REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

APPLICATION DE LA THEORIE DES SEMI-GROUPES A LA RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS SOUS LA FORME « BIRTH AND DEATH »

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

YOUMSI FOTSO Eric
Licencié en mathématiques

Sous la direction
Dr CIAKE CIAKE Fidèle
Chargé de cours,Ecole Normale Supérieure

Année Académique
2015-2016

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

tous les membres des grandes familles GUEMNO ET YOUMSI.

REMERCIEMENTS

Je rend grâce à **Dieu** qui m'a permis de parachever ce travail dans la santé et la paix. Qu'il me soit permis d'adresser mes sincères remerciements et d'exprimer ma gratitude à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.
Je saisis l'occasion qui m'est offerte pour adresser mes vifs remerciements tout particulièrement à :

- ☞ Mon directeur de mémoire, **Dr CIAKE CIAKE Fidèle** pour son soutien et sa grande disponibilité malgré ses multiples occupations durant tous mes travaux.
- ☞ Tous les enseignants de l'université de Yaoundé 1 et de l'École Normale Supérieure de Yaoundé pour ma formation académique, sociale et humaine.
- ☞ Mes parents **Isaac FOTSO** et **Jeanne NONO** pour leur affection, sans oublier ma grande maman **Marie NOUMSI**.
- ☞ Mes oncles et tantes particulièrement **Jérome KUATE, Jeanne KENGNE, Paulin TALLA, Jean R TAKODJOU** et bien d'autres pour leurs divers encouragements.
- ☞ Tous Mes amis du groupe **FRANTZ FANON** pour leurs divers encouragements.
- ☞ L'inspecteur national de Mathématiques **M BONA OTHON l** Pour son encadrement pendant mon stage pratique.
- ☞ Mon encadreur de stage **M KOUSSOCK** pour ses conseils pratiques.
- ☞ Aux camarades de classe de la $55^{\text{ème}}$ promotion pour leurs soutient moral durant la formation.
- ☞ Tous mes frères et sœurs **Nicolas, Josianne, Laurette, Simon, Joseph, Théodore** pour leur grande affection.
- ☞ Merci également à tous ceux dont les noms ne sont pas susmentionnés et qui de quelque manière que ce soit ont contribué à la réalisation de ce travail, qu'ils trouvent en celui-ci l'expression de ma profonde gratitude.

DÉCLARATION SUR L'HONNEUR

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signé,

YOUMSI FOTSO ERIC

RÉSUMÉ

Les équations différentielles tirent leur origine dans la résolution des problèmes de physique, de biologie, d'économie, de mécanique ou de démographie proposés aux mathématiciens. En mathématiques, et particulièrement en analyse, les semi-groupes d'opérateurs sont étudiés en particulier pour résoudre les équations différentielles de la forme $X' = AX + BX$ où A est un générateur de semi-groupe et B est le perturbateur.
Mais $A + B$ n'est pas toujours générateur d'un semi-groupe.
Dans ce travail, notre objectif consiste à montrer que l'opérateur linéaire A satisfait les conditions du théorème de Hille-Yosida donc génère un semi-groupe fortement continu $(G_A(t))_{t\geq 0}$. Et que le perturbateur B satisfait les conditions du théorème généralisé des perturbations de Kato ce qui établit que la somme d'opérateurs $A + B$ génère un semi-groupe $(G_K(t))_{t\geq 0}$ où K est une extension de $A + B$.
Et enfin nous allons appliquer concrètement ce procédé pour montrer que les systèmes d'équations différentielles sous la forme "birth and death" $u'(t) = Au(t)+Bu(t)$ admettent les solutions sous la forme $u(t) = G_K(t)u(0)$.

Mots clés : Opérateurs linéaires, semi-groupe, système sous la forme "birth and death", générateur d'un semi-groupe, perturbateur d'un opérateur linéaire.

ABSTRACT

Differentials equations get their origin from the solving of physics, mechnicals problems and demographics problems proposed to mathematicians. In mathematic, and particular in analysis, semigroups of operators are studied, particularly for the solving of differentials equations.This is why mathematicans became interested in the solving of differentials equations in the $X' = AX + BX$ form, where A is a generator of a semigroup and B is the perturbator.
Mention that $A + B$ is not always the generator of a semigroup.
In this work, our main concern is to show that the linear operator A satisfy the Hille-Yosida theorem conditions, therefore is the generator of strongly continous semigroup $(G_A(t))_{t\geq 0}$ and that the perturbator B satisfy the generalized Kato's perturbation theorem conditions, which establish that the sum $A+B$ of operators is generating a semigroup $(G_K(t))_{t\geq 0}$ where K is an extension of $A + B$.
And finally we apply this process to show that differentials systems of equations on the "birth and death" form $u'(t) = Au(t) + Bu(t)$ have a solution on the form $u(t) = G_K(t)u(0)$.

Keys words : Linear operator, semigroup, birth and death system of equations, generator of semigroup, perturbator of linear operator.

Table des matières

INTRODUCTION

L'étude mathématique des divers phénomènes physiques, biologiques, économiques et démographiques conduit à la résolution des équations d'évolution sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= Au(t)+Bu(t) \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \qquad (E)$$

sur un espace de Banach X, où A est un opérateur linéaire sur X et B un autre opérateur linéaire sur X appelé perturbateur.

En mathématique, il existe plusieurs méthodes de résolutions des systèmes ayant la forme de (E). Parmi ces méthodes figure en bonne place la théorie des semi-groupes qui est une généralisation de la fonction exponentielle introduite en 1821 par le mathématicien français Augustin Louis Cauchy dans son cours d'analyse.

La recherche des solutions concrètes d'une équation de la forme (E) nécessite tout d'abord que l'on se rassure que ces solutions existent c'est-à-dire vérifier qu'il existe une extension K de l'opérateur différentielle $A+B$ associé au système d'équations (E) qui engendre un semi-groupe fortement continu.

Ce mémoire est divisé en trois parties : Dans le premier chapitre nous présentons les espaces et les théorèmes fondamentaux, quelques propriétés des semi-groupes et le théorème de Hille-yosida. Dans le second chapitre, nous montrons que l'opérateur A satisfaisant les conditions du théorème de Hille-Yosida et de ce fait générant un semi-groupe fortement continu $(G_A(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur B satisfait aussi les conditions du théorème généralisé des perturbations de Kato et par conséquent il existe une extension $K \supseteq A+B$ qui génère un semi groupe de contraction $(G_K(t))_{t\geq 0}$. Et enfin dans le troisième chapitre en application dans l'espace de Banach $X = l^p$, nous montrons que les solutions d'un système d'équation différentielle se ramenant au modèle "birth and death" $u'(t) = Au(t)+Bu(t)$ admet les solutions sous la forme $u(t) = G_K(t)u_0$ avec $u_0 = u(0)$, et K une extension de l'opérateur $A+B$.

CHAPITRE UN

PRÉLIMINAIRES

1.1 Définitions et théorèmes fondamentaux.

1.1.1 Opérateurs linéaires.

Définition 1.1.1 :

Soit X un ensemble non vide.

On dit que X est un espace de Banach, si X est un espace vectoriel normé où toute suite de Cauchy de points de X converge dans X.

Dans la suite, X et Y sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 :

Un opérateur linéaire A de X vers Y est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel de X noté $D(A)$ et à valeurs dans Y.

$D(A)$ est appelé domaine de A.

Notation 1.1.1 :

On notera simplement $(A, D(A))$ pour un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$.

Définition 1.1.3 :

Si A et B sont deux opérateurs linéaires de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$ alors on définit l'opérateur $A+B$ par :

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) \text{ et pour tout } x \in D(A+B) \text{ on a } (A+B)x = Ax + Bx.$$

Définition 1.1.4 :

Un opérateur linéaire A de X vers Y est dit borné s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\forall x \in D(A)$ on ait $\| Ax \|_Y \leq C \| x \|_X$.

Dans le cas contraire A est dit non borné.

Définition 1.1.5 :

Soit $A : X \longrightarrow Y$ *un opérateur et* $x_0 \in X$.

On dit que A *est continu en* x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall x \in X,\ \|x - x_0\|_X < \delta \Longrightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon.$$

Dans le cas contraire A *est dit discontinu en* x_0.

Proposition 1.1.1 *[5] :*

Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ *défini sur* $D(A)$ *est continu si et seulement s'il est borné.*

Définition 1.1.6 :

Soient A *et* B *deux opérateurs linéaires définis de* X *vers* Y.

L'opérateur B *est* A*- borné si* $D(A) \subset D(B)$ *et s'il existe des constantes* $a,\ b \geq 0$ *telles que* $\forall x \in D(A),\ \|Bx\|_Y \leq a\|Ax\|_Y + b\|x\|_X$.

Définition 1.1.7 :

Soient $A, B : X \longrightarrow Y$ *deux opérateurs linéaires.*

A *est une extension de* B *si* $D(B) \subseteq D(A)$ *et* $Ax = Bx,\ \forall x \in D(B)$.

Notation 1.1.2 :

Dans la suite, si A *est une extension de* B, *on notera simplement* $B \subset A$ *ou encore* $A \supset B$.

Définition 1.1.8 :

Soit A *un opérateur linéaire de* X *vers* Y.

1. *Le graphe de* A *est le sous espace vectoriel de* $X \times Y$ *noté* $G(A)$ *et défini par :* $G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$.
   Si X *et* Y *sont des espaces normés, alors* $G(A)$ *est aussi normé avec la norme :* $\|(x, Ax)\|_{G(A)} = \|Ax\|_Y + \|x\|_X$.
2. *Son domaine* $D(A)$ *est un espace normé avec la norme du graphe* $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$.
3. *Le noyau de* A *est le sous espace vectoriel de* X *noté* $\mathcal{K}er(A)$ *défini par :* $\mathcal{K}er(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$.
4. *L'image de* A *est le sous espace vectoriel de* Y *noté* $\mathcal{I}m(A)$ *défini par :* $\mathcal{I}m(A) = \{Ax : x \in D(A)\}$.
5. *L'opérateur* A *est dit fermé si son graphe* $G(A)$ *est fermé dans* $X \times Y$.

Proposition 1.1.2 *[3] :*

A est fermé si pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ *telles que* $x_n \longrightarrow x \in X$ *et* $Ax_n \longrightarrow y \in Y$ *alors* $x \in D(A)$ *et* $y = Ax$.

Définition 1.1.9 :

Un opérateur $A : X \longrightarrow Y$ *est dit fermable, s'il admet une extension fermée.*

Définition 1.1.10 :

Soit A *un opérateur linéaire de* X *vers* X.

1. *Si* $ker A = \{0_X\}$, *alors* A *est dit injectif.*
2. *L'opérateur* $A : D(A) \subset X \longrightarrow ImA$ *est dit surjectif.*
3. *L'opérateur* A *est bijectif s'il est injectif et surjectif.*
4. *Si* A *est bijectif, on définit l'opérateur inverse* A^{-1} *de* A *de la façon suivante :*

   $$A^{-1} : D(A^{-1}) \subset X \longrightarrow X$$

   $$\text{et } A^{-1}y = x \text{ si et seulement si } Ax = y.$$

   Évidement on a $D(A^{-1}) = ImA$.

   Dans le cas contraire A *est non inversible.*
5. *Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un opérateur linéaire.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *nous définissons l'opérateur* A^n *par :*

   $$A^n : D(A^n) \longrightarrow X$$

   $$\text{où } A^0 = I,\ A^1 = A\ ,\cdots,\ A^n = A(A^{n-1})$$

   $$\text{et } D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) / A^{n-1}x \in D(A)\}.$$

Notation 1.1.3 :

On désigne dans la suite par :

1. $\mathcal{L}(X,Y)$ *l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de* X *dans* Y *muni de la norme :* $\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X \le 1} \|A(x)\|_Y$ *et* $\mathcal{L}(X,X) = \mathcal{L}(X)$.
2. $\mathcal{GL}(X)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(X)$ *formé des opérateurs inversibles.*

   I *désigne l'identité de* X.

Définition 1.1.11 :

Soit A *un opérateur linéaire de* X *vers* X.

1. *On dit qu'un élément* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur résolvante de* A *si :* $\lambda I - A$ *est une bijection de* X. *On dit alors que* $\lambda I - A$ *est inversible .*

2. *L'ensemble des valeurs résolvantes de A noté $\rho(A)$ est appelé ensemble résolvant de A et on a $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda I - A$ est inversible $\}$.*

3. *On appelle résolvante de A l'application $R(.,A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ définie par $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\forall \lambda \in \rho(A)$.*

4. *On appelle valeur spectrale de A tout élément $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $(\lambda I - A)$ ne soit pas inversible.*

   L'ensemble des valeurs spectrales de A est appelé spectre de A et est noté $\sigma(A)$. On peut écrire alors $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$.

Remarque 1.1.1 :

Pour tout opérateur borné le spectre est un sous espace compact de $\mathbb{R}$ et par conséquent $\rho(A) \neq \emptyset$.

Si A est borné alors la limite $r(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ existe et est appelé le rayon spectral. En plus on a $r(A) \leq \|A\|$.

Pour un opérateur non borné A, le rôle du rayon spectral est joué par le réel $s(A)$ défini par

$$s(A) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Le rayon spectral a les propriétés suivantes :

1. $R(\lambda, A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n$.
2. $r(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.
3. Si $|\lambda| > r(A)$ alors la série définie en 1.) converge avec la norme des opérateurs définie ci-dessus.

   Pour $\lambda = 1$ on a : $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A^n$.
4. Pour tous λ , $\mu \in \rho(A)$, on a :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

   En effet ,

$$\begin{aligned} R(\mu, A) + (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) &= [I + (\mu - \lambda) R(\lambda, A)]\, R(\mu, A) \\ &= R(\lambda, A) [(\lambda I - A) + (\mu - \lambda) I]\, R(\mu, A) \\ &= R(\lambda, A)(\mu I - A) R(\mu, A) \\ &= R(\lambda, A). \end{aligned}$$

   Donc $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$.

1.1.2 Quelques théorèmes fondamentaux.

Théorème 1.1.1 (Théorème du graphe fermé) *[3] :*
Soit X et Y deux espaces de Banach.
Un opérateur linéaire A définie de X vers Y avec $D(A) = X$ est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$ muni de la norme $\|(Ax, x)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$.

Théorème 1.1.2 (Hahn-Banach) *[1] :*
Soit X un espace vectoriel normé X_0 un sous espace vectoriel de X.
Soit f une application linéaire continue sur X_0 , alors il existe une application linéaire continue g sur X telle que $g(x) = f(x)$ $\forall x \in X_0$ et $\|g\| = \|f\|$.

Théorème 1.1.3 (Banach-Steinhaus) *[1] :*
Soit S un ensemble non vide et non nécessairement dénombrable. Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in S}$ Une famille d'opérateurs linéaires continus de X dans Y telle que $\forall x \in X, \sup\limits_{i \in S} \|u_i(x)\|_Y < +\infty$ alors $\exists C > 0$ telle que $\forall i \in S$, $\|u_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C$.

1.2 Semi-groupe fortement continu.

1.2.1 Définitions.

Définition 1.2.1 :
On appelle Semi-groupe une famille d'opérateurs linéaires $(G(t))_{t \geq 0}$ définis sur un espace de Banach X par :

1. *G(t) est opérateur linéaire borné pour chaque $t \geq 0$.*
2. *$G(0) = I$ et $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour tous $t, s \geq 0$.*

Définition 1.2.2 :
On appelle Semi-groupe fortement continu ou semi-groupe de classe $\mathcal{C}_0$ ou $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, une famille d'opérateurs linéaires $(G(t))_{t \geq 0}$ définis sur un espace de Banach X par :

1. *G(t) est opérateur linéaire borné pour chaque $t \geq 0$.*
2. *$G(0) = I$ et $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour tous $t, s \geq 0$.*
3. *$\forall x \in X, \lim\limits_{t \to 0} G(t)x = x$.*

Remarque 1.2.1 :

La condition 2 est une propriété de la fonction exponentielle.

Proposition 1.2.1 *:*

$\forall x \in X$ la continuité de l'application $t \mapsto G(t)x$ en 0 implique sa continuité sur $[0, +\infty[$.

Preuve:

Soient $t, h \in [0, +\infty[$ et $x \in X$.

Si $t < h$, $\|G(t+h)x - G(t)x\|_X \leq \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|G(h)x - x\|_X$.

Si $t > h$, $\|G(t-h)x - G(t)x\|_X \leq \|G(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x - G(h)x\|_X$.

En faisant $h \longrightarrow 0^+$ on a le résultat. ■

Définition 1.2.3 :

Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe.

On dit que $(G(t))_{t\geq 0}$ est uniformément borné s'il existe $M \geq 1$ tel que $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$.

Si $M = 1$ on dit que $(G(t))_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contractions linéaires.

Définition 1.2.4 :

On appelle semi-groupe uniformément continu, une famille d'opérateurs linéaire $(G(t))_{t\geq 0}$ de X telle que :

1. *G(t) est un opérateur linéaire borné pour chaque $t \geq 0$.*
2. *$G(0) = I$ et $G(t+s) = G(t)G(s)$ pour tous $t, s \geq 0$.*
3. *$\forall x \in X$, $\lim\limits_{t\to 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.*

Proposition 1.2.2 *:*

Les semi-groupes uniformément continus sont des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes.

Preuve:

$\forall x \in X$, $\forall t \geq 0$, $\|G(t)x - x\|_X \leq \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X$.

En faisant $t \to 0$, on a :

$\lim\limits_{t\to 0} \|G(t)x - x\|_X \leq \lim\limits_{t\to 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X = 0$ *Par conséquent, $(G(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu.* ■

1.2.2 Générateur d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.

Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.

Remarquons d'abord que $\{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x)$ existe $\}$ est un sous espace vectoriel de X.

En effet,

1. $\{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x) \text{ existe}\} \neq \varnothing$.
   En effet $\forall t > 0$, $G(t) \in \mathcal{L}(X)$ donc $G(t)0_X = 0_X$ et $\frac{1}{t}(G(t)0_X - 0_X) = 0_X$,
   par la suite on a :
   $$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)0_X - 0_X) = 0_X.$$
   Donc $0_X \in \{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x) \text{ existe}\}$.
2. Soient $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x) \text{ existe}\}$.
   Alors
   $$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)(u + \lambda v) - (u + \lambda v)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)u - u) + \lambda \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)v - v)$$
   Car l'application : $x \mapsto G(t)x$ est linéaire.
   Donc $u + \lambda v \in \{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x) \text{ existe }\}$.

D'où la définition suivante :

Définition 1.2.5 :

On appelle générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire A défini sur $D(A) = \{x \in X : \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x) \text{ existe }\}$ par

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(G(t)x - x).$$

Théorème 1.2.1 *[5] :*

Un opérateur $A : X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur borné.

1.2.3 Quelques propriétés des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes.

Théorème 1.2.2 *:*

Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.

Il existe deux constantes réelles $M \geq 1$ et ω telles que

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp(\omega t) \text{ , pour tout } t \geq 0.$$

Preuve:

Soit $x \in X$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue sur $[0, +\infty[$ D'après la proposition 1.2.1 et donc bornée sur le compact $[0, 1]$. D'après le théorème 1.1.3 (Banach-Steinhaus), il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\forall t \in [0, 1]$, $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$.

Mais $\|G(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|I\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ donc $M \geq 1$. Soit $t \in [0, +\infty[$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in [0, 1[$ tels que $t = n + \sigma$.

D'où

$$\begin{aligned}\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|G(n+\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\le \|G(1)^n\|_{\mathcal{L}(X)}\|G(\sigma)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\le M^{n+1} = M\exp(n\ln M) \le M\exp(t\ln M)\end{aligned}$$

Ainsi $\omega = \ln M$. ■

Dans la suite nous allons considérer, les notations suivantes :

Notation 1.2.1 :

On note $\mathcal{SG}(M,\omega)$ l'ensemble des $\mathcal{C}_0$-semi-groupes pour lesquels il existe des constantes réelles $M \ge 1$ et ω telles que $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M\exp(\omega t)$.

Notation 1.2.2 :

On note $\mathcal{G}(M,\omega)$ l'ensemble des opérateurs qui engendrent un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\ge0}$ tel qu'il existe des constantes réelles $M \ge 1$ et ω avec $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M\exp(\omega t)$.

Théorème 1.2.3 *:*

Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\ge0}$.

1. *Le domaine $D(A)$ est l' ensemble des vecteurs $x \in X$ tels que $t \mapsto G(t)x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.*
2. *Si $x \in D(A)$ alors pour tout $t \in [0,+\infty[$*

   on a : $G(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}G(t)x = G(t)Ax = AG(t)x$.

Preuve:

Soit $x \in X$ tel que $t \mapsto G(t)x$ est dérivable pour tout $t \in [0,+\infty[$ alors par définition de $D(A)$ on a : $x \in D(A)$.

Réciproquement si $x \in D(A)$ alors,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}(G(t+h)x - G(t)x) &= \lim_{h\to0^+} G(t)(\frac{1}{h}(G(h)x - x)) \\ &= G(t)Ax.\end{aligned}$$

Par conséquent $t \mapsto G(t)x$ est dérivable à droite en tout point.

Considérons maintenant h tel que $-t \le h \le 0$, alors

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{h}\left(G(t+h)x - G(t)x\right) - G(t)Ax &= G(t+h)\left(\tfrac{1}{h}(x - G(-h)x) - Ax\right) \\ &\quad + \left(G(t+h)Ax - G(t)Ax\right) \\ &= G(t+h)\left(\tfrac{1}{-h}(G(-h)x - x) - Ax\right)\end{aligned}$$

$$+ \left(G(t+h) - G(t)\right) Ax$$

Puisque $\|G(t+h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \exp\left(\omega(t+h)\right)$ et $t \mapsto G(t)x$ est continue, alors

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h}\left(G(t+h)x - G(t)x\right) - G(t)Ax = 0$$

Ainsi les dérivées à droite et à gauche existent et coïncident, et on a $\frac{d}{dt}G(t)x = G(t)Ax$.

Donc la dérivée est continue.

Soit $x \in D(A)$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$AG(t)x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(G(t+h)x - G(t)x\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(G(h)G(t)x - G(t)x\right)$$

$$= G(t) \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(G(h)x - x\right) = G(t)Ax.$$ ■

Corollaire 1.2.1 :

Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G(t))_{t \geq 0}$, alors la suite d'opérateurs $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$F_n(x) = n \int_0^{\frac{1}{n}} G(t)xdt$ *vérifie :*

$\forall x \in X,\ F_n(x) \in D(A)$ *et* $AF_n(x) = n\left(G(\frac{1}{n})x - x\right)$.

Preuve:

Soit $x \in X$ posons $x_n = F_n(x)$ on a :

$$\tfrac{1}{h}\left(G(h)x_n - x_n\right) = \tfrac{n}{h} \int_0^{\frac{1}{n}} G(t+h)xdt - \frac{n}{h} \int_0^{\frac{1}{n}} G(t)xdt.$$

Ainsi ,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h}\left(G(h)x_n - x_n\right) &= \tfrac{n}{h} \int_h^{h+\frac{1}{n}} G(t)xdt - \frac{n}{h} \int_0^{\frac{1}{n}} G(t)xdt \\ &= \tfrac{n}{h} \int_{\frac{1}{n}}^{h+\frac{1}{n}} G(t)xdt - \frac{n}{h} \int_0^{h} G(t)xdt \end{aligned}$$

De la continuité de l'application $t \mapsto G(t)x$, il existe $(H(t))_{t \geq 0}$ une primitive de $(G(t))_{t \geq 0}$, par conséquent on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left(G(h)x_n - x_n\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} n \left[H(h + \frac{1}{n})x - H(\frac{1}{n})x\right] - \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} n \left[H(h)x - H(0)x\right] = n\left(G(\frac{1}{n})x - x\right).$$

Ce qui prouve que $x_n \in D(A)$ et que $Ax_n = n\left(G(\frac{1}{n})x - x\right)$. ■

Théorème 1.2.4 *:*

Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, alors A est fermé et $D(A)$ est dense dans X.

Preuve:

1. Montrons que D(A) est dense dans X.

   Soit $x \in X$.

   En considérant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de D(A) définie dans le corollaire 1.2.1 on a :
$$\|x_n - x\|_X = \|n\int_0^{\frac{1}{n}}(G(t)-I)xdt\|_X \leq n\int_0^{\frac{1}{n}}\|(G(t)-I)x\|_X dt.$$
   Puisque G(t) tend fortement vers I quand $t \to 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$

   Il ressort alors que $\overline{D(A)} = X$.

2. Montrons que l'opérateur A est fermé.

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D(A). Soient $x, y \in X$ tels que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$.

   Montrons que $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

   Considérons la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(t) = G(t)x_n$ qui, d'après le théorème 1.2.3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

   Puisque $\forall t \in [0, +\infty[$, $G(t)$ est bornée, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto G(t)x$.

   De plus la suite des dérivées $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n'(t) = G(t)Ax_n$ converge uniformément sur tout compact $[0, T]$, ($T > 0$ arbitraire) vers la fonction $t \mapsto v(t) = G(t)y$.

   En effet ,
$$\begin{aligned}\|u_n'(t) - v(t)\|_X &= \|G(t)Ax_n - G(t)y\|_X \\ &\leq \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax_n - y\|_X \\ &\leq \left(\sup_{t\in[0,T]} M\exp(\omega t)\right)\|Ax_n - y\|_X.\end{aligned}$$

   Il résulte du théorème 1.2.3 que la fonction limite $u(t) = G(t)x$ est dérivable et que $u_n'(t) = G(t)x$.

   Ainsi, d'après le théorème 1.2.3 , on a $x \in D(A)$ et $Ax = \frac{d}{dt}G(t)x\mid_{t=0} = G(0)y = y$. ■

Théorème 1.2.5 (L'unicité de l'engendrement) *:*

Soient deux $\mathcal{C}_0$-semi-groupes $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même générateur A.

Alors :

$$T(t) = S(t),\ \forall t \geq 0.$$

Preuve:

Soient $t > 0$ *et* $x \in D(A)$.

Définissons l'application :

$$[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{ds}U(s)x &= \tfrac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\tfrac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $x \in D(A)$.

Par suite $U(0)x = U(t)x$, *pour tout* $x \in D(A)$, *d'où :*

$$T(t)x = S(t)x,\ \forall x \in D(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $\overline{D(A)} = X$ *et* $T(t),\ S(t) \in \mathcal{L}(X,X)$, *pour tout* $t \geq 0$, *il résulte que*

$$T(t)x = S(t)x,\ \forall t \geq 0 \text{ et } x \in X\ ,$$

$$\text{ou bien } T(t) = S(t),\ \forall t \geq 0.$$ ■

Théorème 1.2.6 *:*

Soit $(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal.*

Pour tout $u_0 \in D(A)$, *le problème de Cauchy* $\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) & \text{avec } t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (E)$

Possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,+\infty[$.

Cette solution est $u(t) = G(t)u_0$.

Preuve:

La fonction $u(t) = G(t)u_0$ est d'après le théorème 1.2.3 une solution au problème (E).

Soit $v(t)$ une seconde solution, alors $v(t) \in D(A)$.

On a

$$\begin{aligned} v(t) &= [G(t-s)v(s)]_{s=0}^{s=t} \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}G(t-s)v(s)ds \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[G(t-s-h)v(s+h) - G(t-s)v(s) \right] ds.$$

Mais on a aussi

$$\frac{1}{h} \left[G(t-s-h)v(s+h) - G(t-s)v(s) \right] = G(t-s-h)\frac{1}{h}(v(s+h) - v(s)) + \frac{1}{h} \left[G(t-s-h) - G(t-s) \right] v(s)$$

et

1. D'après le théorème 1.2.3, $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(G(t-s-h) - G(t-s) \right) v(s) = -G(t-s)Av(s)$ car $v(s) \in D(A)$.
2. $\lim_{h \to 0} G(t-s-h) \frac{1}{h} \left(v(s+h) - v(s) \right) = G(t-s)Av(s)$. En effet,

   $\|G(t-s-h)\frac{1}{h}(v(s+h) - v(s)) - G(t-s)Av(s)\|_X =$
   $\|G(t-s-h)\left[\frac{1}{h}(v(s+h) - v(s)) - Av(s) \right] + \left[G(t-s-h) - G(t-s) \right] Av(s)\|_X \to 0$ Quand on fait tendre $h \to 0$

   Après majoration de $\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ pour la première expression et continuité pour la seconde.

Par conséquent $\frac{d}{ds}G(t-s)v(s) = 0$, donc $v(t) = G(t)u_0 = u(t)$. ■

Théorème 1.2.7 *:*

Soient A le générateur infinitésimal de $(G(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\}$.
Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on définit sur X l'opérateur

$$R(\lambda)x = \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt. \text{ Alors,}$$

1. *$R(\lambda)$ est un opérateur linéaire borné et $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)}$.*
2. *$\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda) = R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.*

Preuve:

a) L'intégrale définie par $\int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt$ existe bien.
En effet,

$$\|exp(-\lambda t)G(t)x\|_X \leq exp(-\lambda t)\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X \leq M exp(-(\lambda - \omega)t)\|x\|_X.$$

b) L'application $R(\lambda) : x \mapsto R(\lambda)x$ est linéaire bornée et $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)}$.
En effet, soient $x, y \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$R(\lambda)(x + \alpha y) = \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)(x + \alpha y)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt + \alpha \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)ydt$$

Car l'application $x \mapsto G(t)x$ *est linéaire.*

En plus on a : $\|R(\lambda)x\|_X \leq \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X dt$

$$\leq \int_0^{+\infty} Mexp(-(\lambda-\omega)t)\|x\|_X dt = \frac{M}{(\lambda-\omega)}\|X\|_X$$

Donc $\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)}$.

c) *Pour tout* $x \in D(A)$ *on a* $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$.

En effet, $R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt - \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)Axdt$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt - \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)AG(t)xdt$$

(Car $G(t)$ *et* A *commutent d'après le théorème 1.2.3)*

$$= \lambda \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt - \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)\frac{d}{dt}G(t)xdt$$

$= [-exp(-\lambda t)G(t)x]_0^{+\infty}$ *(Après intégration par parties)*

$= x.$

d) *On a* $R(\lambda)X \subset D(A)$ *et* $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$.

En effet, soit $x \in X$,

$$\frac{1}{h}(G(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x) = \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} exp(-(t-h)\lambda)G(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt$$

$$= \frac{1}{h}(exp(\lambda h) - 1)\int_h^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt$$
$$-\frac{1}{h}\int_0^{h} exp(-\lambda t)G(t)xdt.$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(G(h)R(\lambda)x) = \lambda \int_0^{+\infty} exp(-\lambda t)G(t)xdt - x = \lambda R(\lambda)x - x$$

Ce qui montre que $R(\lambda)x \in D(A)$ *et* $(\lambda I - A)R(\lambda)x = x$. ∎

Nous énonçons dans la suite un résultat très important concernant les semi-groupes de classe $\mathcal{C}_0$. Il s'agit du théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateur de $\mathcal{C}_0$-semi-groupes.

Théorème 1.2.8 (Hille-Yosida) *[2] :*
Un opérateur linéaire A de X vers X est générateur infinitésimal de $(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ si et seulement si

- *$D(A)$ est dense dans X;*
- *$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\} \subset \rho(A)$;*
- *$\forall \lambda \in \Lambda_\omega$, on a $\|(\lambda I - A)^{-k}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

CONDITIONS SUR DEUX OPÉRATEURS LINÉAIRES A ET B POUR QUE L'OPÉRATEUR $A+B$ GÉNÈRE UN SEMI-GROUPE

Soit $(A, D(A))$ le générateur d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G_A(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X, et $(B, D(B))$ un autre opérateur linéaire défini sur X.
Dans ce chapitre nous établissons les conditions pour que la somme d'opérateur linéaire définie par $(A+B, D(A))$ génère un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.
Dans ce cas nous dirons alors simplement que l'opérateur $(A, D(A))$ est perturbé par l'opérateur $(B, D(B))$ ou bien que $(B, D(B))$ est un perturbateur de $(A, D(A))$.
Il est à noter que la caractérisation d'une extension K de $A+B$ générant un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe donne des informations essentielles sur les propriétés du semi-groupe généré. La meilleure situation étant lorsque $K = A+B$ ou $K = \overline{A+B}$.

2.1 Conditions préliminaires.

Lemme 2.1 :
Supposons que nous avons deux opérateurs $(A, D(A))$ *et* $(B, D(B))$ *avec* $\rho(A) \neq \emptyset$ *et* $D(A) \subset D(B)$.
B est A-borné c'est-à-dire pour un certains $a, b \geq 0$, $\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|$, $x \in D(A)$ *si et seulement si* $BR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ *pour tout* $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve:
Supposons que B est A-borné.

Comme $AR(\lambda, A) = -I + \lambda R(\lambda, A)$ alors il existe $M \geq 0$ tel que $\forall y \in X$,

avec $x = R(\lambda, A)y \in D(A)$,

$$\|BR(\lambda, A)y\| \leq a\|AR(\lambda, A)y\| + b\|R(\lambda, A)y\| \leq M\|y\|.$$

Réciproquement si $BR(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ alors il existe $M \geq 0$ tel que $\|BR(\lambda, A)y\| \leq M\|y\|$.

Pour $x = R(\lambda, A)y \in D(A)$ on a :

$$\|Bx\| \leq M\|(\lambda I - A)x\| \leq \lambda M\|x\| + M\|Ax\|.$$ Donc B est A-borné. ■

Lemme 2.2 :

B est A-borné si et seulement si $B \in \mathcal{L}(D(A), X)$ où $D(A)$ est muni de la norme du graphe c'est-à-dire, $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$.

Preuve:

Supposons que B est A-borné.

Alors soit $x \in D(A)$, il existe $a, b \geq 0$ tel que :

$$\begin{aligned}
\|Bx\|_X &\leq a\|Ax\|_X + b\|x\|_{D(A)} \\
&\leq a\|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_{D(A)} + b\|x\|_{D(A)} \\
&\leq \left(a\|A\|_{\mathcal{L}(X)} + b\right)\|x\|_{D(A)} \\
&\leq M\|x\|_{D(A)}
\end{aligned}$$

D'où $B \in \mathcal{L}(D(A), X)$.

Réciproquement si $B \in \mathcal{L}(D(A), X)$ alors,

$\forall x \in D(A)$, il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\begin{aligned}
\|Bx\| &\leq M\|x\|_{D(A)} \\
&\leq M\|x\|_X + M\|Ax\|_X
\end{aligned}$$

D'où B est A-borné. ■

Théorème 2.1.1 (Perturbation bornée) *[2] :*

Soit $(A, D(A)) \in \mathcal{G}(M, \omega)$.

Ceci étant, $(A, D(A))$ génère un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G_A(t))_{t\geq 0}$ tel que $\|G_A(t)\| \leq M\exp(\omega t)$, $t \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$.

Si $B \in \mathcal{L}(X)$ alors $(K, D(K)) = (A+B, D(A)) \in \mathcal{G}(M, \omega + M\|B\|)$. En plus le semi-groupe $(G_{A+B}(t))_{t\geq 0}$ généré par $A + B$ satisfait les équations de Duhamed suivantes :

$$G_{A+B}(t)x = G_A(t)x + \int_0^t G_A(t-s)BG_{A+B}(s)xds,\ t \geq 0,\ x \in X.$$

et

$$G_{A+B}(t)x = G_A(t)x + \int_0^t G_{A+B}(t-s)BG_A(s)xds,\ t \geq 0, x \in X.$$

Le semi-groupe $(G_{A+B}(t))_{t\geq 0}$ *est donné par la série de Dyson-Phillips :*

$$G_{A+B}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n(t),\ où$$

$G_0(t) = G_A(t)$ *et* $G_{n+1}(t)x = \int_0^t G_A(t-s)BG_n(s)xds,\ t \geq 0,\ x \in X.$

La série converge sous la norme des opérateurs dans $\mathcal{L}(X)$ *et uniformément pour* t *dans les intervalles bornés.*

2.2 Treillis de Banach, opérateurs positifs et KB-espaces.

X étant un espace vectoriel, nous allons y introduire une relation d'ordre pour définir le cone positif de X, les treillis de Banach, les opérateurs positifs et les KB-espaces qui sont des espaces fondamentaux pour l'application du théorème de Kato.

Définition 2.2.1 :

Soit X *un ensemble non vide.*

Une relation d'ordre partiel ou simplement un ordre partiel sur X *est une relation binaire notée ici par "* $\leq$ *" et vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $x \leq x\ ,\ \forall x \in X$ *; (Réflexivité)*
2. $x \leq y$ *et* $y \leq x \Longrightarrow x = y,\ \forall x, y \in X$ *; (Antisymétrie)*
3. $x \leq y$ *et* $y \leq z \Longrightarrow x \leq z,\ \forall x, y, z \in X.$ *(Transitivité)*

Si $\forall x, y \in X$ *on a* $x \leq y$ *ou* $y \leq x$*, on dit alors que "* $\leq$ *" est un ordre total sur* X.

Un ensemble non vide X *muni d'un ordre partiel* $\leq$ *est appelé ensemble partiellement ordonné et noté simplement* $(X, \leq)$.

Notation 2.2.1 :

Si $(X, \leq)$ *est un ensemble partiellement ordonné, alors on note :*

$$x \geq y \Longleftrightarrow y \leq x,\ \forall x, y \in X.$$

Définition 2.2.2 :

Soit X *un ensemble partiellement ordonné et soit* A *un sous ensemble non vide de* X.

Un élément $x \in X$ *est un majorant de* A *si on a :* $a \leq x,\ \forall a \in A.$

Un élément $x \in X$ *est un minorant de* A *si on a :* $x \leq a,\ \forall a \in A.$

Un élément $x \in X$ *est le supremum de* A $(supA)$ *si on a :*

$$a \leq x,\ \forall a \in A \text{ et en plus, } a \leq b,\ \forall a \in A \Longrightarrow x \leq b.$$

(C'est-à-dire que x est le plus petit majorant de A.)

Un élément $x \in X$ est le infimum de A ($infA$) si on a :

$$x \leq a,\ \forall a \in A \text{ et en plus, } b \leq a,\ \forall a \in A \Longrightarrow b \leq x$$

(C'est-à-dire que x est le plus grand minorant de A.)

Notation 2.2.2 :

Pour un ensemble de deux éléments $\{x, y\} \subseteq X$,

$x \vee y$ *désigne le* $sup\{x, y\}$.

$x \wedge y$ *désigne le* $inf\{x, y\}$.

Rappelons que le Sup et le Inf d'un ensemble quelconque n'existe pas toujours dans cet ensemble. D'où la définition suivante :

Définition 2.2.3 :

Un ensemble partiellement ordonné X est un treillis si pour tous $x, y \in X$, $Sup\{x, y\}$ et $Inf\{x, y\}$ existent dans X.

Si pour tout $A \subset X$, $SupA$ et $InfA$ existent dans X, on dit que X est un treillis complet.

Définition 2.2.4 :

Un espace vectoriel ordonné est un espace vectoriel X muni d'une relation d'ordre partielle qui est compatible avec sa structure d'espace vectoriel dans le sens où :

i) $x \geq y \Longrightarrow x + z \geq y + z,\ \forall x, y, z \in X$;

ii) $x \geq y \Longrightarrow \alpha x \geq \alpha y,\ \forall x, y \in X$ et $\alpha \geq 0$.

X étant un espace vectoriel ordonné, on va définir les ensembles fondamentaux suivants :

Définition 2.2.5 :

Le cône positif de X est le sous ensemble noté X_+ défini par $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$.

Définition 2.2.6 :

L'espace vectoriel ordonné X est appelé treillis vectoriel ou espace de Riesz lorsque X est aussi un treillis.

Définition 2.2.7 :

Soit X un espace de Riesz et soit $x \in X$.

La partie positive de x est l'élément défini par $x_+ = sup\{x, 0\}$.

La partie négative de x est l'élément défini par $x_- = sup\{-x, 0\}$.

La valeur absolue de x est l'élément défini par $|x| = x_+ + x_-$

Remarque 2.2.1 :

Soit X un espace de Riesz.

Tout élément $x \in X$ peut s'écrire sous la forme : $x = x_+ - x_-$, où x_- et x_+ sont respectivement la partie négative et la partie positive de x.

Remarque 2.2.2 :

Dans un espace de Riesz X, la valeur absolue définie ci-dessus a les propriétés suivantes :

i) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

ii) $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$, pour tous $x, y \in X$.

Dans ce qui suit, nous allons donner la relation entre la structure des treillis et la norme quand X est un espace vectoriel ordonné et normé.

Définition 2.2.8 :

Une norme sur un treillis vectoriel X est appelée une norme des treillis si

$$|x| \leq |y| \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

Définition 2.2.9 :

Un treillis de Banach est un espace de Riesz complet sous la norme des treillis.

Définition 2.2.10 :

Un opérateur linéaire A défini sur un treillis de Banach X vers un treillis de Banach Y est positif et noté $A \geq 0$ si on a $Ax \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

Dans le cas contraire, A est dit négatif.

Proposition 2.2.1 :

A est positif si et seulement si $|Ax| \leq A|x|$, $\forall x \in D(A)$.

Preuve:

En effet si A est positif, puisque $-|x| \leq x \leq |x|$,

alors on a $-A|x| \leq Ax \leq A|x|$ d'où $|Ax| \leq A|x|, \forall x \in D(A)$.

Réciproquement,si $|Ax| \leq A|x|, \forall x \in D(A)$ alors en particulier pour tout $x \geq 0$,

on a $Ax \leq |Ax| \leq Ax$ donc $|Ax| = Ax$ d'où $Ax \geq 0$. par conséquent, A est positif. ∎

Définition 2.2.11 :

Nous disons qu'un treillis de Banach X est un KB-espace (Kantorovic-Banach espace) si toute suite croissante d'éléments bornés de $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$ converge dans X sous la norme du treillis.

Le théorème suivant nous permet de caractériser les KB-espaces qui apparaissent dans les applications de la théorie des semi-groupes pour montrer l'existence des solutions d'un système différentielle ayant un perturbateur.

Théorème 2.2.1 *[2] :*

Supposons que X est un treillis de Banach.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe $x \in X$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x$ dans X.

C'est-à-dire que les treillis de Banach peuvent être considérés comme des KB-espaces.

Définition 2.2.12 :

Soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

L'opérateur adjoint A^* de A est défini de la manière suivante :

$$< y^*, Ax >=< A^*y^*, x >.$$

De plus $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ et $\|A^*\| = \|A\|$ où X^* est le dual algébrique c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires sur X.

$< y^*, Ax >$ est le crochet de dualité on peut encore écrire : $< y^*, Ax >= y^*Ax$.

Remarque 2.2.3 :

L'application θ définie par $\begin{array}{cccc} \theta: & X \times X^* & \longrightarrow & X \\ & (x,x^*) & \mapsto & < x^*, x >= x^*x \end{array}$ *est une application bilinéaire sur $X \times X^*$.*

Théorème 2.2.2 (Trotter-Kato) *[2] :*

Soit $A_n \in \mathcal{G}(M,\omega)$.

Supposons qu'il existe λ_0 telle que $\lambda_0 > \omega$,

a) $\forall x \in X,\ \lim\limits_{n\to+\infty} R(\lambda_0, A_n)x = R(\lambda_0)x$,

b) Le domaine de $R(\lambda_0)$ est dense dans X,

Alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{G}(M,\omega)$ tel que $R(\lambda_0) = R(\lambda_0, A)$.

En plus si $(G_n(t))_{t\geq 0}$ est le semi-groupe généré par A_n et $(G(t))_{t\geq 0}$ est généré par A, alors $\forall x \in X,\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(t)x = G(t)x$ uniformément sur t dans des intervalles bornés.

Lemme 2.3 :

Soit $o \neq x \in X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$.

Alors il existe $x^* \in X_+^*$ *vérifiant* $\|x^*\| = 1$ *et* $< x^*, x >= \|x\|$.

Preuve:

On a $\|x\| = \sup\limits_{\|y^*\| \leq 1} < y^*, x >=< x^*, x >$ pour un certain $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, par le théorème de Hahn-Banach.

Si $x^* \in X_+^*$, alors c'est terminé.

si $x^* \notin X_+^*$, alors $0 < \|x\| =< x^*, x >=< x_+^*, x > - < x_-^*, x >\leq< x_+^*, x >$

et $\|x_+^*\| \leq \|x^*\| \leq 1$ comme $x_+^* \leq |x^*|$.

Ainsi on a $< x_+^*, x >=< x^*, x >= \|x\|$.

Par l'absurde si $\|x_+^*\| < 1$ alors $z^* = \|x_+^*\|^{-1} x_+^*$ vérifie $\|z^*\| = 1$ et $< z^*, x >>< x^*, x >$ ce qui est impossible.

Donc $\|x_+^*\| = 1$, et x_+^* vérifie les conditions du lemme.

Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.2.3 (Convergence monotone) *[2] :*

Soit $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments positifs d'un treillis de Banach* X*, paramétrée par* $t \in T \subset \mathbb{R}$ *et soit* $t_0 \in \overline{T}$.

i) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $\lim\limits_{t\to t_0} x_n(t) = x_n$,

$$\text{alors } \lim_{t\to t_0} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n. \text{ (Sans tenir compte du fait que } \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \text{ existe).}$$

ii) Si $\lim\limits_{t\to t_0} x_n(t) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *et il existe* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $x_n(t) \leq a_n$ *pour tout* $t \in T$, $n \in \mathbb{N}$ *avec* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| < +\infty$,

$$\text{alors } \lim_{t\to t_0} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Dans ce qui suit, nous fournissons un théorème général donnant les conditions sur le perturbateur B d'un opérateur linéaire A générant un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(G_A(t))_{t\geq 0}$ pour qu'il existe une extension K de la somme d'opérateur $A + B$ générant un semi-groupe fortement continu. C'est ainsi que nous énonçons le théorème généralisé des perturbations de Kato obtenu en 1954.

2.3 Le théorème généralisé des perturbations de Kato.

Tous les résultats de cette section peuvent être retrouvés dans [2].

Théorème 2.3.1 (Théorème généralisé des perturbations de Kato) :
Soit X un KB-espace.

Supposons que nous avons deux opérateurs $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ vérifiant :

(A1) A génère un semi-groupe positif de contraction $(G_A(t))_{t\geq 0}$,

(A2) $r(BR(\lambda, A)) \leq 1$ pour tout $\lambda > 0$,

(A3) $Bx \geq 0$ pour tout $x \in D(A)_+$,

(A4) $\langle x^*, (A+B)x\rangle \leq 0$ pour tout $x \in D(A)_+$, où $< x^*, x >= \|x\|$, $x^* \geq 0$

Alors il existe une extension $(K, D(K))$ de $(A+B, D(A))$ qui génère un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe de contraction $(G_K(t))_{t\geq 0}$.

Pour tout $\lambda > 0$, le générateur K vérifie :

$$\begin{aligned} R(\lambda, K)x &= \lim_{n\to+\infty} R(\lambda, A)\sum_{k=0}^{n}(BR(\lambda, A))^n x \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda, A)(BR(\lambda, A))^n x. \qquad (1) \end{aligned}$$

Proposition 2.3.1 :

Si $-A$ est un opérateur positif, la condition $(A2)$ du théorème de Kato peut être remplacée par :

$$(A2)' \qquad \|Bx\| \leq \|Ax\|,\ \forall x \in D(A)_+.$$

Preuve:

Si $(A2)'$ est vérifiée, alors on a

$$0 \leq -A(\lambda I - A)^{-1} = I - \lambda(\lambda I - A)^{-1} \leq I$$

Donc $\|A(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \|y\|$, $\forall y \in X_+$ et par conséquent $\forall y \in X$ car $-A$ étant positif on a $\|A\| = \sup_{\|y\|\leq 1}\|Ay\| = \sup_{y\geq 0, \|y\|\leq 1}\|Ay\|$.

Ainsi $\|Ax\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$, $\forall x \in D(A)$

Donc pour tout $\forall x \in D(A)_+, \|Bx\| \leq \|Ax\| \leq \|(\lambda I - A)x\|$, en prenant ensuite $x = (\lambda I - A)^{-1}y$, on a : $\|B(\lambda I - A)^{-1}y\| \leq \|y\|$, pour tout $y \in X_+$

et par conséquent $\|B(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1$.

Donc $(A2)$ est vérifiée. ■

Proposition 2.3.2 :

Si la condition $(A2)$ est vérifiée pour $\lambda_0 > 0$, alors elle l'est aussi $\forall \lambda > \lambda_0$.

Preuve:

Puisque $BR(\lambda, A) - BR(\lambda_0, A) = (\lambda_0 - \lambda)BR(\lambda_0, A)R(\lambda, A)$ et $\lambda > \lambda_0$

alors $BR(\lambda_0, A) \geq BR(\lambda, A) \geq 0$, d'où $r(BR(\lambda, A)) \leq r(BR(\lambda_0, A)) \leq 1$. ■

Preuve (Théorème généralisé des perturbations de Kato):

On définit les opérateurs K_r, $0 \leq r \leq 1$ par : $K_r = A + rB$, $D(K_r) = D(A)$.

En écrivant $(\lambda I - A - rB) = (I - rB(\lambda I - A)^{-1})(\lambda I - A)$, d'après $(A2)$, le rayon spectral $r(BR(\lambda, A)) < 1$.

La résolvante $(\lambda I - (A + rB))^{-1}$ existe et est donné par

$$R(\lambda, K_r) = (\lambda I - (A + rB))^{-1} = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (BR(\lambda, A))^n, \tag{2}$$

où la série est absolument convergente et chaque terme est positif.

Soit $0 \leq x^*$ vérifiant $< x^*, x >= \|x\|$ (x^* existe bien d'après le lemme 2.3)

Pour $x \in D(A)_+$, $r < 1$ on a :

$$< x^*, (A + rB)x >=< x^*, (A + B)x > +(r - 1) < x^*, Bx >\leq 0 \tag{3}$$

d'après $(A5)$ et par ce que Bx et x^* sont positifs.

Ainsi, $\|(\lambda I - K_r)x\| \geq< x^*, (\lambda I - K_r)x >= \lambda < x^*, x > - < x^*, K_r x >\geq \lambda\|x\|$, $\forall x \in D(A)_+$.

En prenant $y \in X_+$, on a $(\lambda I - K_r)^{-1} y = x \in D(A)_+$ tel qu'on peut réécrire l'inégalité précédente comme : $$\|R(\lambda, K_r y\| \leq \lambda^{-1}\|y\| \tag{4}$$

pour tout $y \in X_+$ et par ce que $R(\lambda, K_r)$ est positif, (4) peut s'étendre dans tout l'espace X.

Aussi par le théorème de Hille-Yosida, pour tout $0 \leq r < 1$, $(K_r, D(A))$ génère un semi-groupe de contraction $(G_r(t))_{t\geq 0}$.

D'après (2), nous voyons que la suite $(R(\lambda, K_r)x)_{0\leq r<1}$ est croissante et converge vers 1 , $\forall x \in X_+$ et $\{\|R(\lambda, K_r)x\|\}_{0\leq r<1}$ est borné.

Comme X est un KB-espace, il existe un élément $y_{\lambda,x} \in X_+$ tel qu'on ait la limite

$$\lim_{r\to 1^-} R(\lambda, K_r)x = y_{\lambda,x} \text{ dans } X.$$

On peut étendre cette convergence dans tout l'espace par linéarité et par le théorème de Banach-Steinhaus, on a l'existence d'un opérateur borné positif sur X noté $R(\lambda)$ tel que $R(\lambda)x = y_{\lambda,x}$.

pour utiliser le théorème de Trotter-Kato, nous allons montrer que $\forall x \in X$, la limite $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, K_r)x = x$ est uniforme sur r.

Soit $x \in D(A)$.

Comme $K_r R(\lambda, K_r) = I - \lambda R(\lambda, K_r)$, d'après (4), on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, K_r)x - x\| &= \|K_r R(\lambda, K_r)x\| = \|R(\lambda, K_r)K_r x\| \\ &\leq \lambda^{-1}\|(A + rB)x\| \\ &\leq \lambda^{-1}(\|Ax\| + \|Bx\|) \text{ telle que la convergence ci-dessus soit uniforme} \end{aligned}$$

sur r.

Comme $D(A)$ est dense dans X,

pour $y \in X$ on prend $x \in D(A)$ avec $\|y - x\| < \varepsilon$ pour avoir encore par (4),

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda, K_r)y - y\| &\leq \lambda\|R(\lambda, K_r)(y - x)\| + \|y - x\| + \|\lambda R(\lambda, K_r)x - x\| \\ &\leq 2\varepsilon + \lambda^{-1}(\|Ax\| + \|Bx\|).\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la convergence uniforme.

D'après le théorème de Trotter-Kato, $R(\lambda)$ est défini pour tout $\lambda > 0$ et est la résolvante d'un opérateur fermé à domaine dense K qui génère un semi-groupe de contraction $(G_K(t))_{t\geq 0}$.

En plus, $\forall x \in X,\ \lim\limits_{r\to 1^{-1}} G_r(t)x = G_K(t)x.$ (5)

Pour terminer la preuve, montrons que K est une extension de $A + B$ vérifiant la relation (1).

Par le théorème de la convergence monotone, on a :

$$R(\lambda, K)x = \sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda, A)(BR(\lambda, A))^k x,\ x \in X \qquad (6).$$

Nous notons que la n^{eme} somme partielle de (6) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}R^n(\lambda)y &= R(\lambda, A)y + R(\lambda, A)\sum_{k=1}^{n}(BR(\lambda, A))^{k-1}BR(\lambda, A)y \\ &= R(\lambda, A)y + \left(R(\lambda, A)\sum_{k=0}^{n-1}(BR(\lambda, A))^k\right)BR(\lambda, A)y \\ &= R(\lambda, A)y + R^{n-1}(\lambda)BR(\lambda, A)y\end{aligned}$$

Telle que pour $y = (\lambda I - A)x,\ x \in D(A)$, on ait :

$$R^n(\lambda)(\lambda I - A)x = x + R^{n-1}(\lambda)Bx.$$

En passant à la limite sur n, on a :

$$R(\lambda, K)(\lambda I - A)x = x + R(\lambda, K)Bx \qquad (7)$$

soit encore : $R(\lambda, K)\left(\lambda I - (A + B)\right)x = x$

D'où $R(\lambda, K)R^{-1}(\lambda, A + B) = I$ et par conséquent, $Kx = (A + B)x$

Ce qui montre que $K \supseteq A + B$

Ce qui achève la preuve. ∎

Corollaire 2.3.1 :

Sous les conditions du théorème de Kato, le semi-groupe $(G_K(t))_{t\geq 0}$ vérifie l'équation de Duhamel :

$$G_K(t)x = G_A(t)x + \int_0^t G_K(t - s)BG_A(s)xds,\ x \in D(A) \qquad (8).$$

Preuve:

Soit $x \in D(A)$, on a :

$$\frac{d}{dt}G_A(t)x = AG_A(t)x + rBG_A(t)x - rBG_A(t)x$$

tel que les opérateurs $K_r = A + rB$ avec le domaine $D(A)$ génèrent des semi-groupes de contractions $(G_r(t))_{t\geq 0}$, par l'équation de Duhamel on a :

$$G_A(t)x = G_r(t)x - r\int_0^t G_r(t-s)BG_A(s)xds.$$

Aussi, on obtient l'équation de Duhamel pour $(G_r(t))_{t\geq 0}$:

$$G_r(t)x = G_A(t)x + r\int_0^t G_r(t-s)BG_A(s)xds \qquad (9).$$

Nous savons que $(G_r(t))_{t\geq 0}$ converge vers $(G_K(t))_{t\geq 0}$ uniformément sur t dans les intervalles bornés.

Pour montrer la convergence sous les intégrales, nous notons que :

$$|1-r|\|\int_0^t G_r(t-s)BG_A(s)xds\| \leq t|1-r|\|BR(\lambda, A)\|\|(\lambda I - A)x\|,\ \lambda > 0$$

comme les semi-groupes sont de contraction.

Ainsi, l'expression ci-dessus converge vers 0 comme $r \to 1$.

Puisque $x \in D(A)$, la fonction $s \mapsto BG_A(s)x$ est continue, alors $\{BG_A(s)x : s \in [0;t]\}$ est compact par suite la convergence est uniforme sur s.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, on prend une collection finie $s_0, s_1, \cdots s_n$ telle que $\forall s$, il existe k tel que :

$$\|BG_A(s)x - BG_A(s_k)x\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\|\left(G_r(t-s) - G_K(t-s)\right)BG_A(s)x\|$

$$\begin{aligned}
&\leq \|G_r(t-s)BG_A(s)x - G_r(t-s)BG_A(s_k)x\| \\
&+\|G_r(t-s)BG_A(s_k)x - G_K(t-s)BG_A(s_kx\| \\
&+\|G_K(t-s)BG_A(s_k)x - G_K(t-s)BG_A(s)x\| \\
&\leq \|BG_A(s)x - BG_A(s_k)x\| + \|\left(G_r(t-s) - G_K(t-s)\right)BG_A(s_k)x\| \\
&+\|BG_A(s_kx - BG_A(s)x\| \leq 3\varepsilon, \qquad (10)
\end{aligned}$$

Ceci indépendamment de s, où le second terme est uniforme à cause de la convergence uniforme des semi-groupes et comme

$$\begin{aligned}
&\|\int_0^t G_r(t-s)BG_A(s)xds - \int_0^t G_K(t-s)BG_A(s)xds\| \\
&\qquad \leq \int_0^t \|\left(G_r(t-s) - G_K(t-s)\right)BG_A(s)xds\|.
\end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'expression (9), on a la relation (8). ∎

Chapitre Trois

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS SOUS LA FORME "BIRTH AND DEATH".

3.1 Définitions.

Un système sous la forme " birth and death " est un système infini d'équations différentielles ordinaires qui est encore un cas particulier des systèmes de Kolmogorov.
Une application classique des systèmes de ce genre est basée sur la théorie d'évolution des populations.

Définition 3.1.1 :
On considère une population de n individus à un instant t donné.
La taille n de cette population peut augmenter dans un intervalle de temps suite à la naissance d'un individu donnant le phénomène appelé : Birth.
La taille n de cette population peut aussi diminuer dans un intervalle de temps suite au décès d'un individu donnant le phénomène appelé : Death.
Si nous notons b_n la probabilité que la taille de la population passe de n à $n+1$ et d_n la probabilité qu'elle passe de n à $n-1$ dans un intervalle de temps donné, avec $b_{-1} = d_0 = 0$ alors les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous permettent de définir le système sous la forme birth and death suivant :

$$\begin{cases} u_0' &= \quad -b_0u_0 + d_1u_1 \\ \quad\vdots & \\ u_n' &= -(b_n+d_n)u_n + d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1} \end{cases}.$$

Où $u_n(t)$ *est la probabilité d'avoir une population de taille* n *à l'instant de temps* t *et* $u'_n(t)$ *est la variation de cette probabilité suite à la naissance et au décès d'un individu dans un intervalle de temps .*

Définition 3.1.2 :
Un système d'équations différentielles sous la forme "birth and death" peut aussi être une application basée sur un ensemble d'objets dénombrables décrits par un vecteur $u = (u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots)$ *où* u_n *est le nombre d'objets présents au rang* n.
On peut définir un mécanisme qui permet de changer le nombre d'objets au rang n*, soit en introduisant un dans l'ensemble considéré, soit en enlevant un de l'ensemble considéré.*

3.2 Forme des solutions d'un système sous la forme "birth and death".

D'une manière générale nous considérons un système d'équations ayant la forme

$$\left\{\begin{array}{lcc} u'_0 & = & -b_0u_0 + d_1u_1 \\ & \vdots & \\ u'_n & = & -(b_n+d_n)u_n + d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1} \end{array}\right. \tag{1}$$

Qui décrit l'évolution d'une population ayant la taille n à l'instant t ; $u_n(t)$ la probabilité d'avoir une population de taille n à l'instant t.
En considérant le système (1) dans l'espace de Banach $X = l^p = \left\{u = (u_n)_n, u_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty\right\}$, on a $\|u\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p$, Où $u = (u_n)_n = (u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots)$ est une suite de probabilités et $p \in [1, +\infty[$.
On définit ensuite les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur X par :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & X & \longrightarrow & X \\ & u = (u_n)_n & \longmapsto & \mathcal{A}u = \{-(b_n+d_n)u_n\}_n = \{-a_nu_n\}_n \end{array} \quad \text{où } a_n = b_n + d_n \text{ et}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B}: & X & \longrightarrow & X \\ & u = (u_n)_n & \longmapsto & \mathcal{B}u = \{(d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1})\}_n \end{array}.$$

On peut écrire le système (1) sous la forme $u' = \mathcal{K}u$ où $\mathcal{K}$ est la matrice tridiagonale infinie d'un opérateur linéaire donnée par :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} -b_0 & d_1 & & & \\ b_0 & -a_1 & d_2 & & \\ & b_1 & -a_2 & d_3 & \\ & & b_2 & -a_3 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Par conséquent on a le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} u_0' \\ u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_0 & d_1 & & & \\ b_0 & -a_1 & d_2 & & \\ & b_1 & -a_2 & d_3 & \\ & & b_2 & -a_3 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

On définit ensuite par restriction, l'opérateur A par

$$D(A) = \{u \in X : \mathcal{A}u \in X\} \text{ et } Au = \mathcal{A}u \ .$$

Par la suite, on définit l'opérateur B comme la restriction de $\mathcal{B}$ à $D(A)$.

On peut alors écrire le système (1) simplement sous la forme $u' = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ (2).

Cependant, si nous montrons qu'il existe un opérateur K avec $A + B \subseteq K \subseteq \mathcal{A} + \mathcal{B}$ tel que $(K, D(K))$ génère un semi groupe $(G_K(t))_{t\geq 0}$ alors on obtient une solution du système (2) sous la forme $u(t) = G_K(t)u_0$.

En considérant l'espace de Banach $X = l^p$ avec $p \in [1; +\infty[$,

. Si les suites $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n$ et $d = (d_n)_n$ sont bornées, alors l'opérateur K est borné sur tout l'espace l^p. Ainsi par le théorème des perturbations bornées, K génère un $\mathcal{C}_0$- semi-groupe de contractions $(G_K(t))_{t\geq 0}$.

. Cependant si les suites $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n$ et $d = (d_n)_n$ ne sont pas toutes bornées, et vérifient les conditions ci-dessous énoncées (Théorème 3.3.1), alors en utilisant le théorème généralisé des perturbations de Kato, K génère aussi un semi-groupe de contractions $(G_K(t))_{t\geq 0}$.

3.3 Application à la résolution d'un système sous la forme "birth and death".

Dans cette section, nous considérons l'espace de Banach $X = l^p$, $p \geq 1$ qui est un KB-espace pour illustrer l'application du théorème de Kato et montrer l'existence des solutions d'un système ayant la forme $\left\{\begin{array}{lcr} u_0' & = & -b_0u_0 + d_1u_1 \\ & \vdots & \\ u_n' & = & -(b_n+d_n)u_n + d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1} \end{array}\right.$ (1).

On peut étendre cette application dans plusieurs autres domaines de la vie, par exemple :

- En médecine où un nombre n de cellules cancérigènes peut s'augmenter suite à la division cellulaire ou encore diminuer suite à une chimiothérapie.
- En science physique particulièrement dans la radioactivité, où une particule peut perdre ou encore gagner un quantum d'énergie.

Notation 3.3.1 :

Nous notons simplement dans la suite $U = (u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots) = (u_n)_n$.

$a_n = b_n + d_n$ *avec en particulier* $b_{-1} = d_0 = 0$ *et* $b_n, d_n > 0$ *pour tout autre indice* n.

$\mathcal{K}$ *désigne la matrice formée des coefficients du second membre de (1).*

$\mathcal{K}$ *peut être considéré comme étant un opérateur sur l'espace de Banach :*

$$l^1 = \{U = (u_n)_n : \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\} \text{ telle que pour tout } U = (u_n)_n \in l^1,$$

$$\text{on ait } \mathcal{K}U = \{(\mathcal{K}U)_n\}_n \text{ où}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}U)_n &= b_{n-1}u_{n-1} - a_nu_n + d_{n+1}u_{n+1} \\ &= -(b_n+d_n)u_n + d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1} \\ &= -a_nu_n + d_{n+1}u_{n+1} + b_{n-1}u_{n-1}.\end{aligned}$$

De la même manière, nous considérons les opérateurs $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *dans l'espace de Banach* l^1 *ainsi :*

$$\mathcal{A}U = \{(\mathcal{A}U)_n\}_n \text{ avec } (\mathcal{A}U)_n = -(b_n+d_n)u_n = -a_nu_n$$
$$\text{et } \mathcal{B}U = \{(\mathcal{B}U)_n\}_n \text{ avec } (\mathcal{B}U)_n = b_{n-1}u_{n-1} + d_{n+1}u_{n+1}.$$

De ce qui précède, l'opérateur $\mathcal{K}$ peut s'écrire simplement $\mathcal{K} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Nous notons $\mathcal{K}_p$ l'opérateur maximal défini sur l^p, $p \geq 1$ par

$$\mathcal{K}_pU = \mathcal{K}U$$

avec $D(\mathcal{K}_p) = \{U \in l^p : \mathcal{K}U \in l^p\}$.

Lemme 3.1 :

L'opérateur maximal $\mathcal{K}_p$ est fermé pour tout $p \in [1;+\infty[$.

Preuve:

Il suffit de montrer que le graphe de $\mathcal{K}_p$ est fermé dans $l^p \times l^p$.

Soit $u^{(n)} \longrightarrow u$ et $\mathcal{K}_p u^{(n)} \longrightarrow v$ dans l^p lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Alors $\forall k$, $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ et par définition de $\mathcal{K}_p$, on a

$$v_k = b_{k-1}u_{k-1} + a_k u_k + d_{k+1}u_{k+1}.$$

Par conséquent, $\mathcal{K}_p u = v$ donc $\mathcal{K}_p$ est fermé. ∎

Nous définissons ensuite l'opérateur A_p en faisant la restriction de l'opérateur $\mathcal{A}_p$ sur

$$D(A_p) = \{u \in l^p : \mathcal{A}u \in l^p\}$$

$$= \{u \in l^p : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^p |u_n|^p < +\infty\}.$$

Lemme 3.2 :

L'opérateur $(A_p, D(A_p))$ génère un semi-groupe de contraction sur l^p.

Preuve:

L'opérateur linéaire A_p est à domaine dense dans l^p avec la résolvante $R(\lambda, A_p)$, $\forall \lambda > 0$, donnée par :

$$(R(\lambda, A_p)y)_n = \frac{y_n}{\lambda + a_n}, \text{ pour tout } y = (y_n)_n \in l^p.$$

(rappelons que $a_n = b_n + d_n \geq 0$).

Ainsi $\|A_p R(\lambda, A_p)y\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n^p}{(\lambda + a_n)^p} |y_n|^p$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|^p$$

Et

$$\|R(\lambda, A_p)y\|_p^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda + a_n)^p} |y_n|^p$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^p} \|y\|_p^p.$$

Le résultat suit par le théorème de Hille-yosida. ∎

Théorème 3.3.1 *:*

Si les suites $b = (b_n)_n$ *et* $d = (d_n)_n$ *sont croissantes et il existe* $\alpha \in [0;1]$ *tel que* $\forall n$*,*

$$0 \leq b_n \leq \alpha a_n \ , \ 0 \leq d_{n+1} \leq (1-\alpha) a_n \qquad (2)$$

Alors il existe une extension K_p *de l'opérateur* $(A_p + B_p, D(A_p))$ *où* $B_p = \mathcal{B}|_{D(A_p)}$*, qui génère un semi-groupe de contraction dans* l^p*,* $p > 1$*.*

Preuve:

L'opérateur B_p est positif ;

En plus, soit $x \in D(A_p)$.

Comme $b_{-1} = d_0 = 0$,

$$\text{Alors } \|B_p x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_{n-1}x_{n-1} + d_{n+1}x_{n+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n-1}^p |x_{n-1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}^p |x_{n+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{P}}.$$

Puisque $d = (d_n)_n$ est croissante, on a $d_n \leq d_{n+1}$.

En utilisant (2) , on a :

$$\|B_p x\|_p \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|A_p x\|_p.$$

Ainsi, $B_p D(A_p) \subset l^p$.

Comme $-A_p$ est un opérateur positif, par la proposition 2.3.1, nous voyons que les conditions (A2) et (A3) du théorème de Kato sont vérifiées.

Pour montrer (A4), on prend $x \in D(A_p)_+$ et la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$y_n = \begin{cases} 0 & si \quad x_n = 0 \\ x_n^{p-1} & si \quad x_n \neq 0 \end{cases}$$

Alors $y \in l_q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\text{En effet, } \sum_{n=0}^{+\infty} y_n^q = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^{(p-1)q}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^p < +\infty \text{ car } x = (x_n)_n \in l_p.$$

Pour les $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\langle K_p x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (K_p x)_n x_n^{p-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^p + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n-1} x_{n-1} x_n^{p-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x_{n+1} x_n^{p-1} \\
&\leq -\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n^p - \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x_n^p + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n-1} x_{n-1} x_n^{p-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x_{n+1} x_n^{p-1},
\end{aligned}
$$

car $a_n = (b_n + d_n) \leq (b_n + d_{n+1})$.

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$
\begin{aligned}
\langle K_p x, y\rangle \leq & \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_{n+1}^p\right)^{\frac{1}{q}} - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n^p \\
& + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x_n^p\right)^{\frac{1}{q}} - \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x_n^p,
\end{aligned}
$$

Comme $b_n \leq b_{n+1}$ et $d_n \leq d_{n+1}$, on a $\langle K_p x, y\rangle \leq 0$.

Donc (A4) est vérifiée.

Par conséquent les conditions (A1), (A2), (A3) et (A4) du théorème de Kato sont vérifiées.

Ce qui achève la preuve. ∎

Soit $\left(G_{K_p}(t)\right)_{t\geq 0}$ le semi-groupe généré par K_p, alors la solution du système sous la forme "birth and death" est $u(t) = G_{K_p}(t)u_0$ où u_0 est la solution à l'instant initial.

Les corollaires suivants nous permettent d'avoir la position du générateur K_p entre $A_p + B_p$ et $\mathcal{K}_p$.

Corollaire 3.3.1 :

Si $p \in]1; +\infty[$, alors $K_p = \overline{A_p + B_p}$.

En effet, comme dans le lemme 3.1, on montre que $\mathcal{B}$ est un opérateur fermé par conséquent B_p.

Corollaire 3.3.2 :

Si $p = 1$, alors il existe une extension K_1 de l'opérateur $(A_1 + B_1, D(A_1))$ où $B_1 = \mathcal{B}|_{D(A_1)}$ qui génère un semi-groupe de contraction positif dans l_1.

Corollaire 3.3.3 :

$\forall p \geq 1$, on a $K_p \subset \mathcal{K}_p$.

Preuve:

En effet, notons que si $u^r \longrightarrow u$ lorsque $r \longrightarrow 1$ dans l_p,

alors $\forall n$,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 1}\left((I-\mathcal{K}_p)u^r\right)_n &= \lim_{r\to 1}\left(u_n^r + a_n u_n^r - b_{n-1}u_{n-1}^r - d_{n+1}u_{n+1}^r\right)\\ &= u_n + a_n u_n - b_{n-1}u_{n-1} - d_{n+1}u_{n+1}\\ &= \left((I-\mathcal{K}_p)u\right)_n.\end{aligned}$$

Notons $u^r = R(1, A + rB)f$ pour $f = (f_n)_n \in l_p$.

Nous voyons que $u^r \longrightarrow R(1, K_p)$ lorsque $r \longrightarrow 1$.

Comme $R(1, A + rB)$ est la résolvante de $(A + rB, D(A))$ qui une restriction de $\mathcal{A} + r\mathcal{B}$, on a :

$$\begin{aligned}\left((I-\mathcal{K}_p)u^r\right)_n &= u_n^r + a_n u_n^r - rb_{n-1}u_{n-1}^r - rd_{n+1}u_{n+1}^r\\ &\quad -(1-r)\left(b_{n-1}u_{n-1}^r + d_{n+1}u_{n+1}^r\right)\\ &= f_n - (1-r)\left(b_{n-1}u_{n-1}^r + d_{n+1}u_{n+1}^r\right).\end{aligned}$$

Comme n est fixé, en faisant $r \longrightarrow 1$ on a :

$$\left((I-\mathcal{K}_p)u\right)_n = f_n \text{ soit encore } (I-\mathcal{K}_p)R(1, K_p)f = f. \qquad \blacksquare$$

INTÉRÊT PÉDAGOGIQUE

Dans ce mémoire, nous avons montré que tout système d'équations différentielles se ramenant au modèle birth and death peut se résoudre à l'aide du semi-groupe généré par l'opérateur linéaire associé au système.

Dans le cadre de l'enseignement secondaire, la résolution des équations à une, deux ou trois inconnues quelque soit le niveau et la classe est d'une importance capitale. Cependant, il existe plusieurs méthodes de résolution liées à chaque type d'équation et de système d'équations.

Particulièrement en classe de Terminale C et D, on montre que les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'(t) = ky(t)$ avec $k \in \mathbb{R}$ et y une fonction dérivable, sont de la forme $y(t) = exp(kt)y(0)$.

Nous remarquons ainsi que cette solution donnée représente un cas particulier de la résolution des systèmes de la forme : $\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) & = & Ku(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{cases}$ où on vérifie que l'opérateur linéaire K associé au système génère un semi-groupe $(G_K(t))_{t\geq 0}$ et par conséquent les solutions du système d'équations différentielles ci-dessus sont de la forme $u(t) = G_K(t)u(0)$.

Il ressort de cette étude comparative que les semi-groupes utilisés dans ce mémoire pour résoudre les systèmes d'équations différentielles représentent une généralisation de la fonction exponentielle utilisée au secondaire pour résoudre les équations différentielles du type $y'(t) = ky(t)$ avec $k \in \mathbb{R}$ et y une fonction dérivable. D'où la nécessité d'étudier et de connaître les propriétés des semi-groupes notamment dans le cadre de la résolution des équations différentielles et leurs applications dans l'optique de faciliter la transposition didactique au niveau de l'enseignement secondaire.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à montrer que tout système d'équations se ramenant au modèle "birth and death" $u' = Au + Bu$ peut être résolu à l'aide du semi-groupe $(G_K(t))_{t\geq 0}$ que l'opérateur K qui est une extension de $A+B$ génère. Pour cela, la démarche a consisté dans un premier temps à rappeler les théorèmes fondamentaux, les propriétés des semi-groupes et le théorème de Hille-Yosida qui donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur A soit générateur d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe. Par la suite on a vérifié que l'opérateur A et le perturbateur B satisfont les conditions du théorème de Kato ce qui garanti l'engendrement d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe par une extension K de l'opérateur $A + B$. Toutefois, ce procédé en application nous permet de montrer l'existence des solutions d'un système se ramenant au modèle "birth and death" $u' = Au + Bu$ comme étant sous la la forme $u(t) = G_K(t)u_0$ avec $u_0 = u(0)$.
Cependant dans cette démarche, on remarque que les opérateurs associés sont à matrices infinies. Toutefois ce procédé peut-être appliqué conjointement avec d'autres résultats connus des semi-groupes linéaires telle que la méthode d'approximation de Reuter et Lederman qui introduit un opérateur de projection enfin d'avoir des matrices finies et approximer successivement les solutions.

Bibliographie

[1] Bader P., Clément P et Froidevaux H. (1971) *Des maths aux plans-sur-bex. semi-groupes d'opérateurs*, EPF de Lausanne.

[2] Banasiak Jacek and Arlotti Luisa. (2006) *Positive Perturbation of semigroups with applications*, Springer, London. 133-195.

[3] Brésis H. (1983) *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*, Paris : Masson. (Mathématiques appliquées pour la maitrise).

[4] Burris S and Sankappanavar H P. (1981) *A course in Universal Algebra*, Springer-verlag, NSERC of Canada. 5-15.

[5] Hille E and Phillips R S. (1957) *Funtional Analysis and Semigroups :* Amer. Math. soc. coll. publ. 31, Providence, RI.

[6] Kato T.(1966) *Pertubation theory for linear operators* , Springer-Verlag New York, Inc. New York. 1-15.