REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE Mathématiques
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

JEUX FINIS SOUS FORME NORMALE PARAMÉTRÉS

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme des professeurs de l'enseignement secondaire deuxième grade (Di.P.E.S II)

Par :

WABET Yves Decastro
Licencié en Matématiques

Sous la direction
DIFFO LAMBO Lawrence
Maître de Conférences

Année Académique
2015-2016

Dédicace

Ce mémoire est dédié à mon papa **LEUNSO JOSEPH ELIONORD**

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance et mon sincère respect au professeur **DIFFO LAMBO LAWRENCE** pour toute la disponibilité dont il a fait preuve durant mon encadrement. Ses conseils, remarques, suggestions m'ont beaucoup aidé tant sur le plan intellectuel que sur le plan moral et social. Qu'il en soit remercié ici sincèrement. Sans lui ce travail n'aurait pas atteint son aboutissement. Je le remercie pour son écoute, sa patience et l'intérêt qu'il a porté à toutes mes questions et mes idées.

Je voudrais aussi remercier mon camarade LEPATIO TANING Guy Merlin (Paix à son âme) avec qui ce travail a commencé et dont les nombreux conseils m'ont aidé.

Je voudrais remercier ma maman NYA Sidonie, mon papa LEUNSO Joseph et tous mes frères et soeurs dont le soutien moral a été d'une grande aide.

Je voudrais remercier Monsieur KEUTCHALI Jean Pierre pour tout son soutien.

Je remercie tous mes amis de près ou de loin qui m'ont apporté le réconfort donc j'avais besoin pour mener à bien ce travail.

Déclaration sur l'honneur

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

signature du candidat.

Resumé

La notion de paramètre étant un élément important du point de vue de l'expérimentation en mathématique, DIFFO LAMBO et NGOUFACK ont établi après avoir défini la notion de **valeur critique en stratégies pures** que dans un jeu fini sous forme normal paramétré, tous les jeux obtenus lorsque le paramètre varie dans un intervalle ne contenant pas de valeur critique ont le même ensemble d'équilibres de Nash en stratégies pures. Dans ce travail, nous généralisons ce résultat aux jeux sous forme normale qui dépendent d'un paramètre appartenant à un espace topologique E, en montrant après avoir défini la notion de **point critique** que lorsque le paramètre varie dans une partie connexe de E ne contenant pas de point critique, tous les jeux obtenus ont le même ensemble d'équilibres de Nash. Ensuite nous définissons la notion de **valeur critique en stratégies mixtes** et montrons dans le cas particulier d'un jeu fini à deux joueurs avec deux stratégies pour chaque joueur que lorsque le paramètre varie dans un intervalle ne contenant pas de valeur critique en stratégies mixtes, les jeux obtenus ont le même ensemble d'équilibres de Nash en stratégies mixtes. Par ailleurs, une méthode est présentée pour déterminer l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes d'un jeu fini sous forme normale paramétré dans le cas de deux joueurs avec deux stratégies pour chaque joueur.

Abstract

The notion of parameter being important for experimentation in mathematics, DIFFO LAMBO and NGOUFACK have proved after defining the notion of critical value in pure strategy, that every finite game obtained when the parameter is in an interval not containing a critical value in pures strategies have the same set of Nash equibrum. In this work, we generalize this result to the game in which payements functions depend on a parameter which is in a topological space. We therefore prove after defining the critical point notion that when the parameter is in a connex subset of a topopological space not containing critical point, the games obtained have the same set of Nash equilibrum. Futhermore, we define the notion of critical value in mixed strategies and prove that in the particular class of normal finites games of two players with two strategies for each player, when the parameter is in an interval not containing a critical value in mixted strategies, the games obtained have the same set of Nash equilibrum in mixed strategies. After that a method has been developped to obtain the set of Nash equilibrum in mixed strategy in the case of two players with two strategies for each player.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **2**

1 Généralités sur les jeux sous forme normale **4**

1.1 Exemple introductif 4

1.2 Quelques définitions 5

1.3 Équilibre de Nash 7

1.3.1 Équilibre de Nash en stratégies pures 8

1.3.2 Équilibre de Nash en stratégies mixtes 10

2 Equilibre de Nash des jeux finis sous forme normale paramétrés en stratégies pures **15**

2.1 Jeux finis sous forme normale à paramètre réel 15

2.2 Jeux finis sous forme normale à paramètre dans un espace topologique . . . 21

3 Equilibre de Nash des jeux finis sous forme paramétré en stratégies mixtes **30**

3.1 Détermination des équilibres de Nash en stratégies mixtes 30

3.1.1 Par le principe d'indifférence 30

3.1.2 En utilisant la fonction de meilleures réponses 33

3.2 Valeurs critiques en stratégies mixtes 36

Conclusion et perspective **40**

Introduction

La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l'interaction stratégique d'un groupe d'agents rationnels poursuivant des buts qui les sont propres. Un "jeu" étant une situation où des joueurs sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles, et ce dans le cadre défini à l'avance par les "règles du jeu", le résultat de ces choix constituant une "issue du jeu", à laquelle est associé un "gain" (ou payement), positif ou négatif, pour chacun des participants. Ainsi, le choix "optimal" pour un joueur dépend généralement de ce que font les autres. Du fait que chacun n'est pas totalement maître de son sort, on dit que les participants se trouvent en situation d'interaction stratégique. La théorie des jeux fut fondée par Von Neumann et Morgenstern en 1944 à la suite de la publication de leur ouvrage intitulé *Theory of games and Economic behavior.*

Une hypothèse fondamentale de la théorie des jeux est de considérer que les agents sont rationnels, c'est-à-dire qu'ils tentent d'arriver à la situation la meilleure pour eux. Dans le cas où les joueurs n'ont pas la possibilité de passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante on parle de jeu non coopératif. Un des pionniers de cette branche (jeu non coopératif) de la théorie des jeux fut John Forbes Nash dont la principale contribution fut un théorème sur un concept de solution qui porte son nom. En effet, en 1949, dans sa thèse intitulée "*jeux non coopératifs*", il définit la notion d'équilibre de Nash, énonce et démontre le théorème fondamental de la théorie des jeux non coopératifs à n joueurs. Les jeux non coopératifs sont formalisés de deux manières différentes mais équivalentes : les jeux sous forme normale et les jeux sous forme extensive.

Un jeu sous forme normale consiste en la donné d'un ensemble de joueurs, d'un ensemble de stratégies pour chaque joueur et d'une fonction de paiement pour chaque joueur. L'objectif de ce type de formalisation est de prédire l'évolution du jeu, ou alors suggérer aux joueurs quelles stratégies implémentées (ou ne pas implémentées). Pour cela, plusieurs outils permettant d'analyser l'issue (ou les issues) d'un jeu sous forme normale fini ont été développés et quelques concepts de solution ont été définis. On peut citer comme exemple la notion de l'équilibre de Nash.

La notion de paramètre étant très importante du point de vue de l'expérimentation en mathématiques, étant donné un jeu sous forme normale, comment se modifie l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures lorsque les paiements dépendent d'un paramètre réel ou de façon plus générale les paiements dépendent d'un paramètre dans un espace topologique (le cas de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$) ? Comment peut-on déterminer ces équilibres ? Par ailleurs, un des problèmes inhérents au concept d'éqilibre de Nash en stratégies pures est que pour certains jeux de tels équilibres n'existent pas. Ainsi, on peut se démander comment varie l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes ? Et comment peut-on déterminer ces équilibres ? Dans un document intitulé " jeux paramétréS ", DIFFO LAMBO et NGOUFACK ont obtenu un résultat permettant déterminer l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures d'un jeu fini sous forme normale paramétré avec le paramètre dans $\mathbb{R}$.

Dans leurs travaux les paiements sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ d'un paramètre. En exploitant ces travaux, nous avons généralisé ce résultat dans le cas où les fonctions de paiement sont des fonctions continues d'un paramètre dans un espace vectoriel normé, plus particulièrement l'espace $\mathbb{R}^m$ en stratégies pures et plus généralement dans un espace topologique. Par la suite une méthode de détermination des équilibres de Nash en stratégies mixtes des jeux finis sous forme normale paramétrés a été développée dans le cas de deux joueurs avec deux stratégies pour chaque joueur.

Le premier chapitre de notre travail rappel les notions (définitions) et le concept d'équilibre de Nash (en stratégies pures et stratégies mixtes) qui sont importants dans les jeux sous forme normale que nous utiliserons dans la suite. Dans le chapitre 2 nous définirons les jeux finis sous forme normale paramétrés et présenterons les résultats (théorème 2.2.1 et le théorème 2.2.2) qui généralisent le théorème obtenu par DIFFO LAMBO et NGOUFACK (théorèmes 2.1.1) au cas où le paramètre est dans un espace topologique. Enfin, au chapitre 3, une méthode basée sur les fonctions de meilleures réponses est développée pour déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes dans le cas d'un jeu fini sous forme normale paramétré de deux joueurs avec deux stratégies pour chaque joueur ; le paramètre ici étant dans $\mathbb{R}$. Par la suite nous démontrons un théorème qui généralise le théorème 2.1.1 du chapitre précédent au cas particulier d'un jeu de deux joueurs avec deux stratégies pour chaque joueur en extension mixte (théorème 3.2.1 et théoréme 3.2.2).

CHAPITRE 1

Généralités sur les jeux sous forme normale

Dans ce chapitre, nous présentons certaines notions abordées dans le cadre des jeux sous forme normale. Le but de la théorie étant de prédire quelle pourra être l'issue du jeu la plus probable ou alors pouvoir recommander aux joueurs quelles actions menées ou pas, nous présenterons quelques concepts qui permettent d'atteindre cet objectif. Ces concepts permettent de dire quand une stratégie est "mieux" qu'une autre stratégie. Nous terminons le chapitre en introduisant la notion de stabilité, définie par la notion d'équilibre de Nash en stratégies pures, puis en stratégies mixtes.

1.1 Exemple introductif

Jeu de la tirelire

Deux étudiants sont choisis au hasard et le jeu suivant leur est proposé. Chacun a la possibilité de mettre $0F$ ou $400F$ dans une tirelire. Après que chaque étudiant ait pris sa décision sans connaitre la décision de l'autre, le contenu de la tirelire est multiplié par $1,5$ et réparti en deux parties égales entre les deux joueurs. Par hypothèse ce jeu n'est disputé qu'une seule fois. Quelles décisions les étudiants vont t-ils prendre ? Pour des raisons d'anonymat, appelons un des étudiants étudiant 1 et l'autre étudiant 2. Examinons les différentes issues de ce jeu.

- Si les deux étudiants ne mettent rien dans la tirelire il ne gagne rien (gain nul).
- Si l'étudiant 1 mets $400F$ et l'autre rien, chacun d'eux recevra $300F$; l'étudiant 1 perdra ainsi $100F$ et l'étudiant 2 gagnera $300F$.
- Si l'étudiant 2 mets $400F$ et l'autre rien, chacun d'eux recevra $300F$; l'étudiant 1 gagnera ainsi $300F$ et l'étudiant 2 perdra $100F$.
- Si les deux étudiants mettent chacun $400F$, chacun recevra $600F$; les deux étudiant gagneront chacun $200F$.

Cette situation peut être résumée par le tableau suivant :

1→ 2↓	0F	400F
0F	0 / 0	-100 / 300
400F	300 / -100	200 / 200

$1 =$ étudiant 1, $2 =$ étudiant 2

Le tableau ainsi obtenu s'appelle matrice des gains où le joueur 1 joue en choisissant une colonne et le joueur 2 joue en choisissant une ligne. On a ainsi décrit ce jeu sous forme normale.

1.2 Quelques définitions

Définition 1.2.1 *Un **jeu** est une situation où les participants sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles, et ce dans le cadre défini à l'avance par les "règles du jeu", le résultat de ces choix constituant une "issue du jeu", à laquelle est associé un **"gain"** (ou payement), positif ou négatif, pour chacun des participants.*

Définition 1.2.2 ***un joueur** est une personne qui fait la décision dans un jeu. C'est une personne dont les choix influencent le résultat du jeu.*

Dans le jeu de l'exemple introductif, les deux étudiants choisis sont les deux joueurs car ce qu'ils gagnent à l'issue du jeu dépend du choix de chacun d'entre eux .

L'ensemble des joueurs d'un jeu est noté N .

Définition 1.2.3 *une **stratégie** est la spécification complète du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation.*

Définition 1.2.4 *une **stratégie pure** du joueur i est une stratégie de ce joueur qui est choisi par celui-ci avec certitude.*

- On note Z_i l'ensemble des stratégies pures du joueur i et par z_i une stratégie pure de ce joueur.
  Dans le jeu de l'exemple introductif, l'ensemble des stratégies pures le l'étudiant 2 est $Z_2 = \{0F,\ 400F\}$ et donc ses stratégies pures sont $z_2^1 = 0F$ et $z_2^2 = 400F$.
- $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$ est appelé **espace des stratégies**.
  Dans le jeu de l'exemple introductif, l'espace des stratégies est $Z = Z_1 \times Z_2 = \{0F,\ 400F\} \times \{0F,\ 400F\}$
- Chaque élément z de Z (c'est à dire $z = (z_1, \cdots, z_n)$ où $\forall i \in N;\ z_i \in Z_i$) est appelé une **issue du jeu** ou un **profil de stratégies.** Il correspond à un choix par chaque joueur d'une de ses stratégies.
  Dans le jeu de l'exemple introductif, une issue du jeu est $z = (400F,\ 400F)$

– Pour chaque joueur i, on note : $Z_{-i} = \times_{j \neq i} Z_j = Z_1 \times \cdots \times Z_{i-1} \times Z_{i+1} \times \cdots \times Z_n$. Si $z = (z_1, \cdots, z_n)$, alors on note z_{-i} le profil z des stratégies autres que celles du joueur i : $z_{-i} = (z_1, \cdots, z_{i-1}, z_{i+1}, \cdots, z_n)$.

Remarque 1.2.1

- z_i n'est pas nécessairement un nombre ; ça peut être aussi un vecteur ou une fonction.
- Si $z \in Z$, alors $\forall i \in N$, $z_{-i} \in Z_{-i}$.
- Si $z = (z_1, ..., z_n)$ est un profil de stratégies, alors $\forall i \in N$, $z = (z_i, z_{-i})$.

Définition 1.2.5 *On appelle* ***utilité ou fonction de payement ou de gain*** *d'un joueur i la fonction numérique u_i définie sur le produit cartésien $Z_1 \times \cdots \times Z_n$ qui à chaque profile de stratégie associe un gain au joueur i.*

$$\begin{array}{rccc} u_i : & Z_1 \times \cdots \times Z_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_1, \cdots, z_n) & \longmapsto & u_i(z) \end{array}$$

Définition 1.2.6 *Le joueur i* ***préfère strictement l''issue*** *z* ***à l'issue*** *z' si $u_i(z) > u_i(z')$. On dit qu'il est* ***indifférent*** *aux deux issues si $u_i(z) = u_i(z')$. ,*

Dans le jeu de l'exemple introductif, $u_1(0F, 400F) = 300$; $u_2(0F, 400F) = -100$.
Un joueur est dit rationnel s'il cherche à maximiser ses gains.

Définition 1.2.7 *Un jeu est* ***à information complète*** *si chaque joueur connait tous les autres joueurs, le chronométrage du jeu, les ensembles de stratégies et les fonctions gains de tous les joueurs, y compris les siens.*

Définition 1.2.8 *Un jeu est* ***fini*** *si le nombre de joueurs et le nombre de stratégies sont finis . C'est à dire que l'ensemble N des joueurs est fini et que pour tout joueur i, son ensemble de stratégie Z_i est fini.*

Le jeu de la tirelire ci-dessus est un jeu fini car $N = \{1, 2\}$ et $Z_1 = Z_1 = \{0F, 400F\}$.

Définition 1.2.9 *Un jeu est* ***statique*** *lorsque les joueurs choississent simultanément leurs actions et reçoivent ensuite leurs gains respectifs.*

Définition 1.2.10 *Un jeu* ***sous forme normale (ou sous forme stratégique)*** *est un triplet ordonné : $G = (N, (Z_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ où $N = \{1, \cdots, n\}$ est l'ensemble des joueurs, Z_i l'ensemble des stratégies du joueur i et u_i la fonction de payement du joueur i.*

Le jeu de la tirelire de l'exemple introductif a été formalisé sous forme d'un jeu sous forme normale (ou stratégique).

Définition 1.2.11 ***La fonction de meilleure réponse du joueur*** *i est la fonction m_i qui associe à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs, les stratégies du joueur i qui rendent son gain maximal .*

$$m_i : Z_{-i} \longrightarrow P(Z_i)$$

$$\begin{aligned} z_{-i} \longmapsto m_i(z_{-i)} &= \{l_i \in Z_i : \forall t_i \in Z_i, u_i(l_i, z_{-i}) \geq u_i(t_i, z_{-i})\} \\ &= \left\{ l_i \in Z_i : u_i(l_i, z_{-i}) = \max_{t_i \in Z_i} u_i(t_i, z_{-i}) \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, $m_i(z_{-i})$ est un sous ensemble de l'ensemble des stratégies Z_i de i éventuellement vide.

Tout élément l_i de $m_i(z_{-i})$ est appelé *meilleure réponse* du joueur i au profil de stratégies z_{-i} des autres joueurs.

Définition 1.2.12 *La stratégie l_i du joueur i est une de ses meilleures réponses au profil de stratégies z_{-i} des autres joueurs si :*

$\forall t_i \in Z_{-i}$, $u_i(l_i, z_{-i}) \geq u_i(t_i, z_{-i})$

Définition 1.2.13 ***La fonction de meilleure réponse*** *(sans précision de joueur) est la fonction m définie sur $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$ à valeur dans Z par : $m(z) = (l_1, \cdots, l_n)$ où $\forall i \in \{1; \cdots; n\}$, $l_i \in m_i(z_{-i})$.*

La fonction meilleure réponse associe à un profil de stratégies z, une meilleure réponse de chaque joueur i au profil z_{-i} de stratégies des autres joueurs.

Dans le jeu de l'exemple introductif, $m_1(0) = \{0\}$, donc l'étudiant 1 gagnerait à ne rien mettre dans la tirelire si l'étudiant 2 ne met rien.

Proposition 1.2.1 *Soit $G = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jeu* ***sous forme normale,*** *$\forall$ $\hat{z}_i, \check{z}_i \in Z_i$, $\forall$ $z_{-i} \in Z_{-i}$ si $\hat{z}_i \in m_i(z_{-i})$ et $\check{z}_i \in m_i(z_{-i})$ alors $u_i(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i(\check{z}_i, z_{-i})$.*

Preuve. Soient $\hat{z}_i, \check{z}_i \in Z_i$, soit $z_{-i} \in Z_{-i}$. Supposons que $z_i \in m_i(z_{-i})$ et $t_i \in m_i(z_{-i})$.

Puisque $\hat{z}_i \in m_i(z_{-i})$ et $\check{z}_i \in Z_i$ on a $u_i(z_i, z_{-i}) \geq u_i(t_i, z_{-i})$ (1) par définition de la fonction m_i

De même, $\check{z}_i \in m_i(z_{-i})$ et $\hat{z}_i \in Z_i$ alors $u_i(\hat{z}_i, z_{-i}) \leq u_i(\check{z}_i, z_{-i})$ (2)

Des inégalités (1) et (2) il vient que $u_i(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i(\check{z}_i, z_{-i})$.

D'où $\forall$ $\hat{z}_i, \check{z}_i \in Z_i$, $\forall$ $z_{-i} \in Z_{-i}$ si $\hat{z}_i \in m_i(z_{-i})$ et $\check{z}_i \in m_i(z_{-i})$ alors $u_i(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i(\check{z}_i, z_{-i})$. ■

1.3 Équilibre de Nash

Dans cette partie est exposé le concept d'équilibre de Nash susceptible de prédire l'issue d'un jeu ou d'analyser le comportement des joueurs. A la question : comment les joueurs vont t-il se comporter ? Ou que va t-il se passer ? On peut donner au moins trois interprétations différentes possibles :

- Une interprétation empirique ou descriptive : comment dans les faits qu'on peut observer les joueurs jouent t-ils ?
- Une interprétation normative : comment devrait jouer les joueurs dans un jeu donné ?
- Une interprétation théorique : que peut-t-on prédire sur ce qui arrivera dans un jeu donné en admettant que les joueurs sont "raisonnables", ou "rationnels".

Dans la suite l'approche théorique est celle qui nous permettra de définir le concept d'équilibre de Nash pour répondre aux questions posées ci-dessus.

1.3.1 Équilibre de Nash en stratégies pures

Définition 1.3.1 *Un profil de stratégies $z^* = (z_1^*, \cdots, z_n^*)$ est* ***un équilibre de Nash*** *du jeu $G = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ si aucun joueur i n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie z_i^* (quand les autres joueurs continuent à jouer le profil z_{-i}^*)*

On note $Nash(G)$ l'ensemble des équilibres de Nash du jeu G.

$$z^* = (z_1^*, \cdots, z_n^*) \in Nash(G) \Leftrightarrow \forall i \in N, \forall z_i \in Z_i,\ u_i(z_i^*, z_{-i}^*) \geq u_i(z_i, z_{-i}^*).$$

Détermination de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures

a) Recherche des meilleures réponses

Proposition 1.3.1 *: Soit $G = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale fini. $\forall$ $z^* = (z_1^*, \cdots, z_n^*) \in Z$, $z^* \in Nash(G) \Leftrightarrow \forall i \in N,\ z_i^* \in m_i(z_{-i}^*)$*

Preuve. $\Longrightarrow$) Supposons que $Nash(G) \neq \varnothing$. Soit $z^* = (z_1^*, \cdots, z_n^*) \in Nash(G)$

$\forall i \in N\ \forall t_i \in Z_i,\ u_i(z_i^*, z_{-i}^*) \geq u_i(t_i, z_{-i}^*)$ car $z^* \in Nash(G)$
Donc $\forall t_i \in Z_i,\ u_i(z_i^*, z_{-i}^*) \geq u_i(t_i, z_{-i}^*)$
D'où $z_i^* \in m_i(z_{-i}^*)$.
$\Longleftarrow$) Supposons que $\forall i \in N,\ z_i^* \in m_i(z_{-i}^*)$
$\forall i \in N\ \forall t_i \in Z_i,\ u_i(z_i^*, z_{-i}^*) \geq u_i(t_i, z_{-i}^*)$ car $z_i^* \in m_i(z_{-i}^*)$ et $t_i \in Z$.
Donc $\forall t_i \in Z_i,\ u_i(z_i^*, z_{-i}^*) \geq u_i(t_i, z_{-i}^*)$. D'où : $z^* \in Nash(G)$.
Finalement, $\forall$ $z^* = (z_1^*, \cdots, z_n^*) \in Z$, $z^* \in Nash(G) \Leftrightarrow \forall i \in N,\ z_i^* \in m_i(z_{-i}^*)$ ∎

La méthode de détermination de l'ensemble des équilibres de Nash se décline en deux étapes successives :

i) Déterminer la fonction de meilleure réponse de chaque joueur :

$$u_i(z_i, z_{-i}) = \max_{t_i \in Z_i} u_i(t_i, z_{-i}) \Rightarrow z_i \in m_i(z_{-i})$$

ii) Trouver l'intersection des fonctions de meilleures réponses. Ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 \in m_1(z_{-1}) = m_1(z_2, \cdots, z_n) \\ z_2 \in m_2(z_{-2}) = m_2(z_1, z_3, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ z_n \in m_n(z_{-n}) = m_n(z_1, \cdots, z_{n-1}) \end{cases}$$

avec pour inconnu $z = (z_1 \cdots, z_n) \in Z$

Les solutions de ce système sont les équilibres de Nash du jeu.

Exemple 1.3.1 *Appliquons cette méthode au jeu de la tirelire*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	*0F*	*400F*
0F	0 0	-100 300
400F	300 -100	200 200

$m_1(0F) = 0$ *et* $m_1(400F) = 0$

$m_2(0F) = 0$ *et* $m_2(400F) = 0$

Donc le profil de stratégies (0F,0F) est un équilibre de Nash du jeu de la tirelire.

On peut cocher en bleu les meilleures réponses du joueur 1 en fonction des choix du joueur 2 et on coche en vert les meilleures réponses du joueur 2 en fonction des choix du joueur 1.

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	*0F*	*400F*
0F	$0\surd$ $0\surd$	-100 $300\surd$
400F	$300\surd$ -100	200 200

Les meilleures réponses des joueurs 1 et 2 coïncident en un seul profil de stratégies (0F, 0F). Donc (0F, 0F) est le seul équilibre de Nash de ce jeu.

b) Par la définiton de l'équilibre de Nash

On utilise la matrice de déviation. La matrice de déviation du jeu de la tirelire est donnée par

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	0F	400F
0F	0 0	$\overleftarrow{-100}$ 300
400F	300 $-100\uparrow$	$\overleftarrow{200}$ $200\uparrow$

Le joueur 1 dévie horizontalement et le joueur 2 verticalement. La case où il n'y a aucune déviation correspond à l'équilibre de Nash.

Dans ce jeu il s'agit de la case (0F, 0F).

1.3.2 Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Etant donné un jeu sous forme normale, on étend l'ensemble des stratégies d'un joueur à l'ensemble des distributions de probabiltés sur ses stratégies. Les éléments de ce nouveau ensemble sont appelés des stratégies mixtes, tandis que les éléments de l'ensemble de départ sont appélés stratégies pures. Ainsi, une stratégie mixte d'un joueur est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures de ce joueur.

Définition 1.3.2 *Soient* $G = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ *un jeu fini sous forme normale, on appelle extension mixte de* G *le jeu sous forme normale* $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N})$ *où pour tout* $i \in N$

1) $S_i = \left\{ s_i = \left(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k_i}\right) \in (\mathbb{R}_+)^{k_i} \,/ \sum\limits_{k=1}^{k_i} s_i^k = 1 \right\}$

2) $\forall s \in S, R_i(s) = \sum\limits_{z\in Z} \prod\limits_{j=1}^{n} s_j^{p_j} u_i(z)$

- $z_j^{p_j} \in Z$ *s'appelle une stratégie pure*
- z *s'appelle une situation en stratégie pure*
- $s_i = \left(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k_i}\right) \in S_i$ *s'appelle une stratégie mixte du joueur* i.
- $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S$ *s'appelle une situation en stratégie mixte.*

Définition 1.3.3 *Soit* $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N})$ *un jeu sous forme normale en extension mixte. Une situation* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*) \in S$ *est un équilibre de Nash en extension mixte si* $\forall i \in N, \forall s_i \in S_i, R_i(s^*) \geq R_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$.

Théorème 1.3.1 ***Caractérisation d'un équilibre de Nash en extension mixte***

Soit $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N})$ *un jeu sous forme normale en extension mixte.* $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*) \in S$ *est un équilibre de Nash en extension mixte si et seulement si* $\forall i \in N, \forall z_i^l \in Z_i, \forall z_i^t \in Z_i, R_i\left(z_i^l, s_{-i}^*\right) > R_i\left(z_i^t, s_{-i}^*\right) \Longrightarrow z_i^t = 0$.

Preuve. Soit $s \in S$ un équilibre de Nash. Suppposons qu'ils existent $z_i^l \in Z_i$ et $z_i^t \in Z_i$, tels que $R_i\left(z_i^l, s_{-i}^*\right) > R_i\left(z_i^t, s_{-i}^*\right)$ et que $z_i^t \neq 0$.

Remplaçons $s_i = \left(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k_i}\right)$ par $\sigma_i = \left(\sigma_i^1, \sigma_i^2, ..., \sigma_i^{k_i}\right)$ défini comme suit :

$$\sigma_i^1 = \begin{cases} 0 \text{ si } k = t \\ s_i^1 + s_i^t \text{ si } k = l \\ s_i^k \text{ si } k \notin \{t, l\} \end{cases}$$

Alors σ_i est une distribution de probabilité sur Z_i En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_i} \sigma_i^k &= \sum_{k\notin\{t,l\}} \sigma_i^k + \sigma_i^t + \sigma_i^k \\ &= \sum_{k\notin\{t,l\}} s_i^k + 0 + \left(s_i^t + s_i^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{k_i} s_i^k = 1\end{aligned}$$

Montrons que $R_i(s) < R_i(\sigma_i, s_{-i})$. On a :

$$\begin{aligned}R_i(s) &= \sum_{k=1}^{k_i} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) s_i^k \\ &= \sum_{k\notin\{t,l\}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) s_i^k + R_i\left(z_i^t, s_{-i}\right) s_i^t + R_i\left(z_i^l, s_{-i}\right) s_i^l \\ &< \sum_{k\notin\{t,l\}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) s_i^k + R_i\left(z_i^t, s_{-i}\right) s_i^t + R_i\left(z_i^l, s_{-i}\right) s_i^l \\ &= \sum_{k\notin\{t,l\}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) s_i^k + 0 + R_i\left(z_i^l, s_{-i}\right)\left(s_i^l + s_i^t\right) \\ &= \sum_{k\notin\{t,l\}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) \sigma_i^k + R_i\left(z_i^t, s_{-i}\right) \sigma_i^t + R_i\left(z_i^l, s_{-i}\right) \sigma_i^l \\ &= \sum_{k=1}^{k_i} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) \sigma_i^k = R_i(\sigma)\end{aligned}$$

Donc $R_i(s) < R_i(\sigma)$, ce qui contredit le fait que s est un équilibre de Nash.

Supposons maintenant que s vérifie : $\forall i \in N, \forall z_i^l \in Z_i,\ \forall z_i^t \in Z_i, R_i\left(z_i^l, s_{-i}\right) > R_i\left(z_i^t, s_{-i}\right) \Longrightarrow z_i^t = 0$.

Pour $i \in N$, posons $\mu = \max\limits_{k\in\{1,2,..,k_i\}} R_i\left(z_i^r, s_{-i}\right)$, et $\mathcal{F}= \left\{k \in \{1, 2, .., k_i\} / R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) = \mu\right\}$.

Alors

$$\begin{aligned}R_i(s) &= \sum_{k\in\{1,2,..,k_i\}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) s_i^k = \sum_{k\in\mathcal{F}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) s_i^k \\ &= \mu \sum_{k\in\mathcal{F}} s_i^k = \mu\end{aligned}$$

Or si $\sigma_i \in S_i, R_i(\sigma_i, s_{-i}) = \sum\limits_{k\in\{1,2,..,k_i\}} R_i\left(z_i^k, s_{-i}\right) \sigma_i^k \leq \sum\limits_{k\in\{1,2,..,k_i\}} \sigma_i^k = R_i(s)$.

Et donc s est un équilibre de Nash. ■

D'après ce théorème, s est un équilibre de Nash de Γ si et seulement si pour tout $i \in N$, i joue chacune de ses stratégies pures dominées contre s_{-i} avec un poids nul (c'est-à-dire avec une probabilité nulle).

Exemple 1.3.2 *Utilisons le théorème précédent pour déterminer l'ensemble des équilibres de Nash du jeu décrit par la matrice ci-dessous :*

1→ 2↓	T	M	B
L	6 2	2 12	0 6
C	0 6	4 3	10 0
R	4 4	2 5	2 2

Dans ce jeu, aucune stratégie pure n'est domminée par une autre stratégie pure. Cependant, la stratégie M du joueur 1 est strictement dominée par la stratégie mixte $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	1→ 2↓	T	M	B
y_1	L	6 2	2 12	0 6
y_2	C	0 6	4 3	10 0
$1-y_1-y_2$	R	4 4	2 5	2 2

En effet, soit $s_2 = (y_1, y_2, 1-y_1-y_2) \in S_2$ *et en posant* $\hat{s}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, *on a :*

$$\begin{aligned} R_1(\hat{s}_1, s_2) &= 6 \times \tfrac{1}{2} \times y_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10 \times \tfrac{1}{2} \times y_2 + 4 \times \tfrac{1}{2} \times (1-y_1-y_2) \\ &\quad +0 + 2 \times \tfrac{1}{2} \times (1-y_1-y_2) \\ &= 3y_1 + 5y_2 + 2 - 2y_1 - 2y_2 + 1 - y_1 - y_2 \\ &= 3 + 2y_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_1(M, s_2) &= 2 \times y_1 + 4 \times y_2 + 2(1-y_1-y_2) \\ &= 2y_1 + 4y_2 + 2 - 2y_1 - 2y_2 \\ &= 2 - 2y_2 \end{aligned}$$

Et on vérifie que $R_1(\hat{s}_1, s_2) - R_1(M, s_2) = 1 > 0$, *c'est-à-dire* $R_1(M, s_2) < R_1(\hat{s}_1, s_2)$ *pour tout* $s_2 = (y_1, y_2, 1-y_1-y_2) \in S_2$.

D'après le théorème précédent, l'élimination de la stratégie M ne change pas l'ensemble des équilibres de Nash du jeu.

A la suite de cette éliminiation on obtient la matrice suivante :

1→ 2↓	T	B
L	6 2	0 6
C	0 6	10 0
R	4 4	2 2

Dans ce nouveau jeu, la stratégie R du joueur 2 est strictement dominée par la stratégie mixte $\left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}, 0\right)$.

		x	$1-x$
	$1\rightarrow$ $2\downarrow$	T	B
$\frac{5}{12}$	L	6, 2	0, 6
$\frac{7}{12}$	C	0, 6	10, 0
0	R	4, 4	2, 2

En effet, soit $s_1 = (x, 1-x) \in S_1$ *et en posant* $\hat{s}_2 = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}, 0\right)$, *on a :*

$$\begin{array}{rcl} R_2(s_1, \hat{s}_2) & = & 2 \times x \times \frac{5}{12} + 6 \times (1-x) \times \frac{5}{12} + 0 + 6 \times x \times \frac{7}{12} + 0 + 0 + 0 \\ & = & \frac{5}{6}x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}x \\ & = & \frac{5}{2} + \frac{11}{6}x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} R_2(s_1, R) & = & 4 \times x + 2 \times (1-x) \\ & = & 4x + 2 - 2x \\ & = & 2 + 2x \end{array}$$

Et on vérifie que $R_2(s_1, \hat{s}_2) - R_2(s_1, R) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}x > 0$ *car* $x \in [0,1]$, *d'où* $R_2(s_1, \hat{s}_2) > R_2(s_1, R)$.

D'après le théorème précédent, l'élimination de la stratégie R ne change pas l'ensemble des équilibres de Nash du jeu.

A la suite de cette éliminiation on obtient la matrice suivante :

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	T	B
L	6, 2	0, 6
C	0, 6	10, 0

Et la matrice de déviation donne :

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	T	B
L	6, $2\downarrow$	$\overleftarrow{0}$, 6
C	$\overrightarrow{0}$, 6	10, $0\uparrow$

La matrice de déviation montre que ce jeu n'a pas d'équilibre en stratégies pures.

Cherchons les équilibres de Nash en stratégies mixtes de ce jeu.

Soit $s = (s_1, s_2)$ *un équilibre de Nash en staratégie mixte où* $s_1 = (x, 1-x)$ *et* $s_1 = (y, 1-y)$ *avec* $x \in [0,1]$ *et* $y \in [0,1]$

Gains purs du joueur 1 : $\begin{cases} R_1(T, s_2) = 6y \\ R_1(B, s_2) = 10 - 10y \end{cases}$

Gains purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1, L) = 2x + 6(1-x) = 6 - 2x \\ R_2(s_1, C) = 6x \end{cases}$

$R_1(T, s_2) < R_1(B, s_2) \Longleftrightarrow 6y < 10 - 10y \Longleftrightarrow y < \frac{5}{8}$

– *si* $y < \frac{5}{8}$, *alors* $s_1 = (0, 1)$

Gains purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1, L) = 6 \\ R_2(s_1, C) = 0 \end{cases}$

On en déduit que $y = 1$ *ce qui est absurde car* $y < \frac{5}{8}$.

– *si* $y > \frac{5}{8}$,*alors* $s_1 = (1, 0)$

Gains purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1, L) = 4 \\ R_2(s_1, C) = 6 \end{cases}$

On en déduit que $y = 0$ *ce qui est absurde car* $y > \frac{5}{8}$

– *si* $y = \frac{5}{8}$, *alors le joueur 1 est indifférent aux stratégies* T *et* B, *ainsi* $x \in]0; 1[$

$$\begin{aligned} R_2(s_1, L) = R_2(s_1, C) &\Longleftrightarrow 6 - 2x = 6x \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes est $EN = \left\{\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right); \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\right)\right\}$.

Par ailleurs, si $s \in S$ est un équilibre de Nash, alors $\forall i \in N, R_i(s) = \max\limits_{r \in \{1,2,..,k_i\}} R_i(z_i^r, s_{-i})$.

Proposition 1.3.2 *Tout équilibre de Nash en stratégies pures est un équibre de nash en stratégies mixtes.*

Preuve. Soientt $G = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale à gains cardinaux et $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N})$ son extension mixte et $z = (z_1^{r_1}, z_2^{r_2}, ..., z_n^{r_n}) \in Z$ un équilibre de Nash de G.

Montrons que z est un équilibre de Nash de Γ.

Soit $i \in N$, $k, l \in \{1, 2, .., k_i\}$ tels que $R_i\left(z_i^k, z_{-i}\right) > R_i\left(z_i^l, z_{-i}\right)$.

Alors $l \neq r^i$ car on aurait $R_i\left(z_i^k, z_{-i}\right) > R_i(z)$, contredisant le fait z est un équilibre de Nash de G.

On a $l \neq r^i$ et z est une situation en stratégies pures, donc suivant z, i joue z_i^l avec une probabilité nulle.

Donc z est un équilibre de Nash de Γ. ■

Théorème 1.3.2 *Tout jeu sous forme normale admet un équilibre de Nash*

CHAPITRE 2

Equilibre de Nash des jeux finis sous forme normale paramétrés en stratégies pures

2.1 Jeux finis sous forme normale à paramètre réel

Exemples introductifs

Jeu de la tirelire paramétré

En reprenant le jeu de la tirelire du chapitre précédent dont nous reprenons la description ci-dessous, nous avons observé qu'en supposant les joueurs rationnels, l'issue du jeu (équilibre de Nash) serait que personne ne met de l'argent dans la tirelire, cette équilibre n'est pas optimal car si tous les deux joueurs mettaient de l'argent dans la tirelire ils gagneraient quelques choses.

Jeu de la tirelire : Deux étudiants sont choisis au hasard et le jeu suivant leur est proposé. Chacun a la possibilité de mettre $0F$ ou $400F$ dans une tirelire. Après que chaque étudiant ait pris sa décision sans connaitre la décision de l'autre, le contenu de la tirelire est multiplé par $1,5$ et réparti en deux parties égales entre les deux joueurs. Par hypothèse ce jeu n'est disputé qu'une seule fois. Quelles décisions les étudiants vont t-ils prendre ? Pour des raisons d'anonymat, appellons un des étudiants étudiant 1 et l'autre étudiant 2. Examinons les différentes issues de ce jeu.

- Si les deux étudiants ne mettent rien dans la tirelire il ne gagne rien (gain nul).
- Si l'étudiant 1 met $400F$ et l'autre rien, chacun d'eux recevra $300F$; l'étudiant 1 perdra ainsi $100F$ et l'étudiant 2 gagnera $300F$.
- Si l'étudiant 2 met $400F$ et l'autre rien, chacun d'eux recevra $300F$; l'étudiant 1 gagnera ainsi $300F$ et l'étudiant 2 perdra $300F$.

– Si les deux étudiants mettent chacun $400F$, chacun recevra $600F$; les deux étudiant gagneront chacun $200F$.

Cette situation peut être résumée par le tableau suivant (les gains exprimés en centaine de francs) :

1→ 2↓	0F	400F
0F	0 ; 0	-1 ; 3
400F	3 ; -1	2 ; 2

$1 =$ étudiant 1, $\ 2 =$ étudiant 2

La question qu'on peut se poser est de savoir si les joueurs changeraient (équilibre) de comportements si on changeait le coefficient par lequel on multiplie la somme dans la tirelire. Autrement dit comment varie l'ensemble des équilbres de Nash quand on modifie le réel α par lequel on multiplie la somme dans la tirelire. Donnons la matrice des gains du jeu dans ce cas :

1→ 2↓	0F	400F
0F	0 ; 0	$2\alpha-4$; 2α
400F	2α ; $2\alpha-4$	$4\alpha-4$; $4\alpha-4$

On peut distinguer trois cas où on trouve les équilibres de Nash indépendament de la valeur de α.

– Si $\alpha > 2$, après cochage des meilleures réponses, on obtient le tableau suivant :

1→ 2↓	0F	400F
0F	0 ; 0	$2\alpha-4\surd$; 2α
400F	2α ; $2\alpha-4\surd$	$4\alpha-4\surd$; $4\alpha-4\surd$

Et ainsi le seul équilibre de Nash est (400F, 400F)

– Si $\alpha < 2$, après cochage des meilleures réponses, on obtient le tableau suivant :

1→ 2↓	0F	400F
0F	$0\surd$; $0\surd$	$2\alpha-4$; $2\alpha\surd$
400F	$2\alpha\surd$; $2\alpha-4$	$4\alpha-4$; $4\alpha-4$

Et ainsi le seul équilibre de Nash est (0F, 0F)

– Si $\alpha = 2$, après cochage des meilleures réponses, on obtient le tableau suivant :

1→ 2↓	0F	400F
0F	$0\surd$; $0\surd$	$0\surd$; $4\surd$
400F	$4\surd$; $0\surd$	$4\surd$; $4\surd$

Là on voit que tous les profils de stratégies sont des équilibres de Nash.

De ce qui précède, pour une valeur particulière de α, on a partitionner l'ensemble des nombres réels en deux intervalles où l'ensemble des équilibres de Nash ne change pas quand le paramètre est dans chacun des intervalles.

Dans la suite seront exposées les notions et méthodes qui permettrons d'étudier une classe de jeu fini sous forme normale dépendant d'un ou plusieurs paramètres réel.

Définition 2.1.1 *On appelle* ***jeu fini sous forme normale paramétré*** *de paramètre réel α, toute famille $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ où pour tout réel α fixé, $G_\alpha = \left(N, Z, (u_i^\alpha)_{i\in N}\right)$ avec :*

- $N = \{1, \cdots, n\}$ qui est l'ensemble des joueurs (n fini)
- $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_n$ où $\forall i \in N$, Z_i désigne l'ensemble des stratégies du joueur i ($\forall i \in N,\ Z_i$ est fini)
- $\forall i \in N$, la fonction $u_i^\alpha : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne la fonction de payement du joueur i.

Remarque 2.1.1 *Pour tout réel α fixé, $G_\alpha = \left(N,\ Z,\ (u_i^\alpha)_{i\in N}\right)$ est un jeu fini sous forme normale.*

Dans la suite, nous établissons un résultat qui donne une méthode pratique pour déterminer l'ensemble des équilibres de Nash d'un jeu paramétré. Avant d'énoncer ce résultat, il est important de donner la définition d'une valeur critique d'un joueur et du jeu en général pour un jeu fini sous forme normale paramétré donné.

Définition 2.1.2 *Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ un jeu sous forme normale paramétré fini, avec $G_\alpha = \left(N,\ Z,\ (u_i^\alpha)_{i\in N}\right), \forall\alpha \in \mathbb{R}$. soit $i \in N$.*

On dit qu'un nombre réel λ est une ***valeur critique du joueur*** *i pour le jeu paramétré $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ si $\exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists z_{-i} \in Z_{-i} :\ \ u_i^\lambda(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i^\lambda(\check{z}_i, z_{-i})$.*

Définition 2.1.3 *Soit $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ un jeu sous forme normale paramétré fini, avec $G_\alpha = \left(N,\ Z,\ (u_i^\alpha)_{i\in N}\right), \forall\alpha \in \mathbb{R}$.On dit qu'un nombre réel λ est une* ***valeur critique du jeu*** *$(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ s'il existe un joueur i tel que λ soit une valeur critique du joueur i, c'est-à-dire $\exists i \in N,\ \exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists z_{-i} \in Z_{-i} : u_i^\lambda(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i^\lambda(\check{z}_i, z_{-i})$.*

Exemple 2.1.1 *En reprenant le jeu de la tirelire, déterminons l'ensemble des valeurs critiques de ce jeu.*

On a donc les équations suivantes :

- *Pour le joueur 1*

  $2\alpha - 4 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 2$

  $4\alpha - 4 = 2\alpha \Longleftrightarrow \alpha = 2$

  Donc la seule valeur critique du joueur 1 est 2
- *Pour le joueur 2*

  $2\alpha - 4 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 2$

  $4\alpha - 4 = 2\alpha \Longleftrightarrow \alpha = 2$

Donc la seule valeur critique du joueur 1 est 2

Finalement la seule valeur critique du jeu est 2.

Théorème 2.1.1 *Soit* $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *un jeu fini sous forme normale paramétré. On suppose que la fonction* $\alpha \longmapsto u_i^\alpha(z)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *pour tout* $i \in N$ *et pour tout* $z \in Z$. *Si* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *qui* ***ne contient pas de valeurs critiques du jeu*** $(G_\alpha)_\alpha$, *alors* $\forall\alpha, \beta \in I$, $Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$.

Preuve. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de valeurs critiques.

Soient $\alpha, \beta \in I$.

Supposons que $Nash(G_\alpha) \neq Nash(G_\beta)$.

Sans nuire à la généralité supposons que $Nash(G_\alpha) \nsubseteq Nash(G_\beta)$.

Alors il existe $a \in Nash(G_\alpha)$ et $a \notin Nash(G_\beta)$.

Puisque $a \in Nash(G_\alpha)$, alors $\forall i \in N, a \in m_i(a_{-i})$.

Autrement dit : $\forall i \in N, \forall t_i \in Z_i, u_i^\alpha(a) \geq u_i^\alpha(t_i, a_{-i})$ (1)

Par ailleurs, comme $a \notin Nash(G_\beta)$, il existe $i_0 \in N$ tel que $a_{i_0} \in m_{i_0}(a)$.

Autrement dit : $\exists t_{i_0} \in Z_{i_0}, u_{i_0}^\beta(a) < u_{i_0}^\beta(t_{i_0}, a_{-i_0})$ (2)

(1) et (2) donnent le système : $\begin{cases} u_{i_0}^\alpha(a) \geq u_{iO}^\alpha(t_i, a_{-i}) \\ u_{i_0}^\beta(a) < u_{i_0}^\beta(t_{i_0}, a_{-i_0}) \end{cases}$ (3)

Considérons l'application $f : s \longmapsto u_{i_0}^s(a) - u_{i_0}^s(t_{i_0}, a_{-i_0})$.

L'application f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.

D'après (3), il vient que : $f(\alpha) < 0 \leq f(\beta)$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (f étant continue), il existe λ compris entre α et β tel que : $f(\lambda) = 0$.(4)

Mais, $f(\lambda) = 0$ équivaut à $u_{i_0}^\lambda(a) - u_{i_0}^\lambda(t_{i_0}, a_{-i_0}) = 0$, c'est-à-dire $u_{i_0}^\lambda(a) = u_{i_0}^\lambda(t_{i_0}, a_{-i_0})$

Et par définition d'une valeur critique, λ est une valeur critique.

Or λ est compris entre α et β qui sont dans un intervalle I.

Donc $\lambda \in I$, ce qui est absurde car I ne contient pas de valeur critique.

D'où $Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$ ■

Exemple 2.1.2 *Le théorème confirme les résultats obtenus pour le jeu de la tirelire. En effet, les intervalles* $]-\infty; 2[$ *et* $]2; +\infty[$ *sont des intervalles de* $\mathbb{R}$ *ne contenant pas de valeurs critiques.*

Exemple 2.1.3 *Considérons le jeu paramétré* $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *dont la matrice des gains est donnée ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	$2\alpha+4$; $2\alpha-1$	$\alpha+1$; $4+\alpha$
B	$\alpha+1$; $\alpha+3$	$1-\alpha$; $2\alpha-3$

Déterminons l'ensemble des équilibres de Nash suivant les valeurs du paramètre réel α.

Appliquons le théorème précédent en déterminant d'abord les valeurs critiques du jeu.

Les valeurs critiques de ce jeu sont les solutions des équations suivantes :

$u_1(G,H) = u_1(D,H) \Longleftrightarrow 2\alpha + 4 = \alpha + 1 \Longleftrightarrow \alpha = -3$

$u_1(G,B) = u_1(D,B) \Longleftrightarrow \alpha + 1 = 1 - \alpha \Longleftrightarrow \alpha = 0$

$u_2(G,H) = u_1(G,B) \Longleftrightarrow 2\alpha - 1 = \alpha + 3 \Longleftrightarrow \alpha = 4$

$u_1(D,H) = u_1(D,B) \Longleftrightarrow 4 + \alpha = 2\alpha - 3 \Longleftrightarrow \alpha = 7$

Il vient que l'ensemble des valeurs critiques du jeu est $Vc = \{-3, 0, 4, 7\}$.

Et tous les intervalles de $\mathbb{R}$ *qui ne contiennent pas de valeurs critiques sont donc :* $]-\infty;-3[\,,]-3;0[\,,]0;4[\,,]4;7[$ *et.* $]7;+\infty[$

D'après le théorème les ensembles des équilibres de Nash $Nash(G_\alpha)$ *sont donné par :*

$Nash(G_\alpha) = Nash(G_{-4})$ *pour tout* $\alpha \in]-\infty;-3[$ *car* $-4 \in]-\infty;-3[$

$Nash(G_\alpha) = Nash(G_{-1})$ *pour tout* $\alpha \in]-3;0[$ *car* $-1 \in]-3;0[$

$Nash(G_\alpha) = Nash(G_2)$ *pour tout* $\alpha \in]0;4[$ *car* $2 \in]0;4[$

$Nash(G_\alpha) = Nash(G_5)$ *pour tout* $\alpha \in]4;7[$ *car* $5 \in]4;7[$

$Nash(G_\alpha) = Nash(G_8)$ *pour tout* $\alpha \in]7;+\infty[$ *car* $8 \in]7;+\infty[$

En cochant en bleu les meilleures réponses du joueur 1 en fonction de la stratégie choisie par le joueur 2 et en cochant en vert les meilleures réponses du joueur 2 en fonction de la stratégie choisie par le joueur 1, on distingue les cas suivants :

– *Pour* $\alpha = -4$, *on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	-4 ; -9	$-3\surd$; $0\surd$
B	-3 ; $-1\surd$	$5\surd$; -11

On a donc $Nash(G_{-4}) = \{(D,H)\} = Nash(G_\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in]-\infty;-3[$.

– *Pour* $\alpha = -1$, *on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$2\surd$; -3	0 ; $3\surd$
B	0 ; $2\surd$	$2\surd$; -5

On a donc $Nash(G_{-1}) = \varnothing = Nash(G_\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in]-3;0[$

– *Pour* $\alpha = 2$, *on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$8\surd$; 3	3 ; $6\surd$
B	$3\surd$; $5\surd$	-1 ; 1

On a donc $Nash(G_2) = \{(G,B)\} = Nash(G_\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in]0;4[$

– *Pour $\alpha = 5$, on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$14\surd$; $9\surd$	6 ; $9\surd$
B	$6\surd$; 8	-4 ; 7

On a donc $Nash(G_5) = \{(G,H)\} = Nash(G_\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in]4;7[$

– *Pour $\alpha = 8$, on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$20\surd$; $15\surd$	9 ; 12
B	$9\surd$; 12	-7 ; $13\surd$

On a donc $Nash(G_8) = \{(G,H)\} = Nash(G_\alpha)$ *pour tout* $\alpha \in]7;+\infty[$

– *Pour $\alpha = -3$, on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$-2\surd$; -7	$-2\surd$; $1\surd$
B	-2 ; $0\surd$	$4\surd$; -9

On a donc $Nash(G_{-3}) = \{(D,H)\}$

– *Pour $\alpha = 0$, on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	0 ; -1	$1\surd$; $4\surd$
B	$1\surd$; $3\surd$	$1\surd$; -3

On a donc $Nash(G_0) = \{(D,H)\}$

– *Pour $\alpha = 4$, on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$12\surd$; $7\surd$	5 ; $8\surd$
B	$5\surd$; $7\surd$	-3 ; 5

On a donc $Nash(G_4) = \{(G,H), (G,B)\}$

– *Pour $\alpha = 7$, on obtient la matrice des gains ci-dessous*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$18\surd$; $13\surd$	8 ; $11\surd$
B	$8\surd$; 10	-6 ; $11\surd$

On a donc $Nash(G_7) = \{(G,H)\}$

En utilisant le théorème précédent, on a déterminé l'ensemble des équilibres de Nash du jeu suivant les valeurs du paramètre. Récapitulons les resultats obtenus :

- *Pour* $\alpha \in]-\infty, -3] \cup \{0\}$, $Nash(G_\alpha) = \{(D, H)\}$
- *Pour* $\alpha \in]-3; 0[$, $Nash(G_\alpha) = \varnothing$
- *Pour* $\alpha \in]0, 4[$, $Nash(G_\alpha) = \{(G, B)\}$
- *Pour* $\alpha \in]4, +\infty[$, $Nash(G_\alpha) = \{(G, H)\}$
- *Pour* $\alpha = 4, Nash(G_\alpha) = \{(G, H), (G, B)\}$

Remarque 2.1.2 *Soit le jeu sous forme normale* $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *ci-dessous de paramètre* α *réel.*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$\alpha-2$; $2\alpha-1$	$\alpha-2$; $\alpha-1$
B	$\alpha-3$; $\alpha+1$	α ; $\alpha+3$

Déterminons les valeurs critiques de ce jeu en stratégies pures.

$\alpha - 2 = \alpha - 2 \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha - 3 = \alpha \Longleftrightarrow -3 = 0$ *ce qui est impossible*

$2\alpha - 1 = \alpha + 1 \Longleftrightarrow \alpha = 2$

$\alpha - 1 = \alpha + 3 \Longleftrightarrow -1 = 3$ *ce qui est impossible*

Donc tous les nombres réels sont des valeurs critique de ce jeu ; c'est-à-dire l'ensemble des valeurs critiques est $\mathbb{R}$.

Première conséquence : *L'ensemble des valeurs critiques en stratégies pures n'est pas toujours discret.*

Deuxième conséquence : *Il est possible d'avoir un jeu où tous les intervalles de* $\mathbb{R}$ *ont au moins une valeur critique, ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème obtenu précèdemment.*

La méthode développée précédemment permet de déterminer l'ensemble des équilibres de Nash d'un jeu fini sous forme normale paramétré lorsque le paramètre varie dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On peut imaginer plusieurs situations où un jeu dépend de plusieurs paramètres réels. Les jeux finis sous forme normale paramétrés à paramètre dans $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) feront l'objet de la section suivante.

2.2 Jeux finis sous forme normale à paramètre dans un espace topologique

Exemple introductif

Une autre version du jeu de la tirelire : Dans le jeu de la tirelire décrit au chapitre précédent, on peut avoir la version suivante : Les étudiants mettent de l'argent dans la tirelire et par la suite le montant mis par chacun est multiplié par un coefficient α pour le joueur 1 et un coefficient β pour le joueur 2. Les coefficients étant connus à l'avance par chaque joueur, comment vont t-il se comporter ? (Quel équilibre peut t'on espérer ?). La nouvelle version du jeu de la tirelire ainsi décrite dépend d'un paramètre dans $\mathbb{R}^2$.

Ecrivons ce que deviendra dans ce cas la matrice des gains du jeu.

1→ 2↓	0F	400F
0F	0 0	$4-2\alpha$ 3α
400F	2β $4-2\beta$	$2\alpha+2\beta-4$ $2\alpha+2\beta-4$

Pour déterminer l'ensemble des équilibres de Nash de ce jeu, une première méthode consiste à étudier le signe des fonctions de payement des joueurs.

Posons $N = 0F$ (pour "ne rien mèttre dans la tirelire") et $M = 400F$ (pour "mettre 400 F dans la tirelire").

Posons $\gamma = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

La matrice des gains devient :

1→ 2↓	N	M
N	0 0	$4-2\alpha$ 2α
M	2β $4-2\beta$	$2\alpha+2\beta-4$ $2\alpha+2\beta-4$

Tableau de signe

α	$-\infty$	2	$+\infty$
β	$-\infty$	2	$+\infty$
$u_1^\gamma(N,N) - u_1^\gamma(M,N)$	$-$	0	$+$
$u_1^\gamma(N,M) - u_1^\gamma(M,M)$	$+$	0	$-$
$u_2^\gamma(N,N) - u_2^\gamma(N,M)$	$-$	0	$+$
$u_2^\gamma(M,N) - u_2^\gamma(M,M)$	$+$	0	$-$

En cochant en bleu les meilleures réponses du joueur 1 en fonction de la stratégie choisie par le joueur 2 et en cochant en vert les meilleures réponses du joueur 2 en fonction de la stratégie choisie par le joueur 1, on distingue les cas suivants :

– Pour $\alpha > 2$ et $\beta > 2$

1→ 2↓	N	M
N	0✓ 0✓	$4-2\alpha$ 2α
M	2β $4-2\beta$	$2\alpha+2\beta-4$✓ $2\alpha+2\beta-4$✓

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $Nash1 = \{(N, N), (M, M)\}$ pour $\alpha > 2$ et $\beta > 2$.

– Pour $\alpha > 2$ et $\beta < 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	$0\checkmark$ $\quad 0$	$4-2\alpha$ $\quad 2\alpha\checkmark$
M	2β $\quad 4-2\beta\checkmark$	$2\alpha+2\beta-4\checkmark$ $\quad 2\alpha+2\beta-4$

Dans ce cas il n'y a pas déquilibre de Nash. On note $Nash2 = \varnothing$

– Pour $\alpha < 2$ et $\beta < 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	0 $\quad 0$	$4-2\alpha\checkmark$ $\quad 2\alpha\checkmark$
M	$2\beta\checkmark$ $\quad 4-2\beta\checkmark$	$2\alpha+2\beta-4$ $\quad 2\alpha+2\beta-4$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $Nash3 = \{(N, M), (M, N)\}$ pour $\alpha < 2$ et $\beta < 2$

– Pour $\alpha < 2$ et $\beta > 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	0 $\quad 0\checkmark$	$4-2\alpha\checkmark$ $\quad 2\alpha$
M	$2\beta\checkmark$ $\quad 4-2\beta$	$2\alpha+2\beta-4$ $\quad 2\alpha+2\beta-4\checkmark$

Dans ce cas il n'y a pas d'équilibre de Nash. On note $Nash4 = \varnothing$

– Pour $\alpha = 2$ et $\beta > 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	$0\checkmark$ $\quad 0\checkmark$	$0\checkmark$ $\quad 4$
M	$2\beta\checkmark$ $\quad 4-2\beta$	$2\beta\checkmark$ $\quad 2\beta\checkmark$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $\{(N, N), (M, M)\}$ pour $\alpha = 2$ et $\beta < 2$

– Pour $\alpha = 2$ et $\beta < 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	$0\checkmark$ $\quad 0$	$0\checkmark$ $\quad 4\checkmark$
M	$2\beta\checkmark$ $\quad 4-2\beta\checkmark$	$2\beta\checkmark$ $\quad 2\beta$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $\{(N, M), (M, N)\}$ pour $\alpha = 2$ et $\beta < 2$

– Pour $\alpha > 2$ et $\beta = 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	$0\checkmark$ $\quad 0\checkmark$	$4-2\alpha$ $\quad 2\alpha\checkmark$
M	4 $\quad 0\checkmark$	$2\alpha\checkmark$ $\quad 2\alpha\checkmark$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $\{(N,N),(M,M)\}$ pour $\alpha > 2$ et $\beta = 2$

– Pour $\alpha < 2$ et $\beta = 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	0 $0\surd$	$4-2\alpha\surd$ $2\alpha\surd$
M	$4\surd$ $0\surd$	2α $2\alpha\surd$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $\{(N,M),(M,N)\}$ pour $\alpha < 2$ et $\beta = 2$

– Pour $\alpha = 2$ et $\beta = 2$

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	N	M
N	$0\surd$ $0\surd$	$0\surd$ $4\surd$
M	$4\surd$ $0\surd$	$4\surd$ $4\surd$

Donc l'ensemble des équilibres de Nash est $\{(N,M),(M,N),(N,N),(M,M)\}$ pour $\alpha = 2$ et $\beta = 2$

Dans ce qui suit, on va étendre la notion de valeurs critiques à l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^m$ et établir un résultat qui pourra nous permettre de déterminer l'ensemble des équilibres de Nash de façon beaucoup plus simple.

Définition 2.2.1 *Soit E un espace topologie. Soit $(G_\gamma)_{\gamma\in E}$ un jeu fini sous forme normale paramétré, avec $G_\gamma = \left(N,\ Z,\ (u_i^\gamma)_{i\in N}\right), \forall\gamma \in E$. soit $i \in N$.*

On dit qu'un élément de $\delta \in E$ est un ***point critique du joueur*** *i pour le jeu paramétré $(G_\gamma)_{\gamma\in E}$ si $\exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists z_{-i} \in Z_{-i} :\ u_i^\delta(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i^\delta(\check{z}_i, z_{-i})$.*

Définition 2.2.2 *Soit $(G_\gamma)_{\gamma\in E}$ un jeu fini sous forme normale paramétré, avec $G_\gamma = \left(N,\ Z,\ (u_i^\gamma)_{i\in N}\right), \forall\gamma \in E$.On dit qu'un élément de $\delta \in E$ est un* ***point critique du jeu*** *$(G_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^m}$ s'il existe un joueur i tel que δ soit une valeur critique du joueur i, c'est-à-dire $\exists i \in N,\ \exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists z_{-i} \in Z_{-i} : u_i^\delta(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i^\delta(\check{z}_i, z_{-i})$.*

Exemple 2.2.1 *Dans la deuxième version du jeu de la tirelire, déterminons l'ensemble des points critiques.*

– *Pour le joueur 1*

$$\begin{aligned} u_1^\gamma(N,N) = u_1^\gamma(M,N) &\iff 4 - 2\alpha = 0 \\ &\iff \alpha = 2 \\ u_1^\gamma(N,M) = u_1^\gamma(M,M) &\iff 2\alpha + 2\beta - 4 = 2\beta \\ &\iff \alpha = 2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points critiques du joueur 1 est $\{(2,\beta),\beta \in \mathbb{R}\}$ c'est-à-dire la droite d'équation $\alpha = 2$.

– *Pour le joueur 2*

$$\begin{aligned} u_2^\gamma(N,N) = u_2^\gamma(N,M) &\iff 4-2\beta = 0 \\ &\iff \beta = 2 \\ u_2^\gamma(M,N) = u_2^\gamma(M,M) &\iff 2\alpha+2\beta-4 = 2\alpha \\ &\iff \beta = 2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points critiques du joueur 2 est $\{(\alpha, 2), \alpha \in \mathbb{R}\}$ *c'est-à-dire la droite d'équation* $\beta = 2$.

– *On en déduit que l'ensemble des points critiques du jeu est :* $\{(2,\beta), \beta \in \mathbb{R}\} \cup \{(\alpha, 2), \alpha \in \mathbb{R}\}$ *c'est-à-dire la reunion des droites d'équations* $\alpha = 2$ *et* $\beta = 2$.

Les résultats qui suivent sont une généralisation du résultat établit à la section précédente (théorème 2.1.1). On suppose dans toute la suite que $\mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 2.2.1 *Soit* $(G_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^m}$ *un jeu fini sous forme normale paramétré, avec* $G_\gamma = \left(N,\ Z,\ (u_i^\gamma)_{i\in N}\right), \forall\gamma \in \mathbb{R}^m\,(m \in \mathbb{N}^*)$. *On suppose que la fonction* $\gamma \longmapsto u_i^\gamma(z)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^m$, *pour tout* $i \in N$ *et pour tout* $z \in Z$. *Si* U *est une partie connexe par arc de* $\mathbb{R}^m$ *qui* ***ne contient pas de points critiques du jeu*** $(G_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^m}$, *alors* $\forall\alpha, \beta \in U$, $Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$.

Preuve. Soit α_0 un élément fixé de U.

Soit $\beta \in U$. Comme U est connexe par arc, il éxiste un arc joignant α_0 et β ; c'est-à-dire une application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow J$ tel que :$\sigma(0) = \alpha_0$ et $\sigma(1) = \beta$.

Posons $\varepsilon = f \circ \sigma$.

ε est une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues.

Posons $G'_t = G_{\sigma(t)}$. $(G'_t)_{t\in[0;1]}$ n'admet aucune valeur critique sur $[0;1]$. En effet si t_0 est une valeur critique de $(G'_t)_{t\in[0;1]}$, alors $\sigma(t_0)$ est un point critique de $(G_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^m}$; ce qui serait absurde car $\sigma(t_0) \in U$ et U ne contient aucun point critique.

Ainsi, d'aprés le théorème 2.1.1 on a : $Nash(G'_0) = Nash(G'_1)$. Ce qui implique que $Nash(G_{\sigma(0)}) = Nash(G_{\sigma(1)})$ c'est-à-dire $Nash(G_{\alpha_0}) = Nash(G_\beta)$.

Donc pour tout $\beta \in U$, $Nash(G_{\alpha_0}) = Nash(G_\beta)$.

Comme $\alpha_0 \in U$, on a donc : $\forall_U^\alpha \forall_U^\beta\ Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$. ∎

Corollaire 2.2.1 *Soit* $(G_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^m}$ *un jeu fini sous forme normale paramétré, avec* $G_\gamma = \left(N,\ Z,\ (u_i^\gamma)_{i\in N}\right), \forall\gamma \in \mathbb{R}^m\,(m \in \mathbb{N}^*)$. *On suppose que la fonction* $\gamma \longmapsto u_i^\gamma(z)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^m$, *pour tout* $i \in N$ *et pour tout* $z \in Z$. *Si* U *est un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^m$ *qui* ***ne contient pas de points critiques du jeu*** $(G_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^m}$, *alors* $\forall\alpha, \beta \in U$, $Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$.

Preuve. En effet, $\mathbb{R}^m$ étant un espace vectoriel normé, comme U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$, alors U est connexe par arc ; et d'aprés le théorème 2.2.1 précédent on a donc :

$\forall_U^\alpha \forall_U^\beta \; Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$. ■

Dans le corollaire précédent, la notion d'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est généralisé à la notion d'ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$.

Le théorème suivant généralise les résultats précédents au cas général des espaces topologiques.

Théorème 2.2.2 *Soit E un espace topologique. Soit $(G_\gamma)_{\gamma \in E}$ un jeu fini sous forme normale paramétré, avec $G_\gamma = \left(N,\ Z,\ (u_i^\gamma)_{i \in N}\right), \forall \gamma \in E$. On suppose que la fonction $\gamma \longmapsto u_i^\gamma(z)$ est continue sur E, pour tout $i \in N$ et pour tout $z \in Z$. Si U est une partie connexe E qui* ***ne contient pas de points critiques du jeu*** *$(G_\gamma)_{\gamma \in E}$, alors $\forall \alpha, \beta \in U,\ Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$.*

Preuve. Soit U une partie connexe de E ne contenant pas de points critiques.

Soient $\alpha, \beta \in U$.

Supposons que $Nash(G_\alpha) \neq Nash(G_\beta)$.

Sans nuire à la généralité supposons que $Nash(G_\alpha) \nsubseteq Nash(G_\beta)$.

Alors il existe $a \in Nash(G_\alpha)$ et $a \notin Nash(G_\beta)$.

Puisque $a \in Nash(G_\alpha)$, alors $\forall i \in N, a \in m_i(a_{-i})$.

Autrement dit : $\forall i \in N, \forall t_i \in Z_i, u_i^\alpha(a) \geq u_i^\alpha(t_i, a_{-i})$ (1)

Par ailleurs, comme $a \notin Nash(G_\beta)$, il existe $i_0 \in N$ tel que $a_{i_0} \in m_{i_0}(a)$.

Autrement dit : $\exists t_{i_0} \in Z_{i_0}, u_{i_0}^\beta(a) < u_{i_0}^\beta(t_{i_0}, a_{-i_0})$ (2)

(1) et (2) donnent le système : $\begin{cases} u_{i_0}^\alpha(a) \geq u_{i_O}^\alpha(t_i, a_{-i}) \\ u_{i_0}^\beta(a) < u_{i_0}^\beta(t_{i_0}, a_{-i_0}) \end{cases}$ (3)

Considérons l'application $f : s \longmapsto u_{i_0}^s(a) - u_{i_0}^s(t_{i_0}, a_{-i_0})$.

L'application f est bien définie et continue sur E comme somme de fonctions continues.

D'après (3), il vient que : $f(\alpha) < 0 \leq f(\beta)$

D'après le théorème du passage des douanes, car f est continue et U est connexe, il existe λ appartenant à U tel que :

$$f(\lambda) = 0.$$

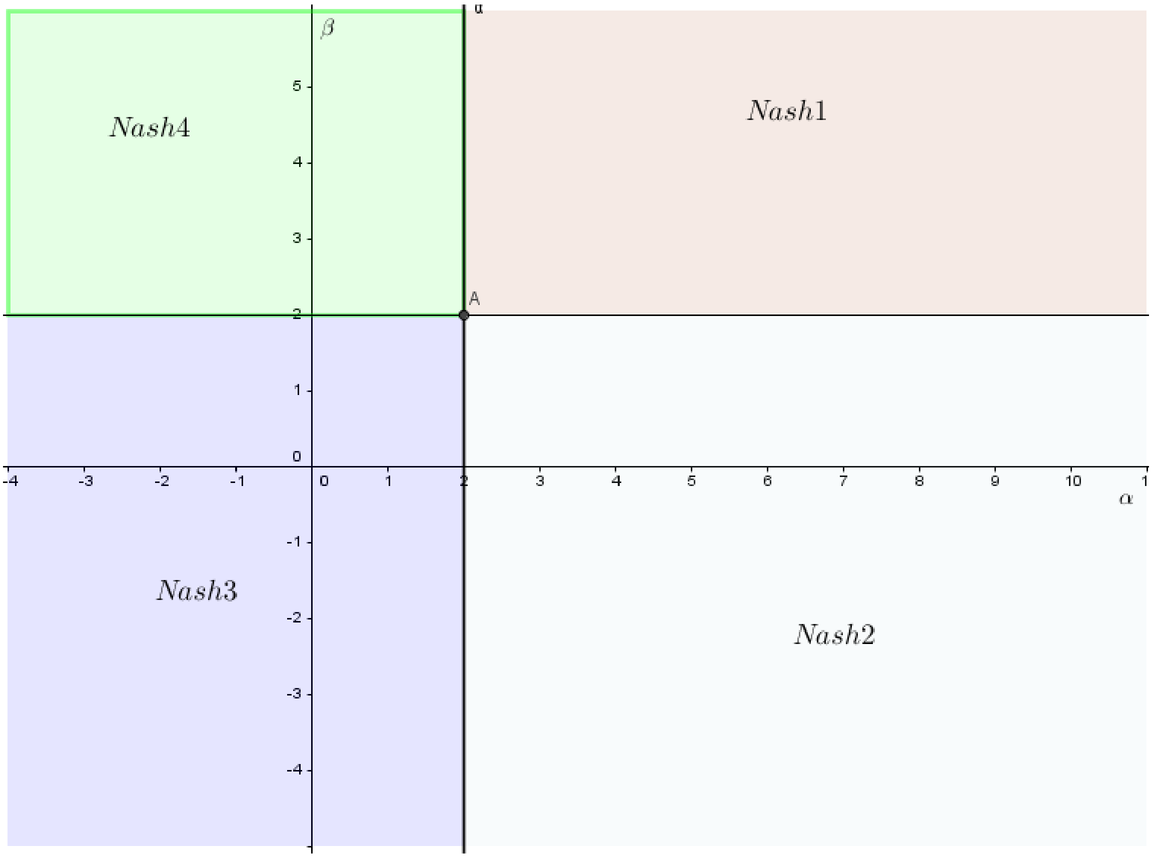
Mais, $f(\lambda) = 0$ équivaut à $u_{i_0}^\lambda(a) - u_{i_0}^\lambda(t_{i_0}, a_{-i_0}) = 0$, c'est-à-dire $u_{i_0}^\lambda(a) = u_{i_0}^\lambda(t_{i_0}, a_{-i_0})$

Et par définition d'un point critique, λ est un point critique.

Donc $\lambda \in U$, ce qui est absurde car U ne contient pas de point critique.

D'où $Nash(G_\alpha) = Nash(G_\beta)$ ■

Exemple 2.2.2 *Ce théorème confirme les resultats obtenus dans la détermination des équilibres de Nash dans le jeu de la tirelire traitée précédemment. Le graphique ci-dessous illustre ce resultat.*



Equilibre de Nash dans les differentes régions du plan

Exemple 2.2.3 *Considérons le jeu fini sous forme normale paramétré à paramètre* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *décrit par la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	α ; $3\beta-\alpha$	$\alpha+1$; $\alpha+2\beta-1$
B	$2\beta+1$; $\alpha+3$	$\beta+2$; $4-\alpha-\beta$

Déterminons l'ensemble des équilibres de Nash pour les point $\gamma = (\alpha, \beta)$ *qui ne sont pas des points critiques du jeu.*

Pour cela, déterminons d'abord l'ensemble des points critiques du jeu.

On résout donc les équations suivantes :

- $\alpha = \alpha + 1 \Longleftrightarrow 0 = 1$ *ce qui est impossible.*
- $2\beta + 1 = \beta + 2 \Longleftrightarrow \beta = 1$
- $3\beta - \alpha = \alpha + 3 \Longleftrightarrow \beta = \frac{2}{3}\alpha + 1$
- $\alpha + 2\beta - 1 = 4 - \alpha - \beta \Longleftrightarrow \beta = -\frac{2}{3}\alpha + 1$

Donc l'ensemble des points critiques est la réunion des droites $D_1 : y = 1, D_2 : y = \frac{2}{3}x + 1$ *et* $D_3 : y = -\frac{2}{3}x + 1$

La figure ci-dessous montre comment ces droites divisent le plan en 7 regions qui sont ouvertes connexes (région sans frontière). D'après le corollaire précédent, il suffit de prendre un point de chaque region et de déterminer l'ensemble des équilibres de Nash. On denote par $Nash\,(M)$ *l'ensemble des équilibres de Nash quand les points de coordonnées* (α, β) *appartiennent à la région qui contient le point* M*. En cochant en rouge les meilleures* *réponses du joueur 1 en fonction de la stratégie choisie par le joueur 2 et en cochant en jaune les meilleures réponses du joueur 2 en fonction de la stratégie choisie par le joueur 1, on distingue les cas suivants :*

- *Pour* $A\,(3,2)$, *on a la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	3 3	$4\checkmark$ $6\checkmark$
B	$5\checkmark$ $6\checkmark$	4 -1

L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(A) = \{(G,B)\,,(D,H)\}$

- *Pour* $B\,(4,3)$ *on a la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	3 3	$4\checkmark$ $6\checkmark$
B	$5\checkmark$ $6\checkmark$	4 -1

L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(B) = \{(G,B)\,,(D,H)\}$

- *Pour* $C\,(0,6)$ *on a la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	0 $18\checkmark$	$1\checkmark$ $11\checkmark$
B	$13\checkmark$ -3	8 -2

L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(C) = \{(D,H)\}$

- *Pour* $D\,(0,2)$ *on a la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	0 $6\checkmark$	$1\checkmark$ $3\checkmark$
B	$5\checkmark$ 3	4 2

L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(D) = \{(D,H)\}$

- *Pour* $E\,(-3,0)$ *on a la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	-3 $3\checkmark$	$-2\checkmark$ -4
B	1 0	$2\checkmark$ $7\checkmark$

L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(E) = \{(D,B)\}$

- *Pour* $F\,(0,0)$ *on a la matrice des gains ci-dessous :*

1→ 2↓	G	D
H	-3 $3\checkmark$	$-2\checkmark$ -4
B	1 0	$2\checkmark$ $7\checkmark$

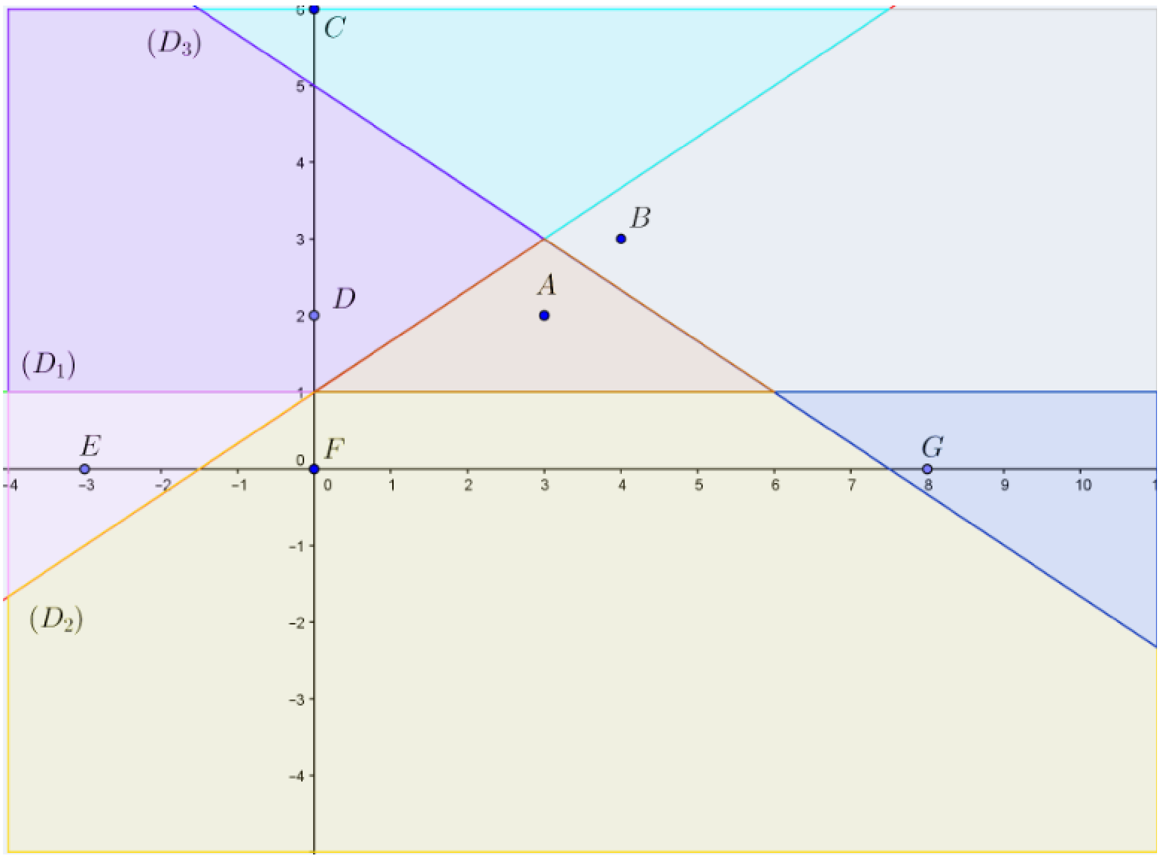
L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(F) = \{(D, B)\}$

– *Pour* $G\,(8, 0)$ *on a la matrice des gains ci-dessous :*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	8 $\;-8$	$9\surd$ $\;7\surd$
B	1 $\;11\surd$	$2\surd$ $\;-4$

L'ensemble des équilibres de Nash dans cette région est : $Nash(G) = \{(D, H)\}$

La méthode ainsi employée est graphique.



Points utilisés pour déterminer les équilibres de Nash

CHAPITRE 3

Equilibre de Nash des jeux finis sous forme paramétré en stratégies mixtes

Dans ce chapitre, on exposera deux méthodes pour déterminer l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes dans un jeu fini sous forme normale paramétré à paramètre dans $\mathbb{R}$. Par la suite on étend la notion de valeur critique en stratégies pures à celle de valeur critique en stratégies mixtes suivi d'un résultat qui caractérise les intervalles ne contenant pas de valeurs critiques dans le cas particulier de deux joueurs deux stratégies.

3.1 Détermination des équilibres de Nash en stratégies mixtes

Une première méthode consiste à utiliser le principe d'indifférence et la seconde utilise les fonctions des meilleures réponses..

3.1.1 Par le principe d'indifférence

Soit le jeu sous forme normale ci-dessous de paramètre α réel.

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$\alpha+1$; 5	$3+\alpha$; 2
B	$4-\alpha$; $3+\alpha$	2 ; $6-\alpha$

Déterminons l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes pour $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.

Nous utilisons le principe d'indifférence :

Soit $s = (s_1, s_2)$ un équilibre de Nash en starat égie mixte où $s_1 = (x, 1-x)$ et $s_1 = (y, 1-y)$ avec $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$.

Gains purs du joueur 1 : $\begin{cases} R_1(G, s_2) = y(1+\alpha) + (1-y)(4-\alpha) = (2\alpha-3)y + 4 - \alpha \\ R_1(D, s_2) = y(3+\alpha) + 2(1-y) = (\alpha+1)y + 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} R_1(G, s_2) = R_1(D, s_2) &\iff (2\alpha-3)y + 4 - \alpha = (\alpha+1)y + 2 \\ &\iff (\alpha-4)y = \alpha - 2 \\ &\iff y = \tfrac{\alpha-2}{\alpha-4} \text{ si } \alpha \neq 4 \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous résume le signe de $\alpha - 2$, $\alpha - 4$ et de $\frac{\alpha-2}{\alpha-4}$ suivant les valeurs de α.

α	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$\alpha - 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\alpha - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{\alpha-2}{\alpha-4}$	$+$	0	$-$		$+$

Pour $\alpha \in]-\infty; 2[$

– Si $y < \frac{\alpha-2}{\alpha-4}$, alors $R_1(G, s_2) > R_1(D, s_2)$ et D est battu par G, par suite $x = 1$.

Gains purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1, H) = 5x + 2(1-x) = 3x + 2 \\ R_2(s_1, B) = (3+\alpha)x + (6-\alpha)(1-x) = (2\alpha-3)x + 6 - \alpha \end{cases}$

$x = 1$, alors $R_2(s_1, H) = 5$ et $R_2(s_1, B) = \alpha + 3$.

Or $\alpha < 2$, donc $5 < \alpha + 3$ soit $R_2(s_1, H) < R_2(s_1, B)$ et donc la stratégie B du joueur 2 est battue.

Par suite, $y = 1$ ce qui est absurde car $y < \frac{\alpha-2}{\alpha-4} < 1$. On a donc pas d'équilibre de Nash.

– Si $y > \frac{\alpha-2}{\alpha-4}$, alors $R_1(G, s_2) > R_1(D, s_2)$ et G est battu par D, par suite $x = 0$.

Gain purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1, H) = 2 \\ R_2(s_1, B) = 6 - \alpha \end{cases}$ car $x = 0$

Comme $\alpha < 2$, on a : $R_2(s_1, H) < R_2(s_1, B)$. Donc H est battu par B.

Par suite $y = 0$. Mais $y > \frac{\alpha-2}{\alpha-4} > 0$ (voir tableau de signe) ; ce qui est absurde. On a donc pas d'équilibre de Nash.

– Si $y = \frac{\alpha-2}{\alpha-4}$, alors le joueur 1 est indifférent aux stratégies G et D, ainsi $x \in]0; 1[$.

$$R_2(s_1,H)=R_2(s_1,B) \iff 3x+2=(2\alpha-3)x+6-\alpha$$
$$\iff (2\alpha-6)x=\alpha-4$$
$$\iff x=\tfrac{\alpha-4}{2\alpha-6}\in\ ]0;1[\ \text{car } \alpha<2.$$

Il vient que $\left(\left(\frac{\alpha-4}{2\alpha-6};\frac{\alpha-2}{2\alpha-6}\right);\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-4};\frac{-2}{\alpha-4}\right)\right)$ est un équilibre de Nash pour $\alpha\in\,]-\infty;2[$.

Donc $EN_\alpha=\left\{\left(\frac{\alpha-4}{2\alpha-6};\frac{\alpha-2}{2\alpha-6}\right);\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-4};\frac{-2}{\alpha-4}\right)\right\}$ pour $\alpha\in\,]-\infty;2[$.

Pour $\alpha=2$

Gains purs du joueur 1 : $\begin{cases} R_1(G,s_2)=y+2\\ R_1(D,s_2)=3y+2\end{cases}$

On a : $3y+2>y+2$ si $y\in\,]0,1]$. Par suite, $R_1(D,s_2)>R_1(G,s_2)$ et donc la stratégie G du joueur 1 est battue par D ; ainsi $x=0$.

Gains purs du joueurs 2 : $\begin{cases} R_2(s_1,H)=2\\ R_2(s_1,B)=4\end{cases}$

Par suite, la stratégie H du joueur 2 est battue par B et donc $y=1$. Ainsi, $x=0$ et $y=1$ sont les seules valeurs de x et y pour lesquelles chaque joueur joue sa stratégie pure battue avec un poids nul. Donc $((0,1),(1,0))$ est le seul équilibre de Nash si $y\in\,]0,1]$.

Si $y=0$, $R_1(G,s_2)=R_1(D,s_2)$ et donc aucune stratégie du joueur 1 n'est battue. Le joueur 1 est indifférent entre ses stratégies pures. Donc $x\in[0,1]$.

Donc $EN_{\alpha=2}=\{((0,1),(1,0))\}\cup\{((x,1-x),(0,1)),\ x\in[0,1]\}$

Pour $\alpha\in\,]2;4[$

D'après le tableau de signe, $\frac{\alpha-2}{\alpha-4}<0$, comme $y\in[0;1]$ alors $y\geq 0>\frac{\alpha-2}{\alpha-4}$.

On a : $R_1(G,s_2)-R_1(D,s_2)=(\alpha-4)y-(\alpha-2)<0$ puisque $2<\alpha<4$ et $y>\frac{\alpha-2}{\alpha-4}$.

Par suite, $R_1(G,s_2)<R_1(D,s_2)$ et donc, la stratégie G du joueur 1 est battue par D. Ainsi, $x=0$.

Gains purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1,H)=2\\ R_2(s_1,B)=6-\alpha\end{cases}$ car $x=0$.

Comme $2<\alpha<4$, alors $6-\alpha>2$ soit $R_2(s_1,B)>R_2(s_1,H)$. Par suite la stratégie H du joueur 2 est battue par B et donc $y=0$.

Il vient que $((0;1);(0;1))$ est un équilibre de Nash.

Donc $EN_\alpha=\{((0;1);(0;1))\}$ pour tout $\alpha\in\,]2;4[$.

Pour $\alpha=4$

Gains purs du joueur 1 : $\begin{cases} R_1(G,s_2)=5y\\ R_1(D,s_2)=5y+2\end{cases}$

On a : $5y+2>5y$ car $y\in[0,1]$. Donc $R_1(G,s_2)<R_1(D,s_2)$ et par suite la stratégie G du joueur 1 est battue par D d'où $x=0$.

Gains purs du joueurs 2 : $\begin{cases} R_2(s_1,H)=2\\ R_2(s_1,B)=2\end{cases}$

Donc aucune stratégie du joueur 2 n'est battue. Le joueur 2 est indifférent entre ses stratégies pures. Donc $y\in[0,1]$.

D'où $EN_{\alpha=4}=\{((0,1),(y,1-y)),\ y\in[0,1]\}$.

Pour $\alpha\in\,]4;+\infty[$

On a : $\alpha-2>\alpha-4\Longrightarrow\frac{\alpha-2}{\alpha-4}>1$ car $\alpha-4>0$ puisque $\alpha\in\,]4;+\infty[$.

On sait que $y \in [0;1]$ donc, $y \leq 1 < \frac{\alpha-2}{\alpha-4}$.

On a donc $R_1(G,s_2) - R_1(D,s_2) = (\alpha-4)y - (\alpha-2) < 0$.

Par suite, $R_1(G,s_2) < R_1(D,s_2)$ et donc, la stratégie G du joueur 1 est battue par D. Ainsi, $x = 0$.

Gains purs du joueur 2 : $\begin{cases} R_2(s_1,H) = 2 \\ R_2(s_1,B) = 6-\alpha \end{cases}$ car $x = 0$.

Comme $\alpha > 4$, alors $6-\alpha < 2$ soit $R_2(s_1,B) < R_2(s_1,H)$. Par suite la stratégie B du joueur 2 est battue par H et donc $y = 1$.

Il vient que $((0;1);(1;0))$ est un équilibre de Nash.

Donc $EN_\alpha = \{((0;1);(1;0))\}$ pour tout $\alpha \in]4;+\infty[$.

Recapitulons :

- **Pour** $\alpha \in]-\infty;2[$, $EN_\alpha = \left\{\left(\frac{\alpha-4}{2\alpha-6};\frac{\alpha-2}{2\alpha-6}\right);\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-4};\frac{-2}{\alpha-4}\right)\right\}$.
- **Pour** $\alpha = 2$, $EN_{\alpha=2} = \{((0,1),(1,0))\} \cup \{((x,1-x),(0,1)),\ x \in [0,1]\}$.
- **Pour** $\alpha \in]2;4[$, $EN_\alpha = \{((0;1);(0;1))\}$.
- **Pour** $\alpha = 4$, $EN_{\alpha=4} = \{((0,1),(y,1-y)),\ y \in [0,1]\}$.
- **Pour** $\alpha \in]4;+\infty[$, $EN_\alpha = \{((0;1);(1;0))\}$

Cette méthode utilise le théorème qui dit que toute stratégie pure battue d'un joueur est jouée avec un poids nul (c'est-à-dire une probabilité nulle) par ce joueur. Cette méthode n'est pas très systématique quand le jeu dépend d'un paramètre α. Dans la suite nous exposons la deuxième méthode.

3.1.2 En utilisant la fonction de meilleures réponses

Reprenons la matrice du jeu paramétré précédent :

1→ 2↓	G	D
H	$\alpha+1$; 5	$3+\alpha$; 2
B	$4-\alpha$; $3+\alpha$	2 ; $6-\alpha$

Calculons les espérances de gains de chaque joueur

- Pour le joueur 1, on a :

$$\begin{aligned} R_1^\alpha(x,y) &= (\alpha+1)xy + (3+\alpha)(1-x)y + (4-\alpha)x(1-y) + 2(1-x)(1-y) \\ &= (\alpha-4)xy + (2-\alpha)x + (1-\alpha)y + 2 \\ &= [(\alpha-4)y + 2 - \alpha]x + (1-\alpha)y + 2 \end{aligned}$$

- Pour le joueur 2, on a :

$$\begin{aligned} R_2^\alpha(x,y) &= 5xy + 2(1-x)y + (3+\alpha)x(1-y) + (6-\alpha)(1-x)(1-y) \\ &= (6-2\alpha)xy + (2\alpha-3)x + (\alpha-4)y + (6-\alpha) \\ &= [(6-2\alpha)x + \alpha - 4]y + (2\alpha-3)x + (6-\alpha) \end{aligned}$$

Rappelons la définition des fonctions meilleures réponses de chaque joueur pour un jeu de deux joueurs deux stratégies.

- Pour le joueur 2 : $m_2(x) = \arg\max\limits_{y\in[0,1]}\{R_2(x,y)\} = \{y \in [0,1] : R_2(x,y) \geq R_2(x,z), \forall z \in [0,1]\}$

– Pour le joueur 1 : $m_1(y) = \arg\max_{x\in[0,1]} \{R_1(x,y)\} = \{x \in [0,1] : R_1(x,y) \geq R_1(z,y), \forall z \in [0,1]\}$

Un profil (x^*, y^*) est un équilibre de Nash si et seulement si $x^* = m_1(y^*)$ et $y^* = m_2(x^*)$

Ce qui correspond à l'intersection des graphes des fonctions de meilleures réponses.

$R_2^\alpha(x,y)$ est une fonction affine de y dont les coefficients dépendent de x et α. Elle atteint son maximun en 0 ou en 1 si elle n'est pas constante.

$R_2^\alpha(x,y)$ est une fonction affine de x dont les coefficients dépendent de y et α. Elle atteint son maximun en 0 ou en 1 si elle n'est pas constante.

Posons $\begin{cases} \Delta_2 = 6 - 2\alpha \\ x_0 = -\frac{\alpha-4}{6-2\alpha} \text{ comme solution de l'équation } (6-2\alpha)x + \alpha - 4 \end{cases}$

et $\begin{cases} \Delta_1 = \alpha - 4 \\ y_0 = -\frac{2-\alpha}{\alpha-4} \text{ comme solution de l'équation } (\alpha-4)y + 2 - \alpha = 0 \end{cases}$

On a : $1 - x_0 = \frac{2-\alpha}{6-2\alpha}$ et $1 - y_0 = \frac{2}{4-\alpha}$

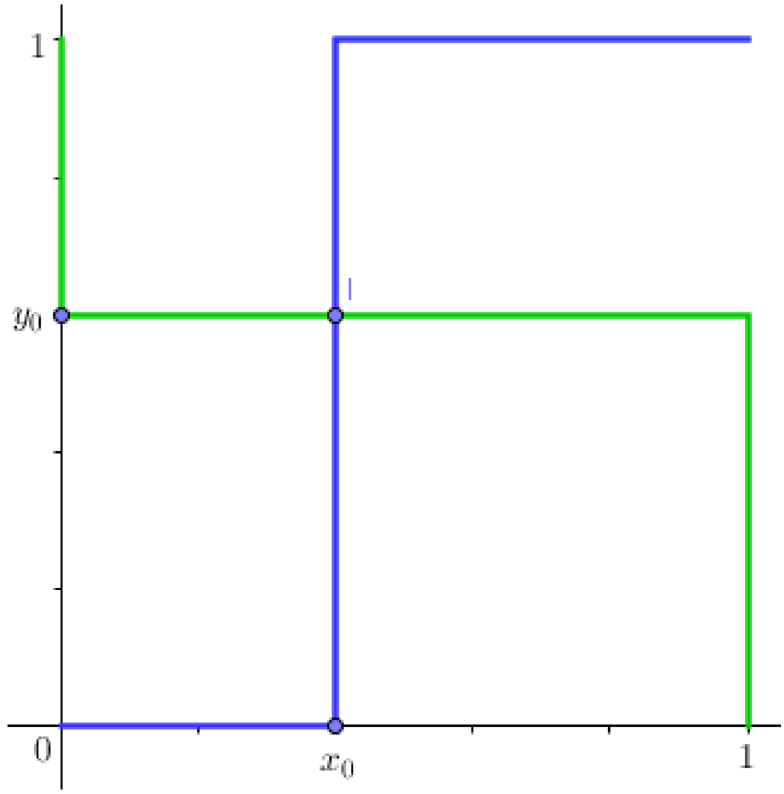
Le tableau suivant permet de déterminer la courbe des meilleures reponses en fonction de α.

α	$-\infty$	2		3		4	$+\infty$
Δ_2	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x_0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\neq$	$+$
$1-x_0$	$+$	0	$-$	$\neq$	$+$	$+$	$+$
Δ_1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y_0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-y_0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\neq$	$-$

En traçant (sur $[0,1]\times[0,1]$) en vert le graphe de la courbe de meilleures réponses du joueur 1 et en bleu celui du joueur 2 on obtient les équilibres de Nash en prenant les intersections.

– Pour $\alpha \in]-\infty, 2[$

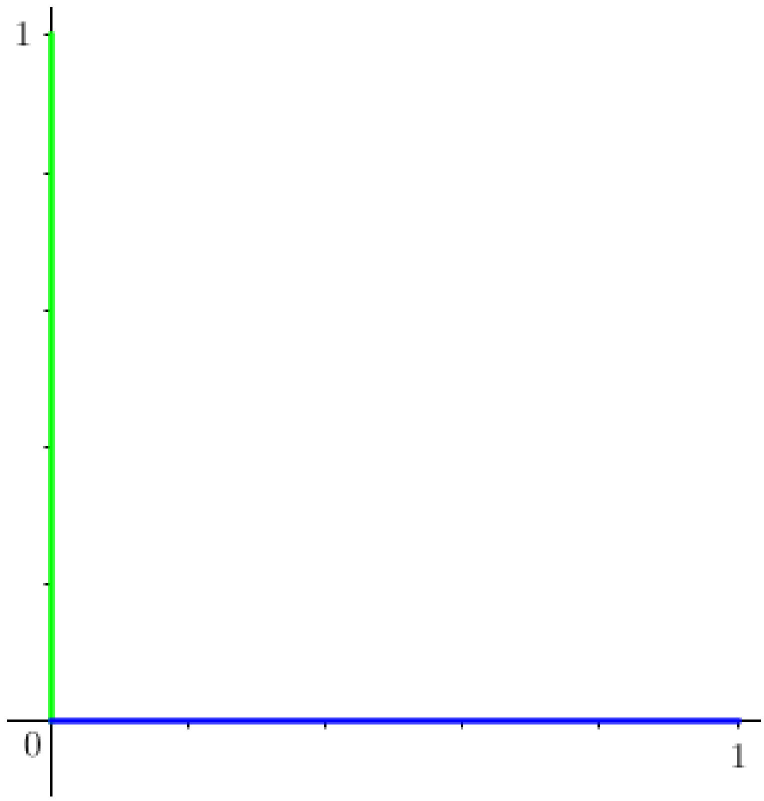
$$m_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < x_0 \\ [0,1] \text{ si } x = x_0 \\ 1 \text{ si } x > x_0 \end{cases} \text{ et } m_1(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y > y_0 \\ [0,1] \text{ si } y = y_0 \\ 1 \text{ si } y < y_0 \end{cases}$$



Donc $EN_\alpha = \{((x_0, 1-x_0)\,;(y_0, 1-y_0))\} = \left\{\left(\left(\frac{\alpha-4}{2\alpha-6}; \frac{\alpha-2}{2\alpha-6}\right); \left(\frac{\alpha-2}{\alpha-4}; \frac{-2}{\alpha-4}\right)\right)\right\}$

– Pour $\alpha \in]2, 3[$

$m_2(x) = 0$ et $m_1(y) = 0$



Donc $EN_\alpha = \{((0;1)\,;(0;1))\}$

– Pour $\alpha \in]3,4[$

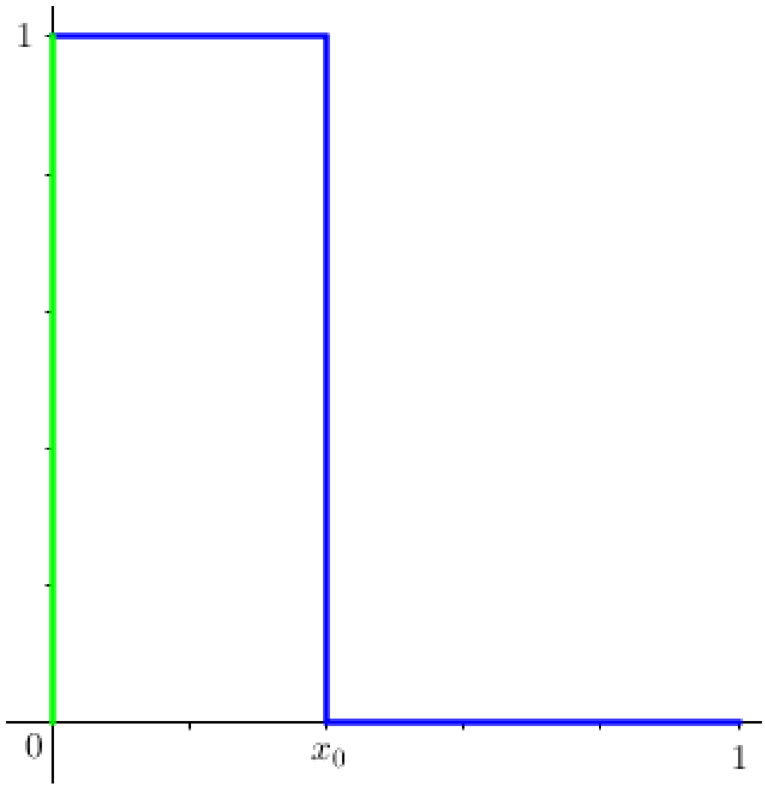
$m_2(x) = 0$ et $m_1(y) = 0$

On obtient le graphe précédent.

Donc $EN_\alpha = \{((0;1);(0;1))\}$

– Pour $\alpha \in]4,+\infty[$

$$m_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > x_0 \\ [0,1] \text{ si } x = x_0 \\ 1 \text{ si } x < x_0 \end{cases} \text{ et } m_1(y) = 0$$



Donc $EN_\alpha = \{((0;1);(1;0))\}$

3.2 Valeurs critiques en stratégies mixtes

La notion de valeur critique en stratégies pures nous a permi de déterminer les ensembles des équilibres de Nash de manière très commode.

Dans la suite nous allons généraliser cette notion à celle de valeur critique en stratégies mixtes et établir un resultat analogue à celui du théorème 2.1.1 en stratégies pures pour le cas particulier d'un jeu paramétré de deux joueurs deux stratégies.

Définition 3.2.1 *Soient* $G_\alpha = (N,(Z_i)_{i\in N},(u_i^\alpha)_{i\in N})$ *un jeu fini sous forme normale, on appelle extension mixte de* G_α *le jeu sous forme normale* $\Gamma_\alpha = (N,(S_i)_{i\in N},(R_i^\alpha)_{i\in N})$ *où pour tout* $i \in N$

1) $S_i = \left\{ s_i = \left(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k_i}\right) \in (\mathbb{R}_+)^{k_i} \;/\; \sum\limits_{k=1}^{k_i} s_i^k = 1 \right\}$

2) $\forall s \in S, R_i^\alpha(s) = \sum\limits_{z \in Z} \prod\limits_{j=1}^{n} s_j^{p_j} u_i^\alpha(z)$

- $z_j^{p_j} \in Z$ *s'appelle une stratégie pure*
- z *s'appelle une situation en stratégie pure*
- $s_i = \left(s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k_i}\right) \in S_i$ *s'appelle une stratégie mixte du joueur* i*.*
- $s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in S$ *s'appelle une situation en stratégie mixte.*

Définition 3.2.2 *Soit* $\Gamma_\alpha = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i^\alpha)_{i\in N})$ *un jeu sous forme normale paramétré en extension mixte. soit* $i \in N$*.*

On dit qu'un nombre réel λ *est une* ***valeur critique du joueur*** i *pour le jeu paramétré* $(\Gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *si* $\exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists s_{-i} \in S_{-i} :\quad R_i^\lambda(\hat{z}_i, s_{-i}) = R_i^\lambda(\check{z}_i, s_{-i})$*.*

Définition 3.2.3 *Soit* $\Gamma_\alpha = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i^\alpha)_{i\in N})$ *un jeu sous forme normale paramétré en extension mixte. On dit qu'un nombre réel* λ *est une* ***valeur critique du jeu*** $(G_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *s'il existe un joueur* i *tel que* λ *soit une valeur critique du joueur* i*, c'est-à-dire* $\exists i \in N$*,* $\exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists z_{-i} \in Z_{-i} : R_i^\lambda(\hat{z}_i, s_{-i}) = R_i^\lambda(\check{z}_i, s_{-i})$*.*

Théorème 3.2.1 *Soit* $\Gamma_\alpha = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i^\alpha)_{i\in N})$ *un jeu sous forme normale paramétré en extension mixte de* $G_\alpha = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i^\alpha)_{i\in N})$*. Toute valeur critique en stratégies pures est une valeur critique en stratégies mixtes.*

Preuve. Soit λ une valeur critique en stratégies pures de G_α.

Par définition, $\exists i \in N,\ \exists\ \hat{z}_i,\ \check{z}_i \in Z_i,\ \hat{z}_i \neq \check{z}_i,\ \exists z_{-i} \in Z_{-i} : u_i^\lambda(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i^\lambda(\check{z}_i, z_{-i})$.

Prenons s_{-i} le vecteur de stratégie mixte qui correspond au vecteur de stratégie pure z_{-i}.

On a : $R_i^\lambda(\hat{z}_i, s_{-i}) = u_i^\lambda(\hat{z}_i, z_{-i})$ et $R_i^\lambda(\check{z}_i, s_{-i}) = u_i^\lambda(\check{z}_i, z_{-i})$

Comme $u_i^\lambda(\hat{z}_i, z_{-i}) = u_i^\lambda(\check{z}_i, z_{-i})$, on a donc : $R_i^\lambda(\hat{z}_i, s_{-i}) = R_i^\lambda(\check{z}_i, s_{-i})$.

On en déduit que λ est une valeur critique en stratégies mixtes de Γ_α. ■

Théorème 3.2.2 *Soit* $\Gamma_\alpha = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i^\alpha)_{i\in N})$ *un jeu sous forme normale paramétré en extension mixte de* $G_\alpha = (N, (Z_i)_{i\in N}, (u_i^\alpha)_{i\in N})$*. On suppose que* $card(N) = 2$ *et* $card(Z_i) = 2, \forall i \in N$ *et que la fonction* $\alpha \longmapsto u_i^\alpha(z)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, pour tout* $i \in N$ *et pour tout* $z \in Z$*. Si* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *qui* ***ne contient pas de valeurs critiques en stratégies mixtes du jeu*** Γ_α*, alors* $\forall \alpha, \beta \in I,\ Nash(\Gamma_\alpha) = Nash(\Gamma_\beta)$*.*

Preuve. On pose $N = \{1, 2\}, Z_1 = \{z_1^1, z_1^2\}$ et $Z_2 = \{z_2^1, z_2^2\}$.

Soit I un intervalle ne contenant pas de valeur critique.

Alors $\forall \alpha \in I, \begin{cases} R_1^\alpha(z_1^1, y) \neq R_1^\alpha(z_1^2, y) & \forall y \in [0,1] \quad \text{(a)} \\ R_2^\alpha(x, z_2^1) \neq R_2^\alpha(x, z_2^2) & \forall x \in [0,1] \quad \text{(b)} \end{cases}$

Considérons les fonctions f_1 et f_2 définies par $\begin{cases} f_1(\alpha) = R_1^\alpha(z_1^1, y) - R_1^\alpha(z_1^2, y) \\ f_2(\alpha) = R_2^\alpha(x, z_2^1) - R_2^\alpha(x, z_2^2) \end{cases}$

Ces fonctions sont continues comme somme de fonctions continues.

Alors on a deux cas :

$$\text{ou bien } R_1^\alpha\left(z_1^1, y\right) > R_1^\alpha\left(z_1^2, y\right) \forall\alpha \in I \text{ ou bien } R_1^\alpha\left(z_1^1, y\right) < R_1^\alpha\left(z_1^2, y\right) \forall\alpha \in I$$

En effet, s'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tel que

$$R_1^{\alpha_1}\left(z_1^1, y\right) > R_1^{\alpha_2}\left(z_1^2, y\right) \text{ et } R_1^{\alpha_2}\left(z_1^1, y\right) < R_1^{\alpha_2}\left(z_1^2, y\right)$$

Alors on aura $f_1(\alpha_1) > 0$ et $f_1(\alpha_2) < 0$, et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existera $\alpha_0 \in I$ tel que $f_1(\alpha_0) = 0$; ce qui implique que $R_1^{\alpha_0}(z_1^1, y) = R_1^{\alpha_0}(z_1^2, y)$; ce qui contredit (1)

De meme on a :

$$\text{ou bien } R_2^\alpha\left(x, z_2^1\right) > R_2^\alpha\left(x, z_2^2\right) \forall\alpha \in I \text{ ou bien } R_2^\alpha\left(x, z_2^1\right) < R_2^\alpha\left(x, z_2^2\right) \forall\alpha \in I.$$

On obtient ainsi les quatre cas suivants :

- Cas 1 : $\forall\alpha \in I, \begin{cases} R_1^\alpha(z_1^1, y) > R_1^\alpha(z_1^2, y) & \forall y \in [0,1] \\ R_2^\alpha(x, z_2^1) > R_2^\alpha(x, z_2^2) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$

  On en déduit que $Nash(\Gamma_\alpha) = \{(z_1^1, z_2^1)\}$
- cas 2 : $\forall\alpha \in I, \begin{cases} R_1^\alpha(z_1^1, y) < R_1^\alpha(z_1^2, y) & \forall y \in [0,1] \\ R_2^\alpha(x, z_2^1) > R_2^\alpha(x, z_2^2) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$

  On en déduit que $Nash(\Gamma_\alpha) = \{(z_1^2, z_2^1)\}$
- cas 3 : $\forall\alpha \in I, \begin{cases} R_1^\alpha(z_1^1, y) > R_1^\alpha(z_1^2, y) & \forall y \in [0,1] \\ R_2^\alpha(x, z_2^1) < R_2^\alpha(x, z_2^2) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$

  On en déduit que $Nash(\Gamma_\alpha) = \{(z_1^1, z_2^2)\}$
- cas 4 : $\forall\alpha \in I, \begin{cases} R_1^\alpha(z_1^1, y) < R_1^\alpha(z_1^2, y) & \forall y \in [0,1] \\ R_2^\alpha(x, z_2^1) < R_2^\alpha(x, z_2^2) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$

  On en déduit que $Nash(\Gamma_\alpha) = \{(z_1^2, z_2^2)\}$

Donc dans tous les cas, l'ensemble des équilibres de Nash ne dépend pas de α quand $\alpha \in I$.

On en déduit donc que : $\forall\alpha, \beta \in I$, $Nash(\Gamma_\alpha) = Nash(\Gamma_\beta)$. ■

Le résultat établit précédemment affirme que l'ensemble des équilibres de Nash d'un jeu paramétré en extension mixte est le même pour les valeurs du paramètre ne contenant pas de valeur critique.

Exemple 3.2.1 *Determinons les valeurs critiques en stratégies mixtes du jeu paramétré dont la matrice a été donné précédemment par :*

$1\rightarrow$ $2\downarrow$	G	D
H	$\alpha+1$; 5	$3+\alpha$; 2
B	$4-\alpha$; $3+\alpha$	2 ; $6-\alpha$

On rappel les gains purs de chaque joueur

Gains purs du joueur 1: $\begin{cases} R_1(G,s_2) = (2\alpha-3)\,y + 4 - \alpha \\ R_1(D,s_2) = (\alpha+1)\,y + 2 \end{cases}$

Gains purs du joueur 2: $\begin{cases} R_2(s_1,H) = 3x + 2 \\ R_2(s_1,B) = (2\alpha-3)\,x + 6 - \alpha \end{cases}$

– *Valeurs critiques du joueur 1 en stratégies mixtes.*

$$\begin{aligned} R_1(G,s_2) = R_1(D,s_2) &\iff (2\alpha-3)\,y + 4 - \alpha = (\alpha+1)\,y + 2 \\ &\iff \alpha = \begin{cases} \frac{4y-2}{y-1} = f(y) \;\; si\; y \in [0,1[\\ 2 \;\; si\; y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

f est décroissante sur $[0,1[$; donc $\alpha \in\,]-\infty;-1] \cup \{2\}$

Donc l'ensemble des valeurs critiques en stratégies mixtes du joueur 1 est $Vc_1 = \,]-\infty;-1] \cup \{2\}$

– *Valeurs critiques du joueur 2 en stratégies mixtes.*

$$\begin{aligned} R_2(s_1,H) = R_2(s_1,B) &\iff 3x + 2 = (2\alpha-3)\,x + 6 - \alpha \\ &\iff \alpha = \frac{6x-4}{2x-1} = g(y) \;\; si\; x \in \left[0;\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]\tfrac{1}{2};1\right] \end{aligned}$$

g est une fonction croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};1\right]$, donc $\alpha \in\,]-\infty;2] \cup [4;+\infty[$

Donc l'ensemble des valeurs critiques en stratégies mixtes du joueur 2 est $Vc_2 = \,]-\infty;2] \cup [4;+\infty[$

On en déduit que l'ensemble des valeurs critiques en stratégies mixtes du jeu est $Vc(\Gamma_\alpha) = Vc_1 \cup Vc_2 = \,]-\infty;2] \cup [4;+\infty[$.

Et donc le seul intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas de valeur critique est l'intervalle :$]2,4[$.

Et pour tout $\alpha \in\,]2,4[$ on a : $Nash(\Gamma_\alpha) = \{((0,1);(0,1))\}$; ce qui confirme bien le théorème précédent.

Conclusion et perspective

En conclusion, nous avons travaillé sur les jeux finis sous forme normale paramétrés en présentant les notions comme celles de valeur critique et point critique qui nous ont permises d'établir des résultats pour la détermination des équilibres de nash en stratégies pures sur des intervalles ne contenant pas de valeur critique pour le cas où le paramètre est réel ou sur des parties connexes d'un espace topologique (comme exemple l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$) ne contenant pas de point critique. Par la suite, nous avons dévéloppé une méthode pour la détermination de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes dans le cas particulier de deux joueurs avec deux stratégies pour chaque joueur. La question qui peut se poser est de savoir si ce résultat reste vrai pour les jeux finis sous forme normale paramétrés à plus de deux joueurs et plus de deux stratégies. La réponse à cette question pourra faire l'objet de recherche future.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Diffo Lambo Lawrence. (2016) " *Note de cours : MA5 UE Jeux stratégiques* ". Université de Yaoundé I, Ecole Normale Supérieure, Cameroun

[2] Diffo Lambo Lawrence et Ngoufack Françoise. (2013) Université de Yaoundé I, Cameroun, pers. comm." *jeux paramétrés* ".

[3] Eclin Sarikaya. 2012 *" Equilibre de Nash "*.
http ://math.gsu.edu.tr/mezun/Projeler/equilibre%20de%20nash.pdf

[4] Jean-Yves Jaffray, Patrice Perny. 2006 *" Note de cours (4) : Théorie des jeux, M1 IAD UE Décision et jeux "*.

[5] Lepatio Taning, 2015. "*Dominance dans les jeux finis sous forme paramétrés*". Mémoire DIPES II, Université de Yaoundé I, Ecole Normale Supérieur , Cameroun.

[6] Michael Maschler, Eilon Solan and Shmuel Zamir 2013. "Game Theory" Cambridge University Press, New York, 1008 pages

[7] Sébastien Konieczny. 2009 *" Introduction à la théorie des jeux "*. www.cril.univ-artois.fr/~konieczny/enseignement/TheorieDesJeux.pdf

[8] Shmuel Zamir, Rida Laraki. *" Cours de théorie des jeux "*.
http ://dhenriet.perso.centrale-marseille.fr/CourPolytechnique.pdf