

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



REPUBLIC OF CAMEROUN

Peace – Work – Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

GEOMETRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE :UNE ETUDE SUR CERTAINESCOURBES ET SURFACES DE REVOLUTION EN DIMENSION 2 ET 3

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme des professeurs de
l'enseignement secondaire deuxième grade (Di.P.E.S II)

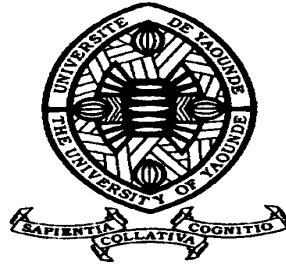
Par :

MBASSEGUE David
Licencié de Mathématiques

Sous la direction
Dr. MBA ALPHONSE
Chargé de cours

Année Académique
2015-2016





AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire de Yaoundé I. Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : biblio.centrale.uyi@gmail.com

WARNING

This document is the fruit of an intense hard work defended and accepted before a jury and made available to the entire University of Yaounde I community. All intellectual property rights are reserved to the author. This implies proper citation and referencing when using this document.

On the other hand, any unlawful act, plagiarism, unauthorized duplication will lead to Penal pursuits.

Contact: biblio.centrale.uyi@gmail.com

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents Dr. ESSOUGOU Benoit et Mme NTONGA Bernadette.

REMERCIEMENTS

Je saisis l'occasion qui m'est offerte pour adresser mes vifs remerciements au Dr. MBA Alphonse, qui au delà de ces multiples occupations m'a attribué un sujet et à guider mes premiers pas dans la recherche.

Je tiens également à remercier les enseignants de l'École Normale Supérieure de Yaoundé qui m'ont suivi tout au long de mon cursus universitaire. Mes vifs remerciement vont également :

- ☞ A mon épouse Mme MBASSEGUE Née ASSOUKOU MONIQUE BIENVENUE et à mes enfants pour leur soutien moral et leur grande affection.
- ☞ A mon Oncle M. AKOA AKOA Nicodème, qui a guidé mes pas dans l'enseignement.
- ☞ A mon Oncle le Proviseur M. ENGOULOU ENAMA Roger, qui a guidé mes pas dans l'enseignement.
- ☞ A mon grand frère ATEBA DIEUDONNE MATHIAS pour son soutien financier et morale
- ☞ A mon grand frère BITSA Hilaire Marie Tobie pour son soutien moral.
- ☞ A mon grand frère ESSOUGOU Thomas pour son soutien moral.
- ☞ A mon petit frère MENGUE Jérôme Claude pour son affection.
- ☞ A Ma grande soeur Mme ATEBA Isidore née ESSOUGOU Marie, pour son soutien financier et moral.
- ☞ A ma grande soeur Mme BALA née ESSOUGOU ESSOUGOU Madeleine, pour son soutien financier et moral.
- ☞ A toute ma famille.
- ☞ A mes camarades de classe de la 55^{ème} promotion pour leur soutien moral durant la formation.
- ☞ à tous les parents, amis et connaissances que nous n'avons pas nommés par manque de tact et de contact.

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à l'étude des courbes, surfaces de révolutions et sphères qui font partie intégrante de la géométrie du plan et de la géométrie de l'espace.

Mots clés : Cylindre, Cône, Cercle, Cône et sphère.

ABSTRACT

This work is devoted to the study of surfaces, surfaces of revolution and sphere, which are integrated in geometric of plan and thhe geometric of space.

Key words : Cylindre, circle, sphere, Conic and cone.

Abréviations et notations

EC : équation cartésienne

EP : équation paramétrique

SEC : Système d'équations cartésienne

S : Surface

C : cercle

ε_2 plan affine Euclidien

ε_3 espace affine Euclidien de dimension 3

P, T : Plan

A_l ou A aire latérale

A_t aire latérale totale

V Volume

FIG : figure

SCP : système de coordonnées polaires

A : aire de base

Table des matières

DÉDICACE	i
REMERCIEMENTS	ii
RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
1 COURBES EN DIMENSION 2 :	2
1.1 Le cercle	2
1.1.1 Angle au centre et angle inscrit	7
1.1.2 Quelques lignes de niveau	8
1.1.2.1 Lignes de niveau de	8
1.1.2.2 Lignes de niveau $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$	8
1.1.2.3 Lignes de niveau $M \mapsto \frac{MA}{MB}$	10
1.1.2.4 Lignes de niveau	10
1.2 Courbes en coordonnées polaires	11
1.2.1 Coordonnées polaires	11
1.2.2 Représentation d'une courbe en coordonnées polaires	12
1.2.3 La droite en Coordonnées polaires	13
1.2.4 le cercle en coordonnées polaires	13
1.3 Coniques	14
1.3.1 Présentation générale	14
1.3.2 Etude monofocale d'une conique	15
1.3.3 Définition et propriétés	15
1.3.4 Etude d'une parabole	17

1.3.5	Etude d'une conique à centre	19
1.3.5.1	Etude d'une hyperbole	20
1.3.5.2	Etude d'une ellipse	23
1.3.5.3	Tableau récapitulatif des éléments caractéristiques d'une ellipse dans un repère orthonormée	24
1.3.5.4	Représentation paramétrique d'une ellipse	25
1.3.5.5	Définition bifocale d'une ellipse	26
2	SURFACES EN DIMENSION 3 :	28
2.1	Généralités	28
2.2	Plan tangent	30
2.3	Plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne	31
2.4	Position d'une surface par rapport à un plan tangent	33
2.5	Intersection de 2 surfaces	34
2.6	Surface de révolution	36
2.7	Surfaces Usuelles	36
2.7.1	Cylindre	36
2.7.1.1	Cylindre de Révolution	38
2.7.1.2	Volume d'un cylindre	39
2.7.1.3	Coordonnées cylindriques	39
2.7.2	Cônes	40
2.7.3	La sphère et le cercle dans l'espace	43
3	Apport pédagogique	48
3.1	Apport sur le plan didactique et pédagogique	48
3.2	Courbes, surfaces de révolutions et sphères	48
3.3	Développement d'un solide	49
3.3.1	Réalisation du patron d'un cylindre de révolution	49
3.3.2	Réalisation du patron d'un cône	50
3.4	Volumes et aires latérales	50
	Bibliographie	53

Table de figures

- FIG1.1.1 : Schémas des cercles
- FIG1.1.2 : Représentation paramétrique d'un cercle
- FIG1.1.3 : Tangente à un cercle
- FIG1.1.4 : Positions relatives d'une droite et un cercle
- FIG1.1.5 : Diamètre d'un cercle
- FIG1.1.6 : Cercle de diamètre $[AB]$
- FIG1.1.7 angle au centre
- FIG1.1.8 : Ligne de niveau $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda$
- FIG1.1.9 : Ligne de niveau $\frac{MA}{MB} = \lambda$
- FIG1.1.10 : Coordonnées polaire
- FIG1.1.11. Système de coordonnées polaire
- FIG1.1.12 : Changement d'axes en coordonnées polaires
- FIG1.1.13 : Equation polaire d'une droite1
- FIG1.1.14 : Equation polaire d'une droite2
- FIG1.1.15 : Equation polaire d'un cercle
- FIG1.1 : Présentation générale des coniques
- FIG2.1 : Plan tangent à une surface
- FIG2.2 : Droite tangente à une surface
- FIG2.3 : Intersection de deux surfaces
- FIG2.4 : Surface de révolution
- FIG3.1 : Cylindre
- FIG3.2 : Plan tangent à un cylindre
- FIG3.3 : contour apparent cylindrique
- FIG3.4 : Cylindre de révolution
- FIG3.5 : Patron d'un cylindre

FIG3.6 : Cône

FIG3.7 : plan tangent à un cône

FIG3.8 : la sphère

FIG3.9 : plan tangent à une sphère

FIG3.10 : position relative d'un plan et d'une sphère

FIG3.11 : coordonnées sphériques

Table des tableaux

TABLE1.1 : Tableau récapitulatif de l'étude d'une parabole

TABLE1.2 : Tableau récapitulatif pour l'hyperbole

TABLE1.3 : Tableau récapitulatif des éléments caractéristiques d'une ellipse

Introduction générale

Dans le présent document, notre étude est basée sur certaines courbes, surfaces de révolution : par définition, on appelle surface de révolution, la surface S obtenue en faisant tourner une courbe (Γ) autour d'une droite (Δ). Développé dès l'antiquité pour les besoins de l'astronomie, la géométrie de la sphère et surface de révolution a longtemps constitué un domaine spécifique de la géométrie. Approximativement sphérique, la terre n'a pas toujours été considérée comme telle : Pour Thalès, de Milet (640-562 av. J.C.), c'est un disque flottant sur une sorte d'océan. Des spéculations philosophiques sur l'équilibre et l'harmonie du monde conduisirent le philosophe Grec Parménide à l'idée que la terre est de forme sphérique parce que la sphère : « est le volume le plus parfait ». La démonstration de cette affirmation par des raisonnements fondés sur de simples observations comme la modification de l'aspect du ciel constatée par les voyageurs, représente un des premiers succès de la pensée scientifique. La première mesure du tour de la terre est due à Eratosthène d'Alexandrie vers 230 av. J.C., qui trouva 250 000 stades, c'est-à-dire 38375km . Cette évaluation est remarquable puisque la longueur d'une circonférence méridienne est de 40009km . Notre travail sera consacré à l'étude des figures de la géométrie du plan et de l'espace ; et pour ce faire, nous allons donner le lien entre le cylindre, le cercle, le cône, coniques et sphère. Notre mémoire est subdivisé en trois chapitres : Dans le premier chapitre, nous parlerons des solides usuels du plan.

Dans le deuxième chapitre nous parlerons des solides usuels de l'espace.

Dans le troisième chapitre, nous allons donner les intérêts pédagogiques et didactiques de notre travail.

COURBES EN DIMENSION 2 :

1.1 Le cercle

Le plan affine euclidien(orienté) ε_2 est éventuellement muni du repère orthonormé directe $\mathcal{R} = (o; \vec{i}; \vec{j})$

Définition :

Soient $\Omega \in \varepsilon_2$ $R \in \mathbb{R}_+$. On appelle cercle de centre Ω et de rayon R , et on note ici $\mathcal{C}(\Omega : R)$, la partie de ε_2 définie par :

$$\mathcal{C}(\Omega : R) = \{M \in \varepsilon_2 : \Omega M = R\}$$

On définit aussi le **disque ouvert** $B(\Omega : R)$ et le **disque fermé** $B'(\Omega : R)$ de centre Ω et de rayon R :

$$B(\Omega : R) = \{M \in \varepsilon_2 : \Omega M < R\}$$

$$B'(\Omega : R) = \{M \in \varepsilon_2 : \Omega M \leq R\}$$

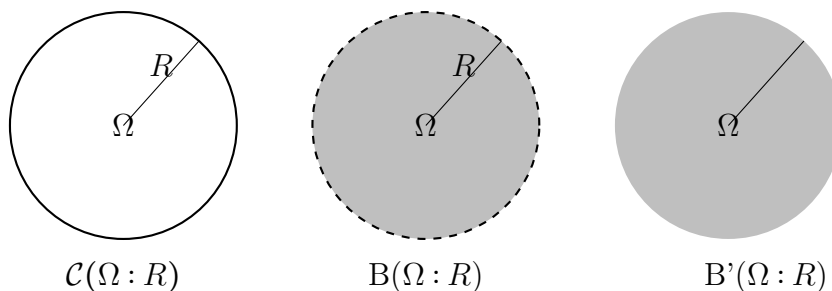


FIG1.1.1 Schémas des cercles

Remarque: 1 :

- 1) pour tout $(\Omega.R)$ de $\varepsilon_2 \times \mathbb{R}_+$: $\mathcal{C}(\Omega.R) \neq \emptyset$
- 2) Si $R = 0$, alors $\mathcal{C}(\Omega.R) = \{\Omega\}$: On dit que $\{\Omega\}$ est un point.

3) On a pour tous $\Omega, \Omega' \in \varepsilon_2$ et pour tout $R, R' \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{C}(\Omega; R) = \mathcal{C}(\Omega'; R) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ R = R' \end{cases}$$

Ainsi, un cercle détermine de manière unique son centre et son rayon.

4) $B(\Omega; R) \cup \mathcal{C}(\Omega; R) = B'(\Omega; R)$ et $B(\Omega; R) \cap \mathcal{C}(\Omega; R) = \emptyset$

5) Interprétation dans le plan complexe

Si Ω a pour affixe $\omega (\omega \in \mathbb{C})$ et si $R \in \mathbb{R}_+$ alors $\mathcal{C}(\Omega; R)$ est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - \omega| = R$

Les propositions suivantes ont immédiates.

Proposition 1 : (*Equation caractéristique d'un cercle*)

Soient $\Omega(a, b) \in \varepsilon_2$; $R \in \mathbb{R}_+$; le cercle $\mathcal{C}(\Omega; R)$ admet pour EC :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Remarque 2 :

Avec les notations ci dessus :

$$B(\Omega; R) = \{M(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\}$$

$$B'(\Omega; R) = \{M(x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}$$

Proposition 2 :

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. L'EC $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ représente :

- Le cercle de centre $\Omega(-\alpha; -\beta)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ si $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma \geq 0$
- \emptyset sinon.

On peut remarquer les cas particuliers suivants :

- cercle centrés en O : $x^2 + y^2 = R^2$
- Cercles centrés sur $x'x$: $x^2 + y^2 + 2\alpha x + \gamma = 0$ (avec $\alpha^2 - \gamma \geq 0$)
- Cercles centrés sur $y'y$: $x^2 + y^2 + 2\beta y + \gamma = 0$ (avec $\beta^2 - \gamma \geq 0$)
- Cercle passant par O : $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0$

Proposition 3 : (*Représentation paramétrique d'un cercle*)

Soient $\Omega(a, b) \in \varepsilon_2$; $R \in \mathbb{R}_+$

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega(a, b); R)$ admet la RP :

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

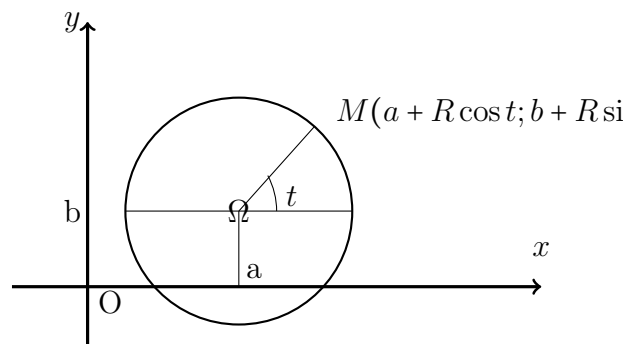


FIG1.1.2 Représentation paramétrique d'un cercle

Remarque: 3 :

- 1) On peut remplacer $t \in \mathbb{R}$ par $t \in I$ où I est un intervalle contenant un intervalle $]t_0; t_0 + 2\pi]$ ou $[t_0; t_0 + 2\pi[$ $t_0 \in \mathbb{R}$
- 2) En notant $u = \tan \frac{t}{2}$ ($t \in]-\pi; \pi[$), $\mathcal{C}(\Omega; R)$ (privé du point correspondant à $t = \pi$) admet la RP rationnelle :

$$\begin{cases} x = a + R \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ y = b + R \frac{2u}{1 + u^2} \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Proposition 4 :

soient $\Omega \in \varepsilon_2$; $R \in \mathbb{R}_+^*$

$M \in \mathcal{C}(\Omega; R)$

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega; R)$ admet en M une tangente

T et on a : $(\Omega M) \perp T$

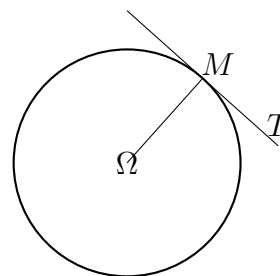


FIG1.1.3 tangente à un cercle

Preuve :

D'après la RP $\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases}$ de $\mathcal{C}(\Omega; R)$, le cercle $\mathcal{C}(\Omega; R)$ admet en tout point M

de paramètre t une tangente T , et T est dirigée par \vec{V}_1 où $\vec{V}_1 = \frac{d\vec{M}}{dt} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}$

Comme $\vec{\Omega M} \cdot \vec{V}_1 = (R \cos t)(-R \sin t) + (R \sin t)(R \cos t) = 0$, on a : $(\Omega M) \perp T$

Proposition 5 :

Soient C un cercle d'EC $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ et $M_0(x_0, y_0) \in C$. La tangente en M_0 à C a pour équation :

$$x_0x + y_0y + \alpha(x_0 + x) + \beta(y_0 + y) + \gamma = 0.$$

dite obtenue par dédoublement : On remplace dans l'EC de C , x^2 par xx_0 , y^2 par y_0y , $2\alpha x$ par $\alpha(x_0 + x)$; $2\beta y$ par $\beta(y_0 + y)$

Preuve :

le cercle C admet pour EC : $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ donc admet pour RP : $x = -\alpha + R\cos t$; $y = -\beta + R\sin t$; $t \in \mathbb{R}$ en notant $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ (on suppose $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$).

Pour $M_0(t_0) \in C$, la tangente en M_0 à C admet pour EC :

$$\cos t_0(X - x_0) + \sin t_0(Y - y_0) = 0$$

c'est à dire que : $(R\cos t_0)X + (R\sin t_0)Y - (x_0 + \alpha)x_0 - (y_0 + \beta)y_0 = 0$

ou encore : $(x_0 + \alpha)X + (y_0 + \beta)Y + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$

Ce qui est bien l'EC proposée.

Proposition 6 : (Positions relatives d'une droite et d'un cercle)

Soient D une droite et $C = C(\Omega; R)$ un cercle.

Si $d(\Omega; D) > R$, alors $D \cap C = \emptyset$	Si $d(\Omega; D) = R$, alors D est tangente à C et $D \cap C$ est un singleton	Si $d(\Omega; D) < R$, alors $D \cap C$ est formée de 2 points distincts
---	---	---

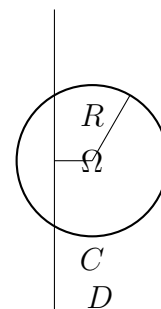
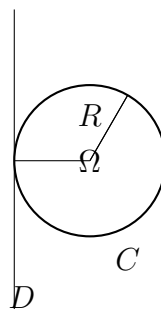
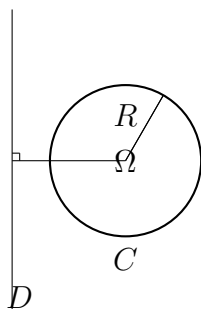


FIG1.1.4 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Remarque: 4 :

Par disjonction de cas, les réciproques des trois propriétés de la Proposition 6 sont aussi vraies

Proposition 7 :

Soient $\Omega \in \varepsilon_2$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Toute droite D passant par Ω coupe le cercle $C(\Omega; R)$ en deux points exactement A, B et Ω est le milieu de $[AB]$.

La droite (AB) ou le segment $[AB]$ est appelé un **diamètre** du cercle $C(\Omega; R)$

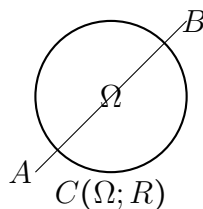


FIG1.1.5 diamètre d'un cercle

Proposition 8 :

Soient $A, B \in \varepsilon_2$, tels que $A \neq B$. Le cercle de diamètre (AB) est $\{M \in \varepsilon_2; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$

Preuve :

Notons Ω le milieu de $[AB]$ et $R = \Omega A$ alors, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} - \overrightarrow{\Omega A}) &= 0 \\ \Leftrightarrow M\Omega^2 - \Omega A^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \Omega M &= R. \end{aligned}$$

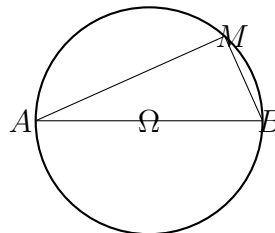


FIG1.1.6 Cercle de Diamètre $[AB]$

1.1.1 Angle au centre et angle inscrit

Proposition 9 :

Soient C un cercle de centre Ω , A, B, M trois points de C deux à deux distincts. On a :

$$\overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B})} \equiv 2\overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})} [2\pi]$$

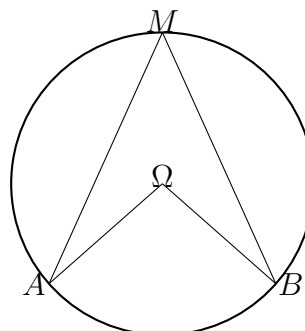


FIG1.1.7 Angle au centre

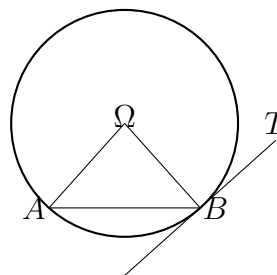
Preuve :

En utilisant la relation de Chasles sur les angles et le fait que les triangles ΩAM et ΩBM sont isocèles en Ω , on a :

$$\begin{aligned} \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B})} &= \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{MA})} + \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})} + \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{\Omega B})} \\ &= \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{M\Omega})} + \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})} + \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MB})} \\ &\equiv 2\overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})} [2\pi] \end{aligned}$$

Proposition 10 :

Soient C un cercle de centre Ω , A et B 2 points de C distincts, T la tangente à C en B



$$\text{On a : } \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B})} \equiv 2\overbrace{\text{mes}((AB); T)} [2\pi]$$

Preuve :

Puisque ΩAB est isocèle en Ω , et que $(B\Omega)$ est orthogonale à T , on a :

$$\begin{aligned} \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega B})} &= \pi - 2\overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{B\Omega})} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2} - \overbrace{\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{B\Omega})}\right) \\ &\equiv 2\overbrace{\text{mes}((AB), T)} [2\pi] \end{aligned}$$

1.1.2 Quelques lignes de niveau

Etant donné un ensemble X et une application $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau** de φ les ensembles $\{x \in X; \varphi(x) = \lambda\}$. pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.1.2.1 Lignes de niveau de

$$M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda$$

Soient $A, B \in \varepsilon_2$; Notons pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $E_\lambda = \{M \in \varepsilon_2; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda\}$.

En notant I milieu de $[AB]$, on a Pour tout $M \in \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \end{aligned}$$

et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda \Leftrightarrow IM^2 = \lambda + \frac{1}{4}AB^2$

- Si $\lambda < -\frac{1}{4}AB^2$, alors $E_\lambda = \emptyset$
- Si $\lambda = -\frac{1}{4}AB^2$, alors $E_\lambda = \{I\}$
- Si $\lambda > -\frac{1}{4}AB^2$, alors E_λ est le cercle de

centre I et de rayon $\left(\frac{1}{4}AB^2 + \lambda\right)^{\frac{1}{2}}$

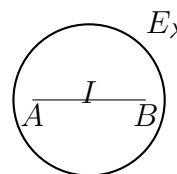


FIG1.1.8 Lignes de niveau $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda$

1.1.2.2 Lignes de niveau $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1 \dots A_n \in \varepsilon_2$ notons $\varphi : \varepsilon_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$\forall M \in \varepsilon_2, \quad \varphi(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2.$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \{M \in \varepsilon_2; \varphi(M) = \lambda\}$

Soit $O \in \varepsilon_2$, fixé quelconque. On a, pour tout $M \in \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right) \cdot \overrightarrow{OM} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) OM^2. \end{aligned}$$

1^{er} cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

Nous pouvons considérer le barycentre G de $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$

On a alors, en remplaçant O par G :

$$\forall M \in \varepsilon_2, \quad \varphi(M) = \varphi(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) GM^2.$$

et donc pour tout λ de \mathbb{R} :

$$M \in \varepsilon_\lambda \Leftrightarrow GM^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-1} (\lambda - \varphi(G)).$$

- Si $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-1} (\lambda - \varphi(G)) < 0$, alors $E_\lambda = \emptyset$
- Si $\lambda = \varphi(G)$ alors $E_\lambda = \{G\}$
- Si $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-1} (\lambda - \varphi(G)) > 0$, alors E_λ est le cercle de centre G et de rayon $\left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^{-1} (\lambda - \varphi(G)) \right)^{\frac{1}{2}}$

2^{ème} cas : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

On a alors

$$\forall O, M \in \varepsilon_2, \quad \varphi(M) = \varphi(O) - 2\overrightarrow{OM} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right)$$

Remarquons que pour tout $O, O' \in \varepsilon_2$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Ainsi, le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ ne dépend pas du choix de O .

- S'il existe $O \in \varepsilon_2$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$, alors $E_\lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \lambda \neq \varphi(O) \\ \varepsilon_2 & \text{si } \lambda = \varphi(O) \end{cases}$
- S'il existe $O \in \varepsilon_2$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \neq \vec{0}$, alors E_λ est une droite affine orthogonale à

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

1.1.2.3 Lignes de niveau $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Soient $A, B \in \varepsilon_2$ distincts : notons pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $E_\lambda = \left\{ M \in \varepsilon_2 \setminus \{B\} : \frac{MA}{MB} = \lambda \right\}$

Remarquons d'abord que E_1 est la médiatrice de $[AB]$.

Supposons $\lambda \neq 1$ et notons O le milieu de $[AB]$,

$$a = \frac{1}{2} \|AB\|, \quad \vec{i} = \frac{1}{\|AB\|} \overrightarrow{AB}, \quad \vec{j} = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{i}) :$$

ainsi, $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct de ε_2 dans lequel $A(-a; 0)$ et $B(a; 0)$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ et pour tout $M \in \varepsilon_2 \setminus \{B\}$:

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda &\Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = \lambda^2 \left((x+a)^2 + y^2 \right) \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2a \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} x + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + a \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2} \right)^2 \end{aligned}$$

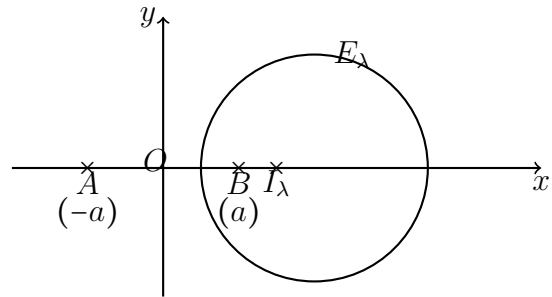


FIG1.1.9 Ligne de niveau $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Donc pour tout λ de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, E_λ est le cercle de centre $I_\lambda \left(-a \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}; 0 \right)$ et de rayon $\left| \frac{2a\lambda}{1-\lambda^2} \right|$

Remarque: 5 :

on peut de ramener à 2) : $\frac{MA}{MB} = \lambda \Leftrightarrow MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0$.

1.1.2.4 Lignes de niveau

$$M \mapsto \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$$

Soient $A, B \in \varepsilon_2$, distincts. On verra plus loin que les lignes de niveau de $M \mapsto \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (défini modulo π) sont des cercles passant par A et B privés de A et de B .

de même, les ligne de niveau de $M \mapsto \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (défini modulo 2π) sont des arcs de cercles d'extrémités A, B privés de A et B

1.2 Courbes en coordonnées polaires

Le plan euclidien ε_2 est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.2.1 Coordonnées polaires

A tout point $M(x, y)$ dans \mathcal{R} , on associe $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ (si $M \neq O$)

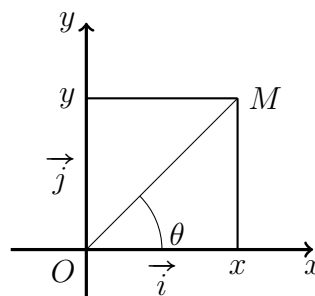


FIG1.1.10 Coordonnées polaires

On dit que ρ est le rayon polaire de M et que θ est l'angle de M .

$$\text{On a : } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta. \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ alors $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{y}{x} = \tan\theta$.

Le couple $(\theta + \pi, -\rho)$ vérifie aussi le système de relations $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ à la place de (θ, ρ)

On dit qu'un couple (θ, ρ) de \mathbb{R}^2 est un **système de coordonnées polaire** (en abrégé : SCP) de $M(x, y)$ si et seulement si : $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ et on note alors $M(\theta, \rho)$. On remarquera qu'ici ρ peut être ≤ 0 .

Ainsi, tout point M de $\varepsilon_2 - \{O\}$ admet exactement comme SCP les (θ, ρ) et les $(\theta + \pi, -\rho)$, où $\theta(\text{modulo } 2\pi)$ est l'angle de polaire de M et $\rho = OM$.

Réciproquement, pour tout (θ, ρ) de \mathbb{R}^2 , il existe un point M unique de ε_2 dont (θ, ρ) soit un SCP.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$, qui est le vecteur normé d'angle polaire θ et $\overrightarrow{v(\theta)} = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{u(\theta)}) = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$.

Ainsi, $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ est une base orthonormée directe de ε_2

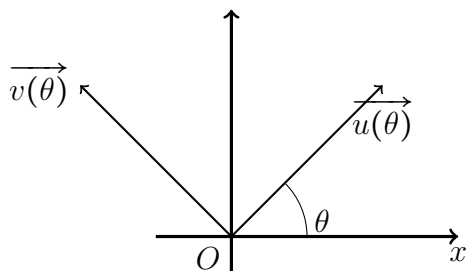


FIG1.1.11 Système de coordonnées polaire

Changement d'axe en coordonnées polaires

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$. \mathcal{R}' le repère orthonormé directe déduit de \mathcal{R} par la rotation de centre O et d'angle α .

Pour tout M de ε_2 si (θ, ρ) est un SCP de M dans \mathcal{R} . alors un SCP de M dans \mathcal{R}' est $(\theta - \alpha, \rho)$ d'après la relation de Chasles sur les angles

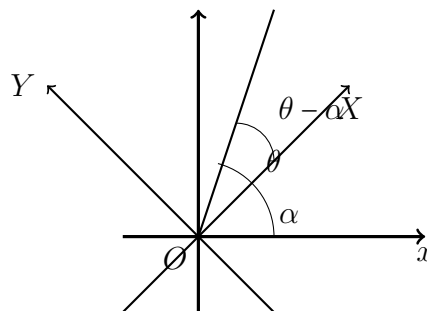


FIG1.1.12 Changement d'axe en coordonnées polaires

1.2.2 Représentation d'une courbe en coordonnées polaires

Soient $f : I \rightarrow \varepsilon_2$ un arc paramétré de classe C^1 . Γ sa trajectoire.
 $t \mapsto M(t) = f(t)$

supposons : $\forall t \in I, M(t) \neq O$.

Notons $(x(t), y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans \mathcal{R} .

L'application $g : I \rightarrow \mathbb{U}$ définie par : $\forall t \in I, g(t) = \frac{x(t) + iy(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}}$ est de classe C^1 sur I . D'après le théorème de relèvement, il existe une application $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $\forall t \in I, g(t) = e^{i\theta(t)}$.

On a alors pour tout t de I :
$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} \cos \theta(t) \\ y(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} \sin \theta(t) \end{cases}$$

donc $\theta(t)$ est l'angle polaire de $M(t)$.

Notons $J = \theta(I)$ (qui est un intervalle de \mathbb{R} .) et supposons : $\forall t \in I, \theta'(t) \neq 0$. Alors $\theta : I \rightarrow J$ est un C^1 difféomorphisme, c'est-à-dire un changement de paramétrage, et donc $f \circ \theta$ est un paramétrage admissible de classe C^1 de Γ .

la courbe Γ est alors représentée par $\rho = \rho(\theta)$ où $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . On dit que Γ admet **l'équation polaire** $\rho = \rho(\theta)$. Dans la relation $\rho = \rho(\theta)$. ρ peut être $\neq 0$.

1.2.3 La droite en Coordonnées polaires

1) L'équation polaire d'une droite D passant par O est $\theta = \alpha[\pi]$ où α est l'angle polaire de D .

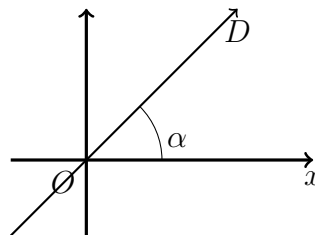


FIG1.1.13 équation polaire d'une droite1

2) L'équation polaire d'une droite D d'origine O est θ et $\theta \equiv \alpha[2\pi]$. où α est l'angle polaire de la demi-droite D .

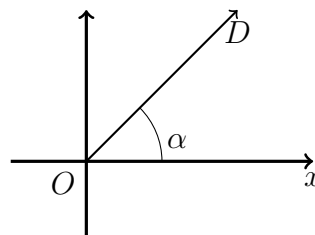


FIG1.1.14 équation polaire d'une droite2

3) Soit $D : ax + by + c = 0$ ($a, b \neq (0, 0)$, $c \neq 0$), une droite passant par O . En notant

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad | \quad \text{On a :}$$

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (a \cos \theta + b \sin \theta) \rho + c = 0 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{-\frac{a}{c} \cos \theta - \frac{b}{c} \sin \theta}$$

Réciproquement, pour tout (λ, μ) de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, l'équation polaire $\rho = \frac{1}{\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta}$

Représente la droite D d'équation cartésienne $\lambda x + \mu y - 1 = 0$.

1.2.4 le cercle en coordonnées polaires

1) Le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) admet pour équation polaire $\rho = R$.

Réciproquement, pour tout a de \mathbb{R}^2 , l'équation polaire $\rho = a$ représente le cercle de centre O et de rayon $|a|$.

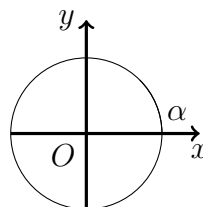


FIG1.1.15 équation polaire d'un cercle

2) Soit C le cercle passant par O . Son équation cartésienne est de la forme :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0.$$

On a :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + 2(\operatorname{acos}\theta + \operatorname{bsin}\theta)\rho = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \text{ou} \\ \rho = -2(\operatorname{acos}\theta + \operatorname{bsin}\theta) \end{array} \right.$$

Comme il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-2(\operatorname{acos}\theta + \operatorname{bsin}\theta) = 0$. Finalement, C admet comme équation polaire : $\rho = \lambda \operatorname{cos}\theta + \mu \operatorname{sin}\theta$. où $\lambda = -2a$ et $\mu = -2b$

Réciproquement, l'équation polaire $\rho = \lambda \operatorname{cos}\theta + \mu \operatorname{sin}\theta$ représente le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - \lambda x - \mu y = 0$, qui passe par O .

1.3 Coniques

1.3.1 Présentation générale

Considérons deux cônes de révolution ayant le même axe de révolution autour du sommet O et symétrique par rapport à O .

On se propose d'étudier les différentes sections de ce solide avec les plans selon la position de ces plans, on obtient l'une des figures suivantes :

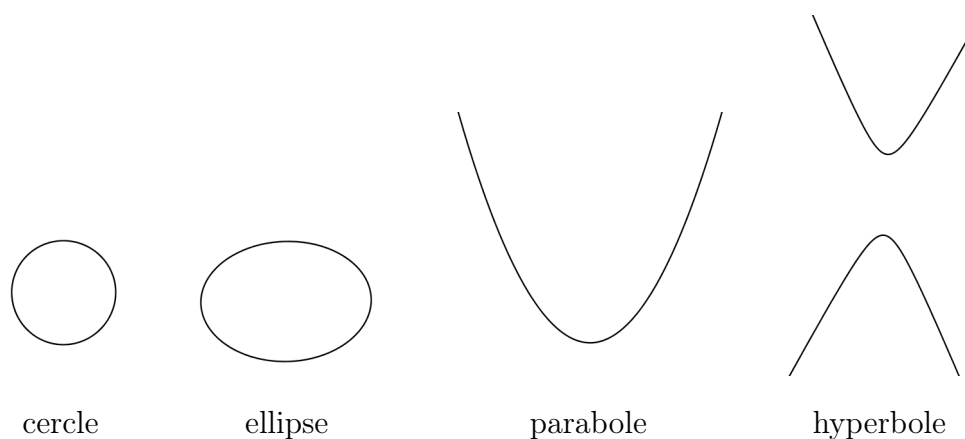


FIGURE 1.1 – Présentation générale des coniques

1.3.2 Etude monofocale d'une conique

Soit (\mathcal{D}) une droite, F un point fixé tel que $F \notin (\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif.

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur (\mathcal{D}) et par (Δ) la droite (FK) .

Etude de $(\Gamma_e) = \{ M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{MH} = e \}$ avec H projeté de M sur (\mathcal{D})

Proposition 1 : $P_1)$ (\mathcal{D}) est un axe de symétrie de (Γ_e)

$P_2)$ Intersection de (Γ_e) et (Δ)

→ Si $e = 1$, alors (Γ_e) rencontre (Δ) en un seul point qui est le milieu de $[FK]$.

→ Si $e \neq 1$, alors (Γ_e) rencontre (Δ) en deux points A et A' tels que :

$$A = \text{bar} \{ (F; 1, (K; e)) \} \text{ et } A' = \text{bar} \{ (F; 1, (K; -e)) \}$$

Preuve:

$P_1)$ Soit $M \in (\Gamma_e)$. Posons $M' = s_{\Delta}(M)$. Montrons que $M' \in (\Gamma_e)$

$$M \in (\Gamma_e) \iff \frac{MF}{MH} = e$$

Puisque $M' \in (\Gamma_e)$, alors $M'H' = MH$.

$$M \in (\Gamma_e) \iff \frac{MF}{MH} = e \iff \frac{M'F}{M'H'} = e \iff M' \in (\Gamma_e) \text{ avec } H' \text{ le projeté orthogonal de } M' \text{ sur } (\Delta). \quad \blacksquare$$

1.3.3 Définition et propriétés

Définition : Soit F un point fixé tel que $F \notin (\mathcal{D})$ et e un réel strictement positif.

On appelle **conique de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et d'excentricité e** l'ensemble (Γ_e) des points M du plan tel que : $MF = ed(M, (\mathcal{D}))$.

– Si $e = 1$, alors (Γ_e) est une **parabole**

– Si $0 < e < 1$, alors (Γ_e) est une **ellipse**

– Si $e > 1$, alors (Γ_e) est une **hyperbole**

Soit (Γ_e) une conique de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et d'excentricité e .

On appelle **axe focal de (Γ_e)** la perpendiculaire à la droite (Δ) passant par le point F .

Proposition 2 : Soit (Γ_e) une conique de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et d'excentricité e , d'axe focal (Δ) . On a les propriétés suivantes :

$P_1)$ (Δ) est un axe de symétrie de (Γ_e) ;

$P_2)$ 1) Si $e = 1$, alors (Γ_e) rencontre (Δ) en un seul point qui est le milieu de $[FK]$.

2) Si $e \neq 1$, alors (Γ_e) rencontre (Δ) en deux points A et A' tels que :

$$A = \text{bar}\{ (F; 1, (K; e)) \} \quad \text{et} \quad A' = \text{bar}\{ (F; 1, (K; -e)) \}$$

$P_3)$ 1) Si $0 < e < 1$, alors tout point de (Γ_e) est intérieur au cercle de diamètre $[AA']$

2) Si $e > 1$, alors tout point de (Γ_e) est extérieur au cercle de diamètre $[AA']$

Preuve:

$P_1)$ Soit $M \in (\Gamma_e)$, posons $M' \in (\Gamma_e)$

Donc : (Δ) est un axe de symétrie de (Γ_e)

$P_2)$ 1) Soit (Γ_e) une conique telle que $e = 1$. Montrons que $(\Gamma_e) \cap (\Delta) = \{ S \}$, où S est le milieu de $[FK]$

Soit $M \in (\Gamma_e) \cap (\Delta)$

$M \in (\Gamma_e) \cap (\Delta) \iff MF = eMH$ avec H projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D}) et $M \in (\Delta)$.

$$\implies MF = MK$$

$$\implies M = \text{mil}[FK] \text{ car } F, K \text{ et } M \text{ sont alignés.}$$

Donc $(\Gamma_e) \cap (\Delta) = \{ S \}$ où S milieu de $[FK]$.

2) Supposons que $e \neq 1$

Soit $M \in (\Gamma_e) \cap (\Delta) = \{ S \}$

Alors $M \in (\Delta)$ et $MF = eMH$, H étant le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D})

$$\implies MF^2 - e^2MH^2 = 0$$

$$\implies (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MH}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MH}) = 0$$

En prenant : $A = \text{bar}\{ (F; 1, (K; e)) \}$ et $A' = \text{bar}\{ (F; 1, (K; -e)) \}$

$$\implies (1 - e^2)\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0$$

$$\implies \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = 0 \text{ car } 1 - e^2 \neq 0$$

$$\implies \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{MA'} = \vec{0}$$

Donc : $M = A$ ou $M = A'$

D'où : $(\Gamma_e) \cap (\Delta) = \{ A, A' \}$

$P_3)$ 1) Si $0 < e < 1$

Soit $M \in (\Gamma_e)$, alors on a : $MF = eMH$

$$\begin{aligned}
&\implies MF < eMK \\
&\implies MF^2 - e^2MK^2 < 0 \\
&\implies (1 - e^2)\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} < 0 \\
&\implies \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} < 0 \text{ car } 1 - e^2 > 0 \\
&\implies M \text{ est à l'intérieur de cercle de diamètre } [AA'] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 :

- 1) Lorsque $e = 1$, le point S est appelé **sommet de la parabole**
- 2) Lorsque $e \neq 1$, les points A et A' de la propriété ci-dessous, sont appelés **sommets de (Γ_e) situés sur l'axe focal.**

1.3.4 Etude d'une parabole**Equation réduite d'une parabole****Théorème 1.3.1 :**

Soit (\mathcal{P}) la parabole de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et de sommet S .

Dans le repère orthonormé (S, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, (\mathcal{P}) est la courbe d'équation $y^2 = 2px$ avec $p = KF$

Preuve:

Soit (\mathcal{P}) la parabole de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) . Soit K le projeté orthogonal de F sur (\mathcal{D}) .

Soit $M(x; y)$ un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D}) .

$$H\left(-\frac{p}{2}; y\right), F\left(\frac{p}{2}; 0\right), M(x; y)$$

$$\begin{aligned}
M \in (\mathcal{P}) &\iff MF^2 = MH^2 \\
&\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\
&\iff x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 - x^2 - px - \frac{p^2}{4} = 0 \\
&\iff y^2 - 2px = 0 \\
&\iff y^2 = 2px
\end{aligned}$$

Donc (\mathcal{P}) est la courbe d'équation $y^2 = 2px$ dans (S, \vec{i}, \vec{j}) . ■

Remarque 1.3.2 :

- 1) L'équation $y^2 = 2px$ est une **équation réduite de (\mathcal{P}) .**
- 2) Le réel strictement positif p est appelé **paramètre de la parabole (\mathcal{P})**

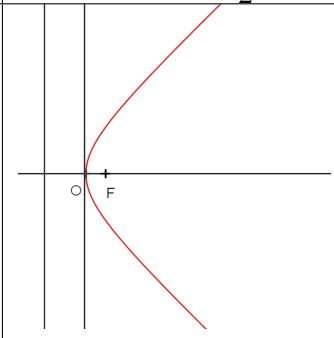
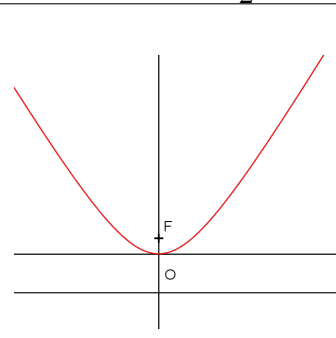
Equations réduites	$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$
Paramètre	$ p $	
Sommets	O	
Directrices	$(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2}$	$(\mathcal{D}) : y = -\frac{p}{2}$
Courbes		

TABLE 1.1 – Tableau récapitulatif de l'étude d'une parabole

3) Si on échange les axes (S, \vec{i}) et (S, \vec{j}) , alors on obtient une équation réduite de (\mathcal{P}) sous la forme $x^2 = 2py$.

Dans ce cas, $F(0; \frac{p}{2})$

Exemple 1.3.1 :

1) La courbe (\mathcal{C}) d'équation $y^2 = 6x$ est la parabole de foyer $F(\frac{3}{2}; 0)$, de directrice $(\mathcal{D}) : x = -\frac{3}{2}$ et de paramètre 3

2) La courbe (\mathcal{P}) d'équation $x^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ est la parabole de sommet $S(2; \frac{5}{2})$, de foyer $F(0; \frac{1}{2})$, de directrice $(\mathcal{D}) : y = -\frac{1}{2}$ et de paramètre 1

En effet, $(\mathcal{P}) : x^2 - 4x + 2y - 1 = 0$.

Donc $(\mathcal{P}) : (x - 2)^2 + 2y - 5 = 0$.

Ainsi : $(\mathcal{P}) : (x - 2)^2 = -2(y - \frac{5}{2})$.

D'où : $X^2 = -2Y$ avec $X = x - 2$ et $Y = y - \frac{5}{2}$.

De ce qui précède, on constate que l'équation réduite d'une parabole dans un repère bien choisi est sous l'une des formes suivantes : $y^2 = 2ax; x^2 = 2ay$ (paramètre $|a|$) Le tableau suivant regroupe les éléments caractéristiques d'une parabole suivant le type d'équation réduite .

On munit le plan du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Proposition 3 : Soit (\mathcal{P}) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p \neq 0$). La tangente en un point $M_0(x_0; y_0)$ a pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$

Exemple 1.3.2 :

Soit (\mathcal{P}) la parabole d'équation $y^2 = 9x$.

Déterminer l'équation de la tangente (\mathcal{T}) en un point $M_0(1; 3)$

$$(\mathcal{T}) : 3y = \frac{9}{2}(x + 1) \text{ c'est-à-dire } (\mathcal{T}) : 3x - 2y + 3 = 0$$

Remarque 1.3.3 :

Si (\mathcal{P}) a pour équation $x^2 = 2py$, alors l'équation de la tangente en un point $M_0(x_0; y_0)$ est donné par : $xx_0 = p(y + y_0)$

Preuve:

Exercice ■

1.3.5 Etude d'une conique à centre

Proposition 4 : Soit (Γ_e) une conique de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et d'excentricité e ($e \neq 1$). Soit A et A' les sommets de (Γ_e) situés sur l'axe focal, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{i} = \frac{1}{OA}\vec{OA}$.

(Γ_e) est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ avec $a = OA$, $c = OF$ et O le milieu de $[AA']$.

Preuve:

Soit (Γ_e) une conique à centre, de directrice (\mathcal{D}) , de foyers F et F' et d'excentricité e ($e \neq 1$)

On a : $A = \text{bar} \{ (F; 1), (K; e) \}$ et $A' = \text{bar} \{ (F; 1), (K; -e) \}$.

On munit le plan du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{i} = \frac{1}{OA}\vec{OA}$.

On a donc : $\vec{AF} + e\vec{AK} = \vec{0}$ et $\vec{AF} - e\vec{AK} = \vec{0}$

Ainsi : $\vec{OF} + e\vec{OK} = (1 + e)\vec{OA}$ et $\vec{OF} - e\vec{OK} = (1 - e)\vec{OA}' = (e - 1)\vec{OA}$

En additionnant ces deux relations, on obtient : $2\vec{OF} = 2e\vec{OA}$

$$\implies \vec{OF} = e\vec{OA}$$

De même : $2e\vec{OK} = 2\vec{OA} \iff \vec{OA} = e\vec{OK}$

Ainsi, en posant : $a = OA$ et $c = OF$

$$\|\vec{OF}\| = \|e\vec{OA}\| \iff OF = eOA \iff c = ea \iff e = \frac{c}{a}$$

$$OA = eOK \iff OA = eOK \iff OK = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$$

Soit $M(x; y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (\mathcal{D}) , alors dans le repère

$(O, \vec{i}, \vec{j}), F(c; 0)$ et $H(\frac{a^2}{c}; y)$

$$\begin{aligned}
 M \in (\Gamma_e) &\iff MF^2 - e^2MH^2 \\
 &\iff (x-c)^2 + y^2 - e^2(x - \frac{a^2}{c})^2 = 0 \\
 &\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - e^2x^2 + 2e^2\frac{a^2}{c}x - e^2\frac{a^4}{c^2} = 0 \\
 &\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx - a^2 = 0 \text{ car } e = \frac{c}{a} \\
 &\iff (1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 + (c^2 - a^2) = 0 \\
 &\iff (\frac{a^2 - c^2}{c^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2
 \end{aligned}$$

D'où : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ ■

Remarque 1.3.4 :

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ est appelé **équation réduite** de la conique à centre (Γ_e)
- 2) Dans (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ est la conique de foyer $F(c; 0)$ et de directrice $(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$
- 3) L'équation d'une conique à centre reste inchangée lorsqu'on substitue x par $-x$ et y par $-y$

Corollaire 1.3.1 :

Soit (Γ_e) une conique à centre, d'axe focal (Δ) , de foyer F et de directrice (\mathcal{D})

- (c_1) La médiatrice de $[AA']$ est un **axe de symétrie** de (Γ_e)
- (c_2) Le milieu O de $[AA']$ est un **centre de symétrie** de (Γ_e)
- (c_3) $F' = s_{(O)}(F)$ et $(\mathcal{D}') = s_{(O)}((\mathcal{D}))$ sont aussi des **foyers** et **directrices** de (Γ_e)

Remarque 1.3.5 :

$FF' = 2c$ est appelé **distance focale de la conique à centre** (Γ_e) .

Dans la suite, l'équation réduite d'une ellipse sera donnée sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et, celle d'une hyperbole sera donnée sous l'une des formes suivantes : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.3.5.1 Etude d'une hyperbole

a) Equations réduites.

Selon la forme sous laquelle se présente une équation réduite d'une hyperbole, le tableau suivant présente les éléments caractéristiques d'une hyperbole.

Hyperbole		
Equations réduites	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A(a; 0) , A'(-a; 0)$	$B(0; b) , B'(0; -b)$
Axe focal	(AA')	(BB')
Foyers	$F(c; 0) , F'(-c; 0)$	$F(0; c) , F'(0; -c)$
Directrice	$(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c} , (\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c} , (\mathcal{D}') : y = -\frac{b^2}{c}$
Asymptôtes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x , (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	
Courbes		

TABLE 1.2 – Tableau récapitulatif pour l’hyperbole

b) Equation de la tangente en un point de l'hyperbole.

Proposition 5 : Soit (\mathcal{H}) une hyperbole d'équation réduite $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $M_0(x_0; y_0) \in (\mathcal{H})$.

La tangente à (\mathcal{H}) en x_0 est la droite d'équation : $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Remarque 1.3.6 :

Lorsque $(\mathcal{H}) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation de la tangente en un point $M_0(x_0; y_0) \in (\mathcal{H})$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Exemple 1.3.3 :

Soit (\mathcal{H}) la courbe d'équation $-2x^2 + 3y^2 = 1$

- 1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (\mathcal{H})
- 2) Déterminer l'équation de la tangente à (\mathcal{H}) au point $M_0(1; 1)$

Solution :

$$1) \text{ On a : } (\mathcal{H}) : -2x^2 + 3y^2 = 1 \iff (\mathcal{H}) : -\frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

Donc (\mathcal{H}) est une hyperbole.

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ et } e = \frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$* \text{ Sommets : } B(0; \frac{1}{\sqrt{3}}); B'(0; -\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$* \text{ Axe focal : } (BB')$$

$$* \text{ Directrice : } (\mathcal{D}) : y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}x; (\mathcal{D}') : y = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}x$$

$$* \text{ Foyers : } F(0; \sqrt{\frac{5}{6}}); F'(0; -\sqrt{\frac{5}{6}})$$

$$2) -\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1 \iff (\mathcal{T}) : -2x + 3y = 1$$

Remarque 1.3.7 :

L'hyperbole est dite **équilatère** lorsque $a=b$

Et dans ce cas, l'excentricité vaut $\sqrt{2}$ et les asymptotes sont orthogonales.

c) Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Proposition 6 : L'équation réduite d'une hyperbole (\mathcal{H}) rapportée à ses asymptotes est de la forme $Y = \frac{k}{X}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.

d) Définition bifocale d'une hyperbole.

Proposition 7 : Soit (\mathcal{H}) un hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$).

Dans un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) , (\mathcal{H}) est l'ensemble des points M de plan tel que $|MF' - MF| = 2a$

Remarque 1.3.8 :

La proposition ci-dessus s'appelle **définition bifocale d'une hyperbole**

Exemple 1.3.4 :

Donner une définition bifocale de l'hyperbole (\mathcal{H}) d'équation $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

Solution :

$$a^2 \iff a = \sqrt{2}$$

(\mathcal{H}) est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF' - MF| = 2\sqrt{2}$ avec $F(\sqrt{3}; 0)$ et $F'(-\sqrt{3}; 0)$ dans un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j})

1.3.5.2 Etude d'une ellipse

Dans les paragraphes précédents, nous avons établis que l'équation réduite d'une conique à centre dans un repère convenablement choisi (O, \vec{i}, \vec{j}) était de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ avec $a = OA$, $c = OF$, $e = \frac{c}{a}$.
Le plan est muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Proposition 8 : La courbe (\mathcal{E}) de l'ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ est la réunion des courbes de deux fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et $g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Preuve:

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{E}) &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ &\iff \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ &\iff y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &\iff y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \\ &\iff y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ou } y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \\ &\iff M \in (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}_g) \end{aligned}$$

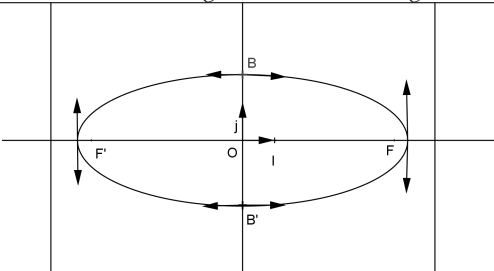
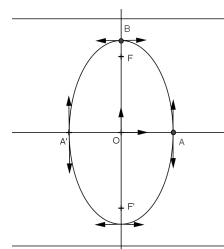
		1er Cas ($a > b$)	2ème Cas ($a < b$)
Equation réduite		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Demi-distance focale		$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité		$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets		$A(a; 0) , A'(-a; 0)$	$B(0; b) , B'(0; -b)$
Axes particuliers	Axe focal	(AA')	(BB')
	Grand axe	$[AA']$	$[BB']$
	Petit Axe	$[BB']$	$[AA']$
Foyers		$F(c; 0) , F'(-c; 0)$	$F(0; c) , F'(0; -c)$
Directrice		$(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c} , (\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c} , (\mathcal{D}') : y = -\frac{b^2}{c}$
Courbes			

TABLE 1.3 – Tableau récapitulatif des éléments caractéristiques d'une ellipse.

Donc (\mathcal{E}) est la réunion des courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et $g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ■

Remarque 1.3.9 :

- Les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) sont symétriques par rapport à l'axe (O, \vec{i}) .
- Les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) admettent en $x = a$ une demi-tangente verticale.

1.3.5.3 Tableau récapitulatif des éléments caractéristiques d'une ellipse dans un repère orthonormée

Remarque 1.3.10 :

Lorsque $a = b$, alors on obtient un cercle de centre O et de rayon a .

Exemple 1.3.5 :

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Solution:

$$a = 2; b = 3 \ (b > a) \text{ et } c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}; e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

- * Sommets : $B(0; 3)$; $B'(0; -3)$; $A(2; 0)$ et $A'(-2; 0)$
- * Axe focal : (BB') ; grand axe $[BB']$
- * Foyers : $F(0; \sqrt{5})$; $F'(0; -\sqrt{5})$
- * Directrices : $(\mathcal{D}) : y = \frac{9\sqrt{5}}{5}$, $(\mathcal{D}') : y = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$ ■

Proposition 9 : Soit (Γ_e) une ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit $M_0(x_0; y_0) \in (\mathcal{E})$.

La tangente à (Γ_e) au point M_0 a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Exemple 1.3.6 :

Soit (\mathcal{E}) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Déterminer l'équation de la tangente à (\mathcal{C}) au point $M_0(0; -3)$

Solution:

$$M_0(0; -3) \in (\mathcal{E}) \iff \frac{3y}{9} = 1 \iff y = 3 \quad \blacksquare$$

1.3.5.4 Représentation paramétrique d'une ellipse

Proposition 10 : Soit (\mathcal{E}) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alors (\mathcal{E}) a pour

$$\text{représentation paramétrique } \begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Preuve:

Etant donné que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, alors $-1 < \frac{x}{a} < 1$ et $-1 < \frac{y}{b} < 1$.

Donc il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \frac{x}{a} = cost \\ \frac{y}{b} = sint \end{cases}$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$$

Exemple 1.3.7 :

Soit (\mathcal{E}) l'ellipse d'équation réduite $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.

Dans un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) , donner une représentation paramétrique de (\mathcal{E}) .

Solution:

Donnons une représentation paramétrique de (\mathcal{E}) .

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) : \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 &\implies (\mathcal{E}) : \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{5}\right)^2 = 1 \\ &\implies \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{x+1}{4} = \cos t \\ \frac{y-3}{5} = \sin t \end{cases} \\ &\implies \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 4\cos t \\ y = 3 + 5\sin t \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 11 : Soit (\mathcal{E}) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ de sommets A et A' situés sur l'axe focal alors : $f(\mathcal{C}) = (\mathcal{E})$ avec (\mathcal{C}) le cercle de diamètre $[AA']$ et f l'affinité orthogonale de rapport $\frac{b}{a}$ et d'axe (AA')

Preuve:

Soit $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient (\mathcal{C}) le cercle de diamètre $[AA']$ et f l'affinité orthogonale de rapport $\frac{b}{a}$ et d'axe (AA') .

Soit $M(x; y) \in (\mathcal{C})$. Montrons que $M' = f(M) \in (\mathcal{E})$.

Posons $M'(x'; y')$ un point du plan tel que $M' = f(M)$

$$M' = f(M) \iff \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{a}y \end{cases} \text{ et } M \in (\mathcal{C}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x' = x = a\cos t \\ y' = \frac{b}{a}y = b\sin t \end{cases}$$

D'où : $M' \in (\mathcal{E})$ donc $f(\mathcal{C}) = (\mathcal{E})$. ■

1.3.5.5 Définition bifocale d'une ellipse

Proposition 12 : Soit (\mathcal{E}) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(\mathcal{C}) est l'ensemble des points M du plan tel que $MF + MF' = 2a$ avec F et F' les foyers de l'ellipse (\mathcal{E}) .

Remarque 1.3.11 :

La propriété ci dessus porte le nom de définition bifocale de l'ellipse (\mathcal{E})

Exemple 1.3.8 :

Le plan est muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $(\mathcal{E}) : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$

- * Donner une définition bifocale de (\mathcal{E})
- * Soient F et F' deux points du plan tels que $FF' = 3$ et $|MF + MF'| = 2a$ pour tout point $M \in (\mathcal{E})$
- * Donner l'équation réduite de (\mathcal{E}) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

SURFACES EN DIMENSION 3 :

U désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 et k désigne un entier ≥ 1 ou $= +\infty$

2.1 Généralités

Définition : On appelle **nappe paramétrique** (de classe C^k) toute application $\phi : U \rightarrow \varepsilon_3$ de classe C^k sur U .

Si $\phi : U \rightarrow \varepsilon_3$ de classe C^k sur U est une nappe paramétrée, on appelle **image** de ϕ la partie $\phi(U)$ de ε_3 . On dit aussi que $\phi(U)$ est une surface admettant ϕ pour **représentation paramétrique** (en abrégé : RP).

Soit S une surface admettant $\phi : U \rightarrow \varepsilon_3$ comme représentation paramétrique (de classe C^k), $(x(u;v), y(u;v), z(u;v))$ les coordonnées de $\phi(u;v)$ dans \mathcal{R} . On obtient une **équation cartésienne** (en abrégé : EC) de S en éliminant (u, v) dans le système d'éga-

$$\text{lités} \begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

Exemple 2.1.1 :

$$1 \text{ La surface de RP } \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^4 \end{cases} \quad (u;v) \in \mathbb{R}^2 \text{ admet pour EC : } (x^2 + y^2)^2 - z = 0.$$

$$2) \text{ Soit } S \text{ la surface de RP : } \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases} \quad (u;v) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv \\ z = u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3(u + v)uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = x^2 - 2uv \\ z = x^3 - 3xuv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = x \\ uv = \frac{x^2 - y}{2} \\ z = x^3 - \frac{3x(x^2 - y)}{2} \end{cases}$$

puisque u, v sont ici déterminés par leur somme σ et leur produit π , sont donc les

$$\text{zéros du polynôme } X^2 - \sigma X + \pi, \text{ on a : } \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u + v = x \\ uv = \frac{x^2 - y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 4\frac{x^2 - y}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2y - x^2 \geq 0.$$

$$\text{Ainsi, une EC de } S \text{ est : } \begin{cases} x^3 - 3xy + 2z = 0 \\ y \geq \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Autrement dit, S est la surface d'EC $x^3 - 3xy + 2z = 0$. « Limité » par la condition $y \geq \frac{x^2}{2}$.

Théorème : (des fonctions implicites) Soient V un ouvert de \mathbb{R}^3 , $A = (a, b, c) \in V$, $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application

$$\text{On suppose : } \begin{cases} \bullet F(A) = 0 \\ \bullet F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V \\ \bullet F'_z(A) \neq 0 \end{cases} \text{ Alors il existe des intervalles ouverts}$$

v_1, v_2 de \mathbb{R} centrés respectivement en a, b et un intervalle ouvert w de \mathbb{R} centré en c tels que :

$$\begin{cases} \bullet v_1 \times v_2 \times w \subset V \\ \bullet \text{ il existe une application unique } \varphi : v_1 \times v_2 \rightarrow w \text{ telle que :} \\ \forall (x, y) \in v_1 \times v_2, F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ \bullet \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } v_1 \times v_2. \end{cases}$$

De plus, si F est de classe C^k ($k \geq 1$) sur V , alors φ est de classe C^k sur $v_1 \times v_2$

Remarque: 6 : 1) L'intersection de deux surface est « en général » une courbe. Par exemple, l'intersection d'une sphère de centre O et de rayon $R > 0$ et d'un plan (situé à une distance $< R$ de O) est un cercle.

2) Toute courbe peut être considérée (d'une infinité de façons) comme intersection de deux surfaces. Par exemple, la courbe Γ de RP ($x = t^3; y = t^4; z = t^5, t \in \mathbb{R}$) est l'intersection des deux surfaces d'EC : $y^3 = x^4; y^5 = z^4$.

2.2 Plan tangent

1) Plan tangent en un point d'une surface définie par une représentation paramétrique

Définition : Soient $\phi : U \rightarrow \varepsilon_3 \quad (u, v) \mapsto M(u, v) = \phi(u, v)$ une nappe paramétrique de classe C^1 , $S = \phi(U)$, $M(u, v)$ un point de S

On dit que $M(u, v)$ est un point régulier de ϕ (ou : de S) si et seulement si la famille $\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v); \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right)$ est libre.

On dit que ϕ est une nappe paramétrée **régulière** (ou que S est une surface **régulière**) si et seulement si, pour tout (u, v) de U , $M(u, v)$ est un point régulier de S

Remarque: 7 : En définissant une notion de changement de paramètre admissible (utilisant la notion de C^k difféomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}^2 sur l'ouvert U de \mathbb{R}^2 , on peut montrer que, la notion de point régulier est invariante par changement de paramétrage admissible. Ce qui justifie la définition de point régulier de S ; au lieu de ϕ .

Définition : Soient $\phi : U \rightarrow \varepsilon_3$ une nappe paramétrée de classe C^1 , $S = \phi(U)$, $M(u, v)$ un point régulier de S .

On appelle **plan tangent en $M(u, v)$ à S** le plan passant par $M(u, v)$ et dirigé par $\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right)$

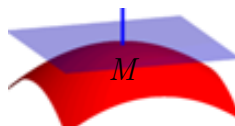


FIG2.1 plan tangent à une surface

Remarque: 8 : On peut montrer que le plan tangent en un point régulier de S est interchangé lors d'un changement de paramétrage admissible.

Exemple 2.2.1 : Montrer que le point A de paramètres $(u = 1; v = 1)$ de la surface de

$$RP \begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 + v \\ z = uv \end{cases}$$

est un point régulier de S , et former une EC du plan π tangent en A à S .

L'application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \varepsilon_3 \quad (u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 + v, uv)$ est de classe C^1 et pour tout (u, v) de \mathbb{R}^2 , on a

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u, v) = (1, 2u, v). \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u, v) = (2v, 1, u).$$

En particulier : $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(1, 1) = (1, 2, 1) \quad \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(1, 1) = (2, 1, 1). \quad \left(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u, v) \right)$
est libre et donc A est un point régulier de S

Une EC de π est :

$$M(X, Y, Z) \in \pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X - 2 & 1 & 2 \\ Y - 2 & 2 & 1 \\ Z - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow X + Y - 3Z - 1 = 0$$

Définition : Avec les hypothèses de la proposition précédente, on appelle :

- (droite) **normale en M à S** la droite orthogonale en M au plan tangent en M à S
- (droite) **tangente en M à S** toute droite passant par M et incluse dans le plan tangent en M à S

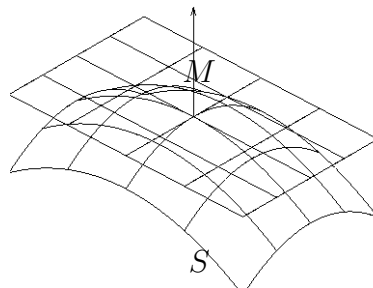


FIG2.2 Droites tangentes à une surface

2.3 Plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne

Soient V un ouvert de \mathbb{R}^3 , $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur V , S est la surface d'EC $F(x, y, z) = 0$, $A(a, b, c) \in S$.

Supposons d'abord $F'_z(A) \neq 0$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe deux intervalles ouverts v_1, v_2 de \mathbb{R} centrés en a et b respectivement et un intervalle ouvert w de \mathbb{R} centré en c tels que :

- $v_1 \times v_2 \times w \subset V$
- il existe une application unique $\varphi : v_1 \times v_2 \rightarrow w$ tel que
- $\forall (x, y) \in v_1 \times v_2, F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$
- φ est de classe C^1 sur $v_1 \times v_2$.

La surface S admet donc au voisinage de A la RP $\phi : v_1 \times v_2 \rightarrow \varepsilon_3 \quad (x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y))$

Comme $\phi'_x(x, y) = (1, 0, \varphi'_x(x, y))$ et $\phi'_y(x, y) = (0, 1, \varphi'_y(x, y))$, il est clair que $(\phi'_x(a, b), \phi'_y(a, b))$ est libre et donc S admet en A un plan tangent π et π a pour EC :

$$p(X, Y, Z) \in \pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} X - a & 1 & 0 \\ Y - b & 0 & 1 \\ Z - c & \phi'_x(a, b) & \phi'_y(a, b) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\phi'_x(a, b)(X - a) - \phi'_y(a, b)(Y - b) + (Z - c) = 0$$

comme : $\forall (x, y) \in v_1 \times v_2, F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ on obtient en dérivant par rapport à x et par rapport à y :

$$\forall (x, y) \in v_1 \times v_2, \begin{cases} F'_x(x, y, \varphi(x, y)) + F'_z(x, y, \varphi(x, y))\varphi'_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y, \varphi(x, y)) + F'_z(x, y, \varphi(x, y))\varphi'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Puisque $F'_z(A) \neq 0$ et que $(x, y) \mapsto F'_z(x, y, \varphi(x, y))$ est continue en A , on a au voisinage de $(a, b) : F'_z(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0$

Quitte à modifier v_1 et v_2 , on peut supposer :

$$\forall (x, y) \in v_1 \times v_2, F'_z(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0$$

On obtient :

$$\forall (x, y) \in v_1 \times v_2, \varphi'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))} \text{ et } \varphi'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, \varphi(x, y))}{F'_z(x, y, \varphi(x, y))}$$

En particulier $\varphi'_x(a, b) = -\frac{F'_x(A)}{F'_z(A)}$ et $\varphi'_y(a, b) = -\frac{F'_y(A)}{F'_z(A)}$. et donc en reprenant l'EC de π obtenue plus haut :

$$p(X, Y, Z) \in \pi \Leftrightarrow F'_x(A)(X - a) + F'_y(A)(Y - b) + F'_z(A)(Z - c) = 0$$

En permutant les rôles des variables, ce dernier résultat est encore valable dès que $F'_x(A) \neq 0$ ou $F'_y(A) \neq 0$

Rappelons qu'on appelle gradient de F l'application $\overrightarrow{\text{grad}F} : v \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad M \mapsto (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M))$

et résumons l'étude.

Théorème : (Plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne)

sienne)

Soient V un ouvert de \mathbb{R}^3 , $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur V , S la surface d'EC $F(x, y, z) = 0$. $A(a, b, c) \in S$.

Si $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) \neq \vec{0}$ alors A est un point régulier de S . le plan tangent en A à S est normal à $\overrightarrow{\text{grad}}F(A)$ et admet pour EC :

$$(X - a)F'_x(A) + (Y - b)F'_y(A) + (Z - c)F'_z(A) = 0.$$

Exemple 2.3.1 :

Former une EC du plan tangent en $A(1, 1, -1)$ à la surface S d'EC : $x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0$

Notons $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0$. il est clair que $F(1, 1, -1) = 0$. F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 et pour tout (x, y, z) de \mathbb{R}^3 :

$$F'_x(x, y, z) = 2xy^2 + 3x^2z^2 \quad F'_y(x, y, z) = 3x^2y^2 + 2yz^3, \quad F'_z(x, y, z) = 3y^2z^2 + 2x^3z.$$

$$\text{d'où } F'_x(A) = 5, \quad F'_y(A) = 1 \quad F'_z(A) = 1$$

et donc $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) \neq \vec{0}$

Ainsi, S admet en A un plan tangent π et une EC de π est :

$$5(X - 1) + (Y - 1) + (Z + 1) = 0.$$

ou encore $5X + Y + Z - 5 = 0$

2.4 Position d'une surface par rapport à un plan tangent

Considérons une surface S d'EC $z = \varphi(x, y)$ où $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Nous avons vu en 2) que le théorème des fonctions implicites permet sous certaines conditions de se ramener à ce cas

Soient $(a, b) \in U$, $c = \varphi(a, b)$, $A(a, b, c)$. π le plan tangent en A à S : π est dirigé par $\vec{i} + p\vec{k}$ et $\vec{j} + q\vec{k}$. où on a noté $p = \varphi'_x(a, b)$ $q = \varphi'_y(a, b)$ (notations de Monge)

Nous allons étudier la position de S par rapport à π au voisinage de A

A cet effet, pour $(x, y) \in U$, notons $h = x - a$.

$k = y - b$ et considérons le point $M(x, y, z_M)$ de S et le point $P(x, y, z_P)$ de π

On a donc : $z_M = \varphi(x, y) = \varphi(a + h, b + k)$. et d'autre part :
$$\begin{vmatrix} h & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \\ z_P - c & p & q \end{vmatrix} = 0$$
 d'où :

$$z_P = c + ph + qk$$

La position relative de S et π est donnée par le signe de $z_M - z_P$

Supposons que φ soit de classe C^2 sur U et notons $r = \varphi_{x^2}^n(a, b)$, $s = \varphi_{xy}^n(a, b)$, $t = \varphi_{x^2}^n(a, b)$

On sait que φ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de (a, b) de la forme

$$\varphi(a + h, b + k) = \varphi(a, b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + O(h^2 + k^2)((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

On déduit $z_M - z_P = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + O(h^2 + k^2)$.

Comme dans l'étude des extrémums des fonctions de deux variables réelles, on conclut :

- Si $\left\{ \begin{array}{l} s^2 - rt < 0 \\ r > 0 \end{array} \right.$ alors S est situé au voisinage de A au dessus du plan tangent π à S en A
- Si $\left\{ \begin{array}{l} s^2 - rt < 0 \\ r < 0 \end{array} \right.$ alors S est situé au voisinage de A au dessous du plan tangent π à S en A
- Si $s^2 - rt > 0$, alors, S traverse son plan tangent π en A

2.5 Intersection de 2 surfaces

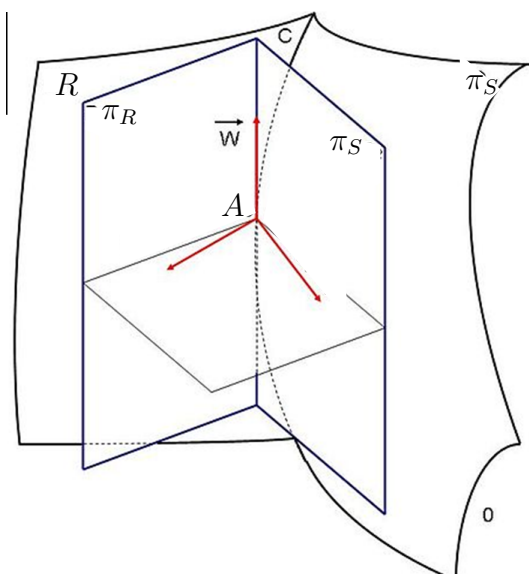


FIG2.3 intersection de deux surfaces

Soit Γ une courbe de l'espace définie comme intersection de 2 surfaces R, S . Supposons que R et S admettent des EC :

$$R : F(c, y, z) = 0 \text{ et } S : G(x, y, z) = 0$$

où $F, G : V \rightarrow \mathbb{R}$. sont des applications de classe C^1 sur un ouvert V de \mathbb{R}^3

Soit $A(a, b, c) \in \Gamma$. Supposons que la famille $(\vec{grad}F(A); \vec{grad}G(A))$ soit libre. Alors R et S admettent en A des plans tangents notés respectivement π_R, π_S et on a :

Nous allons montrer que Γ admet en A une tangente T . et que : $T = \pi_R \cap \pi_S$.

par hypothèse : $rg \begin{pmatrix} F'_x(A) & F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_x(A) & G'_y(A) & G'_z(A) \end{pmatrix} = 2$

Quitte à permuter les rôles de x, y et z , on peut donc supposer $\begin{vmatrix} F'_y(A) & F'_z(A) \\ G'_y(A) & G'_z(A) \end{vmatrix} \neq 0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un intervalle ouvert v de \mathbb{R} centré en a et des intervalles w_1, w_2 ouvert de \mathbb{R} centrés en b et c respectivement tels que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet w_1 \times w_2 \times v \subset V \\ \bullet \text{il existe un couple d'applications } \varphi : v \longrightarrow w_1, \quad \psi : v \longrightarrow w_2 \text{ tels que :} \\ \forall x \in v; \begin{cases} F(x, \varphi(x), \psi(y)) = 0 \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases} \\ \bullet \varphi, \psi \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } v \end{array} \right.$$

Autrement dit. Γ admet au voisinage de A la RP :

$$x = x, \quad y = \varphi(x) \quad z = \psi(x).$$

Un vecteur tangent \vec{V} en A à Γ a donc pour coordonnées $(1, \varphi'(a), \psi'(a))$ et est non nul.

Enfin :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}F(A)} = F'_x(A) + \varphi'(a)F'_y(A) = \left(\frac{d}{dx} F(x, \varphi(x), \psi(x)) \right)(a) = 0$$

donc $\vec{V} \in \pi_R$. et de même $\vec{V} \in \pi_S$

Résumons l'étude.

Théorème : Soient R, S deux surfaces. $\Gamma = R \cap S, A \in \Gamma$.

On suppose que A est un point régulier de R et de S . et que les plans tangents π_R, π_S en A à R, S sont distincts. Alors A est un point régulier de Γ et tangente en A à Γ est $\pi_R \cap \pi_S$.

Exemple 2.5.1 : Déterminer un vecteur tangent en $A(-2, -1, 3)$ à la courbe $\Gamma : \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ xy + yz + zx = -7 \end{cases}$

Remarquer d'abord : $A \in \Gamma$

Avec la notation de l'étude précédente :

$$\bullet F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 18, \quad \overrightarrow{\text{grad}F}(x, y, z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2).$$

$$\overrightarrow{\text{grad}F}(A) = (12, 3, 3)$$

$$\bullet G(x, y, z) = xy + yz + zx + 7 \quad \overrightarrow{\text{grad}G}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y).$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}G(A) = (2, 1, -3)$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{grad}}F(A) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}G(A) = (-12, 42, 6) \neq \vec{0}$$

D'après le théorème précédent. Γ admet une tangente en A et celle-ci est dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}}F(A) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}G(A)$. donc par : $-2\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}$

2.6 Surface de révolution

Dans cette partie, on va considérer les courbes en dimensions 3 pour leur étude qui nous permettra de faire l'étude dans le plan.

Définition : On appelle **Surface de révolution** la surface S obtenue en faisant tourner une courbe Γ autour d'une droite Δ .

On dit que Δ est l'**axe** de S .

On appelle **méridienne** (ou **demi-méridienne**) de S l'intersection de S avec le demi-plan limité par Δ .

On appelle **parallèle** de S le cercle de S d'axe Δ et rencontrant Γ

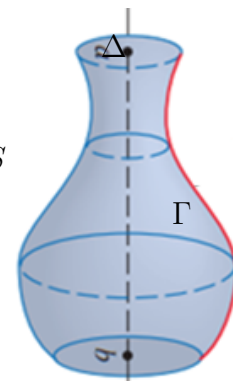


FIG2.4 Surface de révolution

- Remarque: 9** :
1. Une surface de révolution à un axe unique
 2. Avec les notations de la définition, S est la réunion de ses parallèles.

2.7 Surfaces Usuelles

2.7.1 Cylindre

Définition :

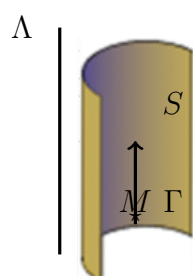


FIG3.1 cylindre

Soient Λ une direction de droites et Γ une courbe. On appelle **Cylindre** ou (**Surface cylindrique**) de directrice Γ et de **direction des génératrices** Λ la réunion S des droites de ε_3 de direction Λ et rencontrant Γ .

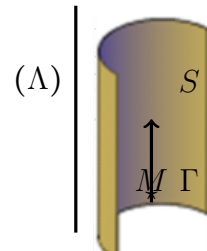
Pour tout point M du cylindre S , on appelle génératrice de M (sur S) la droite passant par M et de direction Λ .

On appelle section droite du cylindre S l'intersection de S avec un plan orthogonal à Λ

Soient \vec{u} un vecteur dirigeant Λ et $m : I \rightarrow \varepsilon_3 \quad t \mapsto m(t)$ une RP de Γ

Alors une RP du cylindre S de directrice Γ et de direction des génératrices Λ est :

$$I \times \mathbb{R} \rightarrow \varepsilon_3 \quad (t, \lambda) \mapsto m(t) + \lambda \vec{u}$$



Exemple 2.7.1 :

Une représentation paramétrique du cylindre de directrice $\Gamma(x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R})$

et de génératrice parallèle à $\vec{u}(2, 1, -3)$ est :

$$\begin{cases} x = t + 2\lambda \\ y = t^2 + \lambda, (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \\ z = t^3 - 3\lambda \end{cases}$$

Soit S un cylindre de directrice Γ . de direction des génératrices Λ . Considérons un repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que \vec{k} dirige Λ . Le cylindre S admet dans \mathbb{R}' , une EC de la forme $f(X, Y) = 0$. Dans le repère initial \mathcal{R} , S admet donc une EC de la forme $f(P, Q) = 0$ où P et Q sont des « (premiers membres d'EC) de plan ». D'où la règle pratique :

On reconnaît qu'une surface S est un cylindre lorsqu'elle admet une EC de la forme $f(P, Q) = 0$ où P et Q sont des plans sécants. De plus, dans ces conditions, les génératrices de S sont parallèles à la droite d'EC

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.7.2 : La surface S d'EC : $e^{x^2+y^2+z^2} - (x+z)e^{-2xz} = 0$ est un cylindre puisqu'en notant $p = x + z$ et $Q = y$, S admet pour EC : $e^{P^2+Q^2} - P = 0$.

Les génératrices de S sont parallèles à $\vec{i} - \vec{k}$;

Proposition 11 : Le plan tangent en un point régulier d'un cylindre contient la génératrice de ce point.

Preuve : Le cylindre S admet une RP

$$\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \varepsilon_3 \quad (t; \lambda) \mapsto m(t) + \lambda \vec{u} \quad \text{où } m : I \rightarrow \mathbb{R}$$

est une RP de Γ de classe C^1 et \vec{u} dirige la génératrice

Comme $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \vec{u}$, le plan tangent en $M(t, \lambda)$ à

S contient la droite passant par M et dirigé par \vec{u} ,
c'est à dire la génératrice de M .

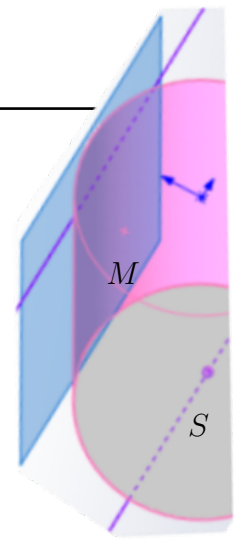


FIG3.2 Plan tangent à un un cylindre

Remarque: 10 : Soit S un cylindre de directrice Γ de direction des génératrices Λ . Supposons que Γ soit plane et régulière, et que Λ ne soit pas parallèle au plan P de Γ .

En notant $m : I \rightarrow \varepsilon_3$ une RP de Γ , Une RP de S est : $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \varepsilon_3 \quad (t; \lambda) \mapsto m(t) + \lambda \vec{u}$ alors ϕ est de classe C^1 et pour tout (t, λ) de $I \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \lambda) = \overrightarrow{m'(t)}. \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \vec{u}.$$

Par hypothèse, $\overrightarrow{m'(t)} \neq \vec{0}, \overrightarrow{m'(t)} \in \vec{P}, \vec{u} \in \vec{P}$.

Il en résulte que $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \lambda); \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right)$ est libre et ainsi, tout point de S est régulier.

De plus, le plan tangent en M à S est le plan passant par M et contenant la génératrice de M et la tangente en m à Γ .

2.7.1.1 Cylindre de Révolution

Définition :

Un cylindre de révolution est un solide délimité par deux disques superposables et parallèles appelées les bases du prisme
La hauteur du cylindre est la distance entre les centres des deux disques.
l'axe du cylindre est la droite passant les centres des deux disques

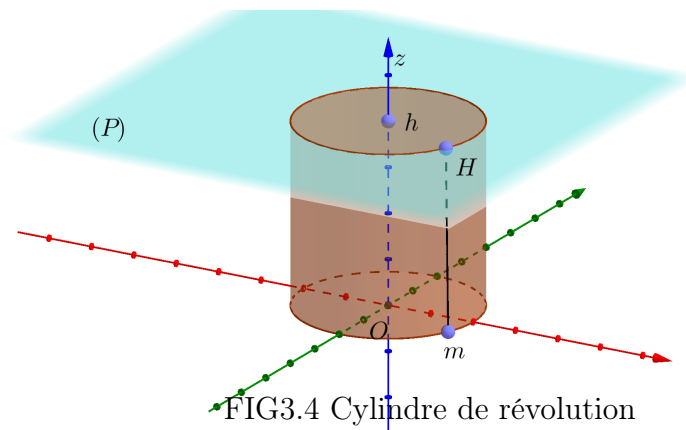


FIG3.4 Cylindre de révolution

2.7.1.2 Volume d'un cylindre

Le volume d'un cylindre de révolution est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Exemple 2.7.3 :

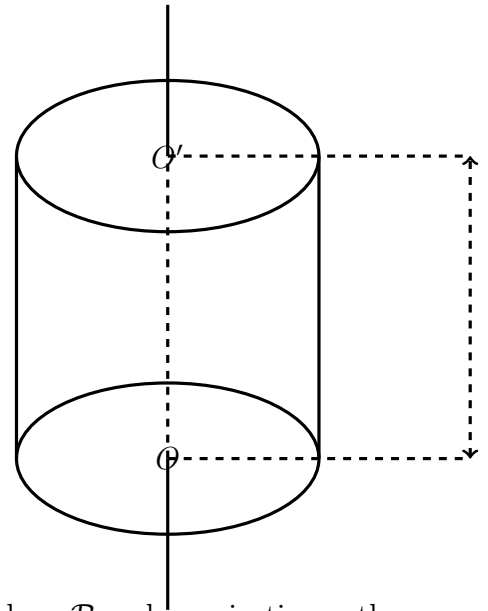
calculer le volume du cylindre ci dessous :

L'aire de la base est l'aire du disque de rayon 1,5cm

$$\mathcal{R} = \pi r^2 \approx 3,14 \times 1,5^2 \approx 7,065 \text{cm}^2$$

$$\mathcal{V} \approx 3,5 \times 7,065 \approx 24,73 \text{cm}^3$$

Le volume de ce cylindre est d'environ 24,73cm³



2.7.1.3 Coordonnées cylindriques

Soient $M \in \varepsilon_3 M \notin z'z$, (x, y, z) les coordonnées de M dans \mathcal{R} m la projection orthogonale de M sur xOy , $[\theta, \rho]$ un système de coordonnées polaire de m

On dit que, (θ, ρ, z) est un **système de coordonnées cylindriques** de M . Ainsi,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

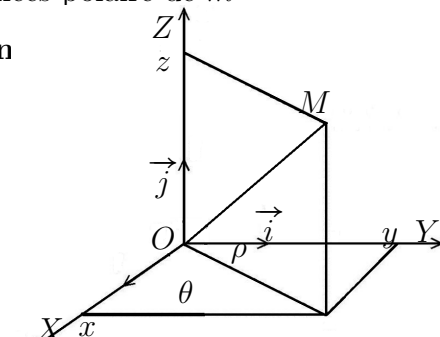


FIG3.6 Coordonnées cylindriques

On convient que les points de $z'z$ correspondent aux système de coordonnées cylindrique $(\theta, 0, z)$ (θ n'est pas clairement défini).

2.7.2 Cônes

Définition :

Soient Ω un point de ε_3 , Γ une courbe.

On appelle **Cône S de sommet Ω et de directrice Γ** la réunion des droites passant par Ω et rencontrant Γ

Pour tout point M du cône S , sauf Ω , on appelle **génératrice** de M (sur S) la droite (Ω, M)

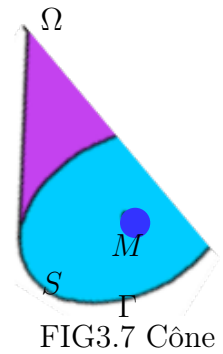


FIG3.7 Cône

Remarque: 11 :

1. On impose souvent la condition $\Omega \notin \Gamma$, ou si Γ est plane dans un plan P , $\Omega \notin P$.

2. le sommet Ω du cône n'a pas de génératrice. Soit $m : I \rightarrow \varepsilon_3$ une RP de Γ
 $t \mapsto m(t)$

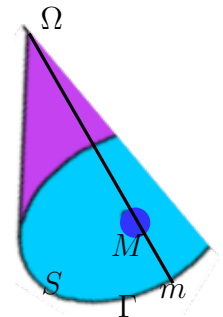
Alors, une RP du cône S de sommet Ω et de directrice Γ est :

$$\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \varepsilon_3$$

$$(t, \lambda) \mapsto \overrightarrow{\Omega + \lambda \Omega m(t)} \quad \text{c'est à dire en notant}$$

$$M(t, \lambda) \text{ le point courant de } S : \overrightarrow{\Omega m(t, \lambda)} = \lambda \overrightarrow{\Omega m(t)}$$

Le sommet Ω est obtenu pour $\lambda = 0$ (et t quelconque)



Exemple 2.7.4 :

Le cône de sommet $\Omega(1, -1, 1)$ et de directrice $\Gamma(x = t, y = t^2, z = t^3; t \in \mathbb{R})$ admet pour RP

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(t - 1) \\ y = -1 + \lambda(t^2 + 1), & (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + \lambda(t^3 + 1) \end{cases}$$

Soit S un cône de sommet Ω , de directrice Γ . On suppose que Γ est plane et que Ω n'est pas dans le(un) plan P de Γ . Il existe un repère orthonormé directe $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que le plan P admette pour EC dans \mathcal{R}' :

$$Z = h \quad (h \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\text{La courbe } \Gamma \text{ admet un SEC : } \begin{cases} f(X, Y) = 0 \\ Z = h \end{cases}$$

On a pour tout point $M(X, Y, Z) \in \varepsilon_3$ tel que $Z \neq 0$:

$$\begin{aligned} M \in S &\Leftrightarrow \left(\exists m \in \Gamma, \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega m} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\exists (X_1, Y_1, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*; \quad X = \lambda X_1, \quad Y = \lambda Y_1 \quad Z = \lambda h, \quad f(X_1, Y_1) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{hX}{Z}, \frac{hY}{Z}\right) = 0 \end{aligned}$$

D'où la règle pratique :

On reconnaît qu'une surface est un cône lorsqu'elle admet une EC de la forme $f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$ où P, Q, R sont des plan (sécants en un seul point) de plus, dans ces conditions le sommet Ω de S est défini par : $P = Q = R = 0$.

Exemple 2.7.5 :

Proposition 12 : *Le plan tangent en un point régulier d'un cône contient la génératrice de ce point.*

Preuve :

le cône S admet pour RP

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \varepsilon_3 \\ (t, \lambda) &\longmapsto \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega m(t)} \end{aligned}$$

où $m : I \longrightarrow \varepsilon_3$ est une RP de Γ de classe C^1 et Ω le sommet de S

Comme $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \lambda) = \overrightarrow{\Omega m(t)}$ et que $\overrightarrow{\Omega m(t)}$ dirige la génératrice de

M (On supposera $\Omega \notin \Gamma$) le plan tangent en M à S contient la génératrice de M .

Remarque: 12 :

1. Soit un cône de sommet Ω , de directrice Γ

Supposons que Γ soit plane et régulière et que Ω ne soit pas dans le plan P de Γ .

En notant $m : I \rightarrow \varepsilon_3$ une RP de Γ , une RP de S est :

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \varepsilon_3 \\ (t, \lambda) &\mapsto \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega m(t)} \end{aligned}$$

Alors ϕ est de classe C^1 et pour tout (t, λ) de $I \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \lambda) = \overrightarrow{\lambda m'(t)} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \overrightarrow{\Omega m(t)}$$

Par hypothèse : $\lambda \neq 0$, $\overrightarrow{m'(t)} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{m'(t)} \in \vec{P}$, $\overrightarrow{\Omega m(t)} \notin \vec{P}$.

Il en résulte que $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \lambda), \frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right)$ est libre, et ainsi, tout point de S sauf Ω est régulier

De plus, le plan tangent en $M(\neq \Omega)$ à S passant par M et contenant la génératrice de M et la tangente en m à Γ

2. Le sommet Ω d'un cône S est un point non régulier de S

Exemple 2.7.6 :

Montrons $S : x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3 = 0$ est un cône et trouver son sommet Ω

En notant $F(x, y, z)$, le premier membre de l'équation donné, on cherche un point $\Omega(x, y, z)$ de S non régulier, donc en lequel $\overrightarrow{\text{grad}F}$ s'annule :

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z) = 0 \\ F'_y(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \\ -x + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

On vérifie que le point $\Omega(1, -2, 1)$ est sur S

Prenons comme nouveau repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

les formules de changements de variables sont : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \\ z = 1 \end{cases}$ et en reportant, on déduit

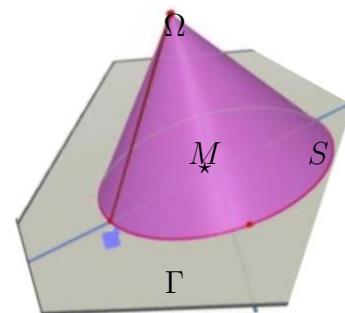


FIG3.8 Plan tangent à un cône

Une EC de S dans $\mathcal{R}' : (X + 1)^2 + (X + 1)(Y - 2) - (X + 1)(Z + 1) + (Y - 2)^2 + (Z + 1)^2 + (X + 1) + 3(Y - 2) - (Z + 1) + 3 = 0$ C'est-à-dire : $X^2 + XY - XZ + Y^2 + Z^2 = 0$.

Sur cette dernière équation, on voit que, si un point $m(X, Y, Z)$. distinct de Ω est sur S alors, la droite (Ωm) est incluse dans S

Finalement, S est un cône de sommet $\Omega(1, -2, 1)$

2.7.3 La sphère et le cercle dans l'espace

L'espace affine euclidien(orienté) ε_3 est éventuellement muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Définition : Soient $\Omega \in \varepsilon_3$, $R \in \mathbb{R}_+$

On appelle **sphère de centre Ω et de rayon R** . et on note ici $S(\Omega, R)$. la partie de ε_3 définie par :

$$S(\Omega, R) = \{M \in \varepsilon_3; \Omega M = R\}$$

On définit aussi la **boule ouverte** $B(\Omega, R)$ et la **boule fermée** $B'(\Omega, R)$ de centre Ω et de rayon R :

$$B(\Omega, R) = \{M \in \varepsilon_3, \Omega M < R\}$$

$$B'(\Omega, R) = \{M \in \varepsilon_3, \Omega M \leq R\}$$

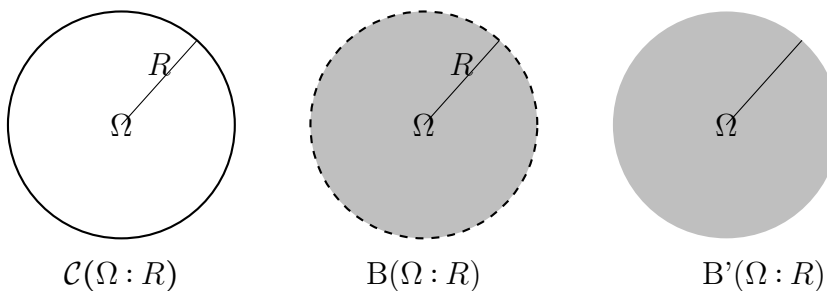


FIG3.11 la sphère

Remarque: 13 :

1) Si $R = 0$, alors $S(\Omega, R) = \{\Omega\}$: on dit que $\{\Omega\}$ est **une sphère point**

2) On a pour tous $\Omega, \Omega' \in \varepsilon_3$ et tous $R, R' \in \mathbb{R}_+$:

$$S(\Omega, R) = S(\Omega', R') \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ R = R' \end{cases}$$

Ainsi, une sphère détermine de manière unique son centre et son rayon.

$$\mathbf{3)} \quad B(\Omega, R) \cup S(\Omega, R) = B'(\Omega, R) \text{ et } B(\Omega, R) \cap S(\Omega, R) =$$

Les propositions suivantes sont immédiates.

Proposition 13 : (*Equation cartésienne d'une sphère*)

Soient $\Omega(a, b, c) \in \varepsilon_3, R \in \mathbb{R}_+$: la sphère $S(\Omega, R)$ admet pour EC :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Remarque: 14 :

Avec les notations ci dessus,

$$\begin{aligned} B(\Omega, R) &= \{M(x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < 0\} \\ B'(\Omega, R) &= \{M(x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq 0\} \end{aligned}$$

Proposition 14 :

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^4$.

L'EC $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$ représente :

- La sphère de centre $\Omega(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$ si $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$
- sinon.

On peut remarquer les cas particuliers suivants :

- Sphère centrées en O : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- Sphère passant par O : $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z = 0$

Proposition 15 : (*représentation paramétrique d'une sphère*)

Soient $\Omega(a, b, c) \in \varepsilon_3, R \in \mathbb{R}$ La sphère $S(\Omega : R)$ admet la RP :

$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta \cos \varphi \\ y = b + R \sin \theta \cos \varphi \\ z = c + R \sin \varphi \end{cases} \cdot (\theta, \varphi) \in [-\pi; \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Proposition 16 :

Soient $\Omega \in \varepsilon_3, R \in \mathbb{R}_+^*$

$M \in S(\Omega, R)$.

La sphère $S(\Omega, R)$ admet en M un plan tangent T et on a :

$$(\Omega M) \perp T.$$

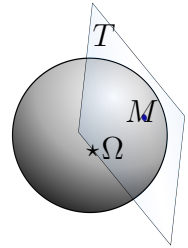


FIG3.12 plan tangent à une sphère

Proposition 17 :

Soit S une sphère d'EC $x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$. Le plan tangent en M_0 à S a pour EC :

$$x_0 X + y_0 Y + z_0 Z + \alpha(x_0 + X) + \beta(y_0 + Y) + \gamma(z_0 + Z) + \delta = 0 \text{ dite } \mathbf{Obtenue \text{ par } \text{dédoublément.}}$$

Preuve :

La sphère S admet pour EC : $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 + (z + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$ donc admet pour RP :

$$\begin{aligned} x &= -\alpha + R \cos \theta \cos \varphi, & y &= -\beta + R \sin \theta \cos \varphi, & z &= -\gamma + R \sin \theta \sin \varphi \\ (\theta, \varphi) &\in [-\pi, \pi] \times \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], & R &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta} \end{aligned}$$

(on suppose $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$)

Pour $M_0(\theta, \varphi) \in S$, le plan tangent en M_0 à S admet pour EC :

$$R \cos \theta \cos \varphi (X + \alpha - R \cos \theta \cos \varphi) + R \sin \theta \cos \varphi (Y + \beta - R \sin \theta \cos \varphi) + R \sin \theta \sin \varphi (Z + \gamma - R \sin \theta \sin \varphi) = 0$$

C'est à dire :

$$(R \cos \theta \cos \varphi) X + (R \sin \theta \cos \varphi) Y + (R \sin \theta \sin \varphi) Z - (x_0 + \alpha)x_0 - (y_0 + \beta)y_0 - (z_0 + \gamma)z_0 = 0$$

ou encore :

$$(x_0 + \alpha)X + (y_0 + \beta)Y + (z_0 + \gamma)Z + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta = 0 \text{ ce qui est bien l'EC proposée.}$$

Proposition 18 : Soient $\Omega \in \varepsilon_3, R \in \mathbb{R}_+^*$. Toute droite passant par Ω coupe $S(\Omega; R)$ en deux points exactement A, B et Ω est le milieu de $[AB]$.

La droite (AB) (ou le segment $[AB]$) est appelée un diamètre de la sphère $S(\Omega; R)$.

Proposition 19 : Soient $A, B \in \varepsilon_3$ tels que $A \neq B$. La sphère de diamètre AB est

$$\{M \in \varepsilon_3 \ ; \ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}.$$

Définition : On appelle **Cercle d'axe D , de centre Ω , de rayon R** le cercle situé dans le plan passant par Ω et orthogonal à D . de centre Ω et de rayon R .

Proposition 20 : (positions relative d'un plan et d'une sphère)

Soient P un plan et $S = S(\Omega, R)$ une sphère.

Si $d(\Omega; P) > R$ alors $P \cap S = \emptyset$ Si $d(\Omega; P) = R$ alors P est tangent à S et $P \cap S$ est un singleton Si $d(\Omega; P) < R$, alors $P \cap S$ est un cercle

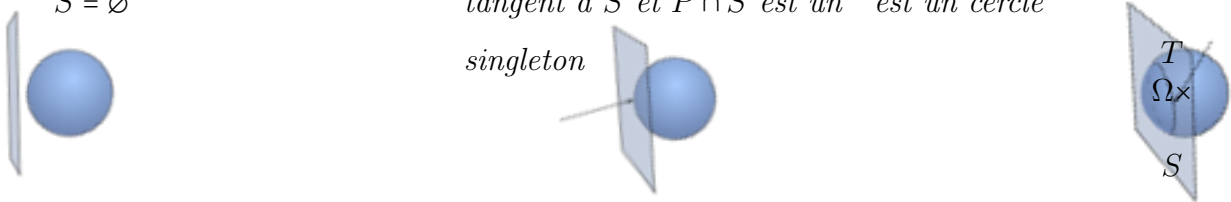


FIG3.13 Positions relatives d'un plan et une sphère

Réciproquement, tout le cercle C peut être écrit comme intersection d'au moins une façon d'un plan et d'une sphère, d'où un système d'équations cartésiennes C de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha x + 2\gamma z + \delta = 0 \end{cases}$$

Proposition 21 : La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.

Preuve :

Par changement de repère orthogonale, on peut se ramener à l'étude de la projection orthogonale sur xOy d'un cercle C . intersection d'un plan $P : ax + c(z - h) = 0$ et d'une sphère $S : x^2 + y^2 + (z - h)^2 = R^2$.

On peut supposer $c \neq 0$. le cas $c = 0$ correspondant à une projection orthogonale réduite à un segment considéré comme une ellipse.

Un point $M(x, y)$ du plan xOy est sur la projection orthogonale Γ de C sur xOy si et seulement si :

$$\exists z \in \mathbb{R} \begin{cases} ax + C(z - h) = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - h)^2 = R^2 \end{cases}$$

Ainsi, Γ admet l'EC $x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}, x\right)^2 = R^2$ ou encore $\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right)x^2 + y^2 = R^2$ donc Γ est une ellipse.

Coordonnées sphériques

Soient $M \in \varepsilon_3$, ($M \neq 0$), $M(x, y, z)$ dans \mathcal{R} , m la projection orthogonale de M sur xOy θ l'angle polaire de m dans xOy .

$$\varphi = \text{mes}(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ si } M \in [Oz) \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ si } M \in [Oz')$$

On dit que $[\theta, \rho, \varphi]$ est un système de coordonnées sphériques

$$\text{de } M. \text{ Ainsi : } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

on convient que O correspond au système de coordonnées sphériques

$(\theta, 0, \varphi)$ (θ, φ ne sont pas clairement définis)

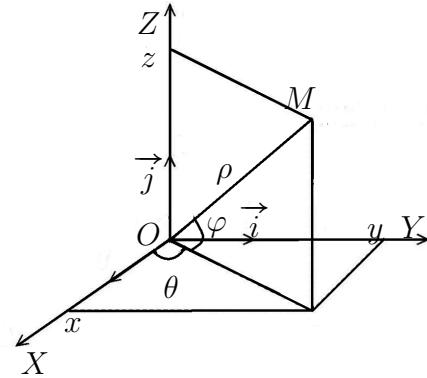


FIG3.14 Coordonnées sphériques

APPORT PÉDAGOGIQUE

3.1 Apport sur le plan didactique et pédagogique

Des recherches effectués depuis l'attribution du mémoire et sa rédaction, sont bénéfiques sur le plan didactique pour le candidat en ce sens qu'il :

→ se familiarise avec les logiciels de saisie adaptés aux mathématiques (LATEX) pour la production d'un document scientifique, ce qui lui permettra de les intégrer dans sa pratique enseignante, tant dans l'élaboration de son cours que dans la constitution de ses épreuves

→ se familiarise avec les logiciels de réalisation des figures géométriques en mathématiques (géogebra, Sinéquanon, Encarta maths) qu'il pourra intégrer dans sa pratique enseignante.

L'apport sur le plan pédagogique quand à lui :

Les cours ayant trait à la géométrie dans le plan et espace sont dispensées dans toutes les classes du secondaires ; Il convient au futur enseignant de Lycée de consolider ses connaissances sur quelques figures qu'il aura la charge de présenter, c'est pourquoi un accent particulier est mis sur les figures du plan et de l'espace tels que les coniques, les cylindres, les sphères, les cônes et les cercles (enseignés dans certaines classes du secondaires), les surfaces, surfaces de révolutions et sphères.

3.2 Courbes, surfaces de révolutions et sphères

Depuis l'école primaire, on a introduit la notion de courbes, surfaces de révolutions et sphères définies à partir de la géométrie du plan et de l'espace. L'étude de courbes, surfaces de révolutions et sphères est souvent demandé aux enfants des classes du secondaire. L'accent mis sur cette partie de la géométrie permet de comprendre au niveau de

l'enseignant par exemple, par quelle transformation quitte-t'on d'un solide usuel(cône) pour obtenir un cylindre, un cercle, une conique, ou bien une sphère. Et comme le dit Brousseau, la géométrie offre au professeur la possibilité de provoquer chez leurs élèves, une activité reconnue comme authentique par les mathématiciens eux-mêmes. C'est-à-dire par les méthodes de démonstrations, de raisonnement et mêmes les résultats établis.

3.3 Développement d'un solide

Définition : Le développement d'un solide est la figure plane constitué de l'ensemble des faces de ce solide.

3.3.1 Réalisation du patron d'un cylindre de révolution

Tracer le patron d'un cylindre dont la hauteur est 3,5cm et de rayon de la base est 1,5cm.

Méthode :

1. On calcule le périmètre du disque $p = 2 \times \pi \times R \approx 2 \times 3,14 \times 1,5 \approx 9,42cm$
2. On trace un rectangle dont la longueur est celle de ce périmètre soit 9,42cm et dont la largeur est égale à la hauteur du cylindre soit 3,5cm
3. On trace deux points H et H' de part et d'autre du rectangle puis on trace deux points O et O' (les centres des deux disques) tels que : $OH=OH'=1,5cm$ (le rayon du disque) et tel que $[OH]$ et $[OH']$ soient perpendiculaires au côté du rectangle
4. On trace les deux disques de rayon 1,5cm de part et d'autre du rectangle de centre O et O'

Patron du cylindre :

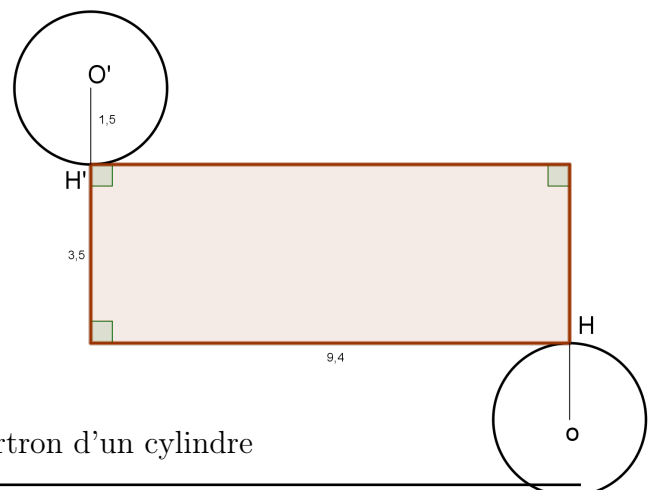
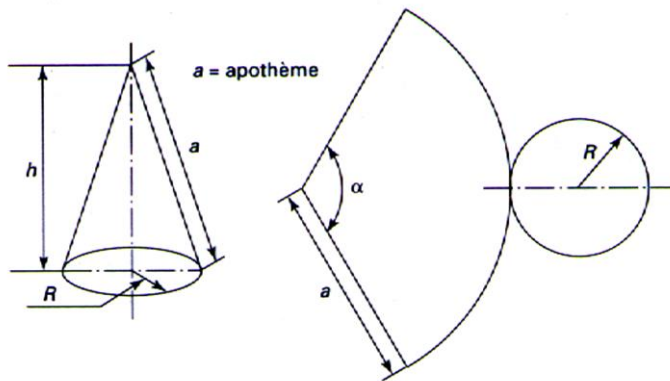


FIG3.5 patron d'un cylindre

3.3.2 Réalisation du patron d'un cône



$$a = \sqrt{R^2 + h^2}, \alpha = \frac{2\pi R}{a} \text{ (rad)}.$$

3.4 Volumes et aires latérales

Nous admettons les formules suivantes dans lesquels \mathcal{A}_l et \mathcal{A}_t désignent respectivement l'aire latérale et l'aire totale et \mathcal{V} le volume des solides suivants :

- a) Cylindre de révolution de hauteur h et de rayon de bases R :

$$\mathcal{A}_l = 2\pi R h, \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\pi R^2, \mathcal{V} = \pi R^2 h$$

- b) Cône de révolution de hauteur h , d'apothème a et de rayon de base R ($a = \sqrt{R^2 + h^2}$) :

$$\mathcal{A}_l = \pi R a, \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \pi R^2, \mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

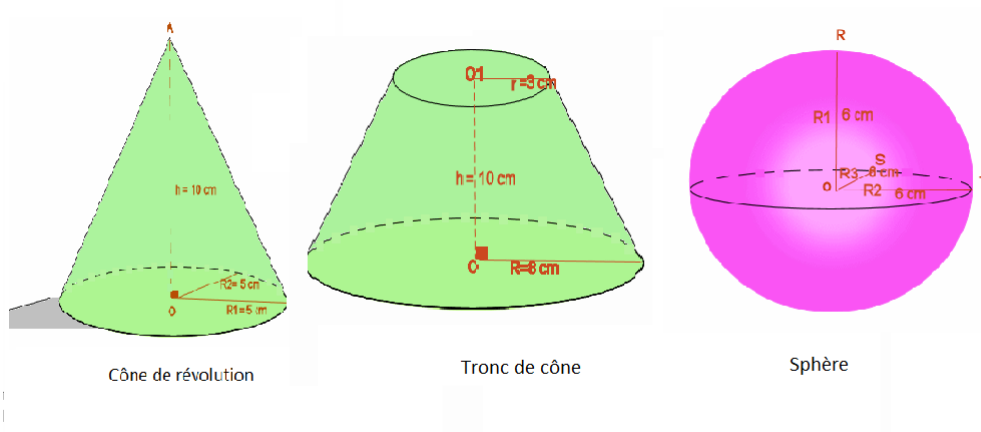
- c) Tronc cône de révolution de hauteur h , d'apothème a et de rayons de bases R et R' :

$$\mathcal{A}_l = \pi a(R + R'), \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \pi R^2 + \pi R'^2, \mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR')$$

- d) Sphère de rayon R :

$$\mathcal{A}_l = 4\pi R^2, \mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Applications :

**Exemple 3.4.1 (Le cône de révolution) :**

Il possède 1 face courbe et une face plane circulaire.

$$V = \frac{1}{3} \pi \times R \times R \times h \text{ (on utilisera } \pi \approx 3,14 \text{).}$$

Dans notre cas où $R = 5 \text{ cm}$ et $h = 10 \text{ cm}$.

$$V = \frac{1}{3} \times 3,14 \times 5 \times 5 \times 10 \approx 262 \text{ cm}^3 \text{ (en unités de volume)}.$$

Exemple 3.4.2 (Tronc de cône) :

C'est un cône de révolution auquel on a enlevé la partie supérieure (contenant le sommet), coupée par un plan parallèle à la base.

Il possède une face courbe et deux faces circulaires(une grande base de rayon R et une petite base de rayon r).

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + R'^2 + RR').$$

Dans notre cas où $R = 8 \text{ cm}$, $R' = 3 \text{ cm}$ et $h = 10 \text{ cm}$:

$$V \approx \frac{10 \times 3,14}{3} \times (8^2 + 3^2 + 8 \times 3) \approx 1015 \text{ cm}^3$$

Exemple 3.4.3 (Sphère) :

Une seule face courbe.

Tous les rayons sont égaux.

$$A = 4\pi \times R \times R \text{ et } V = \frac{4}{3} \pi \times R^3$$

Conclusion - Perspectives

Dans tous ce travail, il était question de montrer, d'étudier les courbes, surfaces de révolutions et sphères dans le cadre de la géométrie affine euclidienne en dimension 2 et 3. Pour cela, on a :

Premièrement présentés les courbes en dimension deux tels que le cercle, les coniques.

Deuxièmement les surfaces en dimension trois tels que : le cylindre, les cônes et la sphère.

On a ainsi établi que, pour la construction de toutes ces figures il faut absolument un axe de révolution. A la quelle il faut tourner afin d'obtenir un solide cherché selon son choix.

Pour les constructions et autres représentations, nous avons utilisés les logiciels tels que : GEOGEBRA, SINEQUANON, LATEX et ENCARTA MATHS. Mais dans tout ce travail, nous nous sommes limités à l'étude des courbes, surfaces de révolutions et sphères. De la géométrie du plan et de l'espace.

Une perspective serait de savoir si à partir de deux axes de révolutions d'un solide usuel, tel le cylindre on peut obtenir une surface usuelle autre que : le cône, la sphère et bien d'autres encore.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROUSSEAU G.(2000) *Les propriétés géométriques de la géométrie élémentaire, L'étude de l'espace et de la géométrie : 67-83. Grèce, Rethymon.*
- [2] DELAGRAVE (1997) *Maths BEP industriel, seconde professionnelle et Terminale*, ACL- éditions 223 pages.
- [3] C. GAUTIER et C. THIERCÉ (1986) *Géométrie Première S et E*, Nouvelle édition, Paris, Hachette, 241 pages.
- [4] Jean Marie MONIER (Juin 2001) *Géométrie : Cours et 400 exercices corrigés, 1^{re} et 2^e années MP, PSI, PC, PT*, 2^e édition, Paris, Dunod, 457 pages.
- [5] Josué NJONGA et Al (2010) *Annales de mathématiques Classe de 3^{ème}*, AFRE-DIT, Montligeon, Hachette, 204 pages.
- [6] Saliou Touré et Al (1997) *CIAM Mathématiques : Guide pédagogique 3^{ème}*, France, EDICEF, 128 pages.
- [7] Saliou Touré et Al (1999) *CIAM Mathématiques Terminale C*, France, EDICEF, 351 pages.