RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
***************

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

***************

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

***************

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
***************

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

***************

HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE

***************

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

# EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTION D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE SEMI LINÉAIRE

**Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur des Lycées d'Enseignement Secondaire Général de deuxième grade (DI.P.E.S II) en Mathématiques.**

**Par**

**PABAME GOUARA**

***Matricule*** **: 0187070101304**

**Sous la direction de :**

**Pr. NNANG Hubert**

***Maître des Conférences , Ecole Normale Supérieure de Yaoundé.***

*Année académique : 2018 – 2019*

# EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTION D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE SEMI-LINÉAIRE

**Mémoire de DI.P.E.S II**

**par**

**PABAME GOUARA**

**Matricule : 01.87.07.01.01304**

**Licencié en mathématiques**

**Sous la Direction de :**

**Pr. NNANG Hubert**

**Maître de Conférences**

**École Normale Supérieure de Yaoundé, Université de Yaoundé I**

**Yaoundé, Juin 2019.**

# ♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dument mentionnées et recensées en bibliographie.

PABAME GOUARA

# ♣ Dédicace ♣

Je dédie ce mémoire à mes parents Papa Gouara OUADIA et maman Mambing PALLOU pour leur soutien, leur amour et leur affection qui me donnent la force pour affronter les difficultés.

# ♣ Remerciements ♣

Louange à Dieu tout puissant qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail. Mes remerciements vont tout d'abord :

- ♠ À mon encadreur Pr. NNANG Hubert, pour son enthousiasme et permanence source de motivation. Je le remercie aussi vivement pour son excellente pédagogie et la rigueur scientifique qui restera un modèle pour moi.
- ♠ Aux membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.
- ♠ À tous les enseignants de l'E.N.S pour leurs enseignements et leur accompagnement tout au long de notre formation.
- ♠ À mes amis et mes camarades de promotion pour les bons moments passés ensemble dans cette précieuse école.
- ♠ À mes amis Mr Djonka DJORET, Mr Nguemfouo Marchal, Mr Djacheun YONKEU Kevin, Mde Mayidang ZOUA pour leur soutien.

Je ne saurais terminer sans adresser des remerciements spéciaux à :

- ♠ À mes frères et sœurs pour leurs multiples encouragements et leur soutien sans faille.
- ♠ À mon épouse madame Ignakinet née Pabamé et mes enfants Lipelba Grâce, Yaki Roucelle, Foka Pervaline et Deudibé ALI qui ont été à mes côtés durant ce travail.
- ♠ Je pense aux messieurs Patalet GEO et Gondimo KOUMAYE dont le travail n'aurait pu aboutir sans leurs inépuisables soutien et encouragements. Qu'ils trouvent dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude. Une pensée toute particulière va à l'endroit de ma belle famille qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail;
- ♠ Merci à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, qu'ils reçoivent ici l'expression de ma profonde considération.

# ♣ Sommaire ♣

# ♣ Résumé ♣

L'un des problèmes posés dans la résolution des équations aux dérivées partielles quand les données de celles-ci sont moins régulières est l'existence et l'unicité de solution de solution. L'objectif visé dans ce mémoire est de démontrer l'existence et l'unicité de solution d'un problème elliptique semi-linéaire. Pour y parvenir, nous présentons un aperçut sur la théorie des distributions , les espaces de Sobolev hilbertiens et la minimisation des fonctionnelles dans les espaces de Banach réflexifs. Les méthodes classiques consistent à établir l'équivalence entre le problème aux limites , le problème variationnel et le problème de minimisation ou encore elle consiste à établir une équivalence entre le problème aux limites, le problème variationnel et un problème de point fixe. Il en ressort via le théorème fondamental que le problème aux limites admet une unique solution

Mots clés :Problème aux limites elliptiques, Distributions, Espaces de Sobolev hilbertiens, problème variationnel, Problème de minimisation.

# ♣ Abstract ♣

One of the problems in solving partial differential equations when data from them are less regular is the existence and uniqueness of solution.The objective aims in this memory is to demontrate the existence and the uniqueness of the solution of semi-linear elliptic problem. To achieve this, we presented an overview on the theory of distributions, the spaces of sobolev and the minimisation of the functinal ones in spaces of banach reflexifs.The classical methods consist in establishing the equivalence between the problem with the limits, variational problem and a problem of minimisation or they consist inn establishing the equivalence between the problem with the limits, the problem variational and the problem of fixe point. It emerges from the fundamental theorem that the problem at the limits of a single solution.

Keys words : Elliptic problem of limit, Distribution, sobolev hiltian space, variational problem, Minimisation problem.

# ♣ notations ♣

## Conventions

On donne ci-dessous l'ensemble des diverses notations et espaces fonctionnels utilisés tout au long de ce travail.

$<,>$ Crochet de dualité entre $E'$ et $E$.

$(,)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

$p'$ Exposant conjugué de $p$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$.

$p.p.$ presque partout.

$dx$ Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$\Omega$ désigne un ouvert borné et de classe $\mathscr{C}^1$ (au moins) de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.

$mes(\Omega)$ Mesure de Lebesgue de l'ensemble $\Omega$.

$\overline{\Omega}$ est la fermeture de $\Omega$ dans $\mathbb{R}^N$.

$\Gamma=\partial\Omega$ la frontière de $\Omega$.

$\alpha=(\alpha_1,......,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$ un multi-indice de longueur $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_N$.

$Supp\ f=\overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}}$ est le support de la fonction $f$.

## Opérateurs différentiels

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = \text{gradient de } u.$$

$$divu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{divergence de } u.$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.$$

## Espaces fonctionnels

$E'$ Espace dual topologique de $E$.

$\mathscr{L}(E, F)$ Espace des opérateurs linéaires continus de $E$ dans $F$.

$E''$ Le bidual topologique de $E$.

$\mathscr{C}(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction mesurable : $\int_\Omega |u|^p dx < +\infty, 1 \leq p < +\infty\}$.

$L^\infty(\Omega)=\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction mesurable tel qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|u(x)| \leq \lambda$ p.p $x \in \Omega\}$.

$L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad fonction \quad mesurable : \int_K |u(x)| dx < +\infty \quad \forall K \quad compact \quad de \quad \Omega\}$.

$\mathscr{E}^k(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^k\}$.

$\mathscr{E}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty\}$

$\mathscr{D}^k_K(\Omega) = \{f \in \mathscr{E}^k(\Omega)$ tel que $Suppf \subset K\}$.

$\mathscr{D}_K(\Omega)=\{\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) : supp\varphi \subset K$, K compact de $\Omega$ $\}$.

$\mathscr{D}(\Omega)=\{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) : supp\varphi$ compact dans $\Omega$ $\}$.

$\mathscr{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathscr{D}(\Omega)$.

$\mathscr{D}(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) : \varphi = \psi_{|\Omega}, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\}$.

$\mathscr{D}^1(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) : \varphi = \psi_{|\Omega}, \psi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\}$.

$\mathscr{D}^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$=$\{$ $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ :$Supp\varphi$ est compact dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq N\}$

$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ sur \ \Gamma\}$.

$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ où $\gamma_0$ est un opérateur trace sur $\Gamma$.

# ♣ Introduction ♣

Les équations aux dérivées partielles sont des branches mathématiques qui modélisent plusieurs phénomènes physiques et économiques. L'un des problèmes posés dans la résolution de ces équations aux dérivées partielles est l'existence et l'unicité de solution quand les données de celles-ci sont moins régulières. Dans ce mémoire, nous allons démontrer, via deux approches, l'existence et l'unicité de solution d'un problème elliptique semi-linéaire. Une équation aux dérivées partielles de type elliptique semi-linéaire quant à elle, est une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire dont la forme quadratique associée est définie positive ou négative et le terme de degré de dérivation le plus élevé est linéaire. Pour mieux comprendre les sens que prennent les équations étudiées ici, nous rappelons d'abord les notions de la théorie des distributions dont le père est le mathématicien français Laurent Schwarz, lauréat de la médaille fields en 1950.
Au cours des année 30, Sergeï Lvovitch Sobolev a introduit des notions qui sont sont fondamentales dans le développement de plusieurs domaines de mathématiques. Étant à Moscou, Sobolev a construit la méthode standard pour résoudre les problèmes aux limites elliptiques en introduisant ses espaces fonctionnels et il a de plus appliqué ses méthodes pour résoudre les problèmes difficiles de la physique mathématique.
Dans ce mémoire, les espaces de distributions, les espaces de Sobolev hilbertiens puis le problème de minimisation permettent de répondre à la question en utilisant l'équivalence entre le problème aux limites, le problème de minimisation et le problème variationnel qui nous fournira l'existence et (éventuellement) l'unicité de solution dans un espace de Sobolev.
Par ailleurs, les travaux présentés dans ce mémoire concernent les équations aux dérivées partielles du type elliptique semi-linéaire.
On considère l'équation aux dérivées partielles elliptique semi-linéaire de type Dirichlet suivante :

$$(PL)\begin{cases} Au(x) + g[u](x) &= f(x)\ dans\ \Omega \quad (E_1) \\ u(x) &= 0\ sur\ \Gamma \quad (E_2) \end{cases}$$

où $\Omega$ désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathscr{C}^1$ ( au moins), $f \in L^2(\Omega)$ et

(1) $Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j})$;

(2) $a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leq i, j \leq N$;

(3) Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2,\ \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^N$ et $p.p. x \in \Omega$ et la fonction $(x, \lambda) \longmapsto g(x, \lambda)$ est continue de $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant certaines relations de continuités et de monotonie. Démontrer l'existence et unicité de $(PL)$, c'est prouver l'existence d'une unique fonction $u$ dans un espace de Sobolev. Une telle solution existe sous réserve que $\Omega$ soit suffisamment régulier, nous pouvons invoquer la notion de dérivée au sens des distributions et démontrer que $u$ vérifie :

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}dx + \int_\Omega g[u](x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \qquad (4)$$

L'intervention des espaces de Sobolev vient introduire les notions des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \in (L^2(\Omega))^N$, qui est un espace intéressant pour la recherche de solution au problème initial et démontrer l'existence d'une unique fonction u de cet espace qui vérifie la relation (4) et $u = 0$ sur $\Gamma$. Une telle solution est dite solution faible de l'EDP elliptique semi-linéaire $(PL)$.

Toute la démarche consiste à se placer dans un cadre fonctionnel tel que :

i)Les équations $(E_1)$ et $(E_2)$ aient un sens;

ii)Le problème $(PL)$ admet une unique solution .

Pour y parvenir, nous allons d'abord au chapitre premier, donner quelques définitions et résultats fondamentaux que nous utiliserons dans la suite, au deuxième chapitre nous allons étudier les espaces de Sobolev, le chapitre trois sera consacré à la présentation du problème de minimisation des fonctionnelles dans des espaces de Banach réflexifs et enfin au chapitre quatre, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de solution du problème elliptique semi-linéaire en utilisant un résultat d'existence et d'unicité de solution d'un problème de minimisation puis un résultat de point fixe. Nous terminons par l'implication pédagogique tant pour l'enseignant que pour l'élève.

Chapitre un

# Espaces fondamentaux et Distributions

Dans cette section, nous rappellerons les définitions et espaces fondamentaux puis les notions de distribution. Nous ferons une présentation sommaire de la théorie des distributions en nous limitant aux notions essentielles comme la dérivation et la convergence aux sens des distributions dans le but de mieux comprendre les espaces de Sobolev et les sens que prennent les équations $(E_1)$ et $(E_2)$ de $(PL)$.
Pour un traitement plus complet, nous referons le lecteur dans le livre de L.Schwartz(voir bibliographie).

## 1.1 Définitions et espaces fondamentaux

Définition 1.1.1. (Espaces $\mathscr{E}^k(\Omega)$ et $\mathscr{E}(\Omega)$)
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha f$ existe et est continue.
$f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $f$ est indéfiniment différentiable.

Définition 1.1.2. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On appelle support de $f$, l'adhérence de l'ensemble

$$\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}.$$

On note $suppf$ si $O_f$ est le plus grand ouvert dans lequel $f$ s'annule, alors $suppf = \complement_\Omega O_f$ . $O_f$ est appelé ouvert d'annulation de $f$.

Définition 1.1.3. (Topologie faible )
Soit $E$ un espace topologique. La topologie faible de E est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues $\varphi \in E'$ restent continues.

Définition 1.1.4. Pour $k \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$, l'espace $\mathscr{E}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\Omega$. On pose $\mathscr{E}^\infty(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)$. $\mathscr{E}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $\Omega$.

## 1.2 Distributions

Définition 1.2.1. (Distributions)

On appelle distribution sur $\Omega$ toute forme linéaire et continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$. L'ensemble des distributions sur $\Omega$ est noté $\mathscr{D}'(\Omega)$.

$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ signifie que $T$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$.

### 1.2.1 Caractérisation d'une distribution

$T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution sur $\Omega$ si :

(i) $T$ est linéaire ;

(ii) $\forall K$ compact de $\Omega$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$ tel que :$|T(\varphi)| \leq c \sup\limits_{x \in K, |\alpha| \leq p} |D^\alpha \varphi(x)|$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

Remarque 1.2.1. D'après la remarque précédente, $p = p(K)$, $c = c(K)$.

Si l'entier $p$ est choisi de manière indépendante de $K$, on dit que $T$ est une distribution d'ordre fini, et la plus petite valeur de $p$ est l'ordre de $T$.

Notation 1.2.1. Si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on conviendra de noter $T(\varphi) \equiv < T, \varphi >$

Exemple 1.2.1. L'application

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \end{aligned}$$

est une distribution d'ordre fini sur $\Omega$.

(i)Linéarité

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta_a(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) &= (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(a) \\ &= \varphi_1(a) + \lambda.\varphi_2(a) \\ &= \delta_a(\varphi_1) + \lambda\delta_a(\varphi_2). \end{aligned}$$

D'où la linéarité.

(ii)continuité

Soient K un compact de $\Omega$, $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$.

-Si $a \in K$, alors $|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \sup\limits_{x \in K} |\varphi(x)|$.

-Si $a \notin K$, alors $|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| = 0 \leq \sup\limits_{x \in K} |(\varphi(x))|$.

Dans tous les cas, $|\delta_a(\varphi)| \leq \sup\limits_{x \in K} |\varphi(x)|$. Avec $c = 1, p = 0$.

$\delta_a$ appelé distribution Dirac, c'est une distribution d'ordre 0.

Définition 1.2.2. (Fonctions localement intégrables)
L'espace des (classes de) fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont localement intégrables sur $\Omega$ (pour la mesure de Lebesgue), c'est-à-dire telles que $f.\mathbb{1}_K \in L^1(\Omega)$ pour tout compact $K \in \Omega$, L'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\Omega$ est noté $L^1_{loc}(\Omega)$.

Lemme 1.2.1.

(i) Pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'application

$$\begin{aligned} T_f : \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \int_\Omega f\varphi dx \end{aligned}$$

est une distribution sur $\Omega$ .

(ii) En outre, l'application

$$\begin{array}{rccl} \psi : & L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathscr{D}'(\Omega) \\ & f & \longmapsto & T_f \end{array}$$

est une injection canonique linéaire et continue de sorte que
$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve .

(i) Linéarité : Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f(x)(\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x))dx &= \int_\Omega f(x)\varphi_1(x)dx + \int_\Omega \lambda f(x)\varphi_2(x)dx \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi_1(x)dx + \lambda \int_\Omega f(x)\varphi_2(x)dx \\ &= T_f(\varphi_1)(x) + \lambda.T_f(\varphi_2)(x) \end{aligned}$$

D'où la linéarité.

Soit $K$ compact de $\Omega$, soit $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &= \left| \int_\Omega f\varphi dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq \int_K |f(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq (\sup_{x\in K} |\varphi(x)|) \int_K |f(x)|dx \\ &\leq \| f \|_{L^1(K)} .(\sup_{x\in K} |\varphi(x)|) \end{aligned}$$

Donc $T_f$ est bien définie, linéaire et on a

$| < T_f, \varphi > | \leq c. \| \varphi \|_\infty$ avec $c = \| f \|_{L^1(K)} + 1$.

Ainsi pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

(ii) Soit

$$\begin{aligned} \psi : \ L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \\ f &\longmapsto T_f \end{aligned}$$

$\psi$ ainsi définie est injective et continue. On identifie $T_f$ à $f$, donc $L^1_{loc}(\Omega)$ s'identifie à un s.e.v de $\mathscr{D}'(\Omega)$, de sorte que $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$.

Remarque 1.2.2. On a $\mathscr{D}(\Omega) \subseteq \mathscr{C}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ et $L^1(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$. Donc tout élément de $\mathscr{D}(\Omega)$, de $\mathscr{C}(\Omega)$ et de $L^1(\Omega)$ peut s'identifier à une distribution sur $\Omega$.

Définition 1.2.3. Soit $(T_n)$ une suite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On dit que $(T_n)$ converge vers $T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), < T_n, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >$$

### 1.2.2 Dérivation au sens des distribuions

Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \Omega$, soit $f$ une fonction numérique définie sur $\Omega$. On sait dériver $f$ suivant les composantes de $x$, pourvu que $f$ jouisse des propriétés de dérivation au sens classique : $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, ...$

Définition 1.2.4. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On appelle dérivée partielle de $T$ au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ suivant la direction $x_i, i = 1, 2, .., N$, la distribution

$$\begin{aligned} T_{x_i} : \ \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \end{aligned}$$

Notation 1.2.2. $T_{x_i}$ ainsi définie est notée $\frac{\partial T}{\partial x_i}$. Donc $< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$

Définition 1.2.5. (Dérivée partielle d'une distribution ) La dérivée partielle de la distribution $T$ par rapport au multi-indice $\alpha$ est :

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Remarque 1.2.3. $T_{x_i}$ ainsi définie est une distribution sur $\Omega$.

Remarque 1.2.4. Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $D^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_N^{\alpha_N}} \in \mathscr{D}'(\Omega)$.
En particulier $< \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi >= - < \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >=< T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} >$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Lemme 1.2.2. Pour $i = 1, ..., N$, l'application de $\mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$, $T \longmapsto \frac{\partial T}{\partial x_i}$ envoie linéairement et continument $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans lui-même pour la topologie faible et forte sur $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Proposition 1.2.1. Soit $(T_n) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ tel que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Alors $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$, $\frac{\partial T_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x_i}$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.
Soit $i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$. Montrons que $\frac{\partial T_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x_i}$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On a : $\forall n \in \mathbb{N} < \frac{\partial T_n}{\partial x_i}, \varphi > =- < T_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$
Mais $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et $supp(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) \subset supp\varphi$ donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty} < \frac{\partial T_n}{\partial x_i}, \varphi > &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} - < T_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\ &= - < \lim_{n\longrightarrow+\infty} T_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\ &= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\ &= < \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi > \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial T_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x_i}$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

## 1.3 Espaces de fonctions

Proposition 1.3.1. ([6]p,.12)
Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces normés et soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement s'il existe une constante c>0 telle que :

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \ \forall x \in E \tag{1.1}$$

Définition 1.3.1. Soit $V$ un espace vectoriel norme de norme $\|.\|_V$
On dit qu'une forme bilinéaire $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est :
(i) symétrique si $a(u, v) = a(v, u)$ $\forall u, v \in V$
(ii) continue, s'il existe une constante $c > 0$ telle que :
$|a(u, v)| \leq c\|u\|_V.\|v\|_V$, $\forall u, v \in V$
(iii) coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que : $a(u, u) \geq \alpha.\|u\|_V^2$, $\forall u \in V$

### 1.3.1 Espaces de Banach, Espaces de Hilbert

Espace de Banach

Définition 1.3.2. (Espace de Banach)
On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle

espace de Banach tout espace normé complet.

### 1.3.2 Espaces réflexifs

Soit $E$ un espace de Banach, soit $E'$ son dual topologique muni de la norme duale définie par :

$\|f\| = \sup\limits_{x\in E, \|x\|_E\leq 1} |< f, x >|$ et $E$" son bidual c'est-à-dire le dual de $E'$, muni de la norme :

$\|\xi\| = \sup\limits_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |< \xi, f >|$.

On a l'injection canonique $J : E \longrightarrow E"$ définie comme suit : soit $x \in E$, fixé. L'application $f \mapsto < f, x >$ de E' dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur E' c'est-à-dire est un élément de E" noté $J_x$.

On a $\quad < J_x, f >_{E",E'} = < f, x >_{E',E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$

**Définition** 1.3.3. (Espace réflexif)

Soit $E$ un espace de Banach, $E$ est dit réflexif si $J(E) = E"$.

**Remarque** 1.3.1. Lorsque $E$ est réflexif, on identifie implicitement $E$ et $E"$ (à l'aide de l'isomorphisme $J$).

**Proposition** 1.3.2. ([6],page 213)

Soit $E$ un espace de Banach réflexif et $M \subseteq E$ un sous espace vectoriel fermé. Alors $M$ muni de la norme induite par $E$ est réflexif.

**Corollaire** 1.3.1. ( [6],page 213)

Soit $E$ un espace de Banach. Alors $E$ est réflexif si et seulement si $E'$ est réflexif.

### 1.3.3 Espaces séparables

**Définition** 1.3.4. (Espace séparable)

On dit qu'un espace métrique est séparable s'il possède un sous ensemble dénombrable partout dense.

**Théorème** 1.3.1. ([4] ,page 47)

Soit $E$ un espace de Banach tel que $E'$ soit séparable. Alors $E$ est séparable.

**Corollaire** 1.3.2. ([4], page 48)

Soit $E$ un espace de Banach. Alors $E$ est réflexif et séparable si et seulement si $E'$ est réflexif et séparable

Espace de Hilbert

Définition 1.3.5. (Espace de Hilbert)
Un espace pré-hilbertien est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $<,>$ .

Définition 1.3.6.
Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien $(H,<,>)$ qui est complet pour la norme hilbertien associée à ce produit scalaire.

Lemme 1.3.1. ([4] , page 51)
Soit $V$ un espace de Hilbert. Alors $V$ est uniformément convexe donc réflexif.

Théorème 1.3.2. (Théorème de représentation de Riesz)([5], page 52)
Soit $H$ un espace de Hilbert et $f \in H'$. Alors il existe un et un seul élément $T_f$ de $H$ tel que ;
$< f, g >= (T_f, g) \quad \forall g \in H$.
De plus, on a $\|T_f\|_H = \|f\|_{H'}$.

Théorème 1.3.3. (Théorème de Hahn-Banach)([6],page 156)
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. M un sous espace vectoriel de E.
Toute forme linéaire continue sur un sous-espace M de E se prolonge en une forme linéaire continue sur E tout entier, avec la même norme.

Chapitre Deux

# Espaces de Sobolev Hilbertiens

Un espace de Sobolev est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de fonctions muni de la norme obtenue par combinaison de la norme $L^p(\Omega)$ de la fonction elle-même et ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises aux sens faible afin de rendre l'espace complet. Les espace s de Sobolev sont donc des espaces de Banach de fonctions pouvant être dérivées suffisamment de fois, pour donner sens par exemple à une équation aux dérivées partielles et muni d'une norme qui mesure à la fois la taille et la régularité de la fonction.

## 2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$

Dans cette section, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition 2.1.1. Soit $f \ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On dit que $f$ est sommable (ou intégrable au sens de Lebesgue), si on a :

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty.$$

L'ensemble des (classe de ) fonctions sommables (ou intégrables) est noté $L^1(\Omega)$.

Définition 2.1.2. On désigne par :

(a) $L^p(\Omega)$ l'espace des (classe de ) fonctions mesurables sur $\Omega$ telles que la fonction $x \longmapsto |f(x)|^p, \quad x \in \Omega$ soit intégrable sur $\Omega$. c'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \ f \in L^p(\Omega)$$

.

(b) $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classe de ) fonctions mesurables sur $\Omega$ telles que la fonction $x \longmapsto |f(x)|$ soit essentiellement bornée.

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{L^\infty(\Omega)} &= Ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \\ &= Inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_+^* : |f(x)| \leq \alpha \ p.p \ x \in \Omega\right\}. \end{aligned}$$

Lemme 2.1.1. (Inégalité de Young) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $1 \leq p, p' \leq +\infty$,

$$ab \leq \frac{1}{p}.a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Preuve . Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, p' \in [1; +\infty[$, on a : $ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}) \geq \frac{ln(a^p)}{p} + \frac{ln(b^{p'})}{p'} = ln(ab)$ en composant avec la fonction exponentielle de part et d'autre de l'inégalité on a le résultat.

Théorème 2.1.1. (Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors :

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \ et \ \int_\Omega |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Preuve . Soient $f$ et $g$ mesurables sur $\Omega$

<u>$1^{er}$ cas :</u> Si $p = +\infty$ et $p' = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f||g| dx \\ &\leq \int_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)} |g| dx = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|g\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

<u>$2^{er}$ cas :</u> Si $1 < p, p' < \infty$. On suppose d'abord que :

⋆ $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = 1$

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f||g| dx \leq \int_\Omega \left( \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'} \right) dx \text{ d'après l'inégalité de Young} \\ &= \frac{1}{p} \int_\Omega |f|^p dx + \frac{1}{p'} \int_\Omega |g|^{p'} dx \\ &= \frac{1}{p} \|f\|_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p'} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \end{aligned}$$

Car $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$. Pour $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = 0$ p.p, on peut conclure.

⋆⋆ Supposons que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} > 0$.

Dans ce cas, $0 < \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} < +\infty$. Alors :

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \right\|_{L^p(\Omega)} = \frac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} = 1$$

$$\left\| \frac{g}{\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} \right\|_{L^{p'}(\Omega)} = \frac{\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}}{\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} = 1$$

et

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} &= \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \left\| \frac{f \cdot g}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} \right\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} \end{aligned}$$

Car $\left\| \frac{f \cdot g}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}} \right\|_{L^1(\Omega)} \leq 1$

Dans tous les cas, on a : $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ *et* $\int_\Omega |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

Remarque 2.1.1. L'inégalité de Hölder se ramène à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $p' = p = 2$.

## 2.2 Quelques espaces de Sobolev

Dans cette partie, sauf mention contraire on suppose toujours $\Omega$ un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^1$ (au moins). De plus les fonctions considérées sont à valeurs réelles et les dérivées sont au sens de distribution.

### 2.2.1 Les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$

Définition 2.2.1. (Espace $H^1(\Omega)$ ) On note $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N \right\}$$

on le munit d'un produit scalaire noté $(.,.)$ et défini par :

$$(u, v) = \int_\Omega uv dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \ \ \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

et la norme est :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= (u, u)^{\frac{1}{2}} && (2.1) \\ &= \left( \int_\Omega |u|^2 dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall u \in H^1(\Omega) && (2.2) \\ &= \left( \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall u \in H^1(\Omega) && (2.3) \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ; $H^1(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$.

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{mesurable telle que :} \ \int_\Omega |u(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Sobolev hilbertien dont le produit scalaire associé est défini par : $(u,v) = \int_\Omega uvdx$ et la norme induite est donnée par :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}},\ u \in L^2(\Omega) \tag{2.4}$$

Théorème 2.2.1. Muni de la norme (2.1), $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve .

Étape 1 : $(u,v) = \displaystyle\int_\Omega uvdx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$ est un produit scalaire sur $H^1(\Omega)$.

Étape 2 : (Homogénéité) Soit $u \in H^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\|\lambda u\|_{H^1(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{H^1(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\lambda u|^2 dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial(\lambda u)}{\partial x_i}\right|^2 dx \\
&= |\lambda|^2\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right) \\
&= |\lambda|^2\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\lambda u\|_{H^1(\Omega)} = |\lambda|\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Étape 3 :(sous-linéarité) soient $u, v \in H^1(\Omega)$. Montrons que $\|u+v\|_{H^1(\Omega)} \le \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}$

$$\|u+v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u+v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.5}$$

Mais

$$\begin{cases}
\|u+v\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}
\end{cases} \tag{2.6}$$

Où

$$\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.7}$$

Et

(2.6) et (2.7) donnent : 
$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2_{H^1(\Omega)} \le& \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&+2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq 2\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\left(\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|v\|^2_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc} \quad (2.8) \implies \|u+v\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\left(\|u\|_{H^1(\Omega)}\right)\left(\|v\|_{H^1(\Omega)}\right) \\
\implies \|u+v\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\right)^2 \\
\implies \|u+v\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Étape 4 :

Soit $u \in H^1(\Omega)$. Montrons que $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 0 \iff u = 0$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(\Omega)} = 0 &\iff \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \\
&\iff \begin{cases} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \\ \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \;\; 1 \leq i \leq N. \text{ car } \|.\|_{L^2(\Omega)} \text{ est une norme} \end{cases} \\
&\iff u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \\
&\iff u = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ est une norme associée au produit scalaire définie plus haut.

Étape 5 : Montrons que $(H^1(\Omega), \|.\|_{H^1(\Omega)})$ est un espace complet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $H^1(\Omega)$, alors :

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \; \forall p, q \in \mathbb{N}, p \geq N, q \geq N &\implies \|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon \\
&\implies \|u_p - u_q\|^2_{H^1(\Omega)} < \varepsilon^2 \\
&\implies \|u_p - u_q\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} < \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans le complet $L^2(\Omega)$, donc $\exists a, b \in L^2(\Omega)$ tels que $u_n \longrightarrow a$ dans $L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow b$ dans $L^2(\Omega)$ car $L^2(\Omega)$ est complet. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ et $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $b$, $1 \leq i \leq N$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$-faible et comme l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ envoie continument $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans lui-même, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} < \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \varphi > &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} - < u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\
&= - < \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\
&= - < a, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\
&= < \frac{\partial a}{\partial x_i}, \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)
\end{aligned}$$

D'où, on obtient $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial a}{\partial x_i}$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et par unicité de la limite dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, on a : $\frac{\partial a}{\partial x_i} = b \in L^2(\Omega)$ c'est-à-dire $a \in H^1(\Omega)$.

D'où $(H^1(\Omega), ||.||_{(H^1(\Omega)})$ est complet donc de ce qui précède $(H^1(\Omega), ||.||_{(H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

Théorème 2.2.2. Muni de la norme (2.1), $H^1(\Omega)$ est un espace séparable.

Preuve . Soit A une application définie de $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{N+1}$ par :

$$\begin{aligned}
A: \quad H^1(\Omega) &\longrightarrow (L^2(\Omega))^{N+1} \\
u \quad &\longmapsto Au = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})
\end{aligned}$$

Munissons $(L^2(\Omega))^{N+1}$ de la norme canonique

$$||z||_{(L^2(\Omega))^{N+1}} = \left[\sum_{i=1}^{N+1} ||z_i||^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad z = (z_1, ..., z_{N+1})$$

On a : $||Au||_{(L^2(\Omega))^{N+1}} = \left[||u||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = ||u||_{H^1(\Omega)}$ (2.8)

L'application A est un isomorphisme isométrique de $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{N+1}$ car A est linéaire et en vertu de (2.8), A est continue sur $H^1(\Omega)$. De plus (2.8) montre aussi que l'opérateur $A$ conserve la norme, par conséquent $A$ est une isométrie de $H^1(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^{N+1}$. Il en résulte que $A(H^1(\Omega)) = ImA \subset (L^2(\Omega))^{N+1}$ est un sous espace vectoriel de $(L^2(\Omega))^{N+1}$. Puis que $(L^2(\Omega))^{N+1}$ est séparable comme produit fini d'espaces séparables, alors $H^1(\Omega)$ est séparable comme partie d'un espace séparable.

Définition 2.2.2. (Espace $H^1_0(\Omega)$)

On définit l'espace $H^1_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$.

Remarque 2.2.2. $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$.

Alors on a la propriété suivante :

Proposition 2.2.1. $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$. Il en découle que $H^1_0(\Omega)$ est un sous espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$. Muni de la norme induite, $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Définition 2.2.3. (Espace $H^{-1}(\Omega)$)
On appellera $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual ( topologique ) de l'espace $H_0^1(\Omega)$ c'est-à-dire $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$.

Remarque 2.2.3. Comme $\mathscr{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ avec densité, il en résulte que $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$. Donc $H^{-1}(\Omega)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{D}'(\Omega)$.
On muni $H^{-1}(\Omega)$ de la norme canonique de dual suivante :

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} |< f, v >|, \quad avec\ \|v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq 1$$

où $<,>$ est le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. Alors, on a :

### 2.2.2 Quelques injections remarquables

Nous rappelons que : $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ cela étant, en identifiant $L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))'$ à son dual, on a les injections suivantes :
$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ et chaque espace étant dense dans le suivant. Ainsi, si on désigne par $(.,.)$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, pour tout $u, v$ dans $L^2(\Omega)$, $(u, v) = \int_\Omega uvdx$.
Il en résulte qu'en notant $\langle .,. \rangle$ la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, on a : soit $f \in H^{-1}(\Omega)$,
$f \in H^{-1}(\Omega) \iff \exists c > 0,\ |\langle f, v \rangle| \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$.
Alors $\langle f, v \rangle = \int_\Omega fvdx, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$.

### 2.2.3 Notion de trace sur $H^1(\Omega)$

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On suppose que :
(i) $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \left\{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N :\ x_N > 0\right\}$
(ii) $\Omega$ est borné de classe $\mathscr{C}^1$ (au moins ).

On note

$$\begin{aligned} \Gamma &= \partial\Omega \\ &= \left\{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N :\ x_N = 0\right\} \\ &= \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \end{aligned}$$

Définition 2.2.4. Soit $\varphi \in \mathscr{D}\left(\overline{\Omega}\right)$. On appelle trace naturelle de $\varphi$ sur $\Gamma$, la restriction de $\varphi$ au bord $\Gamma$.

Soit $\Omega$ du type (i) ou (ii) . Pour $\varphi \in \mathscr{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, on a :$\varphi|_\Gamma \in \mathscr{C}(\Gamma)$ car ( $\mathscr{D}(\Gamma) \subset \mathscr{C}(\Gamma)$ ). De plus comme $\mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et $\mathscr{C}(\Gamma)$ est dense $L^2(\Gamma)$, alors on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. l'opérateur de trace

$$\begin{array}{rccc} : & \mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right) & \longrightarrow & \mathscr{C}(\Gamma) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi|_\Gamma \end{array}$$

se prolonge en un unique opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ vers $L^2(\Gamma)$ qu'on note encore $\gamma_0$.

Preuve . Désignons par $\psi$ la correspondance

$$\begin{array}{rccc} : & \mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right) & \longrightarrow & \mathscr{C}(\Gamma) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi|_\Gamma \end{array}$$

Montrons $\psi$ est bien définie.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Alors $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in \mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$ implique $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|_\Gamma \in \mathscr{C}(\Gamma)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$ car $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ donc $\varphi|_\Gamma \in \mathscr{D}^1(\Gamma)$. Ainsi $\varphi|_\Gamma \in \mathscr{C}(\Gamma)$.

Montrons $\psi$ est linéaire.

Soient $\varphi_1, \varphi_2$ dans $\mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) &= (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)|_\Gamma \\ &= \varphi_1|_\Gamma + \alpha\varphi_2|_\Gamma \\ &= \psi(\varphi_1) + \alpha\psi(\varphi_2) \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$. Puisque $\mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $H^1(\Omega)$.

Mais existe $c > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\|\psi(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$. De ce qui précède, on déduit que $\psi$ est un opérateur linéaire et continu pour les normes respectives de $H^1(\Omega)$ et de $L^2(\Gamma)$, ainsi comme $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $H^1(\Omega)$, alors $\psi(\varphi_n) \longrightarrow \psi(\varphi)$ dans $L^2(\Omega)$ donc $\varphi_n|_\Gamma \longrightarrow \varphi|_\Gamma$ dans $L^2(\Gamma)$. Par conséquence l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right) & \longrightarrow & \mathscr{C}(\Gamma) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi|_\Gamma \end{array}$$

est linéaire et continu sur $\mathscr{D}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ d'après le théorème de Hahn-Banach, $\psi$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue $\gamma_0 : \; H^1\Omega) \;\longrightarrow\; L^2(\Gamma)$ .

Donc $\gamma_0 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$.

Remarque 2.2.4. $\gamma_0$ est appelé opérateur trace d'ordre 0. On convient de noter encore $u|_\Gamma := \gamma_0 u$ pour $u \in H^1(\Omega)$. On pose

$$H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0\left(H^1(\Omega)\right) \subset L^2(\Gamma).$$

Théorème 2.2.3. $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\}$

Preuve .

Montrons que $H_0^1(\Omega) \subset \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\}$

$\gamma_0$ étant continue, $\gamma_0^{-1}(\{0\}) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\}$ est un fermé contenant $\mathscr{D}(\Omega)$. Effet, soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pour tout $x \in \Gamma$, $\varphi(x) = 0$ car $\Gamma \cap supp\varphi \subset \Gamma \cap \Omega = \emptyset$, il contient $\mathscr{D}(\Omega)$ par passage à l'adhérence, il vient que $H_0^1(\Omega) \subset \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\}$

Montrons que $\{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$

soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0(u) = 0$ par densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ d'où

$\{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0\} \subset H_0^1(\Omega)$

Théorème 2.2.4. (Inégalité de Poincaré) Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\Omega$ borné dans au moins une direction, alors il existe une constante $c$ strictement positive qui ne dépend que de $\Omega$ et telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.5}$$

De plus la semi-norme $u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$ définie une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Preuve . Sans nuire à la généralité supposons $\Omega \subset [-a, a] \times \Omega'$ où $a > 0$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, pour tout $x \in \Omega$, notons $x = \left(x_1, x^{'}\right) = (x_1, x_2, \cdots x_n)$.

$$\int_{-a}^{x_1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)dt = \varphi(x) \quad \text{car} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\,\varphi(x)\,| &\leq \int_{-a}^{x_1} |\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)\,|\, dt \\
&\leq \left(\int_{-a}^{x_1} 1dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^{x_1} |\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)\,|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(inégalité de Hölder)} \\
&\leq (x_1 + a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^{x_1} |\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)\,|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (2a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-a}^{a} |\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)\,|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$|\,\varphi(x)\,|^2 \leq 2a \int_{-a}^{a} |\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \cdots, x_n)\,|^2\, dt$$

En intégrant cette dernière inégalité par rapport à $(x_2, \cdots x_n)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} | \varphi(x_1, x') |^2 \, dx' &\leq 2a \int_{\Omega'} | \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x') |^2 \, dt dx' \\
&\leq 2a \int_{\Omega} | \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) |^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \left( \int_{\Omega'} | \varphi(x_1, x') |^2 \, dx' \right) dx_1 &\leq 2a \int_{\Omega'} | \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x') |^2 \, dx' \\
&\leq 2a \int_{\Omega} | \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) |^2 \, dx
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} | \varphi(x) |^2 \, dx &\leq 2a \int_{\Omega} | \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) |^2 \, dx \\
&\leq 2a \, \| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \| \\
&\leq 2a \, \| \nabla \varphi \|_{L^2(\Omega)^N} .
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \, \| \nabla \varphi \|_{L^2(\Omega)^N} \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) .$$

avec $c = \sqrt{2a}$. Puisque les fonctions $\varphi \longmapsto \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ et $\varphi \longmapsto \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^N}$ sont continues par la densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \, \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^N} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) .$$

Montrons que la semi-norme $u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$ définie une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} = 0 \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : c = u(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Or $u \in H_0^1(\Omega)$ D'où $c = \gamma_0 u = 0$ donc $u = 0$.

Ainsi la semi-norme $u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$ définie une norme sur $H_0^1(\Omega)$.

Montrons qu'elle est équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$. Pour cela cherchons $\alpha, \beta$ positifs tels que : $\alpha\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \beta\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Par définition de $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, on a :

$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ $\forall u \in H_0^1(\Omega)$. On prend $\beta = 1$.

D'après (2.5) , on a : $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c^2\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

Alors $\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq c^2\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

ie $\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (c^2 + 1)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^N}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

donc $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (c^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ en prenant $\alpha = \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}$ on a le résultat voulu.

Chapitre Trois

# Minimisation de fonctionnelles dans des espaces de Banach réflexifs.

Dans ce chapitre, $E$ désignera toujours un espace de Banach réflexif, $K \subset E$ une partie de $E$ qui est convexe et $J$ une application de $E$ dans $]-\infty;+\infty]$.
Le problème étudié ici est celui de la minimisation de $J$ sur K, c'est -à-dire

$$(PM)\begin{cases} trouver\ u \in K \\ J(u) = \inf_{v\in K} J(v) \end{cases}$$

S'il existe une solution $u$ de $(PM)$, on dit que $u$ minimise $J$ sur $K$.
Le but de ce chapitre est d'établir l'équivalence entre le problème de minimisation $(PM)$ et un problème variationnel que l'on précisera.

## 3.1 Fonctions semi-continues inférieurement

On notera sci pour dire semi-continue inférieurement. Soit E un espace topologique .
Soit $f$ :$E \longrightarrow ]-\infty;+\infty]$ une fonction.

Définition 3.1.1. On dit que f est sci au point $a \in E$ si pour tout réel $\alpha < f(a)$ il existe V voisinage de a tel que $\alpha < f(x)\ \forall x \in V$.

Remarque 3.1.1. On dit que f est sci sur $A$ ($A$ une partie de E) si $f$ est sci en chaque point $a \in A$.

Remarque 3.1.2. La notion de sci conduit à la notion de minimisation d'une fonctionnelle.

Proposition 3.1.1. Si $f : E \longrightarrow ]-\infty;+\infty]$ est continue en $a \in E$ alors $f$ est sci en a.

Preuve . Soit $\varepsilon > 0$ . Cherchons $V$ voisinage de $x$, tels que
$\forall x \in V$ on a : $f(a) - \varepsilon < f(x)$.

puisque f est continue en a, alors

$$\begin{aligned} \exists W \in \vartheta(a) \quad \forall x \in W \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad f(a) - \varepsilon < f(x) \end{aligned}$$

Prendre V=W pour conclure.

Proposition 3.1.2. Soit $f : E \longrightarrow ]-\infty; +\infty]$

$f$ sci en $a \in E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists V \in \vartheta(a)$ tel que $f(a) - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in V$.

Preuve . Supposons f soit sci en a. Montrons que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V \in \vartheta(a)$ tel que

$f(a) - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in V$.

Soit $\varepsilon > 0$ . Cherchons V voisinage de a tel que

$f(a) - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in V$.

Par hypothèse pour tout réel $\alpha < f(a)$ $\exists V_1 \in \vartheta(a)$ tel que $\alpha < f(x)$ $\forall x \in V_1$

pour $\beta = f(a) - \varepsilon \Rightarrow \beta < f(a)$ donc $\exists V_2 \in \vartheta(a)$ tel que

$\beta < f(x)$ $\forall x \in V_2$ c'est -à-dire $f(a) - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in V_2$

Prendre $V = V_2$ pour conclure.

Supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \vartheta(a)$ tel que $f(a) - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in V$.

Montrons que $f$ sci en $a \in E$

Soit $\alpha < f(a)$ alors pour $\varepsilon = f(a) - \alpha > 0$, $\exists V_1 \in \vartheta(a)$ tel que $f(a) - \varepsilon < f(x)$ $\forall x \in V_1$.

$\Rightarrow \alpha < f(x)$ $\forall x \in V_1$

Prendre $V = V_1$. D'où le résultat recherché.

Proposition 3.1.3. Si f et g sont sci en a, alors

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda f$ est sci en a.

(ii) $f + g$ est sci en a.

Preuve . (i) Supposons que $f$ est sci en a. Montrons que $\lambda f$ est sci en a.

Soit $\varepsilon > 0$. Cherchons $V_1 \in \vartheta(a)$ tel que pour tout $x \in V_1$ , $(\lambda f)(a) - \varepsilon < \lambda f(x)$

Puisque $\lambda > 0$ alors $\frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$ donc pour $\frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$, $\exists V \in \vartheta(a)$ tel que $f(a) - \frac{\varepsilon}{\lambda} < f(x)$ $\forall x \in V$.

Prendre $V_1 = V$

(ii) Supposons que $f$ et $g$ sci en a. Cherchons $V \in \vartheta(a)$ tel que

$(f + g)(a) - \varepsilon < (f + g)(x)$ $\forall x \in V$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $V_1 \in \vartheta(a), V_2 \in \vartheta(a)$ tels que soit $x \in V_1 \cap V_2$ $\begin{cases} f(a) - \varepsilon < f(x) & \text{car } x \in V_1 \\ g(a) - \varepsilon < g(x) & \text{car } x \in V_2 \end{cases}$ Par conséquent $(f+g)(a) - \varepsilon < (f+g)(x)$ $\forall x \in V_1 \cap V_2$. Prendre $V = V_1 \cap V_2$ pour conclure.

Proposition 3.1.4. Soit $f : E \longrightarrow ]-\infty; +\infty]$
$f$ est sci sur $E \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.

Preuve . Supposons que $f$ est sci sur $E$ et montrons que $E_\alpha = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $E_\alpha$ est un fermé dans $E$.Pour cela, montrons que $E_\alpha^C$ est un ouvert .
Soit $x_0 \in E_\alpha^C$. Alors $x_0 \in E$ et $\alpha < f(x_0)$. Comme $f$ est sci en $x_0$ ; $\exists V \in \vartheta(x_0)$ :
$\alpha < f(x)$ $\forall x \in V$.
D'où $V \subset E_\alpha^C$. $V$ étant un voisinage de $x_0$, $\exists U$ ouvert de $E$ ; $x_0 \in U \subset V \subset E_\alpha^C$ .
Donc $x_0 \in U \subset E_\alpha^C$ et $U$ est un ouvert de E. Ainsi $E_\alpha^C$ est un voisinage de $x_0$. Par suite $E_\alpha^C$ est voisinage de chacun de ses points donc $E_\alpha^C$ est un ouvert donc $E_\alpha$ est fermé comme complémentaire d'un ouvert.
Supposons que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble $E_\alpha$ est fermé .
Montrons que $f$ est sci sur $E$. Soient $a \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < f(a)$. Alors $a \in E_\alpha^C$ qui est un ouvert , il existe $V$ voisinage de a tel que $V \subset E_\alpha^C$ c'est-à-dire $\forall x \in V$, $\alpha < f(x)$. D'où $f$ est sci en a.
Par conséquent, f est sci sur $E$ .

Définition 3.1.2. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $f : (E, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur $E$. On dit que $f$ est sci faible si $f$ est sci pour la topologie faible.

Proposition 3.1.5. On suppose que $E$ est un espace de Banach réflexif réel et $f$ est convexe et sci dans $E$. Alors $f$ est sci faible.

Preuve . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définissons $E_\alpha$ tel que $E_\alpha = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$. Cet ensemble est convexe. Comme f est sci sur E alors $E_\alpha$ est fermé en vertu de la proposition (3.1.4). Donc $E_\alpha$ est faiblement fermé, par suite f est sci faible.

Théorème 3.1.1. ([7],page 3)
Soient $K \subset E$ un compact (non vide ), et $J$ une application de $E$ dans $]-\infty; +\infty]$. On suppose que $J$ est sci sur $K$. Alors $(PM)$ admet une solution (au moins).

Théorème 3.1.2. ([7],page 3)
Soit $K \subset E$ un convexe fermé non vide. On suppose de plus que K est borné et J est faiblement sci sur $E$. Alors $(PM)$ admet au moins un solution.

Théorème 3.1.3. On suppose $K \subset E$ convexe, fermé et borné non vide et $J$ convexe , sci sur $E$. Alors $(PM)$ admet une solution. Si de plus J est strictement convexe, alors $(PM)$ a exactement une solution dans $K$.

Preuve .

D'après la proposition (3.1.5) $J$ est faiblement sci sur E. D'où le résultat en vertu du théorème (3.1.2) . On suppose en outre J est strictement convexe. Par l'absurde supposons que $(PM)$ possède deux solutions $u_1 \neq u_2$ . On a :$u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in K$ ($K$ est convexe). D'autre part J est strictement convexe, on a :

$$J(u) < \frac{1}{2}(J(u_1) + J(u_2)) = \frac{1}{2}(\inf_{v\in K} J(v) + \inf_{v\in K} J(v)) = \inf_{v\in K} J(v).$$

ce qui est absurde.

Définition 3.1.3. Soit $E$ un espace de Banach. Soit $K$ une partie non borné de $E$, et $J : E \longrightarrow ]-\infty; +\infty]$ une fonction. On dit que $J$ est $K$-elliptique si :

$$\lim_{\|v\|_E \longrightarrow +\infty} J(v) = +\infty$$

Théorème 3.1.4. ([7],page 4)

On suppose $J : E \longrightarrow ]-\infty; +\infty]$ une fonction convexe et sci. On suppose en outre que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) K est un fermé borné non vide de E ;

(ii) K est un convexe, fermé non borné de E, et J est K-coercive (elliptique). Alors le problème de minimisation $(PM)$ admet au moins une solution. Si de plus J est strictement convexe alors la solution est unique.

## 3.2 Fonctionnelles Gâteaux-dérivables

.

Définition 3.2.1. Soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ où E est un espace de Banach réflexif (réel). Soit $u \in E$, S'il existe $J'(u) \in E'$ tel que l'on ait

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u+k) - J(u)}{t} = \langle J'(u), v\rangle$$

alors, on dit que J est Gâteaux-dérivable au point u $\in$ E, et la dérivée au sens de Gâteaux en u est $J'(u)$ et $\langle , \rangle$ est le crochet de dualité entre $E'$ et $E$

Remarque 3.2.1. Supposons $J$ Gâteaux-dérivable dans $E$. Pour $u, v \in E$,

soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\infty; +\infty]$, $\varphi(t) = J(u + tv)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi$ est partout dérivable avec

$\varphi'(t) = \langle J'(u + tv), v\rangle$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

En effet, on a :

$$\frac{\varphi(t_0 + s) - \varphi(t_0)}{s} = \frac{J(u + t_0v + sv) - J(u + t_0v)}{s}$$

pour tout réels $s \neq 0$ .

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \frac{J(u + tv) - J(u + t_0v)}{t - t_0}.$$

Posons $\tau = t - t_0$ ; $t = \tau + t_0$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \frac{J(u + (\tau + t_0)v) - J(u + t_0v)}{\tau} \ (3.2).$$

Quand $\tau \longrightarrow 0$ ; (3.2) tend vers $\langle J'(u + t_0v), v\rangle$ car $J$ est Gâteaux-dérivable en $t_0$ avec

$\varphi'(t_0) = \langle J'(u + t_0v), v\rangle$

Théorème 3.2.1. On suppose que $J$ est convexe et Gâteaux-dérivable sur $E$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes pour $u \in K$.

(a) $u$ est solution de $(PM)$

(b) $\langle J'(u), v - u\rangle \geq 0$ $\forall v \in K$

Preuve .

- Montrons que (a)implique (b).

On suppose donc a) satisfait .

Soient $v \in K$ et $t \in ]0; 1]$ .Comme K est convexe, alors

$u + t(v - u) \in K$ et $J(u) \leq J(u + t(v - u))$ (car d'après (3.1)) donc

$$\frac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t} \geq 0, \quad 0 < t \leq 1$$

c'est-à-dire $\langle J'(u), v - u\rangle \geq 0$ quand t tend vers 0. D'où b).

- Montrons que b) implique a).

$$\begin{aligned} J(u + t(v - u)) &= J((1 - t)u + tv) \\ &\leq (1 - t)J(u) + tJ(v), \ 0 < t \leq 1 \quad donc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{J(u + t(v - u)) - J(u)}{t} &\leq J(v) - J(u) \ avec\ 0 < t \leq 1 \\ 0 \leq \langle J'(u), v - u\rangle &\leq J(v) - J(u). \\ J(u) &\leq J(v) \quad \forall v \in K \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \ .$$

Corollaire 3.2.1. Les hypothèses sont celles du théorème (3.2.1) et on suppose en plus que $K$ est un sous-espace vectoriel de $E$. Alors, $u \in K$ est solution de $(PM)$ si et seulement si $\langle J'(u), v\rangle = 0 \ \forall v \in K$.

Preuve . Il suffit ici de prouver la condition b) du théorème (3.2.1) équivaut à :
$\langle J'(u), v\rangle = 0 \ \forall v \in K$.
Posons $\varphi = u + tv$, $t \in \mathbb{R}$.
on a évidement $\varphi \in K$.
D'après b) du théorème (3.2.1) $\langle J'(u), tv\rangle \geq 0$, et cela pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Pour $t = -1$, ,$\langle J'(u), -v\rangle \geq 0 \ \forall v \in K$ implique $\langle J'(u), v\rangle \leq 0$.
Pour $t = 1$, $\langle J'(u), v\rangle \geq 0$.
D'où $\langle J'(u), v\rangle = 0$.
Réciproquement $\langle J'(u), v\rangle = 0 \quad \forall v \in K$ en particulier pour $u - v \in K$ , on a :
$\langle J'(u), v - u\rangle = 0$.
Ainsi on a : $\langle J'(u), v - u\rangle \geq 0 \ \forall v \in K$.

Définition 3.2.2. Une fonction $T : E \longrightarrow E'$ est dite :
(i) Monotone si $\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0$ ,$\forall u, v \in K$
(ii) Strictement monotone si $\langle Tu - Tv, u - v\rangle > 0$, $\forall u, v \in K$

Théorème 3.2.2. ([7] ,page 6)
On suppose que J est Gâteaux-dérivable et $J' : E \longrightarrow E'$ est monotone (respectivement strictement monotone ). Alors J est convexe (respectivement strictement convexe).

## 3.3 Fonctions quadratiques , Inéquation variationnelle Elliptique.

Ici $V$ désigne un espace de Hilbert réel, $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, et $\ell$ une forme linéaire elliptique sur $V$.

### 3.3.1 Minimisation de fonctionnelles Quadratiques

Donnons d'abord quelques définitions de base.

Définition 3.3.1. (i) La fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \ell, v\rangle \forall v \in V.$$

est dite quadratique.

(ii) On dit que a(.,.) est V-coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \ \forall v \in V.$$

Remarque 3.3.1. La fonctionnelle $J$ est continue sur $V$.

Proposition 3.3.1.

(i) Si $a(.,.)$ est symétrique, alors $J$ est Gâteaux-dérivable et

$$\langle J'(u), v\rangle = a(u,v) - \langle \ell, v\rangle,\ u, v \in V.$$

(ii) Si $a(.,.)$ est symétrique et positive, $J$ est convexe.

(iii) Si $a(.,.)$ est symétrique et définie positive, $J$ est strictement convexe.

Preuve.

$(i)$ Fixons $u \in V$. Pour $v \in V$ et pour $t \in \mathbb{R}^\star$ , on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(v)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2}a(u,v) + a(u,v) - \langle \ell, v\rangle.$$

d'où $\langle J'(u), v\rangle = a(u,v) - \langle \ell, v\rangle \quad \forall v \in v$

$(ii)$ Pour $\forall u, v \in V$, on a :

$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle = a(u-v, u-v) \geq 0$ Il en résulte que $J'$ est monotone . D'où la convexité de J.

$(iii)$ Pour $\forall u, v \in V$, on a :

$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle = a(u-v, u-v) > 0$ Il en résulte que $J'$ est monotone . D'où la convexité stricte de J.

Théorème 3.3.1. On suppose en outre que $a(.,.)$ est symétrique et $V$-elliptique. Alors, pour tout convexe fermé non vide $K \subset V$, le problème $(PM)$ admet une solution unique $u \in K$. De plus cette solution est caractérisée par

$$(IV) \quad a(u, v-u) \geq \langle \ell, v-u\rangle \quad \forall v \in K.$$

Preuve. D'après la proposition 3.3.1, $J$ est continue donc sci sur V , strictement convexe et $V$-elliptique d'autre part

$$J(v) \geq \|v\|_V\left(\frac{\alpha}{2}\|v\|_V - \|\ell\|_{V'}\right) \quad \forall v \in V$$

D'où l'existence et l'unicité de $(PM)$, d'après le théorème 3.1.4. Enfin d'après le théorème 3.1.5 et la proposition 3.3.1, $u \in K$ est solution du problème $(PM)$ si et seulement si $(IV)$ a lieu.

★ ★ Chapitre Quatre ★ ★

# Existence et unicité de solution d'un problème elliptique semi-linéaire.

Dans ce chapitre, il est question pour nous de prouver l'existence et (éventuellement) l'unicité de solution du problème aux limites semi-linéaire de type Dirichlet suivant :

$$(PL) : \begin{cases} Au + g[u] = f \ dans \ \Omega \\ \\ u = 0 \ sur \ \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Avec $N$ entier ($N \geq 1$) et $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice dont les coefficients vérifient :

(4.1) $a_{ij} = a_{j,i}$ et $a_{j,i} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq N$.

(4.2) Il existe $\alpha > 0$ tel que $\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^N$ et $p.p \ x \in \Omega$.

Soit g :$(x, \lambda) \longmapsto g(x, \lambda)$ est continue de $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $x \in \overline{\Omega}, \lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant :

(4.3) $(g(x, \lambda) - g(x, \mu))(\lambda - \mu) \geq 0 \ \forall x \in \overline{\Omega} \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(4.4) Il existe $k > 0$ $|g(x, \lambda) - g(x, \mu)| \leq k|\lambda - \mu|$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque 4.0.1. On pose $g(x, \lambda) = \theta(x).h(\lambda)$ ,$x \in \overline{\Omega}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\theta \in \mathscr{C}(\overline{\Omega})$, $\theta \geq 0$ et $h$ comme dans l'une des situations suivantes :

(a) $h(\lambda) = \lambda$,

(b) $h(\lambda) = \lambda^+ = \dfrac{\lambda + |\lambda|}{2}$,

(c) $h(\lambda) = |\lambda|^{\frac{-1}{2}}.\lambda$. Si $\lambda \neq 0$ et $h(0) = 0$.

Remarque 4.0.2. En effet, pour $\mu = 0$ dans (4.4) on a :

$$\begin{aligned} |g(x, \lambda) - g(x, 0)| \leq k|\lambda| \Rightarrow |g(x, \lambda)| &\leq |g(x, 0)| + k.|\lambda| \\ &\leq (|g(x, 0)|^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc $\quad |g(x, \lambda)| \leq C.(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad$ (4.5) où $C \geq \sup_{x \in \overline{\Omega}} (|g(x,0)|^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}$

Nous proposons deux approches dans la suite.

## 4.1 Approche 1 : Existence et unicité par minimisation

### 4.1.1 Équivalence entre problème aux limites et problème variationnel

Théorème 4.1.1. Sous les hypothèses (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4), il existe une fonction et une seule $u \in H^1(\Omega)$ solution de $(PL)$.

Preuve .

cadre fonctionnel.

Le cadre fonctionnel consiste en la justification du sens de chaque équation (PL).

Comme $g \in \mathscr{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, alors pour u fixé dans $L^2(\Omega)$, on a pour presque tout $x \in \Omega$ $g(x, u(x)) \in \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto (x, u(y)) \longmapsto g(x, u(y))$. On veut prendre $y = x$ cela est assuré par la continuité de $g$ sur les deux variables $x$ et $\lambda$.

Donc $g(x, u(x))$ est bien définit pour presque tout $x \in \Omega$ ; et on pose $g[u](x) = g(x, u(x))$ $(x \in \Omega)$. Ce qui définit une application

$$
\begin{aligned}
g[u] : \Omega \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\
x &\longmapsto g(x, u(x))
\end{aligned}
$$

$g[u]$ est mesurable comme composée de deux fonctions mesurables . En outre

$|g(x, u(x))| \leq c(1 + |u(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$ d'après (4.5)

Donc $|g(x, u(x))|^2 \leq c^2(1 + |u(x)|^2)$.

Ainsi $\int_\Omega |g(x, u(x))|^2 dx \leq c^2(mes(\Omega) + ||u||^2_{L^2(\Omega)})$.

D'oú g[u] $\in L^2(\Omega)$, $\forall u \in L^2(\Omega)$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $(PL)$ ait lieu, alors la première équation $Au + g[u] = f$ est comprise au sens des distributions sur $\Omega$ c'est-à-dire $Au + g[u] = f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\Gamma$ est comprise au sens des traces précisément $\ll \gamma_0 u = 0 \gg$ où $\gamma_0 \in \mathscr{L}(H^1(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Formulation variationnelle :

Montrons que $(PL)$ implique un problème variationnel à déterminer.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de $(PL)$. Alors comme $Au + g[u] = f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\langle Au + g[u], \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \\
\langle \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle + \langle g[u], \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)
\end{aligned}
$$

ceci équivaut à :
$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx+\int_{\Omega} g[u]\varphi dx = (f,\varphi)$ et $\langle f,\varphi\rangle = (f,\varphi)$ avec $(.,.) = \langle .,.\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$ le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

définissons donc

$$\begin{aligned}
&a : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\\
&(u,v) \longmapsto a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx\\
&\ell : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\\
&v \longmapsto \ell(v) = \langle f,v\rangle = \int_{\Omega} fvdx.
\end{aligned}$$

Il est clair que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ et

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx\right|\\
&\leq \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left|a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|dx\\
&\leq \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left|a_{ij}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|dx\\
&\leq \sum_{i,j=1}^{N}\left\|a_{ij}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|dx. \quad \text{(avec} \quad \left|a_{ij}\right| \leq \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad c = \sup_{i,j=1,\dots,N}\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)})\\
&\leq c\sum_{i,j=1}^{N}\|\nabla u\|_{(L^2)^N(\Omega)}.\|\nabla v\|_{(L^2)^N(\Omega)} \text{ (Inégalité de Cauchy-Schwarz )}\\
&\leq c'\|u\|_{H^1(\Omega)}.\|v\|_{H^1(\Omega)},\ avec\ c',c,>0 \quad \text{(l'inegalité de Poincaré)}
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$.

Montrons que $\ell$ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$

✓il est claire que $\ell$ est linéaire à cause de l'intégrale.

✓ Montrons que $\ell$ est continu sur $H^1(\Omega)$ : Soit $v\in H^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
|\ell(v)| &= \left|\int_{\Omega} fvdx\right|\\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\\
&\leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad (c = 1+\|f\|_{L^2(\Omega)})
\end{aligned}$$

Donc $\ell$ est continue sur $H^1(\Omega)$.

Soit $u\in H_0^1(\Omega)$ fixé. Soit $v\in H_0^1(\Omega)$ . Comme $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. Alors, il existe une suite $(v_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{D}(\Omega)$ telle que $v_n \longrightarrow v$ dans $H_0^1(\Omega)$.

De plus $a(u,.)$ et $(g[u],.)$ sont continues sur $H_0^1(\Omega)$ et $u=0$ sur $\Gamma$ ie $\gamma_0 u = 0$.

Donc $(PL)$ implique

$$(PV)\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u,v)+\int_\Omega g[u]vdx \;=\; (f,v)\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Réciproquement montrons que $(PV) \Longrightarrow (PL)$.

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de $(PV)$, alors $\gamma_0 u = 0$. Il reste donc la première équation de $(PL)$

On a : $a(u,v)+\int_\Omega g[u]vdx = (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

En particulier $\langle Au,\varphi\rangle + \langle g[u],\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \quad (4.6)$

$$\begin{aligned}
(4.6) \iff & \langle -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}),\varphi\rangle + \langle g[u],\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \\
\iff & \langle -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + g[u],\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \\
\iff & -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + g[u] = f \ dans\ \mathscr{D}'(\Omega).
\end{aligned}$$

D'où $(PL) \Longleftrightarrow (PV)$.

### 4.1.2 Équivalence entre problème variationnel et problème de minimisation

On va montrer que $(PV)$ équivaut à un problème de minimisation à déterminer. Pour cela introduisons

$$G(x,\lambda) = \int_0^\lambda g(x,\mu)d\mu \quad x \in \Omega \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Évidement, $G \in \mathscr{C}(\Omega \times \mathbb{R})$ et dérivable par rapport au second argument $\lambda$ pour tout $x \in \Omega$, $G(x,.) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ de fonction dérivée $g(x,.)$ on a :

En posant $\mu = \lambda t$, on a $d\mu = \lambda dt$

$G(x,\lambda) = \lambda\int_0^1 g(x,\lambda t)dt$, D'après (4.5), on a aussi

$$\begin{aligned}
|G(x,\lambda)| &\le |\lambda|\int_0^1 |g(x,\lambda t)|dt \\
&\le c|\lambda|\int_0^1 (1+\lambda^2 t^2)^{\frac{1}{2}}dt \\
&\le c|\lambda|\int_0^1 (1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}dt \\
&= |\lambda|c(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $|G(x,\lambda)| \le c|\lambda|(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}},\ x \in \overline{\Omega}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Donc pour $v \in L^2(\Omega)$, la trace $G(.,u)$ définie par $G(.,u)(x) = G(x,u(x))$ est un élément de

$L^1(\Omega)$ : En effet $x \longmapsto G(x, v(x))$ est mesurable comme composée de deux fonctions mesurables et $\int_\Omega |G(x, v(x))|dx \leq c \int_\Omega |v(x)|(1 + |v(x)|^2)^{\frac{1}{2}} dx < +\infty$ car $v \in L^2(\Omega)$ et $\Omega$ est borné.

Posons donc $I(v) = \int_\Omega G(x, v(x))dx, v \in L^2(\Omega)$.

i) $I : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. On étudie la continuité au sens classique.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ ; et $k \in H^1(\Omega)$ destiné à tendre vers 0. On peut donc choisir les $k$ tels-que $||k||_{H^1(\Omega)} \leq 1$.

$$I(u + k) - I(u) = \int_\Omega [G(x, u(x) + k(x)) - G(x, u(x))]dx$$

Or $G(x, u(x) + k(x)) - G(x, u(x)) = k(x)g(x, c(x))$ avec $u(x) \leq c(x) \leq u(x) + k(x)$ (théorème des accroissements finis). Comme $c(x) \in ]u(x); u(x) + k(x)[, \exists \theta_x \in ]0, 1[$ tel que

$$c(x) = (1 - \theta_x)u(x) + \theta_x(u(x) + k(x)) = u(x) + \theta_x k(x)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} |G(x, u(x) + k(x)) - G(x, u(x))| &= |k(x)||g(x, u(x) + \theta_x k(x))| \text{ où } 0 < \theta_x < 1 \\ |k(x)||g(x, u(x) + \theta_x k(x))| &\leq c|k(x)|(1 + |u(x) + \theta_x k(x)|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (voir\ (4.5)) \\ &\leq c|k(x)|(1 + (|u(x)| + |k(x)|)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Posons $F(x) = (1 + (|u(x)| + |k(x)|)^2)^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega [1 + (|u(x)| + |k(x)|)^2]dx &= \int_\Omega 1dx + ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||k||^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega |u(x)||k(x)|dx \\ &\leq mes(\Omega) + ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||k||^2_{L^2(\Omega)} + 2||u||_{L^2(\Omega)}||k||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq mes(\Omega) + (||u||_{L^2(\Omega)} + ||k||_{L^2(\Omega)})^2 \\ &\leq mes(\Omega) + (||u||_{L^2(\Omega)} + 1)^2. \end{aligned}$$

On a : $F \in L^2(\Omega)$ et $||F||^2_{L^2(\Omega)} \leq mes(\Omega) + (1 + ||u||_{L^2(\Omega)})^2$ par conséquent,

$$\begin{aligned} |I(u + k) - I(u)| &\leq c\int_\Omega |k(x)F(x)|dx \\ &\leq c||k||_{L^2(\Omega)}||F||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c[mes(\Omega) + (1 + ||u||_{L^2(\Omega)})^2)]^{\frac{1}{2}}||k||_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{||k||_{H^1(\Omega)} \to 0} I(u + k) = I(u)$ et la continuité de $I$ sur $H^1(\Omega)$ en découle.

ii) I est Gâteaux-dérivable sur $H^1_0(\Omega)$ et $\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega g(x, u(x))v(x)dx \ \forall u, v \in H^1_0(\Omega)$.

Fixons $u, v \in H^1_0(\Omega)$ et $-1 < t < 1$. Posons $\psi(x, t) = G(x, u(x) + tv(x)),\ x \in \Omega$ et $\varphi(t) = \int_\Omega \psi(x, t)dx \equiv I(u + tv)$ $-1 < t < 1$ p.p $x \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto \psi(x, t)$ est dans $\mathscr{C}^1(]-1, 1[)$ et on a :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x, t) = v(x)g(x, u(x) + tv(x))$$

Pour $-1 < t < 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, t)$ est mesurable avec

$$|\frac{\partial\psi}{\partial t}(x, t)| \leq c|v(x)|(1 + [|u(x)| + |v(x)|]^2)^{\frac{1}{2}} \quad p.px \in \Omega.$$

Donc d'après le résultat classique de dérivation sous le signe somme, on a : $\varphi \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$ et

$$\varphi'(t) = \int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t)dt,\ -1 < t < 1.$$

En particulier, $\varphi'(0) = \int_\Omega v(x)g[u](x)dx$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} = \varphi'(0).$$

La fonction $v \longmapsto \int_\Omega g[u]vdx$ est évidement une forme linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$. Donc I est Gâteaux-dérivable sur $H_0^1(\Omega)$ et $\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega g[u]vdx \quad \forall$ u,v $\in H_0^1(\Omega)$.

(iii) I est convexe.

$$\forall u,v \in H_0^1(\Omega),\ \forall t \in [0,1],\ \text{on a : } I(tu+(1-t)v) \leq tI(u)+(1-t)I(v).$$

Mais comme I est Gâteaux-dérivable, il suffit de montrer que I' est monotone c'est-à-dire

$$\langle I'(u) - I'(v); u-v\rangle \geq 0 \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\langle I'(u) - I'(v); u-v\rangle = \int_\Omega (g[u](x)-g[v](x))(u(x)-v(x))dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Or $(g[u]-g[v])(u-v) \geq 0$ d'après (4.3) D'où le résultat.

(iv) On a : (4.7) $\quad I(v) \geq -\|g(.,0)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

$(g(x,\lambda)-g(x,0))(\lambda-0) \geq 0 \ \Rightarrow g(x,\lambda)\lambda \geq g(x,0)\lambda \quad x \in \overline{\Omega}, \lambda \in \mathbb{R}$

Donc si $v \in H^1(\Omega)$, on a p.p $x \in \Omega$ et pour tout $0 \leqslant t < 1$,

$g(x,tv)tv(x) \geq g(x,0)tv(x),\ t \in [0;1[ \Rightarrow v(x)\int_0^1 g(x,tv(x))dt \geqslant \int_0^1 g(x,0)v(x)dt$

ainsi $G(x,v(x)) \geq g(x,0)v(x)$

D'oú $I(v) \geq \int_\Omega g(x,0)v(x)dx.$

Mais $\left|\int_\Omega g(x,0)v(x)dx\right| \leq \|g(.,0)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g(.,0)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$

Donc, $I(v) \geq \int_\Omega g(x,0)v(x)dx \geq -\|g(.,0)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Posons $J(v) = Q(v) + I(v),\ v \in H_0^1(\Omega)$ ; oú $Q(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) - (f,v)$. $Q$ est la fonctionnelle quadratique associée à $a(.,.)$ et à $f \in L^2(\Omega)$ donc $Q$ est Gâteaux-dérivable et $\langle Q'(u), v\rangle = a(u,v) - (f,v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$. Puis que

$$\begin{aligned}\langle Q'(u) - Q'(v), u-v\rangle &= a(u,u-v) - (f,u-v) - a(v,u-v) + (f,u-v)\\ &= a(u-v,u-v)\\ &> 0.\end{aligned}$$

Alors $Q$ est strictement convexe. Donc J est strictement convexe comme la somme de deux fonctionnelles convexes dont l'une est strictement convexe.

$J$ est Gâteaux-dérivable sur $H_0^1(\Omega)$ comme la somme de deux fonctionnelles Gâteaux-dérivables avec $\langle J'(u), v\rangle = a(u,v) + \int_\Omega g[u]v dx - (f,v)$ ; donc $J'(u) = Q'(u) + I'(u)$. Ainsi $(PV)$ équivaut :

$$(EV)\begin{cases}\text{trouver u } \in H_0^1(\Omega)\\ \langle J'(u), v\rangle = 0\ \forall v \in H_0^1(\Omega)\end{cases}$$

Or d'après corollaire 3.2.1, cette équation variationnelle équivaut au problème de minimisation :

$$(PM)\begin{cases}\text{trouver u } \in H_0^1(\Omega)\\ J(u) = \inf\limits_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v)\end{cases}$$

Où $J(u) = Q(u) + I(u)$ (4.8)

### 4.1.3 Existence et unicité de la solution du problème de minimisation

Il reste à vérifier que $J$ est strictement convexe, sci et $H_0^1(\Omega)$-coercive :
$J$ est strictement convexe car $Q$ est strictement convexe et $I$ est convexe (voir (4.8)) ;
$J$ est continue dont sci sur $H_0^1(\Omega)$ car $Q$ et $I$ sont continues ;
$J$ est coercive. En effet, $J(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - (f,v) + I(v)$. On sait que :
$a(v,v) \geq \alpha\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^N} \geq \alpha'\|v\|_{H^1(\Omega)}$ ((4.2) et l'inégalité de Poincaré)
$J(u) \geq \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} - \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)} + I(u)$. d'après (4.7), on a :
$J(u) \geq \frac{\alpha}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} - \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)} - \|g(.,0)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H^1(\Omega)}$.
Il en résulte que $J(u) \geq (\frac{\alpha'}{2}\|u\|_{H^1(\Omega)} - \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} - \|g(.,0)\|_{L^2(\Omega)})\|u\|_{H^1(\Omega)}$ .
Donc $\lim\limits_{\|u\|_{H^1(\Omega)}\to\infty} J(u) = +\infty$ et $J$ est $H_0^1(\Omega)$-coercive. Ainsi en vertu du théorème 3.1.4, le problème de minimisation $(PM)$ admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. Et comme $(PM)$, $(PV)$ et $(PL)$ sont équivalentes, alors il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ solution de $(PL)$. Ainsi le théorème 4.1.1 est prouvé.

## 4.2 Approche 2 :Existence et unicité par un opérateur monotone

Nous avons besoin du théorème fondamental suivant :

Théorème 4.2.1. Soit $V$ un espace de Hilbert réel, pour simplifier (.|.) le produit scalaire dans $V$, et ||.|| la norme correspondante. Soit $T$ un opérateur de $V$ dans lui-même tel que

$$\|Tu - Tv\| \leqslant M.\|u - v\|,\ \forall u, v \in V \qquad (4.9)$$

et

$$(Tu - Tv|u - v) \geqslant m\|u - v\|^2 \ \forall u, v \in V \qquad (4.10)$$

où $M > m > 0$ . Alors, pour tout $f \in V$ donné, il existe un unique $u \in V$ tel que $Tu = f$.

Preuve .

Fixons $f \in V$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon : V \longrightarrow V$ tel que $A_\varepsilon u = u - \varepsilon(Tu - f)$, $u \in V$

$$\begin{aligned}(A_\varepsilon u - A_\varepsilon v|A_\varepsilon u - A_\varepsilon v) &= (u - v - \varepsilon(Tu - Tv)|u - v - \varepsilon(Tu - Tv)) \\ &= \|u - v\|^2 + \varepsilon^2\|Tu - Tv\|^2 - 2\varepsilon(Tu - Tv|u - v)\end{aligned}$$

Or d'après (4.10), $-2\varepsilon(Tu - Tv|u - v) \leq -2\varepsilon m\|u - v\|^2 \ \forall u, v \in V$

Aussi d'après (4.9) on a : $\varepsilon^2\|Tu - Tv\|^2 \leq \varepsilon^2 M^2\|u - v\|^2 \ \forall u, v \in V$

En additionnant membre à membre les deux inégalités on a :

$$\|A_\varepsilon u - A_\varepsilon v\|^2 \leq (M^2\varepsilon^2 - 2\varepsilon m + 1)\|u - v\|^2$$

$M^2\varepsilon^2 - 2\varepsilon m + 1$, étant un polynôme en $\varepsilon$, le discriminant est : $\Delta_\varepsilon = 4(m^2 - M^2) < 0$. Donc $M^2\varepsilon^2 - 2\varepsilon m + 1 > 0$ pour tout $\varepsilon$. Il vient que $M^2\varepsilon^2 - 2\varepsilon m + 1 < 1$ si et seulement si $\varepsilon(M^2\varepsilon - 2m) < 0$. On obtient alors que, pour $\varepsilon \in \left]0; \frac{2m}{M^2}\right[$, on a : $k^2 = M^2\varepsilon^2 - 2\varepsilon m + 1 < 1$. D'oú $\|A_\varepsilon u - A_\varepsilon v\| \leq k\|u - v\|$ avec $k \in ]0; 1[$. Alors $A_\varepsilon$ est une contraction stricte. En conséquence il existe un unique $u \in V$ tel que $A_\varepsilon u = u$ ce qui équivaut à $Tu = f$.

Théorème 4.2.2. Sous les hypothèses (4.2), (4.3) et (4.4). Si $f$ est donné dans $H^{-1}(\Omega)$, alors il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ solution faible de $(PL)$ :

$$(PL) \begin{cases} Au + g[u] = f & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \end{cases}$$

Preuve .

Nous avons vu dans la section précédente que, le problème $(PL)$ se ramène à l'étude du (PV) et cela ne dépend pas de (4.1) dont $(PV)$ est donnée par :

$$(PV) \begin{cases} trouver \quad u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) + G[u, v] = \ell(v) \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec,

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

$$\ell(v) = \int_\Omega f v dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega);$$

$$G[u,v] = \int_\Omega g[u]vdx.$$

Soit $(,)$ le produit scalaire dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(u,v) = \int_\Omega uvdx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ ; alors l'application $v \mapsto a(u,v) + G[u,v]$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Il vient du théorème de représentation de Riesz qu'il existe un unique $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) + G[u,v] = (Tu,v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi pour chaque $u \in H_0^1(\Omega)$ correspond un unique $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u,v) + G[u,v] = (Tu,v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui nous permet de définir une application

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto Tu. \end{aligned}$$

De même comme $f \in L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ donc l'application $v \mapsto \ell(v)$ étant une forme linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$, il existe $z_f \in H_0^1(\Omega)$ unique tel que

$$\ell(\varphi) = (z_f|\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $(PV)$ implique

$$(4.11)\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \\ Tu = z_f \end{cases}$$

Réciproquement supposons que $Tu$ est l'unique forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Pour $u \in H_0^1(\Omega)$ fixé, posons $(B_u,v) = a(u,v)+G[u,v]$, l'application $v \longmapsto a(u,v)+G[u,v]$, est linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$. Mais comme $Tu$ est l'unique forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, alors $B_u = Tu$. Il en résulte que $(PV)$ équivaut à (4.11). Il suffira donc de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.11).

D'une part, pour tout $u,v \in H_0^1(\Omega)$, On a :

$$(Tu - Tv|\varphi) = a(u-v,\varphi) + \int_\Omega (g[u]-g[v])\varphi.dx \ \forall u,v,\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

En utilisant la continuité de $a(.,.)$ et en prenant $\varphi = Tu - Tv$, on est conduit à :

$$(Tu - Tv|Tu - Tv) = a(u-v, Tu - Tv) + G[u, Tu - Tv] - G[v, Tu - Tv]$$

ou encore $\|Tu - Tv\|^2 = a(u - v, Tu - Tv) + \int_\Omega (g[u] - g[v])(Tu - Tv)dx$. D'autre part, on a : pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, $a(u - v, Tu - Tv) \leq c_0\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}\|Tu - Tv\|_{H_0^1(\Omega)}$, $c_0 > 0$ (puisque $a(.,.)$ est bilinéaire et continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$) et

$$\left|\int_\Omega (g[u] - g[v])(Tu - Tv)dx\right| \leq kc\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}\|Tu - Tv\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(en utilisant (4.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré), alors pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, $\|Tu - Tv\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq (c_0 + ck)\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}\|Tu - Tv\|_{H_0^1(\Omega)}$. Donc

$$\|Tu - Tv\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ pour tout } \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \text{ (avec } M = c_0 + ck)$$

D'autre part, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
(Tu - Tv|u - v) &= a(u - v, u - v) + G[u, u - v] - G[v, u - v] \\
&= a(u - v, u - v) + \int_\Omega (g[u] - g[v])(u - v)dx \\
&\geqslant a(u - v, u - v)
\end{aligned}$$

car $\int_\Omega (g[u] - g[v])(u - v)dx \geq 0$ (d'après 4.3)

Mais, $a(u - v, u - v) \geq \alpha\|u - v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ donc

$$(Tu - Tv|u - v) \geq \alpha\|u - v\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \text{ pour tout } u, v \in H_0^1(\Omega) \text{ avec } m = \alpha < M$$

D'après le théorème 4.2.1, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème (4.11) et par conséquent $(PL)$ admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$.

Et le résultat attendu est ainsi obtenu. ■

# ♣ Implications pédagogiques ♣

Dans le cadre de la rédaction du mémoire de D.I.P.E.S II, il nous a été demandé de donner l'intérêt pédagogique de notre travail : Rappelons que le thème soumis à notre étude s'intitule Existence et unicité de solution d'un problème elliptique semi-linéaire. C'est un sujet important tant chez l'enseignant que chez l'élève. Ainsi :

## 4.3 Pour l'enseignant

Il permet :

- ✓ de se rendre compte qu'il y a une théorie des EDPs plus générale qui prolonge celle de dérivée ordinaires rencontrées au Lycée.
- ✓ d'avoir une bonne critique face aux problèmes du niveau Lycée.
- ✓ l'interdisciplinarité.
- ✓ d'apprendre à concevoir et à présenter un document scientifique.
- ✓ d'accentuer la logique mathématique.
- ✓ aussi de se familiariser avec le logiciel de programmation "Latex" qui fait une très bonne mise en page et une bonne lisibilité donc très utile pour la rédaction des épreuves d'évaluation de mathématiques et permet de résoudre les problèmes d'incompatibilité de certains versions de"Microsoft word" qui endommagent les documents pendant la phase d'impression.

## 4.4 Pour l'élève

- ✓ Il permet à l'élève d'animer sa curiosité, d'enrichir sa culture et va le pousser à la recherche.
- ✓ il permet de se rendre compte que d'autres sciences font recours à plusieurs notions mathématiques :la physique par exemple utilise les dérivées ordinaires et partielles.

# ♣ Conclusion ♣

Parvenu au terme de ce travail dans lequel il était question pour nous de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème elliptique semi-linéaire où nous avons dans un premier temps défini les espaces fonctionnels dans lesquels nous avons mené ce travail ainsi que les propriétés associées, ensuite nous avons établi l'équivalence entre le problème aux limites elliptiques semi-linéaire $(PL)$ et un problème de minimisation $(PM)$, il en ressort que tout problème aux limites elliptiques du type $(PL)$ possède une unique solution.

# ♣ Bibliographie ♣

[1] R.A.Adams. sobolev spaces. Academic press, New York, 1975.

[2] F.André and G.André. Les éléments finis : de la théorie à pratique, 2014.

[3] H.Brézis. Functional Analysis Sobolev and Partial Differential equation. Mathematics Subject Classification, 2010.

[4] H.Brezis. Analyse fonctionnelle ,théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[5] J.M Bony : cours d'analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier, les éditions de l'école polytechnique, Palaiseau, 2001.

[6] Daniel LI. Cours d'analyse fonctionnelle.Ellipse,Décembre 2013.

[7] G.Nguetseng. Problèmes aux limites elliptiques. L.A.N .Université de Yaoundé I, 2001.

[8] L.Schwartz. Théorie des distributions Hermann, Paris, 1950.

[9]Y.Sonntag. Topologie et analyse fonctionnelle. Ellipse, Les Pennes Mirabeau, 1997.