REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES PAR ORIGAMI

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

NGANMENI KONGUEP Hervé Battiston
Licencié en mathématiques

Sous la direction
ANDJIGA Nicolas Gabriel
Professeur

Année Académique
2015-2016

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à tous les membres de ma famille et en particulier à :

☞ Ma mère **DOMBOU Jeanne**

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier du profond de mon cœur :

☞ Le Seigneur Dieu tout puissant qui m'a donné la force et le courage de faire ce travail ;

☞ mon encadreur Pr.ANDJIGA Nicolas Gabriel qui, malgré ses multiples occupations, a bien voulu consacrer une bonne partie de son temps à la réalisation de ce mémoire ;

☞ tous les enseignants du département de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé 1 ;

☞ les membres du jury qui, malgré leurs nombreuses occupations ont trouvés le temps pour examiner mon travail ;

☞ les camarades de classe de la $55^{\text{ème}}$ promotion pour leurs soutiens moral durant la formation ;

☞ monsieur NZEMO Isaac qui m'a accompagné dès mes premiers pas à l'école et ne m'a jamais lâché depuis ce temps là ;

☞ madame POUEME Hélène qui n'a cessé de me soutenir aussi bien financièrement que moralement durant ces deux dernières années de formation et m'a permis de joindre les deux bouts ;

☞ feue mon oncle papa KEPSEU Jean Daniel pour son soutien pendant tout mon cursus secondaire ;

☞ tous mes frères, sœur, cousins, cousines, oncles et tantes qui m'ont apporté un soutien et ont toujours trouvé les mots justes pour me permettre de maintenir le cap ;

☞ tous les parents, amis, et tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leur soutien tant moral que financier.

Déclaration sur l'honneur

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dument mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

NGANMENI KONGUEP Hervé Battiston

Table des matières

RÉSUMÉ

Ce travail est consacré à la construction géométrique par Origami. Après un bref rappel sur les notions du secondaire et la formalisation des origamis, nous montrerons tout d'abord comment aborder certaines notions du secondaire à partir des origamis, ensuite nous essayerons d'expliquer comment donner du sens aux constructions géométriques en utilisant l'origami et enfin, nous terminerons par montrer l'utilité de l'origami sur le plan didactique et pédagogique.

Mots clés : Construction, plier, pliage, papier, origami.

ABSTRACT

This work is consecrated to geométric construction by origami.
After a brief reminder on the notion of the secondary level and the formal implementation of origamis, we will firt of all show how tackle certain notions on the secondary level through origamis, furthermore we will try to explain how to make geometric construction sensible by using origami and finaly, we will end by showing the usefulnees of origami on didactic and pedagogie based.

Key words : Construction, fold, folding, paper, origami.

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Le terme origami vient du verbe japonais <<oru>> qui signifie **papier** et du substantif <<kami>> qui signifie **plier**. Ainsi, l'origami peut se définir comme l'art de plier du papier. Dès lors, nous sommes en droit de nous demander : quels sont les aspects utiles de l'origami pour l'enseignement au secondaire ? Comment utiliser l'origami sur le plan didactique et pédagogique ? Nous allons tenter de répondre à ces deux questions en examinant dans un premier temps les différentes notions du secondaire à l'aide des origamis, puis dans un second temps, nous allons prouver l'utilité de l'origami sur le plan didactique et pédagogique, et nous terminerons en essayant de justifier que l'origami peut être utilisé comme une véritable ressource mathématique.

Chapitre Un

PRÉLIMINAIRE

Rappels et formalisation des origamis.

1.1 Rappels

Dans tout ce qui suit, la distance entre deux points A et B du plan sera notée AB et le vecteur formé par les points A et B sera noté $\overrightarrow{AB}$.

1.1.1 Milieu d'un segment

Soient A, B et M trois points d'un plan.

Définition 1.1 :

On dit que le point M est le milieu du segment $[AB]$ lorsque A, B et M sont alignés et $AM = MB$.

Proposition 1.1 :

Le point M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$.

1.1.2 Médiatrice d'un segment.

Soient A, B et M trois points d'un plan.

Définition 1.2 :

Le point M est ***équidistant*** *des points A et B lorsque $AM = MB$.*

Proposition 1.2 :

Les deux définitions ci-dessous sont équivalentes :

– ***La médiatrice*** *d'un segment est la droite qui passe perpendiculairement par le milieu de ce segment.*

– ***La médiatrice*** *d'un segment* $[AB]$ *est l'ensemble des points équidistants des points* A *et* B.

Remarque 1.1 :

Le milieu du segment $[AB]$ est le point d'intersection du segment $[AB]$ et de sa médiatrice.

1.1.3 Bissectrice d'un angle.

Définition 1.3 :

La bissectrice *d'un angle est la droite passant par le sommet de cet angle en le partageant en deux angles de même mesure.*

1.1.4 Triangle.

Définition 1.4 :

Un triangle est une figure fermée constituée par assemblage de trois segments.

Nous adoptons les notations suivantes :

$a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

$\alpha = Mes\widehat{BAC}$, $\beta = Mes\widehat{ABC}$ et $\gamma = Mes\widehat{BCA}$.

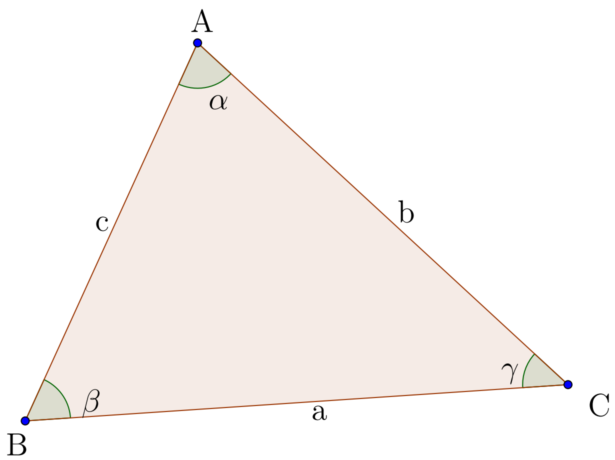


FIGURE 1.1 – Triangle

Définitions 1.1 :

– *Les points* A, B *et* C *sont appelés* ***sommets*** *du triangle* ABC *;*

– *les segments* $[AB]$,$[AC]$ *et* $[BC]$ *sont appelés* ***côtés*** *du triangle* ABC *;*

– *Les réels* a, b *et* c *sont appelés mesures des* ***côtés*** *du triangle* ABC *;*

– *Les réels* $\alpha, \beta, \gamma \in]0; \pi[$ *sont appelés mesures des* ***angles*** *du triangle* ABC.

Proposition 1.3 :

Dans un triangle, la somme des angles est égale à $180\,^\circ$.

1.1.4.1 Droites particulières d'un triangle.

Définitions 1.2 :

- ***Les hauteurs*** *d'un triangle* ABC *sont des droites passant par un sommet et orthogonales au support du côté opposé.*
- ***Les médiatrices*** *d'un triangle* ABC *sont celles des segments* $[AB]$,$[AC]$ *et* $[BC]$.
- ***Les médianes*** *d'un triangle* ABC *sont les droites passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.*
- ***Les bissectrices intérieures*** *d'un triangle* ABC *sont celles issues des sommets* A, B *et* C.
- ***Les bissectrices extérieures*** *d'un triangle* ABC *sont les droites passant par les sommets du triangle et orthogonales aux bissectrices intérieures.*

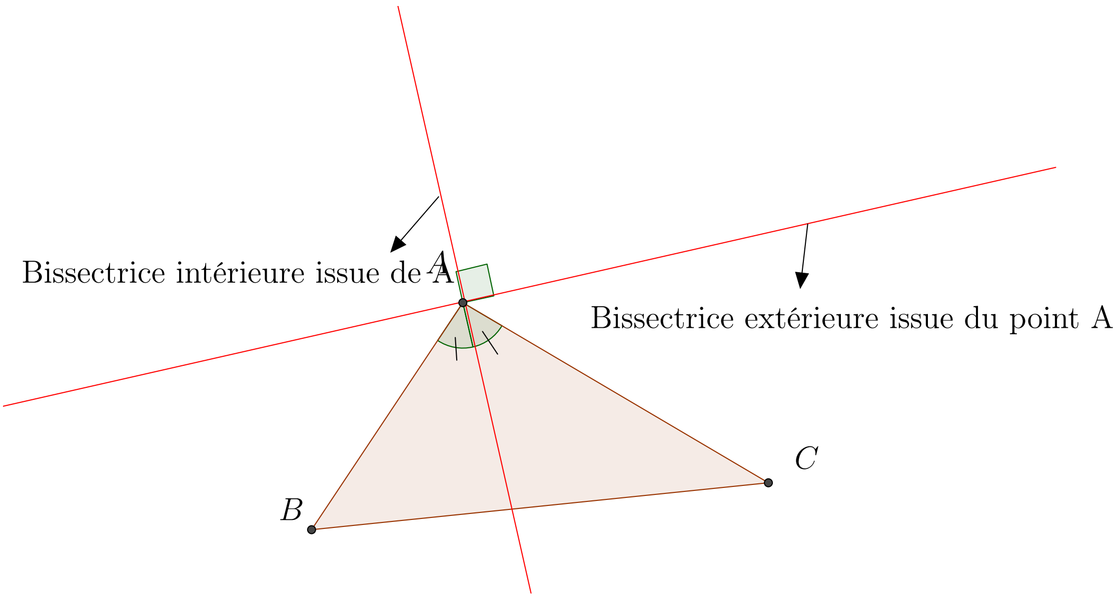


FIGURE 1.2 – Bissectrice intérieure et extérieure d'un triangle

Propositions 1.1 :

P_1) *Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé* ***centre du cercle circonscrit*** *au triangle ;*

P_2) *Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point appelé* ***centre du cercle inscrit*** *au triangle ;*

P_3) *Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé* ***centre de gravité*** *du triangle ;*

P_4) *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé* ***orthocentre*** *du triangle.*

1.1.4.2 Triangles particuliers

Définitions 1.3 :

- *Un triangle ABC est dit* ***isocèle*** *lorsque deux de ses côtés sont égaux ;*
- *Un triangle ABC est dit* ***équilatéral*** *lorsque ses trois côtés sont égaux ;*
- *Un triangle ABC est dit* ***rectangle*** *lorsque l'un des angles au sommet vaut $\frac{\pi}{2}$.*

Propositions 1.2 :

P_1) *Pour qu'un triangle soit isocèle, il faut et il suffit que deux de ses angles soient égaux.*

P_2) *Dans un triangle, une droite est à la fois hauteur et médiatrice si et seulement si ce triangle est isocèle.*

P_3) *Dans un triangle, une droite est à la fois médiane et médiatrice si et seulement si ce triangle est isocèle.*

P_4) *Dans un triangle, une droite est à la fois hauteur et médiane si et seulement si ce triangle est isocèle.*

P_5) *Pour qu'un triangle soit équilatéral, il faut et il suffit que ses trois angles soient égaux.*

P_6) *Un triangle est équilatéral si et seulement s'il est isocèle et possède un angle de* $60\ ^{\circ}$.

P_7) *Pour qu'un triangle ABC soit rectangle en A, il faut et il suffit que* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

1.1.4.3 Triangles semblables

La définition ci-dessous est tirée du livre *CIAM* de la Classe de première C

Définition 1.5 :

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont ***semblables*** *s'il existe une similitude s telle que les points A, B et C ont respectivement pour images A', B' et C' par s.*

Proposition 1.4 :

Soient ABC, $A'B'C'$ deux triangles avec les mêmes notations qu'au début de cette section. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une similitude s telle que s(A)=A', s(B)=B' et s(C)=C'.

ii) $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$.

iii) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ *et* $\gamma = \gamma'$.

1.1.5 Les quadrilatères.

1.1.5.1 Définitions :

Les définitions ci-dessous sont tirées du livre *Excellence en mathématiques* de la classe de sixième.

Définition 1.6 :

Un quadrilatère *est une figure fermée constituée par assemblage de quatre côtés.*

1.1.5.2 Quadrilatères particuliers.

Définitions 1.4 :

- ***Un parallélogramme*** *est un quadrilatère dont les supports des côtés opposés sont parallèles.*
- ***Un rectangle*** *est un parallélogramme qui possède un angle droit ;*
- ***Un losange*** *est un parallélogramme qui a ses côtés de même longueur ;*
- ***Un carré*** *est un losange qui possède un angle droit.*
- ***Un trapèze*** *est un quadrilatère qui a deux côtés de support parallèles et deux côtés de support sécants ;*
- ***Un trapèze rectangle*** *est un trapèze qui possède un angle droit ;*
- ***Un trapèze isocèle*** *est un trapèze dans lequel les côtés à support non parallèles ont la même longueur.*

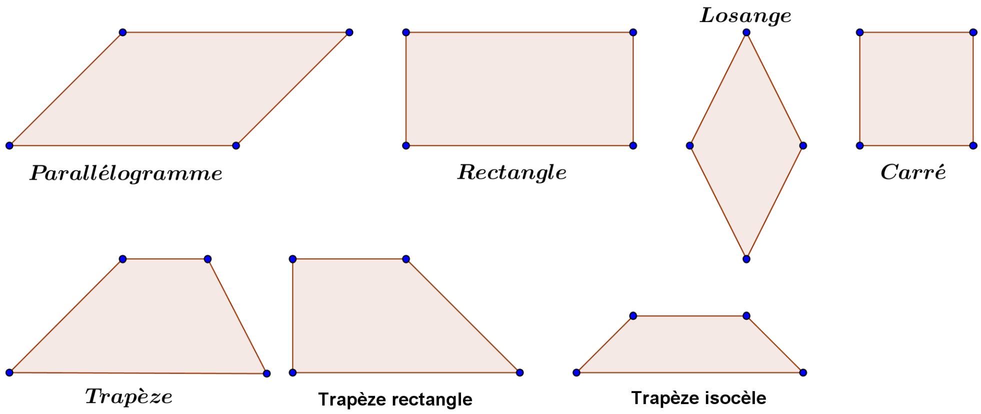


FIGURE 1.3 – Quadrilatères particuliers

1.1.6 Les polygones

Les définitions ci-dessous sont tirées du livre *Excellence en mathématiques* de la classe de sixième.

Définitions 1.5 :

- ***Un polygone*** *est une figure fermée constituée par assemblage de plusieurs segments appelés côtés du polygone, tels que deux côtés consécutifs n'aient pas le même support.*
- ***Un polygone régulier*** *est un polygone dont les côtés ont la même longueur.*
- ***Un heptagone régulier*** *est un polygone régulier à cinq côtés.*
- ***Un hexagone régulier*** *est un polygone régulier à six côtés.*

1.1.7 Les symétries.

Soient I , A et A' trois points du plan et (D) une droite du plan.

1.1.7.1 Symétrie par rapport à un point.

Définition 1.7 :

On dit que A' est l'image de A par la symétrie de centre I lorsque I est le milieu du segment $[AA']$.

On note $S_I(A) = A'$ et on lit A' est l'image du point A par la symétrie de centre I.

Remarque 1.2 :

Une symétrie par rapport à un point est encore appelée symétrie centrale.

1.1.7.2 Symétrie orthogonale.

Définition 1.8 :

On dit que A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (D) lorsque la droite (D) est la médiatrice du segment $[AA']$.

On note $S_{(D)}(A) = A'$ et on lit A' est l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (D).

Remarque 1.3 :

Une symétrie orthogonale d'axe (D) est encore appelée réflexion d'axe (D).

1.1.8 Axe de symétrie d'une figure

Soit (Δ) une droite et σ une figure.

Définitions 1.6 :

- *σ est globalement invariant par $S_{(\Delta)}$ lorsque l'image de tout point de σ par $S_{(\Delta)}$ est encore un point de σ.*
- *On dit que (Δ) est un axe de symétrie de σ lorsque σ est globalement invariant par $S_{(\Delta)}$.*

1.1.8.1 Propriétés des symétries (Classe de quatrième).

Les propriétés ci-dessous sont tirées du livre *CIAM* de la classe de quatrième.

Propositions 1.3 :

Par une symétrie centrale (respectivement une symétrie orthogonale) :

P_1) *Un segment a pour image un segment de même longueur.*

On dit que les symétries centrales et les symétries axiales ***conservent*** *les distances.*

P_2) *Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.*

On dit que les symétries centrales et les symétries axiales ***conservent*** *le milieu d'un segment.*

P_3) *Des points alignés ont pour images des points alignés.*

On dit que les symétries centrales et les symétries axiales ***conservent*** *l'alignement.*

P_4) *Si un point appartient à deux lignes, son image appartient aux images de ces deux lignes.*

On dit que les symétries centrales et les symétries axiales ***conservent*** *le contact.*

P_5) *L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.*

P_6) *Un angle a pour image un angle de même mesure.*

On dit que les symétries centrales et les symétries axiales ***conservent*** *les angles non orientés.*

Remarques 1.1 :

1) On déduit de la propriété P_3 que par une symétrie centrale (respectivement une symétries axiale), l'image d'une droite est une droite.

2) On déduit de la propriété P_6 que par une symétrie centrale (respectivement une symétries axiale) :

- les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;
- les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

On dit que les symétries centrales et les symétries axiales **conservent** l'orthogonalité et le parallélisme.

1.2 Formalisation des origamis et pliages élémentaires

1.2.1 Axiomes

Axiome 1. Un pli passe par deux points P_1 et P_2 spécifiés.

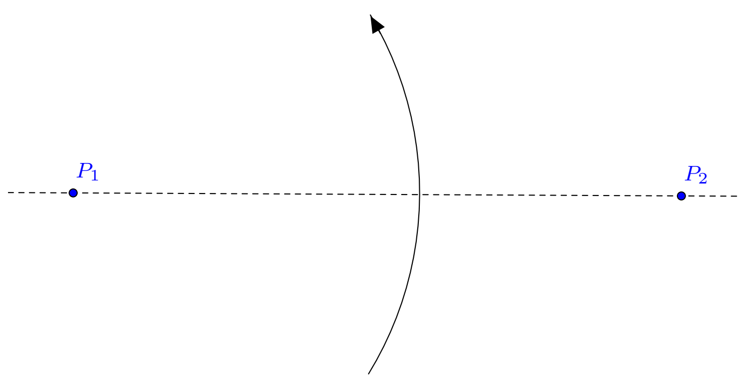


FIGURE 1.4 – Axiome 1

Voir vidéo 1.

Axiome 2. Un unique pli amène un point P_1 sur un point P_2.

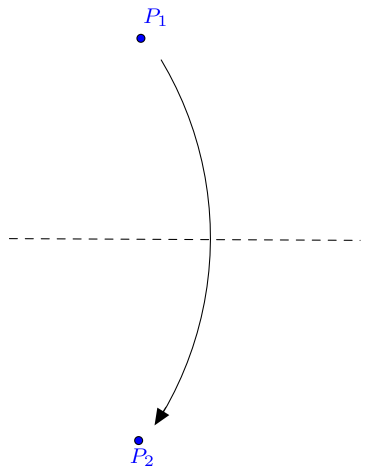


Figure 1.5 – Axiome 2

Voir vidéo 2.

Axiome 3. Un pli superpose deux droites (L_1) et (L_2) .

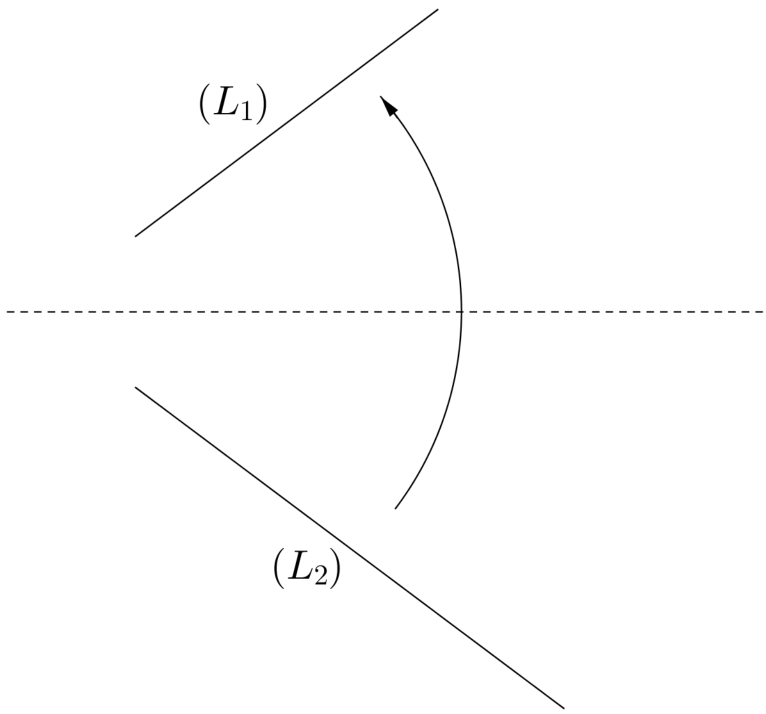


Figure 1.6 – Axiome 3

Voir vidéo 3.

Axiome 4. Un unique pli passe par un point P_1 et est orthogonal à une droite (L_1).

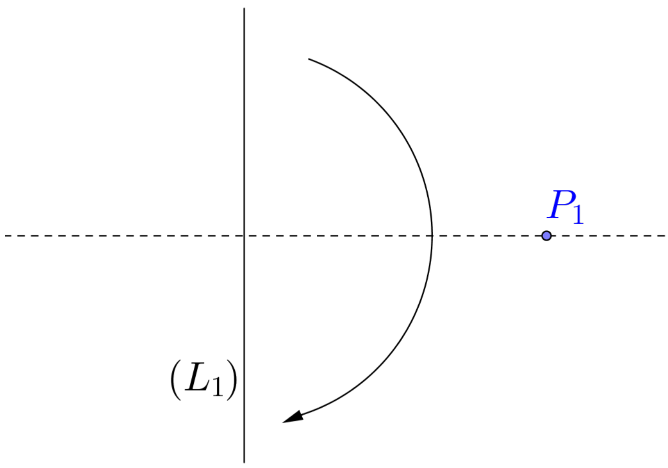


Figure 1.7 – Axiome 4

Voir vidéo 4.

Axiome 5. Soient une droite (L_1) et deux points P_1 et P_2 distincts ; un pli passe par P_2 et amène P_1 sur (L_1).

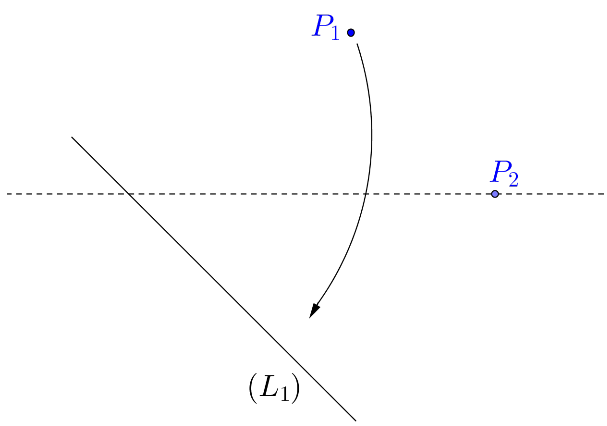


Figure 1.8 – Axiome 5

Voir vidéo 5.

Axiome 6. Soient deux droites sécantes (L_1) et (L_2) et deux points P_1 et P_2 ; un pli amène P_1 sur (L_1) et P_2 sur (L_2).

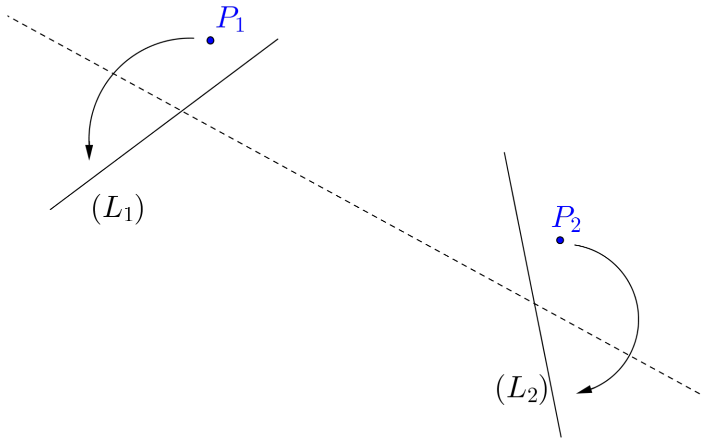


FIGURE 1.9 – Axiome 6

Voir vidéo 6.

1.2.2 Points et droites constructibles par origami

On se donne deux points de base. A partir de ces deux points, on définit récursivement les points et lignes constructibles par origami de la façon suivante :

- Les points de base sont constructibles par hypothèse.
- Les droites construites sur les plis définis par les axiomes 1 à 6 à partir d'objets constructibles sont constructibles.
- Un point intersection de deux droites constructibles est constructible.

On peut alors interpréter les six axiomes ci-dessus de la façon suivante :

☞ **Axiome 1.** une droite passant par deux points constructibles est constructible.

☞ **Axiome 2.** la médiatrice d'un segment dont les extrémités sont constructibles est constructible.

☞ **Axiome 3.** la bissectrice de deux droites constructibles est constructible.

☞ **Axiome 4.** la perpendiculaire passant par un point constructible à une droite constructible est constructible.

☞ **L'axiome 5** est équivalent à chercher l'intersection d'une droite et d'un cercle.

☞ **L'axiome 6** offre des procédés de construction particulièrement puissants. Il revient à construire la tangente aux deux paraboles de foyers P_1 et P_2 et de directrice respective L_1 et L_2 (**classe de terminale C**).

Remarque 1.4 :

L'axiome 6 permet de trisecter un angle et de construire l'heptagone régulier, chose qu'on ne peut faire à la règle et au compas (**classe de seconde C**).

1.2.3 Constructions élémentaires par origami

Soient A, B et C trois points constructibles.

1.2.3.1 Milieu et médiatrice d'un segment

Méthode de pliage 1.1 :

*Pour construire **la médiatrice** du segment $[AB]$ par origami, on procède comme suit :*

☞ *On plie le papier de façon à ce que les points A et B soient confondus.*

☞ *Le plie qui apparait est la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$ cherché.*

Remarque 1.5 :

Pour avoir **le milieu** I du segment $[AB]$, on procède de la même façon car I est le point d'intersection de (Δ) et du segment $[AB]$.

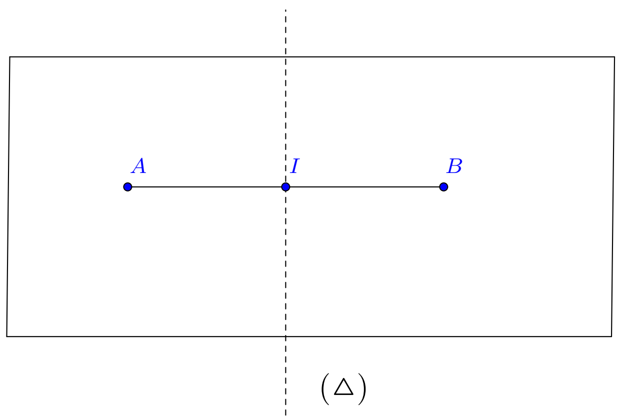


FIGURE 1.10 – Pliage de la médiatrice d'un segment

Voir vidéo 7.

1.2.3.2 Bissectrice d'un angle.

Méthode de pliage 1.2 :

Pour construire la ***bissectrice de l'angle*** $\widehat{BAC}$ *par origami, il suffit de plier le papier de façon à ce que les droites* (AB) *et* (AC) *se superposent.*

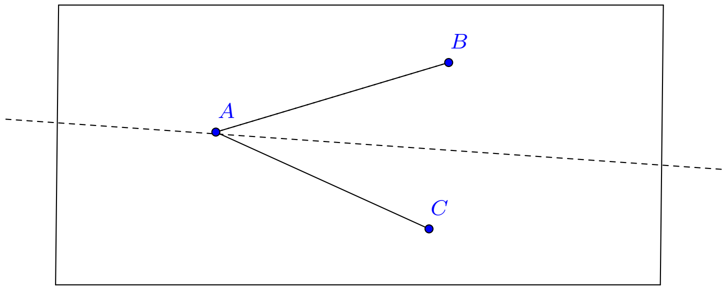


FIGURE 1.11 – Pliage de la bissectrice d'un angle

Voir vidéo 8.

1.2.3.3 Médiane.

Méthode de pliage 1.3 :

Pour construire ***la médiane*** *du triangle* ABC *qui passe par le sommet* A*, on procède comme suit :*

- ☞ *On plie le milieu* I *du segment* $[BC]$.
- ☞ *On plie la droite* (AI) *(C'est la médiane cherchée).*

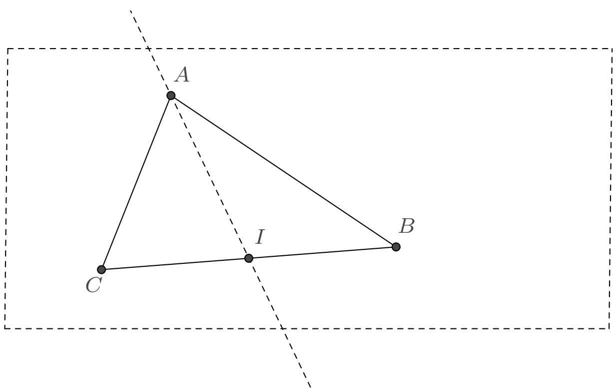


FIGURE 1.12 – Pliage d'une médiane

Voir vidéo 9.

1.2.3.4 Symétrique d'un point par rapport à un point donné.

Méthode de pliage 1.4 :

*Pour construire **le symétrique** du point A par rapport au point B, on procède comme suit :*

☞ *On plie la droite (AB).*

☞ *On maintien le point B fixe et on plie le papier de façon à ce que le point A rencontre la demi-droite d'extrémité B ne contenant pas le point A en un point A' et on déplie.*

☞ *Le point A' est le symétrique du point A par rapport au point B.*

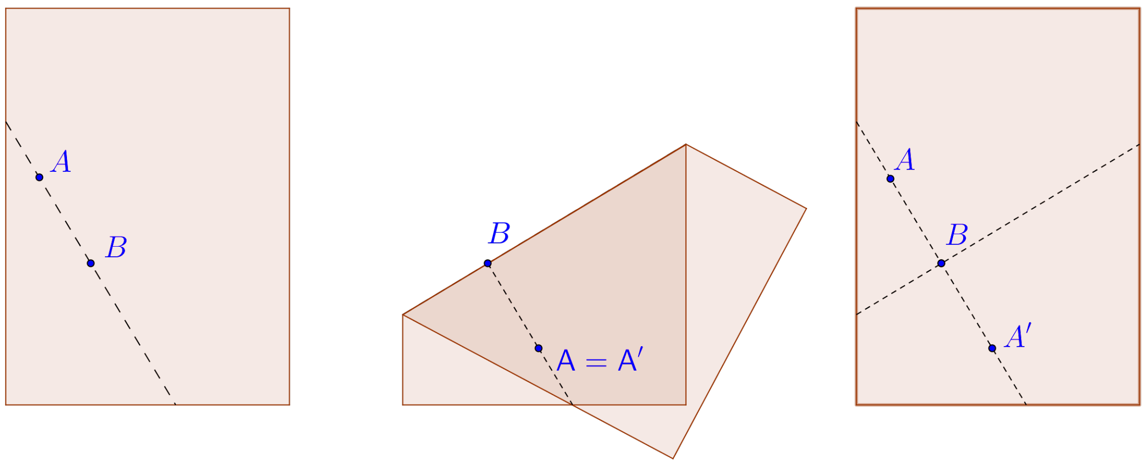


FIGURE 1.13 – Pliage du symétrique d'un point par rapport à un point

Voir vidéo 10.

1.2.3.5 Perpendiculaire à une droite en un point donné.

Méthode de pliage 1.5 :

*Pour construire **la perpendiculaire** à une droite (D) passant par un point A, on procède comme suit :*

☞ *On plie le papier par rapport à la droite (D) et à l'aide d'un crayon, on marque le point d'intersection B du point A avec l'autre demi-papier.*

☞ *on plie la droite (AB) : c'est la perpendiculaire à la droite (D) passant par le point A.*

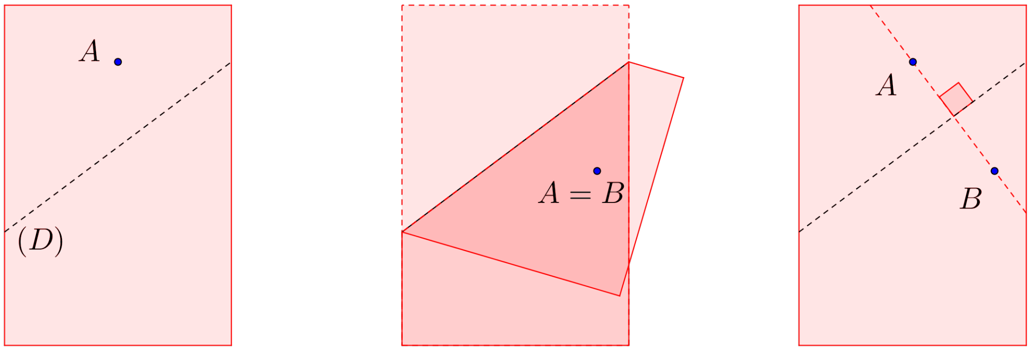


FIGURE 1.14 – Pliage de la perpendiculaire à une droite passant par un point

Voir vidéo 11.

1.2.3.6 Symétrique d'un point par rapport à une droite donnée.

Méthode de pliage 1.6 :

Pour construire ***le symétrique*** *du point A par rapport* ***à une droite (D)****, on procède comme suit :*

- ☞ *On plie le papier par rapport à la droite (D) et à l'aide d'un crayon, on marque le point d'intersection A' du point A avec l'autre demi-papier.*
- ☞ *A' est le symétrique du point A par rapport à la droite (D).*

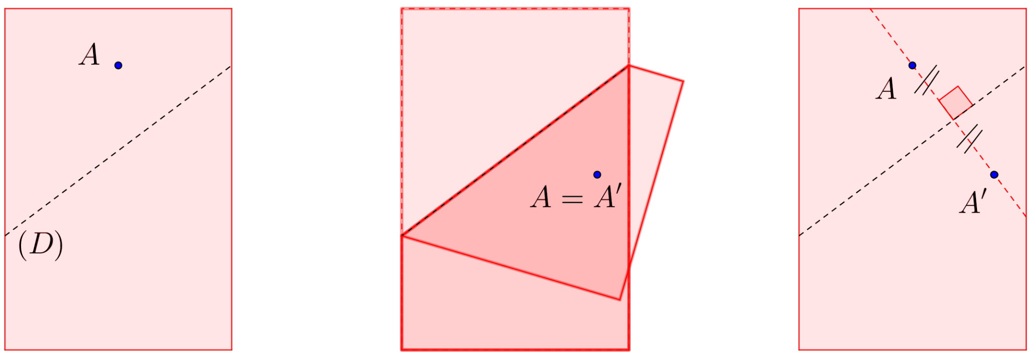


FIGURE 1.15 – Pliage du symétrique d'un point par rapport à une droite

Voir vidéo 12.

1.2.3.7 Droites parallèles.

Soit (D) une droite passant par le point A.

Méthode de pliage 1.7 :

*Pour construire **la droite** (Δ) **passant par le point** B **et parallèle à la droite (D)**, on procède comme suit :*

- ☞ *On construit la perpendiculaire (Δ') à la droite (D) passant par le point A.*
- ☞ *la perpendiculaire à (Δ') passant par le point B est la droite (Δ) cherchée.*

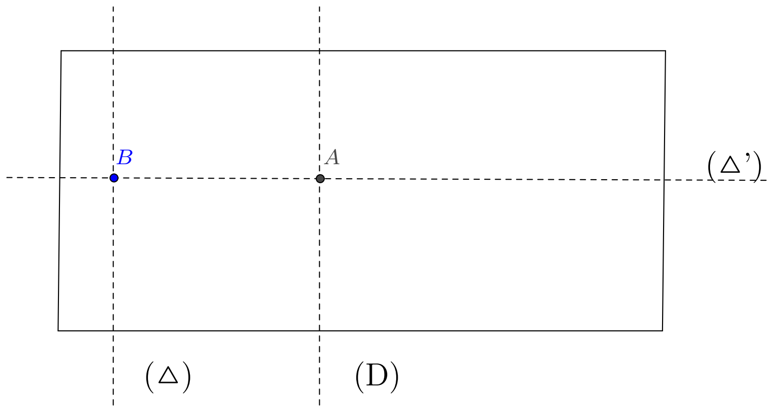


Figure 1.16 – Pliage de la parallèle à une droite passant par un point

Voir vidéo 13.

Chapitre Deux

CONSTRUCTION DES FIGURES DU PLAN ET DE L'ESPACE PAR ORIGAMI.

2.1 Origami et triangle.

2.1.1 Origami et triangle rectangle particulier.

2.1.1.1 Triangle rectangle isocèle.

Les diagonales d'un carré étant ses axes de symétries, on en déduit qu'un triangle rectangle isocèle est pliable par origami à partir d'un papier carré.

2.1.1.2 Triangle ABC rectangle en B tel que la mesure de l'angle A soit 60 degrés.

Méthode de pliage 2.1 :

Considérons un papier carré $AIJK$ de x cm de côté avec $x > 0$.

Méthode de pliage 2.2 :

Pour construire un triangle rectangle à partir du papier carré, procédons comme suit :

- ☞ *Pliez le papier carré en deux parties égales. Autrement dit, construire la médiatrice (Δ) de $[AK]$. (Δ) coupe $[AK]$ en un point B ;*
- ☞ *Maintenez le point A fixe et plier le papier de manière à ce que le point I rencontre (Δ) en un point C ;*
- ☞ *Le triangle ABC ainsi construis est tel que $Mes\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$, $Mes\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ et $Mes\widehat{BCA} = \frac{\pi}{6}$.*

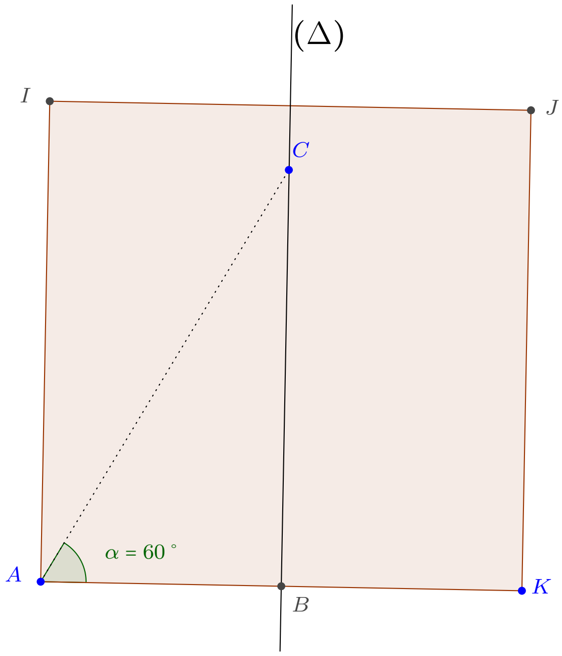


FIGURE 2.1 – Pliage d'un triangle ABC rectangle en B tel que $Mes(\widehat{A}) = 60\,^\circ$

Voir vidéo 14.
Preuve:

Supposons les points B et C construis, alors la droite (BC) est la médiatrice de $[AK]$ et par conséquent, $(BC) \perp (AB)$ et le point B est le milieu de $[AK]$. Or B milieu de $[AK]$ entraine que : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{2}$. D'où $Mes\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$, et par suite $Mes\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{6}$. ■

Remarques 2.1 :

1) En construisant la bissectrice (D) de l'angle $\widehat{ACB}$, on obtient un triangle rectangle en B tel que $Mes\widehat{LCB} = \dfrac{\pi}{12}$ et $Mes\widehat{BLC} = \dfrac{5\pi}{12}$ avec le point L qui est le point d'intersection des droites (D) et (AB).

2) De même en construisant la bissectrice d'un angle non droit du triangle rectangle isocèle ABC, on obtient un triangle ABL rectangle en A tel que $Mes\widehat{LCB} = \dfrac{\pi}{8}$ et $Mes\widehat{BLC} = \dfrac{3\pi}{8}$.

3) Les remarques 1) et 2) ci-dessus peuvent servir d'exercice pour les **classes de** 6^e **et** 5^e (confer chapitre 4).

2.1.2 Origami et triangle équilatéral.

2.1.2.1 Pliage utilisant un papier rectangulaire

Problème : Nous disposons d'un papier rectangulaire $ABCD$ et nous voulons construire un triangle équilatéral sur ce papier.

Méthode de pliage 2.3 :

- ☞ *Pliez le papier en deux par rapport à la longueur, puis déplier et nommer* $[IJ]$ *le pli obtenu ;*
- ☞ *Maintenez le point* A *fixé en ramenant le point* B *sur le segment de pli* $[IJ]$ *et nommer* K *le point d'intersection des segments* $[AB]$ *et* $[IJ]$ *;*
- ☞ *Effectuez de nouveau les deux plis précédent sur la face* $DIJA$ *;*
- ☞ *Le triangle* ABK *est équilatéral.*

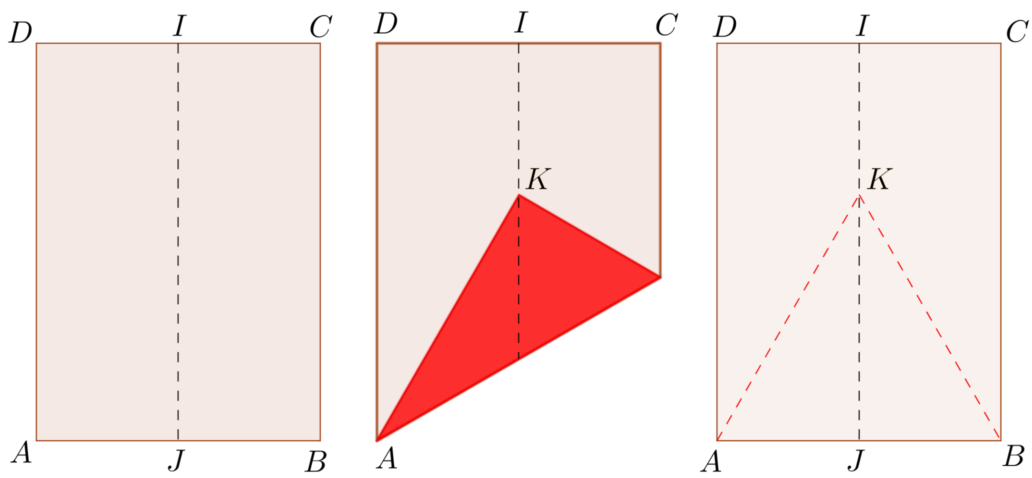


FIGURE 2.2 – Pliage d'un triangle équilatéral à partir d'un papier rectangulaire

Voir vidéo 15.

Preuve:

Supposons le point K construis. Alors $AK = AB$ et $BA = BK$, donc $AK = AB = BK$ et par conséquent le triangle ABK est équilatéral. ■

2.1.2.2 Pliage utilisant un papier carré

Problème : Nous disposons d'un papier carré $ABCD$ et nous voulons construire un triangle équilatéral à l'intérieur de ce papier.

Méthode de pliage 2.4 :

- ☞ *Plions le papier en deux parties de telle façon que les segments* $[AD]$ *et* $[BC]$ *coïncident, puis déplions. On obtient un pli représenté par le segment* $[IJ]$ *;*

☞ *Maintenons le point A fixe et effectuons un pli de manière à ce que le point D rencontre le segment $[IJ]$ en un point K ;*

☞ *Effectuez de nouveau les deux plis précédent sur la face $BCJI$;*

☞ *Le triangle ABK est équilatéral.*

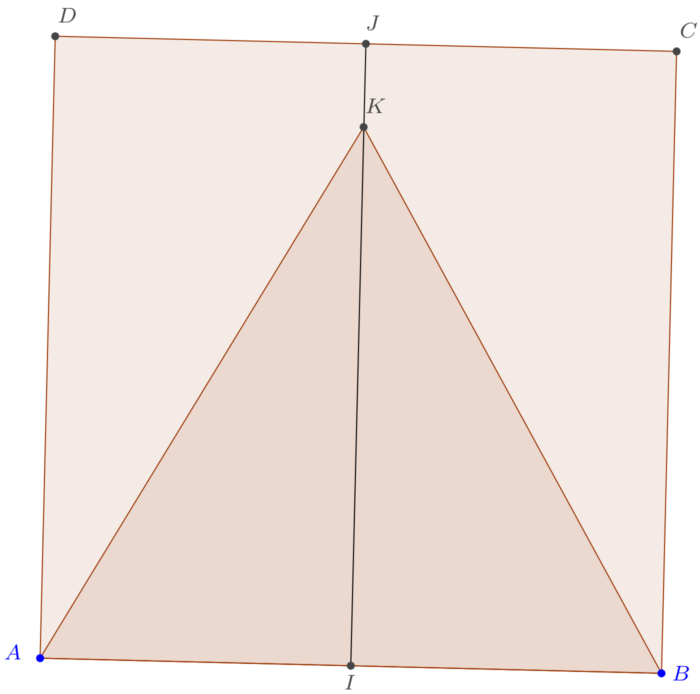


FIGURE 2.3 – Pliage d'un triangle équilatéral à partir d'un papier carré 2

Voir vidéo 16.

Preuve:

Supposons le point K construis et considérons la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au segment $[DK]$.

Alors (Δ) est la médiatrice du segment $[DK]$ et on a : $S(\Delta)(D) = K$ et $S(\Delta)(A) = A$, donc $AK = AD = AB$. Or $K \in (IJ)$ et (IJ) est la médiatrice du segment $[AB]$, donc $KA = BK$ et par suite $AB = AK = BK$.

D'où ABK est un triangle équilatéral. ∎

2.1.2.3 Conclusion :

De tout ce qui précède, nous pouvons affirmer qu'il est possible de construire un triangle équilatéral à partir d'un papier carré. Comme les triangles équilatéraux pliés ci-dessus ont des côtés égaux à celui du côté du carré, alors on est tenté de conjecturer qu'ils sont d'aires maximales dans le papier carré. Cependant, nous sommes en droit de nous demander s'il est possible de construire un triangle équilatéral dans un papier carré tel que le côté du carré soit strictement inférieur à celui du triangle équilatéral.

2.1.3 Pliage d'un triangle équilatéral d'aire maximale dans un papier carré.

2.1.3.1 Analyse du problème.

Supposons construis un triangle équilatéral de côté x dans un papier carré de côté 1cm tel que ce triangle est un de ses sommets confondu à l'un des sommets du carré comme l'indique la figure ci-dessous :

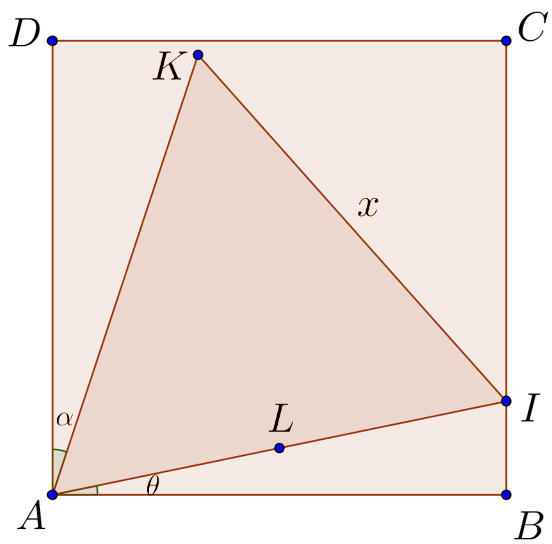


FIGURE 2.4 – Triangle équilatéral

Comme le triangle AIK est équilatéral dans le papier carré $ABCD$, alors les symétries du carré entrainent que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{12}$ et $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{12}$

– Déterminons l'aire du triangle AIK.

Soient $f(x)$ cette aire et L le milieu du segment $[AI]$. On a :
$f(x) = \frac{1}{2}AI \times KL$ ie $f(x) = \frac{1}{2}x(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ et donc $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
Ainsi, $f(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4(\cos\theta)^2}$ car $\cos\theta = \frac{1}{x}$

– Déterminons θ pour que l'aire soit maximale.

$f'(\theta) = \frac{2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{4(\cos\theta)^4} = \frac{\sqrt{3}\sin 2\theta}{4(\cos\theta)^4}$, donc $f'(\theta) = 0$ entraine que $\theta = 0$ car $\theta \in [0; \frac{\pi}{12}]$.
De plus, $f''(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{(\cos\theta)^4 + 3(\sin\theta)^2(\cos\theta)^2}{(\cos\theta)^6})$, donc $f''(\theta) > 0$ et par suite f est convexe sur $[0; \frac{\pi}{12}]$. Par conséquent, f atteint son maximum pour $\theta = \frac{\pi}{12}$.
Donc le triangle AIK est un triangle équilatéral d'aire maximale lorsque $\theta = \alpha = \frac{\pi}{12}$.
On en déduit la méthode de pliage suivante :

Méthode de pliage 2.5 :

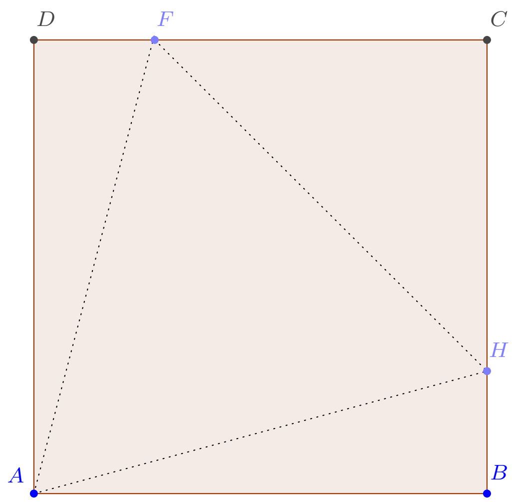
☞ *Plier le papier $ABCD$ en quatre parties égales, puis déplier. Nommer I et J les milieux respectifs des segment $[CD]$ et $[BC]$ puis, nommer F et H les milieux respectifs des segment $[DI]$ et $[BJ]$;*

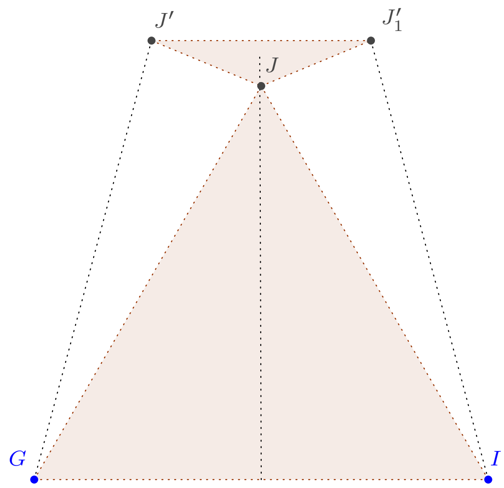
☞ *plier les segments $[AF]$, $[AH]$ et $[FH]$;*

☞ *le triangle AFH est équilatéral d'aire maximale dans le papier carré $ABCD$.*

2.1.3.2 Quelques constructions

Les triangles AHF, IJG et OMN ci-dessous sont équilatéraux et d'aires maximales dans le papier carré.





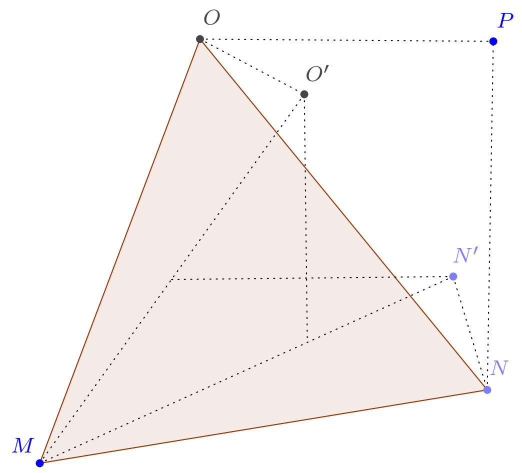


FIGURE 2.5 – Triangle équilatéral maximal

Voir vidéo 17.

2.1.4 Triangle isocèle et origami.

2.1.4.1 Pliage utilisant un papier rectangulaire

Problème : Nous disposons d'un papier rectangulaire $ABCD$ et nous voulons construire un triangle isocèle sur ce papier.

Méthode de pliage 2.6 :

☞ *Pliez le papier en deux par rapport à la largeur, puis déplier et nommer* $[IJ]$ *le pli obtenu.*

☞ *Maintenez le point* A *fixe en ramenant le point* B *sur le segment de pli* $[IJ]$ *et nommer* K *le point d'intersection des segments* $[AB]$ *et* $[IJ]$ *;*

☞ *Effectuez de nouveau les deux plis précédent sur la face* $AIJD$ *;*

☞ *Le triangle* ABK *est isocèle.*

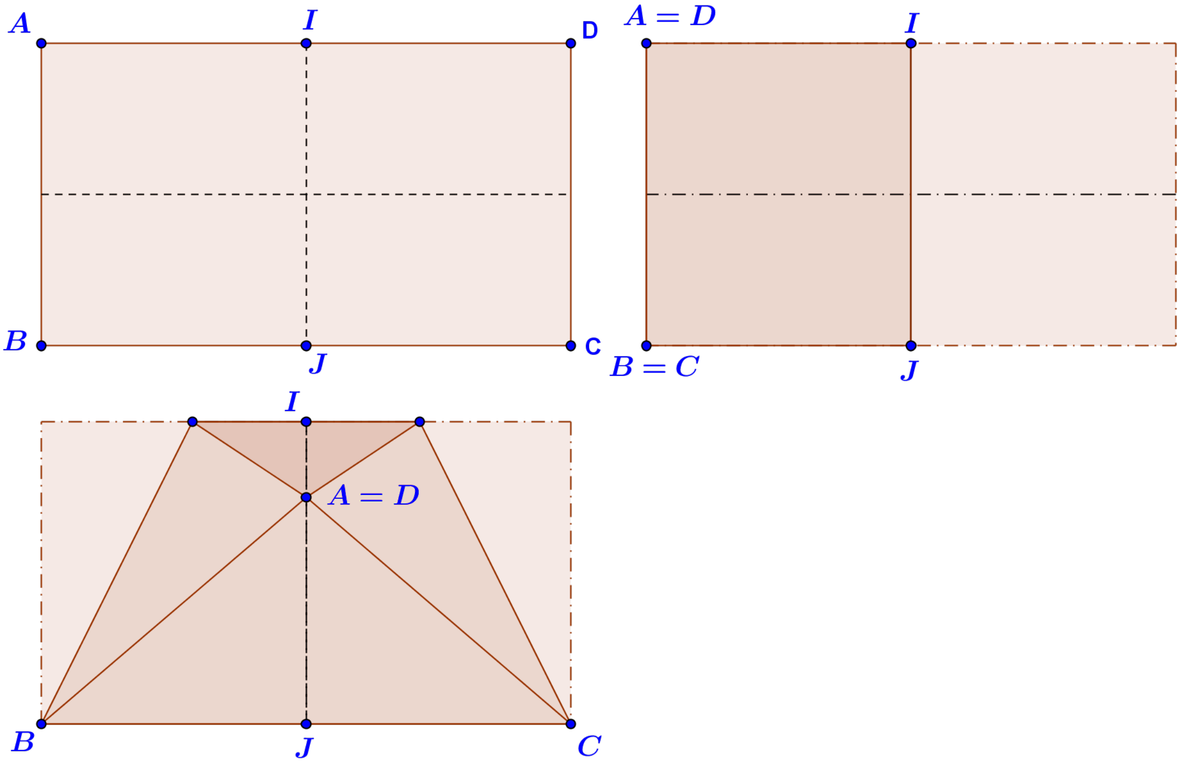


FIGURE 2.6 – Pliage d'un triangle isocèle à partir d'un papier rectangulaire

Voir vidéo 18.

2.1.4.2 Pliage utilisant un papier carré.

Méthode de pliage 2.7 :

Pour plier un triangle isocèle non équilatéral dans un papier carré $ABCD$, on procède comme suit :

- ☞ *on construis la diagonale $[AC]$ du papier carré ;*
- ☞ *on construis la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$. Elle coupe le côté $[BC]$ en un point I;*
- ☞ *on construis la bissectrice de l'angle $\widehat{DAC}$. Elle coupe le côté $[CD]$ en un point J ;*
- ☞ *Le triangle AIJ est isocèle en A.*

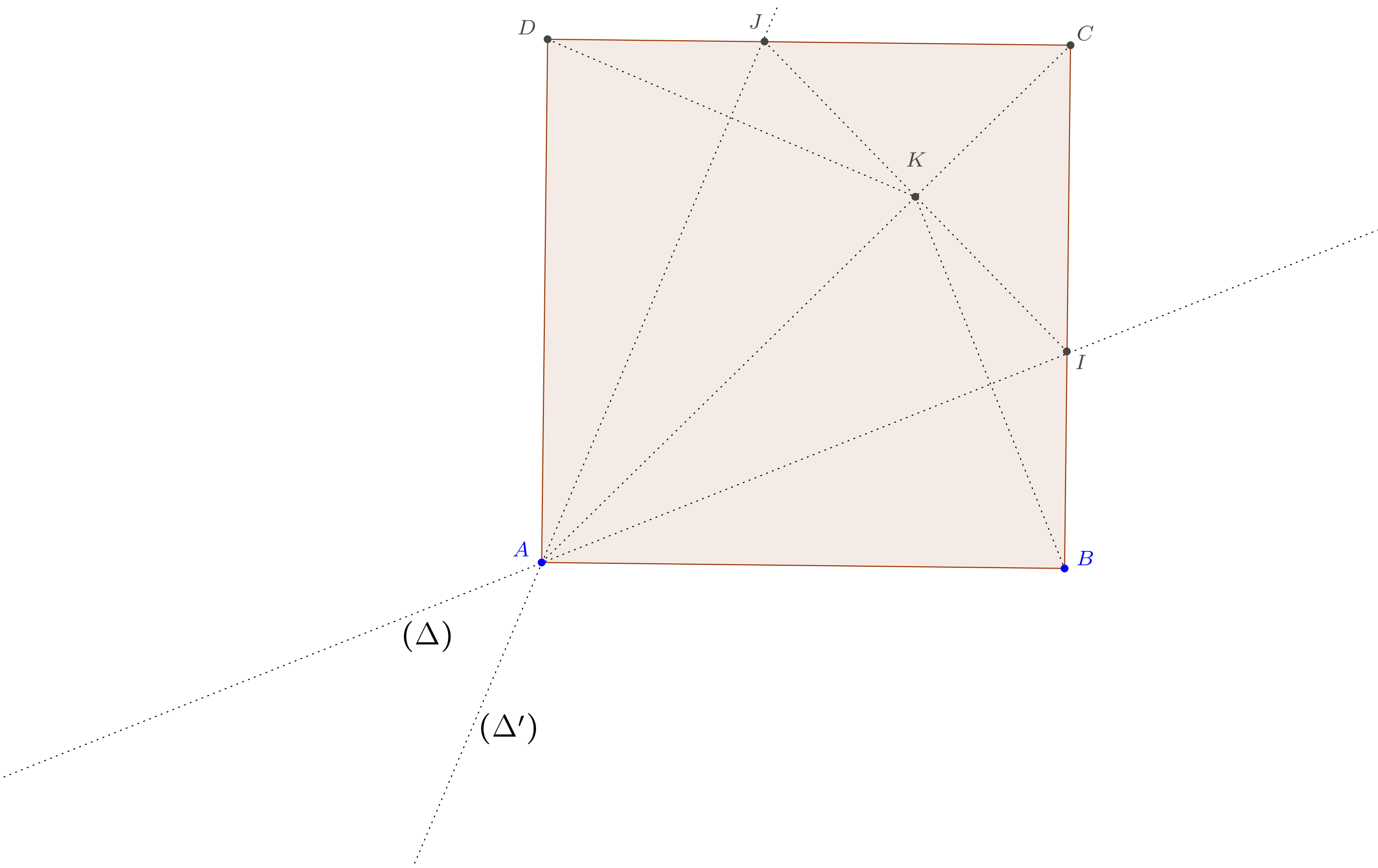


FIGURE 2.7 – Pliage d'un triangle isocèle à partir d'un papier carré

Voir vidéo 19.

Preuve:

Soient (Δ) et (Δ') les bissectrices intérieures respectives des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DAC}$. En posant $K = S_{(\Delta)}(B)$, on a : $K = S_{(\Delta)}(B)$ et $A = S_{(\Delta)}(A)$ ie $AK = AB = AD$, donc $S_{(\Delta')}(D) = K$. Comme $S_{(AC)}(ABC) = ADC$ et les triangles ABC et ADC sont isocèles en B et D respectivement, on en déduit que $(\Delta') = S_{(AC)}(\Delta)$. Mais $I \in (\Delta)\bigcap(BC)$ entraine que $S_{(AC)}(I) \in S_{(AC)}(\Delta)\bigcap(S_{(AC)}(B)S_{(AC)}(C))$ ie $S_{(AC)}(I) \in (\Delta')\bigcap(DC)$. D'où $S_{(AC)}(I) = J$ et par suite, le triangle AIJ est isocèle en A. ■

2.2 Parallélogramme particulier et origami.

2.2.1 Carré et origami.

2.2.1.1 Pliage utilisant un papier rectangulaire.

Méthode de pliage 2.8 :

Pour construire un carré à partir d'un papier rectangulaire $ABCD$, on procède comme suit :

- ☞ *On maintien le point A fixe et on plie de façon à ce que le segment $[AB]$ soit sur le segment $[AD]$. On nomme N le point de contact du point B sur $[AD]$ et M le point d'intersection du pli obtenu avec le segment $[BC]$;*
- ☞ *le quadrilatère $ABMN$ est un carré.*

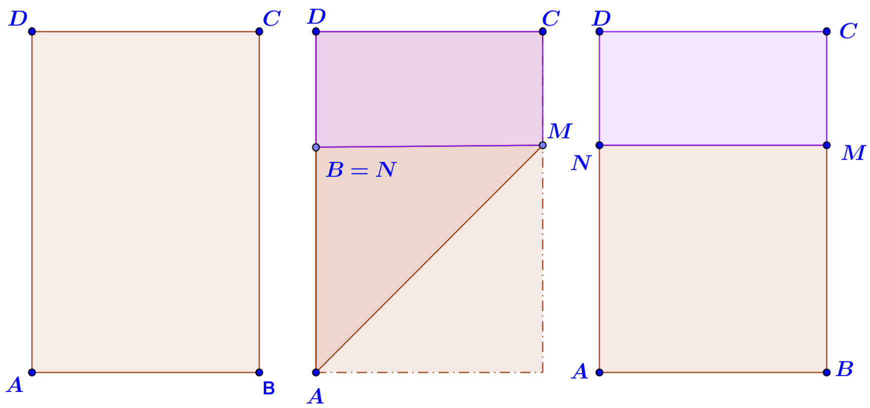


FIGURE 2.8 – Pliage d'un carré à partir d'un papier rectangulaire

Voir vidéo 20

Preuve:

$((AN) \perp (AB)$ et $AN = AB) \Rightarrow (ABMN$ est un carré$)$. ■

2.2.1.2 Pliage utilisant un papier carré.

Méthode de pliage 2.9 :

Pour construire un carré à partir d'une papier carré $ABCD$, on procède comme suit :

- ☞ *on construit tous les axes de symétries de $ABCD$ et nommer I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$;*

- ☞ *on ramène le point A au centre du carré $ABCD$ en pliant par rapport au segment $[LI]$;*
- ☞ *on ramène de même les points B, C et D au centre du carré $ABCD$ en pliant respectivement par rapport au segment $[IJ]$, $[JK]$ et $[KL]$.*
- ☞ *On obtient le carré $IJKL$.*

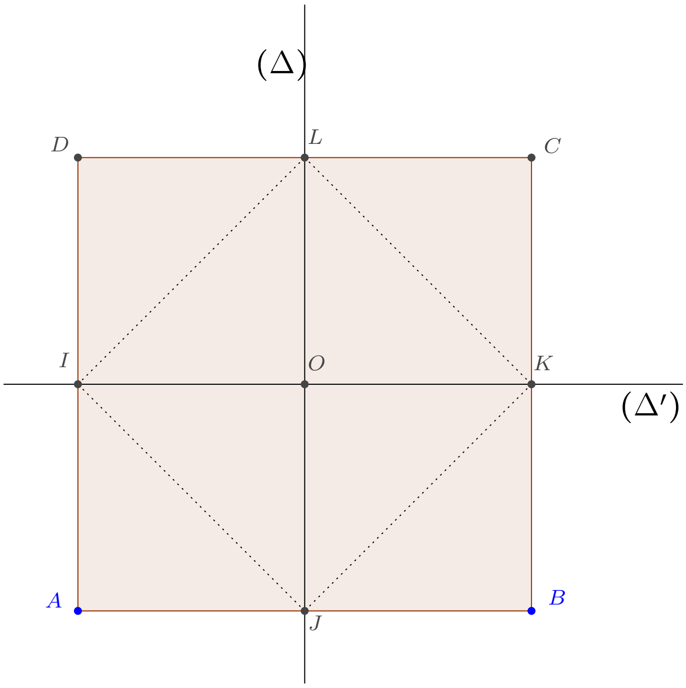


FIGURE 2.9 – Pliage d'un carré à partir d'un papier carré

Voir vidéo 21.

Preuve:

Soient (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[AD]$. Alors $(\Delta) \perp (\Delta')$, or $I, K \in (\Delta)$ et $J, L \in (\Delta')$, donc $(IK) \perp (JL)$ et les triangles ILK et IJK sont rectangles isocèles respectivement en J et L. D'où $IJKL$ est un carré. ■

2.2.2 Rectangle et origami.

Méthode de pliage 2.10 :

Considérons un papier carré $ABCD$ et désignons par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$, puis nommons (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments $[AI]$ et $[IB]$.

☞ *Plions le papier carré en deux parties égales par rapport à la médiatrice* (IJ) *de* $[AB]$ *;*

☞ *Plions ensuite le papier carré par rapport à* (Δ)*, puis à* (Δ') *;*

☞ $EFGH$ *est un rectangle avec* E*,* F*,* G *et* H *qui sont les milieux respectifs des segments* $[AI]$*,* $[IB]$*,* $[CJ]$ *et* $[JD]$*.*

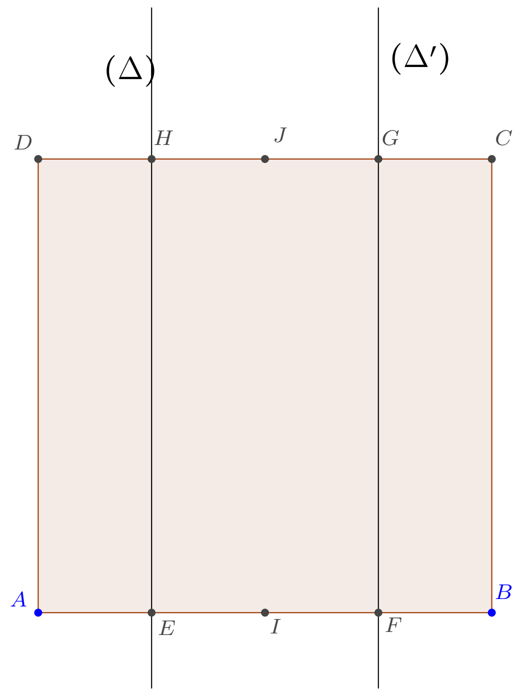


FIGURE 2.10 – Pliage d'un rectangle

Voir vidéo 22.

Remarque 2.1 :

La méthode de pliage est la même que la précédente pour un papier de forme rectangulaire.

Preuve:

$((\Delta) \perp (AB)$ et $(\Delta') \perp (AB)) \Longrightarrow ((\Delta) \parallel (\Delta'))$. Ainsi, $(EF) \perp (EH)$, $(EF) \parallel (HG)$ et $EF = HG$. Donc $EFGH$ est un rectangle. ■

2.2.3 Trapèze particulier et origami.

2.2.3.1 Trapèze rectangle et origami.

Méthode de pliage 2.11 :

Considérons un papier carré $ABCD$ *et notons* E *un point du segment* $[AD]$*.*

☞ *Plier le papier carré par rapport à la diagonale* $[AC]$ *et ne déplier pas ;*

☞ *plier la perpendiculaire* (Δ) *au segment* $[AD]$ *passant par le point* E *et ne déplier pas.*

Nommer F *le point d'intersection des droites* (Δ) *et* (AC) *;*

☞ *en retournant, on a le trapèze rectangle* $EFCD$.

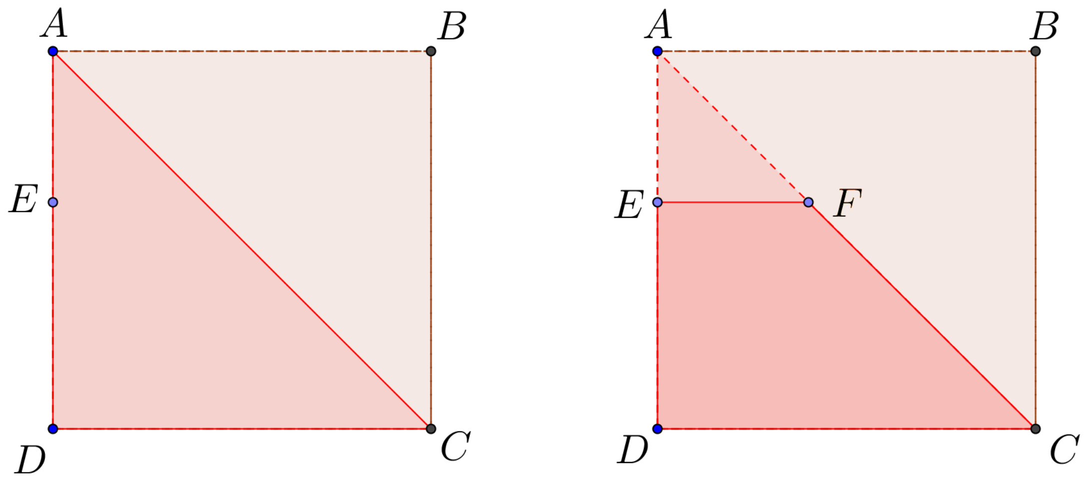


FIGURE 2.11 – Pliage d'un trapèze rectangle

Voir vidéo 23.

Preuve:

$(EF) \parallel (CD)$ et $(ED) \perp (CD)$, donc $EFCD$ est un trapèze rectangle. ■

2.2.3.2 Trapèze isocèle et origami.

2.2.4 Pliage utilisant un papier rectangulaire

Problème : Nous disposons d'une feuille rectangulaire $ABCD$ et nous voulons construire un trapèze isocèle sur cette feuille.

Méthode de pliage 2.12 :

☞ *Pliez la feuille en deux par rapport à la largeur, puis déplier et nommer* $[IJ]$ *le pli obtenu ;*

☞ *maintenez le point* A *fixe en ramenant le point* B *sur le segment de pli* $[IJ]$ *et nommer* K *le point d'intersection des segments* $[AB]$ *et* $[IJ]$ *;*

☞ *Effectuez de nouveau les deux plis précédent sur la face* $AIJD$ *;*

☞ *en retournant on obtient un trapèze isocèle.*

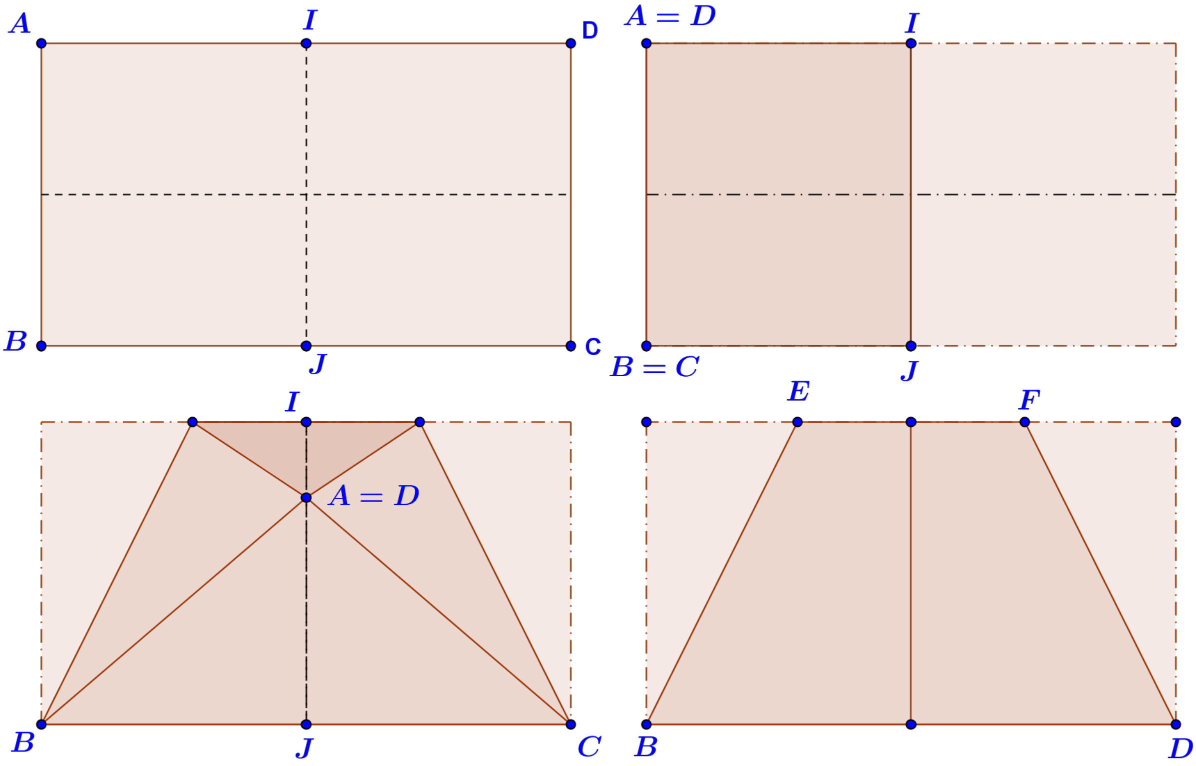


FIGURE 2.12 – Pliage d'un trapèze isocèle à partir d'un papier rectangulaire

Voir vidéo 24

2.2.4.1 Pliage utilisant un papier carré

La méthode est la même que celle qui précède.

Voir vidéo 23.

Preuve:

$((EF) \parallel (BD)$ et $BE = DF) \Rightarrow (EFDB$ est un trapèze isocèle). ■

2.3 Polygone régulier et origami.

Le cas du triangle équilatéral et du carré ont été traités ci-dessus

2.3.1 Hexagone régulier et origami

Méthode de pliage 2.13 :

Considérons un papier carré $ABCD$ de centre O.

- ☞ *Pliez tous les axes de symétries du papier carré, puis pliez le en quatre parties égales et désignez respectivement par P, E et F les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[PC]$ et $[DP]$;*
- ☞ *pliez le papier par rapport à la diagonale $[AC]$ puis amenez le segment passant par le point P sur le segment passant par le point F et dépliez. Nommez I le point d'intersection du pli obtenu avec le segment $[CD]$, puis pliez le papier par rapport au segment $[OI]$ et nommez N le point d'intersection du segment $[OC]$ avec le segment $[AD]$.*
- ☞ *effectuez de nouveau les deux plis précédent sur la face AOD, on obtient les points J et K ;*
- ☞ *en pliant le papier par rapport au segment $[IJ]$ et en dépliant entièrement le papier, on obtient l'hexagone régulier $IJKLMN$.*

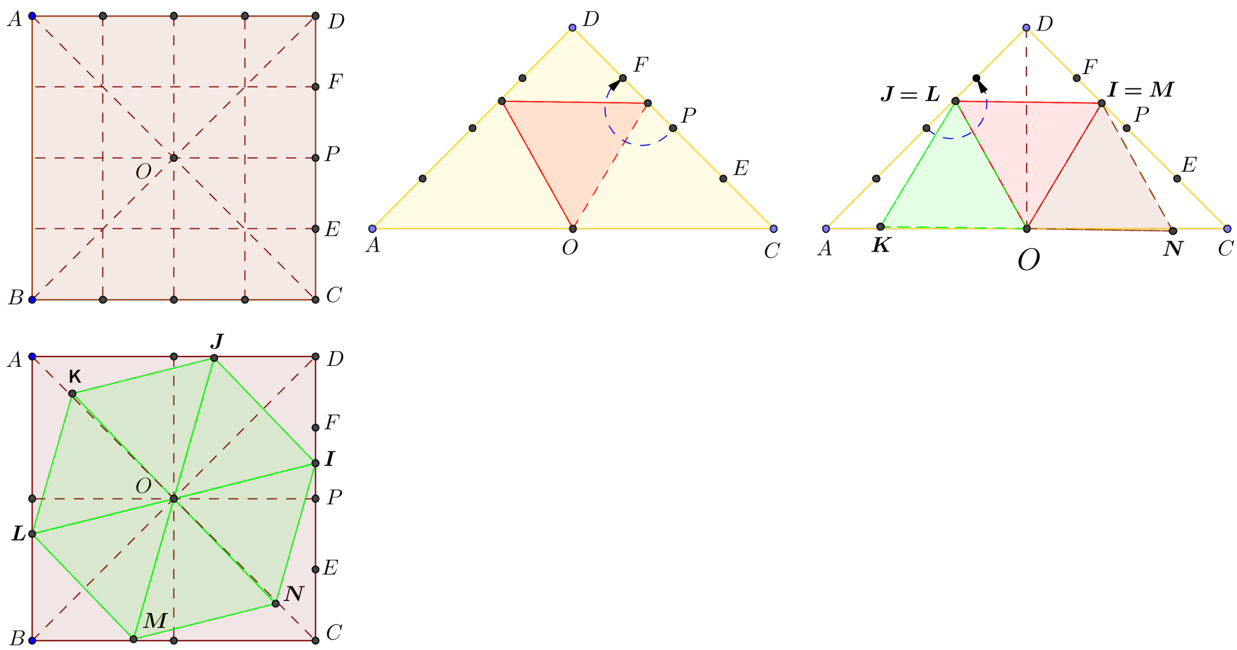


FIGURE 2.13 – Pliage d'un hexagone régulier à partir d'un papier rectangulaire

Voir vidéo 25.

ORIGAMI ET TRIGONOMÉTRIE

Dans ce chapitre, nous allons construire des triangles rectangles à l'aide de l'origami pour explorer quelques propriétés trigonométriques.

3.1 Origami et formules de duplication

3.1.1 Position du problème

Nous disposons d'un papier carré $ABCD$ de $2cm$.
Nous voulons amener les apprenants à établir les formules de duplication et de linéarisation.
Nous construisons à l'aide de ce papier carré :

- un triangle ABD rectangle en D avec un petit angle θ tel que $Mes\widehat{A} = \theta$;
- le point O du segment $[AD]$ est tel que $AO = 1cm$;
- la perpendiculaire au segment $[AC]$ passant par O.

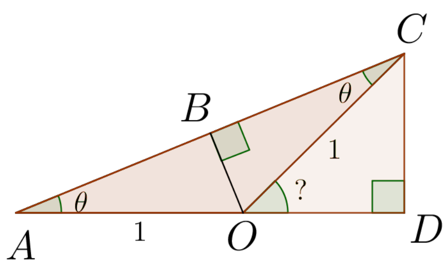


Figure 3.1 – Trigonométrie 1

i) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{COD}$ en fonction de θ.

ii) Déterminer AB, BC, CD et OD en fonction de θ.

iii) En déduire la valeur de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Solution:

i) Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{COD}$ en fonction de θ.

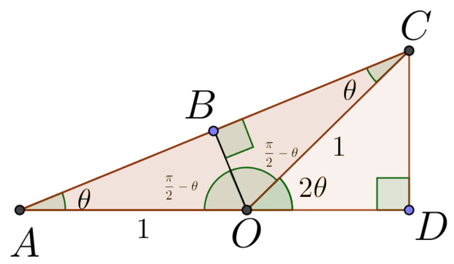


FIGURE 3.2 – Trigonométrie 2

On a : $Mes\widehat{BOA}$=$Mes\widehat{BOC} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ car les triangles BOA et BOC sont rectangles en B.

D'où $Mes\widehat{COD} = \pi - Mes\widehat{BOA} - Mes\widehat{BOC}$ et donc $Mes\widehat{COD} = 2\theta$.

ii) Déterminons AB, BC, CD et OD en fonction de θ.

Dans le triangle rectangle BOA, on a :

$\cos\theta = \dfrac{AB}{AO}$ c'est-à-dire $AB = AO\cos\theta$ et donc $AB = \cos\theta$.

Dans le triangle rectangle BOC, on a :

$\cos\theta = \dfrac{BC}{OC}$ c'est-à-dire $BC = OC\cos\theta$ et donc $BC = \cos\theta$.

Dans le triangle rectangle COD, on a :

$\sin(2\theta) = \dfrac{CD}{OC}$ c'est-à-dire $CD = OC\sin(\theta)$ et donc $CD = \sin(2\theta)$.

$\cos(2\theta) = \dfrac{OD}{OC}$ c'est-à-dire $OD = OC\cos(\theta)$ et donc $OD = \sin(2\theta)$.

iii) Déduisons la valeur de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Dans le triangle rectangle ADC, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{CD}{AC} \\
&= \frac{CD}{AB + BC} \\
&= \frac{\sin(2\theta)}{\cos\theta + \cos\theta} \\
\sin\theta &= \frac{\sin(2\theta)}{2\cos\theta}
\end{aligned}$$

Donc $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ **(Formule de duplication)**

Dans le triangle rectangle ADC, on a :

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{AD}{AC} \\
&= \frac{AO+OD}{AB+BC} \\
&= \frac{1+\cos(2\theta)}{\cos\theta+\cos\theta} \\
\cos\theta &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2\cos\theta}
\end{aligned}$$

D'où $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ $(*)$ Mais $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $(**)$, donc $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ **(Formule de duplication)**

De $(*)$ et $(**)$, on déduit que :
$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ **et** $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ **(Formules de linéarisation)** ■

3.1.2 Trigonométrie et origami du triangle

Nous disposons d'un papier carré de 2 cm. Nous plions à l'aide de l'origami un triangle rectangle ABC tel que $BC = 2cm$, $CA = 1cm$ et $AB = \sqrt{3}ccm$.
Nous plions ensuite la bissectrice de l'angle issue de B, elle coupe le segment $[AC]$ en un point E tel que $AE = xcm$.
Nous plions enfin le papier par rapport au segment $[EB]$, elle coupe le segment $[BC]$ en un point D tel que le triangle DEB soit rectangle en D.

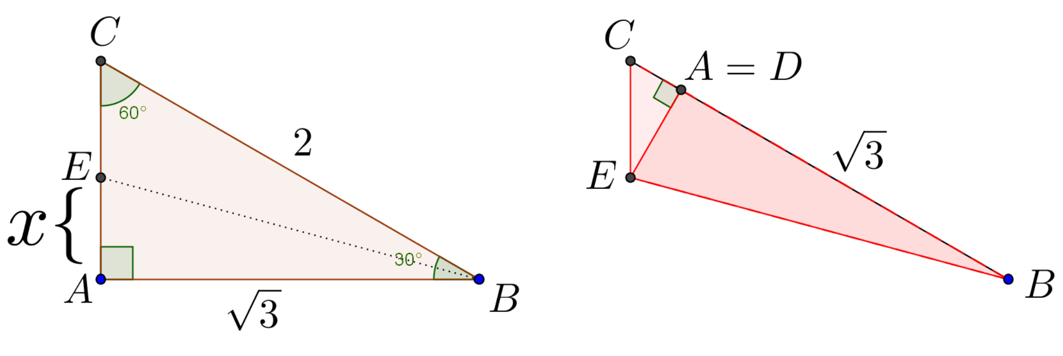


FIGURE 3.3 – Trigonométrie 3

En dépliant, on obtient la figure ci-dessous :

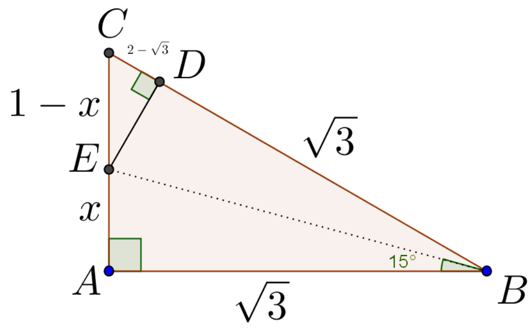


FIGURE 3.4 – Trigonométrie 4

1. Déterminer la valeur de x, puis celle de AE.
2. Montrer que $\dfrac{AE}{x} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ et en déduire la valeur du sinus, du cosinus et de la tangente de 15° et 75°.

Solution:

1. Déterminons la valeur de x, puis celle de AE.

   En appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle BDE, on a :

$$\begin{array}{rcl} BE^2 &=& BD^2 + DE^2 \\ (1-x)^2 &=& x^2 + (2-\sqrt{2})^2 \\ x^2 - 2x + 1 &=& x^2 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 \\ -2x + 1 &=& 7 - 4\sqrt{3} \\ 2x &=& 4\sqrt{3} - 6 \end{array}$$

   Donc $x = 2\sqrt{3} - 3$

   En appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle AEC, on a :

$$\begin{array}{rcl} AE^2 &=& AC^2 + CE^2 \\ &=& \sqrt{3}^2 + (2\sqrt{3} - 3)^2 \\ &=& 3 + 12 - 12\sqrt{3} + 9 \\ &=& 24 - 12\sqrt{3} \\ AE^2 &=& 4(6 - 3\sqrt{3}) \end{array}$$

Donc $AE = 2\sqrt{6-3\sqrt{3}}$

2. Montrons que $\dfrac{AE}{x} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ et déduisons la valeur du sinus, du cosinus et de la tangente de 15° et 75°.

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{x} &= \frac{2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-3} \\
&= \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
\frac{AE}{x} &= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{AE}{x} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$ car $(2\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$.

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \frac{CE}{AE} \\
&= \frac{1}{\frac{AE}{CE}} \\
&= \frac{1}{\frac{AE}{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\
\sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\
\cos 15^\circ &= \sqrt{1-\sin^2 15^\circ} \\
&= \sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})^2} \\
&= \sqrt{(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})^2} \\
\cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan 15^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\
\tan 15^\circ &= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Les angles 15° et 75° étant complémentaires, on a :
$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et
$\tan 75^\circ = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. ■

CHAPITRE QUATRE

UTILITÉ DE L'ORIGAMI DANS L'ENSEIGNEMENT

4.1 Utilité de l'origami

En tant qu'art, l'origami permet d'observer et de représenter sur un papier différents objets de la nature. Une fois la représentation des objets terminés, certaines personnes à l'instar de Huzita, Akira Yoshizawa, Tomoko Fusé, Eric Gjerde, Thomas Hull et bien d'autres ont réussi à construire, démontrer et à expliquer ces différentes représentations via des méthodes scientifiques. Une fois ces constructions justifiées, l'origami permet de montrer les insuffisances de celles-ci. Nous en voulons pour exemple la trisection d'un angle, la duplication du cube et la construction de l'heptagone régulier qui sont des notions qu'on ne peut construire à la règle et au compas. L'origami est une science utilisant essentiellement les méthodes mathématiques pour démontrer les constructions ; elle a de nombreuses applications. Entre autres, nous pouvons citer :

- La géométrie
- La décoration
- La robotique
- L'ingénierie
- L'architecture dans la conception d'une grande variétés de produit fonctionnels
- La médecine pour la rééducation des personnes âgées ou infirmes
- La biologie
- L'informatique

4.2 Origami et pédagogie

Dès le début des années 1800, Friedrich FROBEL considérait que l'assemblage, le tressage, le pliage et le découpage des papiers étaient des aides pédagogiques au développement des enfants. De plus, vue les nombreuses activités mathématiques qu'offre l'origami sur le plan de la géométrie, l'algèbre et l'analyse, il est tout à fait normal que les enseignants, les professionnels de l'enseignement et les amoureux de l'enseignement examinent comment utiliser l'origami pour transmettre et susciter le goût des mathématiques chez le jeune élève du secondaire. Dans ce sciage, Thomas HULL dans son ouvrage intitulé ***projet of origami*** recense trente (30) activités portant sur la méthode mathématiques dans lequel il propose de nombreuses approches pédagogiques pour enseigner et faire comprendre aux jeunes élèves et étudiants du monde l'importance de l'origami.

Il faut également mentionner que les constructions par origami sont les constructions géométriques par pliage. Dans leur développement le plus complet, ces constructions permettent de construire tous les nombres constructibles à la règle et au compas (vue en classe de seconde C), mais également de trisecter un angle (voir l'activité 7, page 63), de dupliquer un cube et de construire un heptagone régulier. En outre, ces constructions par origami sont équivalentes aux constructions utilisant la règle, le compas et les coniques de foyer, de directrices et d'excentricités constructibles. Notons également que selon les méthodes de pliages utilisées, on obtient des procédés plus riches que ceux propres à la règle et au compas.

Ainsi, au regard des domaines d'application de l'origami et de son utilité en tant que science, nous pouvons affirmer que celui-ci permet d'expliquer une notion et ses applications.

Qu'il soit proposé par l'enseignent comme outil de substitution à la règle et au compas ou comme finalité d'une construction géométrique, le pliage peut aider l'élève à progresser en géométrie.

4.3 Intérêts et limites de l'origami

4.3.1 Intérêt de l'origami

Le croisement de l'art et de la science à l'école s'inscrit dans le courant actuelle de certaine recherche pédagogique.

L'intérêt de créer un lien entre Art et science au lycée est multiple et relevant :

i) Approfondir les apprentissages à l'école.
   - Créer des synergies entre acteurs culturels, scientifiques et enseignants pour approfondir les apprentissages et notamment concernant les compétences transversales ;
   - enrichir par l'interdisciplinarité.

ii) Enrichir pour l'avenir
   - Intégrer et assimiler les pratiques scientifiques et artistiques pour s'épanouir et s'exprimer ;
   - stimuler la créativité ;
   - donner des outils citoyen ;
   - décloisonner les mathématiques et intégrer une approche interdisciplinaire pour appréhender la complexité du monde ;
   - ouvrir la dimension culturelle des sciences aux élèves pour leur donner les clés de lecture du monde et pour en faire des adultes capable d'exercer un rôle citoyen avec un esprit critique dans leur vie future.

iii) Lutter contre la désaffectation des jeunes pour les mathématiques.
   - Donner le plaisir des sciences par l'expérimentation alternative et le questionnement.

4.3.2 Intérêt didactique et fiche pédagogique

4.3.2.1 Intérêt didactique

- Le pliage enthousiasme et motive les élèves car le mode de travail est différent et la construction géométrique est moins fastidieuse ;
- il favorise la découverte de la symétrie : les jeux de pliages permettent d'établir les vraies compétences en matière de constructions symétriques ;

- il rend les mathématiques tangibles ;
- il permet d'amener l'élève à déployer un raisonnement mathématique du type analogique, déductif et inductif ;
- de manière pratique, l'origami transpose les déductions étalées sur un tableau ;
- plier ajoute une logique de déduction aux problèmes car l'élève observe comment quitter d'une forme à une autre ;
- il ne semble pas ajouter un obstacle à l'abstraction mathématique, la phase de pliage d'un objet figuratif étant bien dissocier de celle de l'analyse et de la construction des figures ;
- il permet d'éviter de proposer des exercices qui peuvent paraitre dénués de sens pour les élèves ; l'objectif de la construction est concret et l'élève peut ainsi donner du sens à ses apprentissages ;
- Donner le plaisir des sciences par l'expérimentation alternative et le questionnement ;
- communiquer à l'aide du langage mathématique ;
- le pliage peut aider l'élève à progresser en géométrie.

Remarques 4.1 :
(importance des vidéos de construction) 1) Il faut noté que la réalisation des vidéos de construction permet de mieux utiliser le numérique comme outil didactique dans le système éducatif.
2) Les protocoles de constructions sont écrites et peuvent cacher des difficultés réelles, alors que les vidéos permettent de visualisés tous les aspects d'une construction.
3) S'il est vrai que les constructions géométriques par origami n'ont pas besoin des outils géométriques pour être réaliser, il n'en demeure pas moins que ses derniers sont nécessaires pour la vérification de certaines propriétés dans une salle de classe.

4.3.2.2 Fiche pédagogique

Classe : Toutes les classes du secondaire.

Titre : Construction géométrique par origami.

Objectifs pédagogiques :

- Amener les élèves à justifier leur observation ;
- amener les élèves à déployer un raisonnement mathématique à partir de leur observation ;

– Initier les élèves à la rédaction d'une preuve de ce qu'ils ont observé ;
– résoudre des problèmes par observation ;
– développer l'esprit critique, l'esprit de curiosité, le sens de l'ordre et de la méthode, le sens de la rigueur et de la concision ;
– communiquer à l'aide du langage mathématique à partir des faits observés.

Motivation : Ce mémoire donne aux enseignants de mathématiques des outils pour :

– Motiver les élèves à la recherche des méthodes de construction géométrique ;
– palier au manque de travaux pratique et d'exercice à caractère expérimental en mathématique ;
– palier au manque d'instruments de géométrie dans les salles de classe et faire des constructions géométriques sans instrument de géométrie.

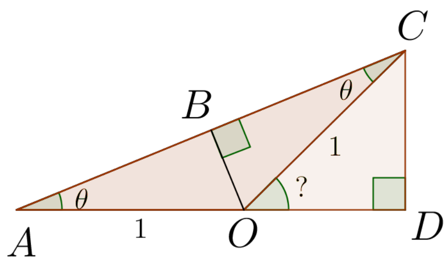
TABLE 4.1 – Fiche pédagogique A

	Activité		Point enseignement apprentissage	Observation
	de l'enseignant	de l'élève		
Activité d'apprentissage	Donne le protocole de construction de :			
	- la médiatrice d'un segment et amène les élèves à justifier leur constructions et déduire la construction du milieu d'un segment (classe de 6^e et 5^e) ;	Ecoutent et notent l'activité	Captiver l'attention des élèves.	les échanges
	- la bissectrice d'un angle ;	Exécutent chaque programme		se font avec
	- la médiane issue d'un sommet d'un triangle ;	de construction et échangent	Provoquer le questionnement	les voisins
	- le symétrique d'un point par rapport à un autre point ;	avec leurs voisins	Contrôler les constructions	d'à-côté et les
	- la perpendiculaire à une droite passant par un point et la déduction de la parallèle à une droite passant par un point ;	Justifie leurs constructions		voisins de
	- le symétrique d'un point par rapport à une droite		Institutionnaliser les	devant ou
	- un triangle rectangle particulier (toutes les classes) ;		méthodes observées	de derrière

TABLE 4.2 – Fiche pédagogique B

	- un triangle équilatéral (classe de 6^e et 5^e) et la recherche des méthodes de constructions d'un triangle équilatéral maximal dans un papier carré (classe de P_C et T_C) - un triangle isocèle non équilatéral (classe de 6^e et 5^e) - un carrée (classe de 6^e et 5^e) - un rectangle (classe de 6^e et 5^e) - un trapèze rectangle (classe de 6^e et 5^e) - un trapèze isocèle (classe de 6^e et 5^e) - un hexagone régulier (classe de 6^e en $2^{nd}C$)		Utiliser un vidéo projecteur s'il y en a	Les vidéos sont remis aux élèves pour révision à la maison
Exercice d'application	Kevin voudrait aider Hervé à établir les formules de linéarisation et de duplication. Pour cela, elle construis à l'aide d'un papier carré : - Un triangle ABC rectangle en D avec un petit angle θ tel que $Mes\widehat{A} = \theta$; - un point O du segment $[AD]$ tel que $OA = 1cm$ - la perpendiculaire au segment $[AC]$ passant par O.	Traitent individuellement échangent chaque fois avec les voisins puis participent activement aux échangent	Captiver l'attention des élèves	les échanges se font avec les voisins d'à-côté et les voisins de devant ou de

TABLE 4.3 – Fiche pédagogique C

Exercices		Posent des questions	Provoquer le questionnement Contrôler les pré-requis	
	a) Aide-le à exprimer l'angle $\widehat{COD}$ et les distances AB, BC, CD et OD en fonction de θ.			Ce contrôle peut se faire oralement
	b) Aide-le à déduire la valeur de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$		Découvrir les propriétés de linéarisation et de duplication	L'enseignant(e) circule, motive et désigne judicieusement celui qui va au tableau puis, Provoque et facilite les échanges avec toute la classe
	c) Cette méthode permet-elle d'obtenir les formules de linéarisation et de duplications ?		NB : Ce n'est pas en qu'on réalise la construction mais à la maison classe (par chaque élève)	

4.3.3 Limites de l'origami

– Le pliage ajoute une phase supplémentaire à la séance de géométrie : l'enseignant peut avoir l'impression de s'éloigner de ses objectifs d'apprentissages ;
– il ne permet pas d'étudier réellement tous les thèmes de la géométrie ;
– il ne permet pas d'aboutir à une étude approfondie : chaque thème étudié demanderait beaucoup plus de temps, il serait nécessaire de revenir de façon différente et approfondie sur chaque activité ;
– il nécessite un apprentissage à part entière et ajoute un obstacle manipulatoire à ceux déjà rencontrés dans les séances de géométrie "*classique*".

4.4 Origami et approche par les compétences (A.P.C)

L'approche par les compétence à été adopté le 04 septembre 2014 à Mbalmayo et elle est basée sur les entrées par les situations de vie ou situation problème et éventuellement par les activités de type expérimentales.
Nous proposons ci-dessous quelques situations utilisant l'origami

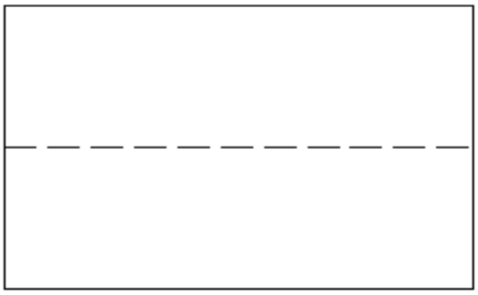
4.4.1 Origami et activités de découvertes

La situation 1 suivante est tiré du livre *Cargo* en sixième (page 74).
Situation 1 : Pliage du symétrique d'un point donné par rapport à une droite.
(classe de 6^e et 5^e)
1-a) Sur une feuille, trace une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D).
b- Plie la feuille le long de (D) et marque le point A' en contact avec le point A.
2) Que représente la droite (D) pour le segment $[AA']$?
Contrôle avec tes instruments. On dit que A' est le symétrique de A par rapport à (D).
3) Marque un point B n'appartenant pas à (D) puis, sans pliage construis le point B' symétrique de B par rapport à (D).

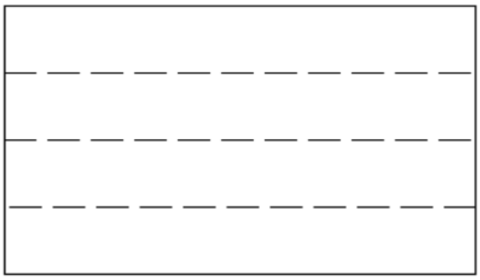
Situation 2 : Présentation d'une pyramide à base triangulaire/tétraèdre régulier (classe de 4^e et 3^e).

PYRAMIDE A BASE TRIANGULAIRE.

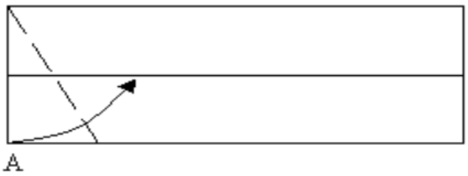
Voici les manipulations pour réaliser à partir d'une feuille de papier A4 une pyramide à base triangulaire.



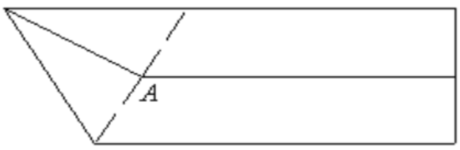
1) Prendre une feuille A4 et la plier en son milieu, puis la déplier.



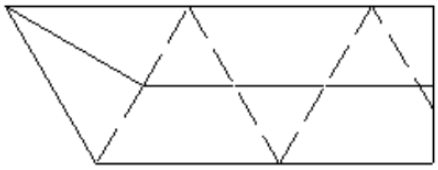
2) Plier alors chacun des bords haut et bas sur la pliure médiane.



3) Plier comme ci-dessus de telle façon que le point *A* se retrouve sur la pliure centrale.

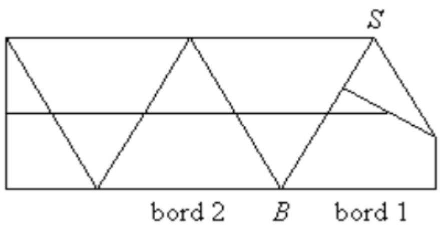


4) Ensuite plier le long du bord précédemment formé.

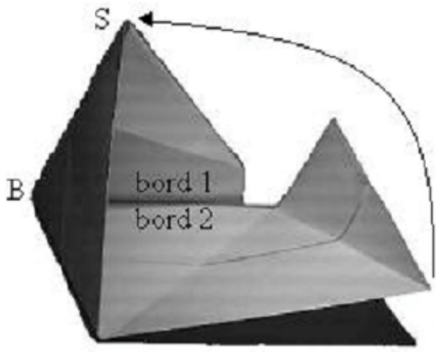


5) Continuer en s'appuyant à chaque fois sur le bord précédemment formé.

6) Voila ce que vous devez obtenir : un joli triangle équilatéral…



7) Déplier le triangle et rabattre le coin supérieur droit comme ci-dessus. Le principe, à présent est de faire coïncider le bord 1 sur le bord 2 autour du point *B*. Normalement le sommet *S* devrait "remonter"…



8) Une photo de la pyramide en construction vue de l'autre côté… Il faut faire rentrer le pseudo triangle (bord 1) dans le petit triangle rectangle à l'extrême droite.

9) Voilà la pyramide construite.

FIGURE 4.1 – Pliage d'une pyramide régulière

Voir vidéo 26.

4.4.2 Origami et activités de consolidations

Activité 1 : Pliage d'une feuille rectangulaire $ABCD$ **en trois parties égales** (classe de 3^e et seconde scientifique)

Audrey affirme à son camarade Loyick qu'elle peut plier une feuille A_4 en procédant de la façon suivante :

- Pliez la médiatrice (IJ) du segment $[AB]$;
- pliez la diagonale $[IC]$ du rectangle $IFCB$ puis, la diagonale $[BD]$ de $ABCD$ et nomme K le point de rencontre de ces deux diagonales ;
- pliez la perpendiculaire (L) à la droite (CD) passant par K ;
- pliez successivement la feuille par rapport à (L) et (BC) ;

Elle prétend le prouver en utilisant la propriété de Thalès et la figure ci-dessous

Voir vidéo 27.

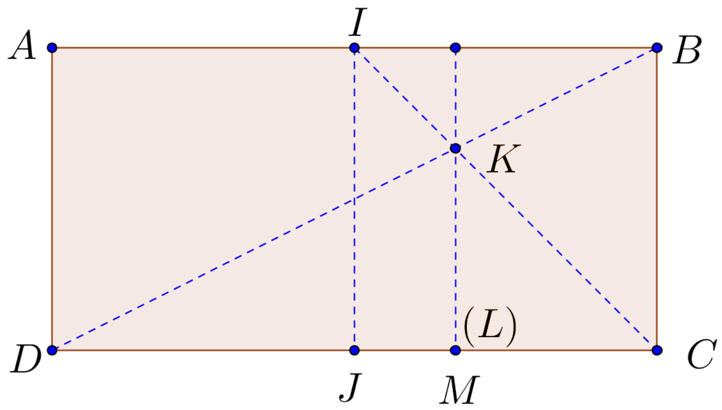


FIGURE 4.2 – Pliage d'une feuille rectangulaire en trois parties égales

A t-elle raison ?

Activité 2 : Trisection d'un angle (classe de seconde scientifique)

La trisection d'un angle est réalisable en pliant une feuille de papier par une construction due à Hisashi Abe (1980). Elle est illustré par la figure ci-dessous **Voir vidéo 28.**

Pour la réaliser, on a procédé comme suit :

- On trace l'angle $\widehat{AOB}$ à couper en trois en plaçant le sommet O au coin d'une feuille de sorte que le bord inférieur soit un des côtés de l'angle ;
- On construit deux parallèles (d) et (d') à la droite (OA) passant par deux points distincts du segment $[OB]$;
- on effectue un pli (m) qui amène le point O sur la droite (d') (en un point o'), et le point C (intersection du bord gauche avec la droite (d)) se trouve déplacé sur la droite (OB) en un point C'. On nomme respectivement par J et R les points d'intersection du pli (m) avec les côtés de la feuille ;
- la demi-droite d'origine O passant par O' est alors une trisectrice de l'angle donné : l'angle $\widehat{AOO'}$ vaut $\dfrac{1}{3}$ de l'angle $\widehat{AOB}$;
- le point D (intersection du bord gauche avec la droite d') se trouve déplacé sur la droite (JO') en un point D'. La demi-droite , d'origine O passant par D' est l'autre trisectrice.

Démontrer que l'angle $\widehat{AOO'}$ vaut $\dfrac{1}{3}$ de l'angle $\widehat{AOB}$.

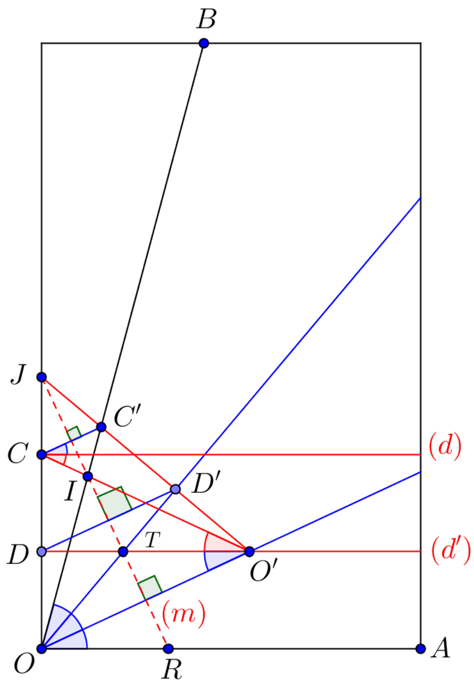


FIGURE 4.3 – Trisection

4.4.3 Origami et situation problème

I) Fiche professeur :

1) Niveau

Cette situation problème est construite pour les classes de première scientifique et de terminale scientifique.

2) Situation-problème proposée :

Plier un triangle équilatéral d'aire maximale à l'intérieur d'un papier carré de façon à ce que le côté du triangle équilatéral soit supérieur à celui du carré.

3) Contenu mathématique

Aire, polygones réguliers, transformations du plan et dérivation.

4) Support T.I.C.E que l'on peut utiliser

Vidéo-projecteur et logiciel de géométrie dynamique.

5) Compétences mises en œuvre :

5-1) Compétences mathématiques :

– Déterminer l'aire d'un triangle en fonction d'une inconnu.

– Résoudre un problème de construction à l'aide des transformations du plan.

– Utiliser la dérivation pour optimiser.

5-2) Compétences T.I.C.E :

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire :

– Un segment de longueur donnée.

– Un polygone régulier et ses axes de symétries.

– La courbe représentative d'une fonction donnée.

6) Stratégie pédagogique :

Tout d'abord, précisons que pour résoudre un problème de construction, on procède généralement en deux étapes : analyse et synthèse.

– L'analyse consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.

– La synthèse consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et, éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

  Ainsi, la première partie se fera en classe entière et, le professeur animera la recherche des élèves dans la résolution du problème ouvert en dessinant (en projetant) un triangle équilatéral dans un carré de manière à ce que le côté du triangle soit supérieur à celui du carré et complétera au fur et à mesure.

  La deuxième partie peut être préparée à la maison et terminée en classe devant ordinateurs en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

7) Place de l'activité dans la progression des apprentissages

– Dans le chapitre sur les dérivations, en appliquant la dérivation pour optimiser.

– Dans le chapitre des transformations du plan, pour exhibé un problème de construction.

II) Situation problème

1) Énoncé :

Avant sa mort, un mathématicien très riche confia à ses enfants qu'il à cacher le code de son coffre-fort dans un papier carré $ABCD$ se trouvant dans le premier coffre de son lit et il précisa que le code apparaitra si et seulement si ces enfants réussissent à plier un triangle équilatéral d'aire maximale à l'intérieur de ce papier carré de façon à ce que le côté du triangle équilatéral soit supérieure à celui du carré.

Il confia la clé du coffre de son lit à son petit frère à qui il confia la tâche de donner à l'enfant (l'héritier) qui aura réussi le pliage du dit papier.
Aider le futur héritier de ce mathématicien à résoudre ce problème.

2) Justification

Le problème posé ci-dessus est bien une situation problème car :

- **Elle a un sens** puisqu'elle interpelle l'apprenant sur les méthodes de construction d'un triangle équilatéral utilisant un papier carré et il se sent concerné puisqu'il possède les outils permettant d'affronter (de résoudre) le problème posé.
- **Elle est liée à un obstacle :** l'élève devra tout d'abord proposer une figure répondant à la question, ensuite s'assurer qu'elle y répond. Elle se présente comme un défi que l'élève doit relever et détruis ainsi la représentation mentale de l'élève (celle qui pense qu'il est impossible de plier un triangle équilatéral dans un papier carré tel que le côté du triangle soit supérieure à celui du carré) et elle plonge l'élève dans un conflit socio-cognitif.
- **Elle fait naître un questionnement** chez les apprenants : comment construire un triangle équilatéral dans une feuille carrée, puis un triangle équilatéral d'aire maximale et enfin un triangle équilatéral d'aire maximale donc le côté est supérieur à celui du papier carré. Une fois construis, comment prouver ma construction ?
- **elle crée des ruptures** chez les élèves en ce sens qu'elle met en défaut leurs premières représentation (ils pensaient qu'il est impossible de plier un triangle équilatéral dans un papier carré tel que le côté du triangle soit supérieure à celui du carré) et le fait que beaucoup d'élèves pensent que la fonction dérivée d'une fonction ne sert qu'à donner le sens de variation de cette fonction. Elle permet aux élèves de découvrir l'utilité de la notion de dérivé dans un problème de construction et d'optimisation et de faire le lien entre fonction dérivée et optimisation.
- **Elle correspond à une situation complexe** qui est celle de plier un triangle équilatéral d'aire maximale dont le côté est supérieur à celui du carré, puis de justifier la construction et de discuter le nombre de solutions du problème.
- **Elle débouche sur un savoir d'ordre général** qui est **l'origami (l'art de plier des papiers)** et elle permet aux élèves d'intégrer progressivement un certain nombre de compétences transversales et d'évolution dans la construction de savoir-faire. Notons que beaucoup d'enfants pratiquent l'origami sans le savoir et précisons

aussi que dans les origamis beaucoup de pliages de base nécessitent la construction des triangles équilatéraux.

– **Elle fait l'objet de plusieurs moment de métacognition** et permet de lié le concept de dérivation à l'optimisation.

Conclusion et perspectives

En somme, les différentes analyses présentées plus haut nous permettent d'affirmer dans un premier temps que l'origami est un sujet d'étude pour les enseignants de mathématiques en particulier dans le domaine de la géométrie puisqu'il peut être utilisé comme support des apprentissages géométriques. Dans un second temps, il est une véritable ressource mathématiques et peut servir de travaux pratiques de géométrie et d'algèbre. De plus, il répond à la nouvelle approche pédagogique (l'approche par compétence (A.P.C)) en ce sens que le jeune apprenant pourra voir de manière concrète comment les mathématiques s'appliquent. En fin, l'origami peut dans le contexte Africain (camerounais en ce qui nous concerne) remplacer les TICE en ce sens qu'il permet de visualiser certaines figures de l'espace.

Bibliographie

Livres consultés

[1] Thomas HULL. (2013). *Project Origami :ACTIVITIES FOR EXPLORING MATHEMATICS, SECOND EDITION*, CRC Press Taylor et Francis group, 341 pages.

[2] Marcel Morales et Alice Morales. (2009) *Les polyèdres réguliers convexes et non convexes par pliage (Origami). [Les polyèdres par Origami]* , Edition Morales.

Manuels scolaires consultés

[3] Christophe AKELE et al. (1992) *CIAM* 1^{re} *SM*. 58 rue Jean-Bleuzen 92178 Vanves Cedex, EDICEF, 320 pages.

[4] Joel BAILLIEUX et al. (1992) *CIAM* 4^e. 58 rue Jean-Bleuzen 92178 Vanves Cedex, EDICEF, 223 pages.

[5] Walter Paul KOMO et al *CARGO* 6^e, Hachette.

[6] TEGNINKO Valentin et al.(2012) *L'Excellence en Mathématiques* 6^e, N^{mi} Education, 172 pages.

Sites internet consultés

http : $//fr.wikipedia.org/wiki/$(Origami : 28/11/2014)

http : $//fr.wikipedia.org/wiki/$(Nombre constructible : 28/11/2014)

http : $//fr.wikipedia.org/wiki/(Math\%C$3%A9matiques des origamis : 28/11/2014)

Pyramide : *www.SylvainEtiènne@yahoo.fr*