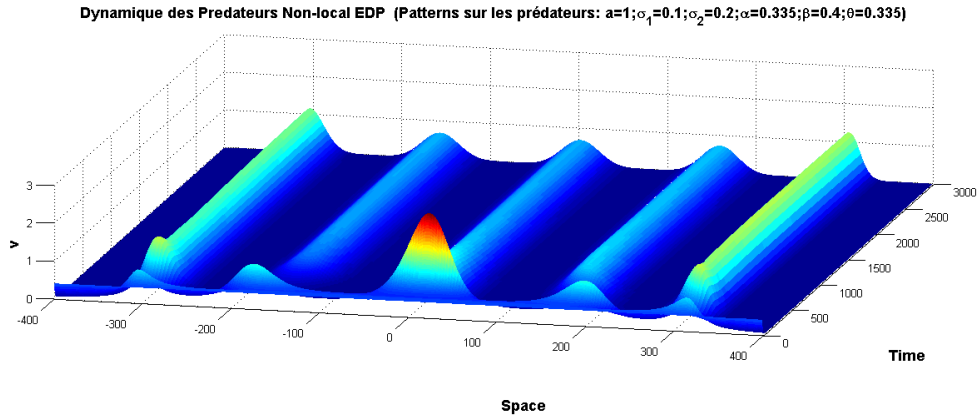


FIGURE 3.11 – Patterns sur la population des proies $M = 87$; $a = 1$; $\sigma_1 = 0.1$; $\sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335$; $\beta = 0.4$; $\theta = 0.335$ et $d = 50$

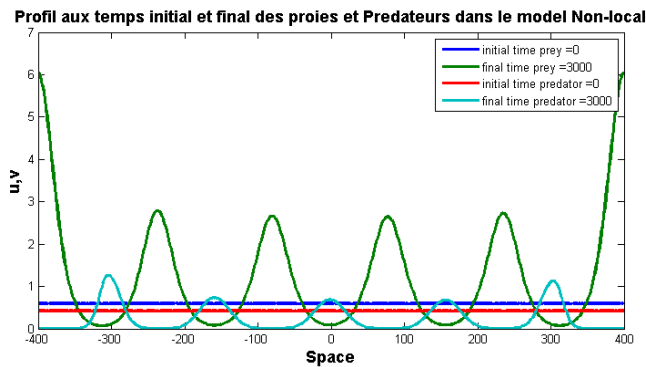


FIGURE 3.12 – Profil au temps initial et final de la population des proies et celle des prédateurs $M = 87$; $a = 1$; $\sigma_1 = 0.1$; $\sigma_2 = 0.2\alpha = 0.335$; $\beta = 0.4$; $\theta = 0.335$ et $d = 50$

3.5 Conclusion

Il était question tout le long de ce chapitre d’illustrer numériquement les conditions d’apparitions de patterns trouvées au chapitre 2 pour chacun des modèles analysés. Grâce à la discétisation non standard aux différences finies nous avons pu construire des schémas numériques dont les simulations illustrent clairement nos conditions d’apparitions de patterns.

Portée pédagogique

Dans le cadre de la rédaction du mémoire de DIPES II, il nous a été demandé de donner, l'apport pédagogique de notre travail. Il en ressort que, ce travail nous a permis :

- De nous familiariser à la notion d'équations différentielles ordinaires et de manière plus générale aux équations aux dérivées partielles.
- De nous familiariser avec le logiciel de saisie Latex et celui de programmation Matlab.
- D'avoir un esprit de curiosité et de recherche.

Pour l'élève, ce travail permet d'avoir une idée sur :

- la notion d'équations différentielles ordinaires contenu dans le programme des classes de Terminales C et D.
- la représentation graphique de fonctions grâce à des logiciels comme Matlab ou scilab.

Conclusion générale et perspectives

Parvenu au terme de notre travail, nous avons analysé deux modèles "proie-prédateur" avec interactions non locales. Dans le premier modèle tiré de l'article de Banerjee et Volpert paru en 2016 dans le journal scientifique Elsevier (Ecological Complexity), nous avons explicité l'analyse de stabilité linéaire dans un domaine de dimension 1 et fait ressortir les conditions d'apparition de structures spatiales périodiques. Le second modèle étudié dans ce travail, est une extension du modèle précédent dans laquelle nous rajoutons non seulement à la consommation (des ressources) non locale déjà présente, la prédation non locale mais aussi un effet-allée de type additif. Nous arrivons aussi pour ce modèle à expliciter l'analyse de stabilité linéaire permettant de donner les conditions d'apparition de structures spatiales. Les simulations numériques réalisées par la **méthode non standard aux différences finies** arrivent à illustrer nos conditions d'apparition des patterns sur nos deux modèles. Ces deux modèles montrent l'importance de mettre en exergue la présence d'interactions non locales pour aboutir à la présence de patterns dans certains modèles "proies-prédateurs". Dans la suite de ce travail, nous envisageons :

- voir l'impact d'une bifurcation de Hopf spatial dans l'émergence de structures spatiales périodiques, en d'autres termes comment les bifurcations de Turing et de Hopf interagissent pour former les patterns.
- étendre notre modèle en y rajoutant la notion de **retard**.

Bibliographie

- [1] P. Augier, C. Lett, and J.C. Poggiale. *Modélisation mathématique en écologie. Cours et exercices*. Dunod, 2006.
- [2] M. Banerjee, N. Mukherjee, and V. Volpert. Prey-predator model with a nonlocal bistable dynamics of prey. *Mathematics*, pages 6–41, Mars 2018.
- [3] M. Banerjee and V. Volpert. Prey-predator with a non local consumption of prey. *CHAOS*, 26(083120), Aout 2016.
- [4] M. Banerjee and V. Volpert. Spatio-temporal pattern formation in rosenzweig-macarthur model : Effect of nonlocal interactions. *Elsevier*, 216, Mai 2016.
- [5] M. Baumann, T. Gross, and U. Feudel. Instabilities in spatially extended predator-prey systems : Spatio-temporal patterns in the neighborhood of turing-hopf bifurcations. *Theoretical Biology*, 2016.
- [6] F. Borgogno, P. D’odoroco, F. Laio, and L. Ridolfi. Mathematical models of vegetation pattern formation in ecohydrology. *Rev. Geophys*, 47(RG1005), 2009.
- [7] H. Brezis. *Functionnal Analysis, Sobolef Spaces and Partial Differential equations*. Springer, 2011.
- [8] P. Couteron and O. Lejeune. Periodic spotted patterns in a semi-arid vegetation explained by a propagation-inhibition model. *J.Ecol*, 89 :616–628, 2001.
- [9] M. Fuentes, M. Kuperman, and V. Kenkre. Analytical considerations in the study of spatial patterns arising from nonlocal interaction effects. *J. Phys. Chem. B*, 108 :10505–10508, 2004.
- [10] J-M. Ginoux. Le paradoxe du modele predateur-proie de vito volterra. *Laboratoire P.R.O.T.E.E, Universite du sud, I.U.T de Toulon*, Fevrier 2006.
- [11] E. Goncalves. Methodes , analyse et calculs numeriques. *Institut Polytechnique de Grenoble*, Septembre 2005.

Bibliographie

- [12] L. Hal Smith. The rosenzweig-macarthur predator-prey model. *School of mathematical and statistical sciences arizona state university tempe, AZ, USA*, 2008.
- [13] V. Huston, S. Martinez, K. Mischaikow, and G-T. Vickers. The evolution of dispersal. *Mathematical Biology*, 47 :483–517, 2003.
- [14] M. Jankovic and S. Petrovskii. Are time delays always destabilizing ? revisiting the role of time delays and the allee effect. *Theoretical Ecology*, 2014.
- [15] S. Kondo, I. Motoko, and Y. MOTOOMI. How animals get their skin patterns : fish pigment pattern as live turing wave. *International jornal od Developmental Biology*, 53 :851–856, 2009.
- [16] R. Lefever and J. Turner. A quantitative theory of vegetation patterns based on plant structure and the non-local f-kpp equation. *C.R. Mecanique*, 340 :818–828, 2012.
- [17] B. Mewoli. Cours master 1, systemes dynamiques 1 mat 411. *Universite de Yaounde I. Faculte des sciences. Departement de Mathematiques*, 2015.
- [18] R. Mickens. Nonstandard finite difference models of differential equations. *World Scientific*, 1994.
- [19] Hirokazu Nimomiya., Yoshitaro Tanaka., and Hiroko Yamamoto. Reaction, diffusion and non-local interaction. *Mathematical Biology*, Fevrier 2017.
- [20] B. Segal, V. Volpert, and A. Bayliss. Pattern formation in a model of competing populations with non local interactions. *Elsevier*, 253 :12–22, 2013.
- [21] I. Tankam, P. Tchinda Moufofo, and JJ. Tewa. Properties of the hoph bifurcation in a delayed predator-prey model with continous prey harvesting. *Arima*, 28, 2017.
- [22] JJ. Tewa, R. Djidjou Demasse, and S. Bowong. Predator prey model with prey havesting holling response function of type iii and sis disease. *Biomath*, 1210231 :1–7, 2012.
- [23] C. Tian, Z. Ling, and L. Zhang. Nonlocal interactions driven pattern formation in a prey-predator model. *Elsevier, Apllied Mathematics and Computation*, 308 :73–83, 2017.
- [24] A. Turing. The chimical basis of morphogenesis. *Philos.Trans.R.Soc.Ser.B*, 237 :37–72, 1952.
- [25] H. Ying-Hen and H. Chin-Kuei. Predator-prey model with disease infection in both populations. *Mathematical Medicine and Biology*, 25 :247–266, 2008.
- [26] S-M. Zheng. *Nonlineair Evolution Equation*. Chapman& Hall/Crc Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 2004.

Bibliographie
