REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

TYPES DE RELATIONS DE ROSENBERG ET CLONES SOUS-MAXIMAUX DES POLYMORPHISMES D'UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE NON TRIVIALE : CAS UNAIRE ET BINAIRE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

DJOUMESSI Joseph
Licencié en mathématiques

Sous la direction
Dr TEMGOUA ALOMO Etienne Romuald
Chargé de cours

Année Académique
2015-2016

♣ Dédicace ♣

À ma mère **MEDOUNFOUET Victorine**

♣ Remerciements ♣

Tout seul, on ne peut arriver à bâtir.

J'adresse ici mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont porté jusque là par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements, leurs aides et leurs reproches. Ma profonde reconnaissance va tout d'abord :

♡ Au Seigneur **Jésus-Christ** , pour son amour, sa miséricorde, sa bonté, pour la protection qu'il m'a accordé durant toutes ces cinq années. Merci Seigneur pour tous ces dons.
Mes remerciements s'adressent également de façon particulière :

♡ À mon encadreur, le Docteur **TEMGOUA ALOMO Etienne Romuald** qui a de bon gré accepté de diriger ce travail, malgré ses occupations, a soutenu mes efforts jusqu'au bout. Merci grandement.

♡ **À tous les enseignants de mathématiques de l'École Normale Supérieure de Yaoundé**, pour les enseignements et le suivi qu'ils m'ont apportés durant ces cinq années passées à l'école normale. Merci beaucoup.

♡ À mes frères et soeurs, **Boris Fouegue, Armand Fouegue, Marguerite Fouegue, Olivia Nguimtsing, Cédric Jiofack , Abdou Pempeme**, **Olga Djoumessi**, **Aubin Djeufo**. Je n'oublie pas l'amour et le réconfort que vous m'avez toujours témoignés.

♡ À mon tuteur, **Guiamatsia** et son épouse pour leur soutien moral et financier.

♡ À mon père, **Fouegue Michel** pour la grande attention qu' il m'accorde et pour son soutien sans cesse, merci pour ses conseils et ses encouragements.

♡ À tous mes camarades de promotion, particulièrement, **Tsakou**, **Donfack**, **Kaldjob**, **Fouotsa**, **Kenfack**, **Safokem**, **Feudjio**, **Kam**,**Yobung**, **Kengne** pour l'esprit d'équipe qui n'a cessé de régner au cours de notre promotion.

À tous ceux qui sur mon chemin m'ont encouragé, soutenu, maintenu ou relevé et dont je n'ai pas fait mention, qu'il reçoivent ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent travail est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du Candidat

DJOUMESSI Joseph

♣ Résumé ♣

Soit $k \geq 3$, θ une relation d'équivalence non triviale sur $E_k = \{0, \cdots, k-1\}$. Dans ce travail, nous caractérisons quatre types de relations σ (relation centrale unaire ; relation centrale binaire ; relation d'équivalence non triviale et graphe d'une permutation d'ordre premier) sur E_k telles que les clones de la forme $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soient maximaux dans $Pol\theta$. Ensuite nous déterminons les relations σ dans les cas où $k \in \{3, 4, 5\}$.

Mots clés : Clone, maximal, Polymorphisme, relation centrale, relation d'équivalence non triviale.

♣ Abstract ♣

Let $k \geq 3$, θ a non-trivial equivalence relation on $E_k = \{0, \cdots, k-1\}$. In this work, we characterize four types of relations σ (unary central relation ; binary central relation ; non-trivial equivalence relation and graph of prime permutation) on E_k such that the clones of the form $Pol\theta \cap Pol\sigma$ are maximal in $Pol\theta$. We also determine the relations σ in the cases $k \in \{3, 4, 5\}$.

Keys words : Clone, maximal, Polymorphism, central relation, non-trivial equivalence relation.

♣ Table des matières ♣

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Déclaration sur l'honneur **iii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Introduction générale **1**

1 PRÉLIMINAIRES **2**

1.1 Treillis 2

1.2 Fonctions sur un ensemble fini 3

1.3 Clones de fonctions sur un ensemble 4

1.4 Relations 5

1.5 Relations de Rosenberg 9

1.6 Connexion de Galois (Pol, Inv) 12

2 RELATIONS CENTRALES D'ARITÉ ≤ 2 ET RELATION D'ÉQUIVALENCE **14**

2.1 Cas où σ est une relation centrale unaire 14

2.1.1 Inventaire des relations d'équivalence non triviales sur E_3, E_4 et sur E_5 17

2.1.2 Application 19

2.2 Cas où σ est une relation centrale binaire. 21

2.2.1 Inventaire des relations centrales binaires sur E_3 et sur E_4 23

2.2.2 Application 24

3 PERMUTATION PREMIÈRE ET RELATION D'ÉQUIVALENCE 32

3.1 Relations d'équivalence et applications 32

3.2 Permutations premières, relations d'équivalence et applications 36

3.3 Comprendre, mobiliser et construire des connaissances 41

3.4 Aptitude à mener un raisonnement logique 42

3.5 Initiation à l'usage des nouvelles technologies de l'information et de la communication 42

Conclusion 44

Bibliographie 45

♣ Introduction générale ♣

En 1941, Post (1941) présenta le treillis des clones sur un ensemble à deux éléments. Depuis ce temps, on cherche à généraliser les résultats de Post sur un ensemble fini de cardinal au moins trois. Mais, pour un ensemble à trois éléments, le treillis des clones contient $2^{\aleph_0}$ éléments et sa structure est très complexe et peu connue (Fearnley).
En 1965, Rosenberg (1965) a montré que les clones maximaux sur un ensemble fini sont de six catégories parmi lesquelles les clones des fonctions préservant une relation d'équivalence non triviale. Il était logique de se demander si la même chose restait vraie pour les clones sous-maximaux, c'est-à-dire ceux placés directement en-dessous des clones maximaux. A notre connaissance, une réponse n'a pas encore été apportée, mais, en 1982, Lau (1982) a décrit l'ensemble de tous les clones sous-maximaux sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.
Dans ce travail nous décrivons quelques clones sous-maximaux inf-réductibles des polymorphismes d'une relation d'équivalence non triviale sur E_k, $k \in \{3, 4, 5\}$.
Notre travail sera présenté en trois chapitres. Au premier chapitre, nous présenterons les notions nécessaires pour comprendre les chapitres 2 et 3. Au chapitre 2, nous caractériserons les clones sous-maximaux inf-réductibles $Pol\sigma \cap Pol\theta$ dans $Pol\theta$ où θ est une relation d'équivalence non triviale et σ une relation centrale d'arité inférieure où égale à 2. Au chapitre 3, nous caractériserons les clones sous-maximaux inf-réductibles $Pol\sigma \cap Pol\theta$ dans $Pol\theta$ où θ est une relation d'équivalence non triviale et σ est soit une relation d'équivalence non triviale, soit le graphe d'une permutation d'ordre premier et sans point fixe sur un ensemble à k éléments ($k \in \{3, 4, 5\}$).

★ ★ Chapitre Un ★ ★

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments nécessaires pour la compréhension des chapitres deux et trois.

1.1 Treillis

Définition 1.1. *Soit E un ensemble non vide.*
On appelle opération binaire sur E toute application de E^2 vers E.

Exemple 1.1.1. L'application f de $\mathbb{Z}^2$ vers $\mathbb{Z}$ définie par $f(x, y) = x - y$ est une opération binaire sur $\mathbb{Z}$.

Définition 1.2. *Soit L un ensemble non vide muni des opérations binaires $\wedge$ et $\vee$.*
$(L, \vee, \wedge)$ est appelé treillis si pour tout $x, y, z \in L$, on a :

$$A_1. \quad \left.\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{array}\right\} \quad \textit{commutativité}$$

$$A_2. \quad \left.\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}\right\} \quad \textit{associativité}$$

$$A_3. \quad \left.\begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array}\right\} \quad \textit{idempotence}$$

$$A_4. \quad \left.\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{array}\right\} \quad \textit{absorption}$$

Définition 1.3. *Un treillis $(L, \wedge, \vee)$ est dit distributif si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- $\forall x, y, z \in L, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $\forall x, y, z \in L, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

On note $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ un treillis.

Exemple 1.1.2. Soit $L = E_2, \vee = max, \wedge = \min$.
$\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ un treillis.

Théorème 1.1. *(Burris et Sankappanava, 1981)*
Un ensemble ordonné $(L, \leq)$ est un treillis si et seulement si pour tout $a, b \in L, \sup\{a, b\}$ et $\inf\{a, b\}$ existent dans L.

Exemple 1.1.3. Soit E un ensemble non vide, notons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis. Avec $A \vee B = A \cup B$ et $A \wedge B = A \cap B$.

1.2 Fonctions sur un ensemble fini

Soit A un ensemble fini de cardinal k supérieur ou égal à 2. On notera aussi A par $E_k = \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$.

Définition 1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
On appelle fonction ou opération n-aire sur E_k toute application f de E_k^n vers E_k.

Notation 1.2.1. Une opération f d'arité n est notée f^n.

Exemple 1.2.1. Soit $(E_k, +)$ un groupe, soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, l'application f de E_k^n vers E_k définie par $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ est une opération d'arité n.

Notation 1.2.2.

1. $\mathcal{O}_k^n$ désigne l'ensemble des fonctions d'arité n sur l'ensemble E_k.
2. $\mathcal{O}_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{O}_k^n$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions d'arité fini sur E_k.
3. Si $F \subseteq \mathcal{O}_k$, alors $F^n = F \cap \mathcal{O}_k^n$ désigne l'ensemble des fonctions de F d'arité n.

Définition 1.5. *Soit $n \geq 2$.*

1. *L'application $e_i^n (i \in \{1, 2, \cdots, n)$ de E_k^n vers E_k définie par $e_i^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$ est appelée la i^{eme} projection sur E_k.*
2. *On appelle fonction constante et de valeur $a \in E_k$ toute application C_a définie de E_k^n vers E_k par $C_a(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a$.*

Notation 1.2.3. On note J_k l'ensemble de toutes les projections sur E_k.

1.3 Clones de fonctions sur un ensemble

Définition 1.6. *Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{O}_k$. C est appelé un clone sur E_k si $J_k \subseteq C$ et pour toute fonction f n-aire , $g_1, g_2, \cdots, g_n$ m-aires (f et g_i éléments de C), la fonction m-aire h définie par : $h(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f\left(g_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), g_2(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, x_2, \cdots, x_m)\right)$ est un élément de C.*
Autrement dit, C est un clone sur E_k s'il contient toutes les projections et s'il est fermé pour la composition.

Exemple 1.3.1. J_k et $\mathcal{O}_k$ sont des clones sur $\mathcal{O}_k$.

Remarque 1.3.1.

1. L'intersection d'une famille de clones sur E_k est un clone sur E_k.
2. L'ensemble des clones sur E_k ordonné par la relation d'inclusion forme un treillis. Ce treillis contient un plus petit élément qui est J_k et un plus grand élément qui est $\mathcal{O}_k$.
3. Soit $F \subseteq \mathcal{O}_k$, il existe un plus petit clone sur E_k contenant F ; on l'appelle clone engendré par F et on le note $\langle F \rangle$.

Définition 1.7. *Un clone C est dit maximal dans $\mathcal{O}_k$ si $\forall f \in \mathcal{O}_k \setminus C, \langle C \cup \{f\} \rangle = \mathcal{O}_k$.*

Proposition 1.1. *Un clone C sur E_k est maximal si et seulement si $\mathcal{O}_k$ est le seul clone contenant strictement C.*

Preuve. Soit C un clone sur E_k.
$\Longrightarrow$) Supposons que C est maximal dans $\mathcal{O}_k$. Supposons en outre qu'il existe un clone D sur $\mathcal{O}_k$ tel que $C \subsetneq D \subsetneq \mathcal{O}_k$.
Soit $f \in D \setminus C$. Alors par hypothèse, $\mathcal{O}_k = \langle C \cup \{f\} \rangle \subseteq D$ d'où $\mathcal{O}_k = D$ ce qui est absurde.
$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\mathcal{O}_k$ est le seul clone contenant strictement C.
Soit $f \in \mathcal{O}_k \setminus C$, une opération. Alors $C \subsetneq \langle C \cup \{f\} \rangle \subseteq \mathcal{O}_k$. Donc $\langle C \cup \{f\} \rangle = \mathcal{O}_k$ car $\mathcal{O}_k$ est le seul clone contenant C de façon stricte. ■

Définition 1.8. *Un clone M est dit sous-maximal s'il existe un clone maximal F tel que pour tout $f \in F \setminus M$, on a $\langle M \cup \{f\} \rangle = F$.*

1.4 Relations

Définition 1.9. *Soit $h \in \mathbb{N}$.*
Une relation h-aire sur E_k est un sous ensemble du produit cartésien E_k^h.

Notation 1.4.1.

1. $\mathcal{R}_k^h$ désigne l'ensemble de toutes les relations h-aires sur E_k.
2. $\mathcal{R}_k = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_k^h$ désigne l'ensemble de toutes les relations sur E_k.

Remarque 1.4.1. Une relation n-aire θ peut être donnée sous forme matricielle où les colonnes sont les éléments de la relation. Par exemple, si $\theta = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n), (z_1, z_2, \cdots, z_n)\}$, alors on peut écrire :

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}.$$

Définition 1.10. *Soit θ une relation h-aire sur E_k.*

1. *θ est dite **totalement réflexive** (réflexive si $h = 2$) si pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_h) \in E_k^h$, $(a_1, a_2, \cdots a_h) \in \theta$ dès qu'il existe $i, j \in \{1, 2, \cdots, h\}$ tel que $i \neq j$ et $a_i = a_j$.*
2. *θ est dite **totalement symétrique**(symétrique si $h = 2$) si pour toute permutation σ de $\{1, 2, \cdots, h\}$ et pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_h) \in E_k^h$,*
   $(a_1, a_2, \cdots, a_h) \in \theta$ si et seulement si $(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \cdots, a_{\sigma(h)}) \in \theta$.

Exemple 1.4.1. Sur $E_3 = \{0, 1, 2\}$, on considère la relation 3-aire θ définit par :
$\theta = E_3^3 \setminus \{(0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 0, 1)\}$.
Alors θ est une relation totalement réflexive.

Exemple 1.4.2. Sur $E_3 = \{0, 1, 2\}$, on considère la relation 3-aire σ définit par :
$\sigma = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 0, 1)\}$.
Alors σ est une relation totalement symétrique.

Définition 1.11. *Soit f une fonction n-aire sur E_k et ρ une opération h-aire sur E_k.*

On dit que f préserve ρ si :

$$\text{pour tout } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{h1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{h2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{hn} \end{pmatrix} \in \rho, \text{ on a :}$$

$$f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{11}, & a_{12}, & \cdots & , a_{1n}) \\ f(a_{21}, & a_{12}, & \cdots & , a_{2n}) \\ & \vdots & & \\ f(a_{h1}, & a_{h2}, & \cdots & , a_{hn}) \end{pmatrix} \in \rho.$$

On dit que que f est un polymorphisme de ρ ou que ρ est invariant par f.

<u>Notation</u> 1.4.2.

1. $Pol\rho$ désigne l'ensemble des fonctions qui préservent la relation ρ.
2. $Invf$ désigne l'ensemble des relations préservées par l'opération f.
3. Si $A \subseteq \mathcal{O}_k$ et $S \subseteq \mathcal{R}_k$ alors, on pose $InvA = \bigcap\limits_{f \in A} Invf$ et $PolS = \bigcap\limits_{\rho \in S} Pol\rho$.

Lemme 1.1. *Pour toute relation h-aire θ sur E_k, $Pol\theta$ est un clone sur E_k.*

<u>Preuve</u>. Soit θ une relation h-aire sur E_k.

Montrons que $J_k \subseteq Pol\theta$.

Soient $n \geq 2, i \in \{1, 2, \cdots, n\}, e_i^n$ la ième projection sur E_k. Alors

$$\text{pour tout } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{h1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{h2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{hn} \end{pmatrix} \in \theta, \text{ on a :}$$

$$e_i^n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i^n(a_{11}, & a_{12}, & \cdots & , a_{1n}) \\ e_i^n(a_{21}, & a_{12}, & \cdots & , a_{2n}) \\ & \vdots & & \\ e_i^n(a_{h1}, & a_{h2}, & \cdots & , a_{hn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{hi} \end{pmatrix} \in \theta.$$

Ce qui montre que $J_k \subseteq Pol\theta$.

Montrons que $Pol\theta$ est stable pour la composition.

Soient f une fonction n-aire de $Pol\theta$ et $g_1, g_2, \cdots, g_n$ des fonctions m-aires de $pol\theta$. Alors

$$\text{pour tout } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{h1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{h2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{hm} \end{pmatrix} \in \theta, \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} f(g_1, \cdots, g_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{h1} & \cdots & a_{hm} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(g_1, \cdots, g_n)(a_{11}, \cdots, a_{1m}) \\ f(g_1, \cdots, g_n)(a_{21}, \cdots, a_{2m}) \\ \cdots \\ f(g_1, \cdots, g_n)(a_{h1}, \cdots, a_{hm}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(g_1(a_{11}, \cdots, a_{1m}), \cdots, g_n(a_{11}, \cdots, a_{1m})) \\ f(g_1(a_{21}, \cdots, a_{2m}), \cdots, g_n(a_{21}, \cdots, a_{2m})) \\ \vdots \\ f(g_1(a_{h1}, \cdots, a_{hm}), \cdots, g_n(a_{h1}, \cdots, a_{hm})) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui est un élément de $Pol\theta$ car $f, g_1, g_2, \cdots, g_n \in Pol\theta$. Donc $Pol\theta$ est fermé. ■

Lemme 1.2. *Soit ρ une relation binaire. $Pol\rho = \mathcal{O}_k$ si et seulement si $\rho \in \{\emptyset, \Delta_{E_k}, E_k^2\}$.*

Preuve.

i) Supposons que $Pol\rho = \mathcal{O}_k$ et $\rho \notin \{\emptyset, \Delta_{E_k}, E_k^2\}$. Deux cas sont envisagés.

- S'il existe $a \in E_k$ tel que $(a, a) \notin \rho$, alors on considère l'opération unaire f sur E_k définie par $f(x) = a$. Comme $\rho \neq \emptyset$, il existe $(x, y) \in \rho$ et $(f(x), f(y)) = (a, a) \notin \rho$ c'est-à-dire que $f \notin Pol\rho$ et $f \in \mathcal{O}_k$. Ce qui contredit le fait que $Pol\rho = \mathcal{O}_k$.

- Sinon, $\Delta_{E_k} \subsetneq \rho \subsetneq E_k^2$.

Soit $(a, b) \in E_k^2$ tel que $(a, b) \notin \rho$ et $(x, y) \in \rho$ tel que $x \neq y$. On considère l'opération unaire g sur E_k définie par :

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{si } t = x \\ b & \text{sinon} \end{cases}.$$

$(g(x), g(y)) = (a, b) \notin \rho$ c'est-à-dire que $g \notin Pol\rho$ et $g \in \mathcal{O}_k$. Ce qui contredit le fait que $Pol\rho = \mathcal{O}_k$. Donc $\rho \in \{\emptyset, \Delta_{E_k}, E_k^2\}$.

ii) Réciproquement, on a : $Pol\emptyset = \mathcal{O}_k, Pol\Delta_{E_k} = \mathcal{O}_k$ et $PolE_k^2 = \mathcal{O}_k$. ■

Lemme 1.3. *Soit θ une relation binaire telle que $\theta \notin \{\emptyset, \Delta_{E_k}, E_k^2\}$ et ρ une relation d'équivalence non triviale.*

Si $Pol\theta = Pol\rho,$ alors $\rho = \theta$.

Preuve. Supposons que $Pol\theta = Pol\rho$.

1. Montrons que $\rho \subseteq \theta$.

   $\Delta_{E_k} \subseteq \theta$; en effet soit $a \in E_k$.

   Considérons l'opération unaire f définie sur E_k par $f(x) = a$.

   $f \in Pol\rho = Pol\theta$. Comme $\theta \neq \emptyset, \exists (x, y) \in \theta$.

   $f \in Pol\theta$ et $(x, y) \in \theta$ donc $(f(x), f(y)) = (a, a) \in \theta$. Ce qui prouve que $\Delta_{E_k} \subseteq \theta$.

   Soit $(x, y) \in \rho$.

   - Si $x = y,$ alors $(x, y) \in \theta$ car $\Delta_{E_k} \subseteq \theta$.

   - Si $x \neq y$, alors soit $(a, b) \in \theta$ avec $a \neq b$ (car $\Delta_{E_k} \subsetneq \theta$).

   * Si $(a, b) \in \rho$, alors on considère l'opération unaire g définie sur E_k par :

   $$g(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = a \\ y & \text{sinon} \end{cases} .$$

   On a : $g(\rho) \subseteq \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\} \subseteq \rho$ (car ρ est réflexive et symétrique).

   Donc $g \in Pol\rho = Pol\theta$ d'où $(g(a), g(b)) = (x, y) \in \theta$.

   * Si $(a, b) \notin \rho$, alors On considère l'opération unaire h définie sur E_k par :

   $$h(t) = \begin{cases} x & \text{si } (t, a) \in \rho \\ y & \text{sinon} \end{cases} .$$

   On a : $h(\rho) \subseteq \{(x, x), (y, y)\} \subseteq \rho$.

   Donc $h \in Pol\rho = Pol\theta$ d'où $(h(a), h(b)) = (x, y) \in \theta$.

   On conclut que $\rho \subseteq \theta$.

   Montons que θ est symétrique.

   Soit $(x, y) \in \theta$. Montrons que $(y, x) \in \theta$.

   - Si $(x, y) \in \rho$, alors $(y, x) \in \rho$ (car ρ est symétrique). De plus, $\rho \subseteq \theta$ donc $(y, x) \in \theta$.

   - Si $(x, y) \notin \rho$, alors On considère l'opération unaire f définie sur E_k par :

   $$f(t) = \begin{cases} y & \text{si } (t, x) \in \rho \\ x & \text{sinon} \end{cases} .$$

   On a :$f(\rho) \subseteq \{(x, x), (y, y)\} \subseteq \rho$.

   Donc $f \in Pol\rho = Pol\theta$ d'où $(f(x), f(y)) = (y, x) \in \theta$.

   On conclut que θ est symétrique.

   2. Montrons que $\theta \subseteq \rho$.

Supposons que $\theta \nsubseteq \rho$. Alors il existe $(x, y) \in \theta$ tel que $(x, y) \notin \rho$.

Soit $(a, b) \in \rho$ tel que $a \neq b$. On considère l'opération unaire f définie sur E_k par :

$$f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t = a \\ y & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a :$f(\theta) \subseteq \{(x, x), (y, x), (x, y), (y, y)\} \subseteq \theta$ (car θ est réflexive et symétrique).

Donc $f \in Pol\theta$. Mais $f \notin Pol\rho$, en effet, $(a, b) \in \rho$ et $(f(a), f(b)) = (x, y) \notin \rho$. Ce qui contredit le fait que $Pol\theta = Pol\rho$.

D'où $\theta \subseteq \rho$ et par conséquent $\rho = \theta$.

■

1.5 Relations de Rosenberg

1. Une relation binaire θ sur E_k est appelée relation d'équivalence lorsqu'elle remplit les propriétés suivantes :

   (a) $\forall a \in E_k, (a, a) \in \theta$(réflexivité) ;

   (b) $\forall a, b \in E_k, (a, b) \in \theta \Rightarrow (b, a) \in \theta$(symétrie) ;

   (c) $\forall a, b, c \in E_k, ((a, b) \in \theta$ et $(b, c) \in \theta) \Rightarrow (a, c) \in \theta$(transitivité).

   Une relation d'équivalence θ sur E_k est dite non triviale si elle est distincte de E_k^2 et de $\Delta_{E_k} = \{(a, a), a \in E_k\}$.

   Exemple 1.5.1. Sur $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, on considère la relation binaire θ définit par :

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Alors θ est une relation d'équivalence non triviale. Les classes d'équivalence de θ sont : $[0]_\theta = \{0, 1\}$ et $[2]_\theta = \{2, 3\}$.

2. Une relation binaire σ sur E_k est appelée relation d'ordre lorsqu'elle remplit les propriétés suivantes :

   (a) $\forall a \in E_k, (a, a) \in \sigma$(réflexivité) ;

   (b) $\forall a, b \in E_k, ((a, b) \in \sigma$ et $(b, a) \in \sigma)) \Rightarrow a = b$(antisymétrie) ;

(c) $\forall a, b, c \in E_k, ((a, b) \in \sigma$ et $(b, c) \in \sigma) \Rightarrow (a, c) \in \sigma$(transitivité).

Une relation d'ordre σ sur E_k est dite **bornée** si elle possède un plus petit élément et un plus grand élément. C'est-à-dire $\exists e, g \in E_k$ tel que $\forall a \in E_k$, $(e, a) \in \sigma$ et $(a, g) \in \sigma$.

Exemple 1.5.2. Sur $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, on considère la relation binaire σ définit par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors σ est une relation d'ordre bornée. 3 est le plus petit élément et 0 est le plus grand élément.

3. Graphe d'une permutation de E_k sans point fixe et d'ordre premier.

   C'est une relation de la forme $\{(x, \pi(x)), x \in E_k\}$ où π est une permutation de E_k sans point fixe et dans laquelle tous les cycles ont la même longueur $p,$ avec p premier .

   Une permutation σ sur E_k est dite sans point fixe si $\forall x \in E_k, \sigma(x) \neq x$.

   Exemple 1.5.3. Sur $E_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \alpha = (024) \circ (135)$ est une permutation de E_6 sans point fixe et d'ordre 3 son graphe est donné par :

$$\alpha^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Relations affines

   Soit p un entier naturel premier. Un groupe abélien $(E_k, +, -, e)$ est un p-groupe élémentaire si $pa = e$ $\forall a \in E_k$ où

$$pa = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p \text{ fois}}$$

   Pour une opération binaire $\oplus$ sur E_k, posons $\lambda\oplus = \{(a, b, c, d) \in E_k^4 \setminus a \oplus b = c \oplus d\}$.

   Une relation ρ est dite affine s'il existe un p-groupe élémentaire $(E_k, +, -, e)$ tel que $\rho = \lambda+$.

   Exemple 1.5.4. sur $E_2 = \{0, 1\}$, on considère la relation 4-aire définit par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Alors σ est une relation affine. Dans ce cas, $E_2 = \{0, 1\}$ est identifié à $\mathbb{Z}_2$.

5. Soit $h \geq 2$.

   Une relation h-aire θ est dite centrale si $\emptyset \subsetneq \theta \subsetneq E_k^h$ ou θ est totalement réflexive, totalement symétrique et il existe $a \in E_k$ tel que $\{a\} \times E_k^{h-1} \subseteq \theta$.

   a est appelé un élément central de θ.

   Notation 1.5.1. C_θ désigne l'ensemble des éléments centraux de θ.

   Définition 1.12. *Tout sous ensemble non vide et distinct de E_k est appelé une relation centrale unaire.*

   Exemple 1.5.5. Sur $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, on définit la relation binaire β par :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Alors β est une relation centrale binaire. 1 est l'élément central de β.

   $\rho = E_4^3 \setminus \{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}$ est une relation centrale ternaire. L'élément central de ρ est 0.

6. Une famille $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\}(l \geq 1)$ de relations d'équivalence sur E_k est dite h-régulière $(h \geq 3)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

   - $\forall i \in \{1, 2, \cdots, l\}$, θ_i a exactement h classes d'équivalence.
   - $\bigcap_{i=1}^{l} \varepsilon_i \neq \emptyset$, pour toute classe d'équivalence ε_i de θ_i. $1 \leq i \leq l$.

   On pose $\lambda_\Theta = \{(x_1, x_2, \cdots, x_h) \in E_k^h : \forall i \in \{1, 2, \cdots, l\} \exists n \neq m \setminus (x_n, x_m) \in \theta_i\}$

   Une relation h-aire , avec $h^l \leq k$, est dite h-**régulière** si elle est de la forme λ_Θ.

   Remarque 1.5.1. Les relations h-régulières sont totalement réflexives et totalement symétriques.

Exemple 1.5.6. Sur $E_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Soient θ_1 et θ_2 deux relations d'équivalence définies par les classes d'équivalence suivantes :

- $\theta_1 : [0]_{\theta_1} = \{0, 1, 2\}, [3]_{\theta_1} = \{3, 4, 5\}$ et $[6]_{\theta_1} = \{6, 7, 8\}$.
- $\theta_2 : [0]_{\theta_2} = \{0, 3, 6\}, [1]_{\theta_2} = \{1, 4, 7\}$ et $[2]_{\theta_2} = \{2, 5, 8\}$. Posons $T = \{\theta_1, \theta_2\}$.

  Définissons la relation γ par :

  $\gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \in E_9^3 : (x_1, x_2) \in \theta_1$ et $(x_2, x_3) \in \theta_2\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) \in E_9^3 : x_1 = x_2\}$.

  Soit $\sigma \in S_3$, on définit γ_s par :

  $\gamma_s = \{(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) : (x_1, x_2, x_3) \in \gamma\}$. On pose $\rho = \bigcup_{s \in S_3} \gamma_s$. On a $\rho = \lambda_T$. D'où ρ est une relation 3- régulière.

Exemple 1.5.7. Sur $E_3 = \{0, 1, 2\}$.
$\varphi = \{(a, b, c) \in E_3^3 \setminus a = b$ ou $a = c$ ou $b = c\}$ est une relation 3-régulière. La famille régulière ici est donnée par : $T =: \{=\}$.

Théorème 1.2. *(Rosenberg, 1965)*
Les clones maximaux sur $E_k (k \geq 2)$ sont les clones de la forme $Pol\rho$ où ρ est une relation de l'une des six classes suivantes :

1. *les relations d'équivalence non triviales.*
2. *les relations d'ordre bornées.*
3. *les graphes de permutations de E_k sans points fixes et d'ordre premier.*
4. *les relations de la forme $\{(a, b, c, d) \in E_k^4 : a + b = c + d\}$ où $(E_k, +)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}_p^m, +)$.*
5. *les relations h-régulières.*
6. *les relations centrales.*

1.6 Connexion de Galois (Pol, Inv)

Définition 1.13. *Soient A et B deux ensembles, $\sigma : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ et $\tau : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ deux applications. On dit que le couple (σ, τ) est une connexion de Galois entre A et B si pour tous $X, X' \subseteq A$ et pour tous $Y, Y' \subseteq B$ les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $X \subseteq X' \Rightarrow \sigma(X') \subseteq \sigma(X)$ *;*
2. $Y \subseteq Y' \Rightarrow \tau(Y') \subseteq \tau(Y)$ *;*
3. $X \subseteq \tau\sigma(X)$ *et* $Y \subseteq \sigma\tau(Y)$.

Théorème 1.3. *Le couple (Pol, Inv) est une connexion de Galois entre $\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{R}_k$.*

Preuve. Soient $A, B \subseteq \mathcal{O}_k$ et $S, T \subseteq \mathcal{R}_k$. Montons que :

1. $A \subseteq B \Rightarrow InvB \subseteq InvA$;
2. $S \subseteq T \Rightarrow PolT \subseteq PolS$;
3. $A \subseteq PolInvA$ et $S \subseteq InvPolS$.

Supposons que $A \subseteq B$ et $S \subseteq T$.

1. Soit $\rho \in InvB$. Alors $\forall f \in A, f \in B$ car $A \subseteq B$ et $\rho \in InvB$ donc $\rho \in Invf$. Ce qui montre que $\rho \in InvA$ d'où $InvB \subseteq InvA$.
2. Soit $f \in PolT$. Alors $\forall \rho \in S, \rho \in T$ car $S \subseteq T$ et $f \in PolT$ donc $f \in Pol\rho$. Ce qui montre que $f \in PolS$ d'où $PolT \subseteq PolS$.
3. Soit $f \in A$. Alors $\forall \rho \in InvA, \rho \in Invf$ c'est-à-dire $f \in Pol\rho$. Ce qui montre que $f \in PolInvA$ d'où $A \subseteq PolInvA$.
   Soit $\rho \in S$. Alors $\forall f \in PolS, f \in Pol\rho$ c'est-à-dire $\rho \in Invf$. Ce qui montre que $\rho \in InvPolS$ d'où $S \subseteq InvPolS$.

$\blacksquare$

RELATIONS CENTRALES D'ARITÉ ≤ 2 ET RELATION D'ÉQUIVALENCE

Dans ce chapitre, nous caractérisons les relations centrales unaires et binaires σ telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur $E_k(k \geq 2)$.

2.1 Cas où σ est une relation centrale unaire

Dans ce paragraphe, nous considérons la famille $(\mathcal{B}_i)_{0\leq i\leq t-1}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation θ et σ une relation centrale unaire sur E_k.

Lemme 2.1. *Soit σ une relation unaire sur E_k telle que $\emptyset \subsetneq \sigma \subsetneq E_k$, alors le clone $Pol\sigma \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$ si et seulement si* $(\exists I \subsetneq E_t : \sigma = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{B}_i)$ *ou* $(\forall j \in E_t, \sigma \cap \mathcal{B}_j \neq \emptyset)$.

Preuve.

$\Longrightarrow$) Soit σ une relation centrale unaire sur E_k telle que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.
Considérons la relation unaire σ' sur E_k définie par :
$\sigma' = \{y \in E_k : \exists x \in E_k, (x, x, y) \in \sigma \times \theta\}$.
Deux cas sont envisagés :
Cas 1 : $\emptyset \subsetneq \sigma' \subsetneq E_k$.
Tout d'abord, remarquons que $\forall x \in \sigma, (x, x, x) \in \sigma \times \theta$ car θ est réflexive. Donc $\sigma \subseteq \sigma'(1)$.
Montrons que $Pol\sigma \cap Pol\theta \subseteq Pol\sigma' \cap Pol\theta \subsetneq Pol\theta$.
Soient $f^n \in Pol\sigma \cap Pol\theta$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \sigma'$. Alors il existe $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \sigma$ tel que $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n) \in \theta$. Puisque $f^n \in Pol\sigma \cap Pol\theta$, on a :
$(f(x_1, x_2, \cdots, x_n), f(y_1, y_2, \cdots, y_n)) \in \theta$ et $f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \sigma$. On obtient alors que

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \sigma'$. Donc $f^n \in Pol\sigma' \cap Pol\theta$. D'où $Pol\sigma \cap Pol\theta \subseteq Pol\sigma' \cap Pol\theta$.
D'autre part, $\emptyset \subsetneq \sigma' \subsetneq E_k$ donc il existe $a \in E_k$ tel que $a \notin \sigma'$. Soit f l'opération unaire définie sur E_k par : $f(x) = a \; \forall x \in E_k$. On a : $\forall (x, y) \in \theta, (f(x), f(y)) = (a, a) \in \theta$ d'où $f \in Pol\theta$.
Soit $x \in \sigma'$(car $\sigma' \neq \emptyset$). Alors $f(x) = a \notin \sigma'$ donc $f \notin Pol\sigma'$. Ainsi , $Pol\sigma' \cap Pol\theta \subsetneq Pol\theta$ et on obtient alors $Pol\sigma \cap Pol\theta \subseteq Pol\sigma' \cap Pol\theta \subsetneq Pol\theta$.
Par hypothèse, $Pol\sigma \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$ donc $Pol\sigma \cap Pol\theta = Pol\sigma' \cap Pol\theta$.
Montrons que $\sigma' \subseteq \sigma$.
Soit $a \in \sigma'$. Soit f l'opération unaire définie sur E_k par : $f(x) = a \quad \forall x \in E_k$.
On a : $f \in Pol\theta$ et $\forall x \in \sigma', f(x) = a \in \sigma'$ donc $f \in Pol\sigma' \cap Pol\theta = Pol\sigma \cap Pol\theta$.
Soit $x \in \sigma$(car $\sigma \neq \emptyset$). Alors, $f(x) = a \in \sigma$. Ainsi, $\sigma' \subseteq \sigma(2)$.
(1) et (2) entrainent que $\sigma = \sigma'$.
Soit $y \in \sigma$. Alors il existe $x \in \sigma \subsetneq E_k = \bigcup_{i=0}^{t-1} \mathcal{B}_i$ tel que $(x, y) \in \theta$ d'où il existe $i \in E_t$ tel que $y \in \mathcal{B}_i$. Donc il existe $I \subsetneq E_t$ tel que $\sigma = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$.
Cas 2 : $\sigma' = E_k$
Soit $j \in \{0, 1, \cdots, t-1\}$. Alors il existe $x \in E_k$ tel que $\mathcal{B}_j = [x]_\theta$ on a $x \in E_k = \sigma'$ d'où il existe $y \in \sigma$ tel que $(x, y) \in \theta$. Ainsi, $y \in \sigma \cap \mathcal{B}_j$. Ce qui montre que $\sigma \cap \mathcal{B}_j \neq \emptyset$.
$\Longleftarrow$) Supposons que σ vérifie :($\exists I \subsetneq E_t : \sigma = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$) ou ($\forall j \in E_t, \sigma \cap \mathcal{B}_j \neq \emptyset$).
Montons que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$.
Soit $f^n \in Pol\theta \backslash Pol\sigma$. Alors il existe $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \sigma$ tel que $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a \notin \sigma$.
Considérons la fonction C_s définie sur E_k par $C_s(x) = s$ avec $s \in \sigma$. Alors $C_s \in Pol\sigma \cap Pol\theta$.
En effet, $\forall x \in \sigma, C_s(x) = s \in \sigma$ et $\forall (x, y) \in \theta, (C_s(x), C_s(y)) = (s, s) \in \theta$ car θ est réflexive.
On a $C_a \in \langle (Pol\sigma \cap Pol\theta) \cup \{f\} \rangle$ car $C_a = f(C_{a_1}, C_{a_2}, \cdots, C_{a_n})$.
Soit maintenant $g^m \in Pol\theta$. Nous allons montrer que $g \in \langle (Pol\sigma \cap Pol\theta) \cup \{f\} \rangle$.
Considérons la fonction $h_g^{m+1} \in \mathcal{O}_k$ avec $h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, a) = g(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.
Puisque $g = h_g(e_1, e_2, \cdots, e_m, C_a)$, il suffit de montrer que $h_g \in Pol\sigma \cap Pol\theta$.
1. Si $\sigma = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$, alors nous définissons la fonction h_g^{m+1} par :

$$h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) = \begin{cases} g(x_1, x_2, \cdots, x_m) & \text{si } x_{m+1} \in [a]_\theta \\ s & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrons que $h_g^{m+1} \in Pol\sigma \cap Pol\theta$.
Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_m, y_m), (x_{m+1}, y_{m+1}) \in \theta$.

- Si $x_{m+1} \in [a]_\theta$, alors $y_{m+1} \in [a]_\theta$ et par conséquent on a :

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ g(y_1, y_2, \cdots, y_m) \end{pmatrix} \in \theta. \text{ car } g \in Pol\theta.$$

- Si $x_{m+1} \notin [a]_\theta$, alors $y_{m+1} \notin [a]_\theta$ et par conséquent on a :

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \in \theta. \text{ Ainsi }, h_g^{m+1} \in Pol\theta.$$

Montrons que $h_g^{m+1} \in Pol\sigma$.

Soit $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1} \in \sigma$. Alors $x_{m+1} \notin [a]_\theta$. En effet, si $x_{m+1} \in [a]_\theta$, alors on a $(a, x_{m+1}) \in \theta$ et puisque $x_{m+1} \in \sigma = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{m+1} \in \mathcal{B}_{i_0}$. Donc $a \in \mathcal{B}_{i_0} \subseteq \sigma$. Ce qui contredit le fait que $a \notin \sigma$. D'où $x_{m+1} \notin [a]_\theta$ et par conséquent $h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) = s \in \sigma$. Ce qui montre que $h_g^{m+1} \in Pol\sigma$.

Ainsi, $h_g^{m+1} \in Pol\sigma \cap Pol\theta$.

2. Si $\forall i \in E_t, \sigma \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$, alors on choisit un élément dans chacun des ensembles $\sigma \cap \mathcal{B}_i$ que l'on note C_{B_i}. Définissons la fonction h_g par :

$$h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) = \begin{cases} g(x_1, x_2, \cdots, x_m) & \text{si } x_{m+1} = a \\ C_{[g(x_1, x_2, \cdots, x_m)]} & \text{si } x_{m+1} \in [a]_\theta \setminus \{a\} \\ s & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Montrons que $h_g^{m+1} \in Pol\sigma \cap Pol\theta$.

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_m, y_m), (x_{m+1}, y_{m+1}) \in \theta$. Montrons que

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} \in \theta.$$

a. Si $x_{m+1} = a$, alors $y_{m+1} \in [a]_\theta$. On a deux cas :

- Si $y_{m+1} = a$, alors

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ g(y_1, y_2, \cdots, y_m) \end{pmatrix} \in \theta. \text{ Car } g \in Pol\theta.$$

- Si $y_{m+1} \in [a]_\theta \setminus \{a\}$, alors

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ C_{[g(y_1, y_2, \cdots, y_m)]} \end{pmatrix} \in \theta. \text{ Car}$$

$(g(x_1, x_2, \cdots, x_m), g(y_1, y_2, \cdots, y_m)) \in \theta$, $(g(y_1, y_2, \cdots, y_m), C_{[g(y_1,y_2,\cdots,y_m)]}) \in \theta$.

b. Si $x_{m+1} \in [a]_\theta \setminus \{a\}$, alors $y_{m+1} \in [a]_\theta$ on a deux cas :

-Si $y_{m+1} = a$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{[g(x_1,x_2,\cdots,x_m)]} \\ g(y_1, y_2, \cdots, y_m) \end{pmatrix} \in \theta. \text{ car}$$

$(g(x_1, x_2, \cdots, x_m), g(y_1, y_2, \cdots, y_m)) \in \theta$, $(g(x_1, x_2, \cdots, x_m), C_{[g(x_1,x_2,\cdots,x_m)]}) \in \theta$.

-Si $y_{m+1} \in [a]_\theta \setminus \{a\}$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{[g(x_1,x_2,\cdots,x_m)]} \\ C_{[g(y_1,y_2,\cdots,y_m)]} \end{pmatrix} \in \theta. \text{ car}$$

$(C_{[g(x_1,x_2,\cdots,x_m)]}, g(x_1, x_2, \cdots, x_m)) \in \theta$, $(g(x_1, x_2, \cdots, x_m), g(y_1, y_2, \cdots, y_m)) \in \theta$ et $(g(y_1, y_2, \cdots, y_m), C_{[g(y_1,y_2,\cdots,x_m)]}) \in \theta$.

c. Si $x_{m+1} \notin [a]_\theta$, alors $y_{m+1} \notin [a]_\theta$ et on a :

$$\begin{pmatrix} h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \\ h_g(y_1, y_2, \cdots, y_m, y_{m+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \in \theta.$$

On a ainsi montré que $h_g^{m+1} \in Pol\theta$.

Soit $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1} \in \sigma$. Montrons que $h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) \in \sigma$.

Tout d'abord, remarquons que $x_{m+1} \neq a$ car $a \notin \sigma$.

- Si $x_{m+1} \in [a]_\theta$, alors $h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) = C_{[g(x_1,x_2,\cdots,x_m)]} \in \sigma$.

-Sinon, on a $h_g(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}) = s \in \sigma$. Donc $h_g^{m+1} \in Pol\sigma$.

Ainsi, $h_g^{m+1} \in Pol\sigma \cap Pol\theta$. Donc $\langle (Pol\sigma \cap Pol\theta) \cup \{f\} \rangle = Pol\theta$. ■

2.1.1 Inventaire des relations d'équivalence non triviales sur E_3, E_4 et sur E_5

Dans cette section, nous énumérons toutes les relations d'équivalence non triviales sur E_3, E_4 et sur E_5. Chaque relation d'équivalence sera définie par la partition associée.

A. Sur l'ensemble E_3, il existe 3 relations d'équivalence non triviales θ_0, θ_1 et θ_2. On a donc :

$\theta_0 : [0]_{\theta_0} = \{0\}$ et $[1]_{\theta_0} = \{1, 2\}$.

$\theta_1 : [0]_{\theta_1} = \{0, 2\}$ et $[1]_{\theta_1} = \{1\}$.

$\theta_2 : [0]_{\theta_2} = \{0, 1\}$ et $[2]_{\theta_2} = \{2\}$.

B. Sur l'ensemble E_4, il existe 13 relations d'équivalence non triviales reparties en trois groupes :

1. les relations d'équivalence de type 2-2 (deux classes à deux éléments chacune). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 3. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1\}$ et $[2]_\theta = \{2, 3\}$ est une relation d'équivalence de type 2-2.
2. les relations d'équivalence de type 2-1-1 (deux classes d'équivalence à un élément chacune et une classe d'équivalence à deux éléments). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 6. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1\}; [2]_\theta = \{2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$ est une relation d'équivalence de type 2-1-1.
3. les relations d'équivalence de type 3-1 (une classe d'équivalence à trois éléments et une classe d'équivalence à un élément). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 4. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0\}$ et $[1]_\theta = \{1, 2, 3\}$ est une relation d'équivalence de type 3-1.

C. Sur l'ensemble E_5, il existe 50 relations d'équivalence non triviales reparties en cinq groupes :

1. les relations d'équivalence de type 2-1-1-1 (une classe d'équivalence à deux éléments et trois classes d'équivalence ayant un élément chacune). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 10 . Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1\}; [2]_\theta = \{2\}; [3]_\theta = \{3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$ est une relation d'équivalence de type 2-1-1-1.
2. les relations d'équivalence de type 2-2-1 (deux classes d'équivalence à deux éléments chacune et une classe d'équivalence ayant un élément). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 15. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1\}; [2]_\theta = \{2, 3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$ est une relation d'équivalence de type 2-2-1.
3. les relations d'équivalence de type 2-3 (une classe d'équivalence à deux éléments et une classe d'équivalence à trois éléments). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 10. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence : $[0]_\theta = \{0, 1\}$ et $[2]_\theta = \{2, 3, 4\}$ est une relation d'équivalence de type 2-3.
4. les relations d'équivalence de type 3-1-1 (une classe d'équivalence à trois éléments et deux classes d'équivalence ayant un élément chacune). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 10. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes

d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0\}; [1]_\theta = \{1\}$ et $[2]_\theta = \{2, 3, 4\}$ est une relation d'équivalence de type 3-1-1.

5. les relations d'équivalence de type 1-4 (une classe d'équivalence à un élément et une classe d'équivalence à quatre éléments). Le nombre de relations d'équivalence de ce type est 5. Par exemple la relation d'équivalence θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
   $[0]_\theta = \{0\}$ et $[2]_\theta = \{1, 2, 3, 4\}$ est une relation d'équivalence de type 1-4.

2.1.2 Application

Dans cette section, nous énumérons toutes les relations centrales unaires σ sur E_3, E_4 et sur E_5 telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur $E_k (k \in \{3, 4, 5\})$.

I. Nous énumérons toutes les relations centrales unaires σ sur E_3 telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$. Chaque relation d'équivalence sera définie par la partition associée.

1. Si θ : $[0]_\theta = \{0\}$ et $[1]_\theta = \{1, 2\}$, alors on a : $\sigma = \{0\}; \sigma = \{1, 2\}; \sigma = \{0, 1\}$ et $\sigma = \{0, 2\}$.
2. Si θ : $[0]_\theta = \{0, 2\}$ et $[1]_\theta = \{1\}$, alors on a : $\sigma = \{0, 2\}; \sigma = \{1\}; \sigma = \{0, 1\}$ et $\sigma = \{1, 2\}$.
3. Si θ : $[0]_\theta = \{0, 1\}$ et $[2]_\theta = \{2\}$, alors on a : $\sigma = \{0, 1\}; \sigma = \{2\}; \sigma = \{0, 2\}$ et $\sigma = \{1, 2\}$.

Sur E_3, on a **6** relations centrales unaires σ telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$.

II. Nous énumérons toutes les relations centrales unaires σ sur E_4 telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$.

Soit θ une relation d'équivalence non triviale sur E_4.

1. Cas où θ est de type 2-2. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$[0]_\theta = \{0, 1\}$ et $[2]_\theta = \{2, 3\}$.

$\sigma = \{0, 1\}; \sigma = \{2, 3\}; \sigma = \{0, 2\}; \sigma = \{0, 3\}; \sigma = \{1, 2\}; \sigma = \{1, 3\}; \sigma = \{0, 1, 2\}; \sigma = \{0, 1, 3\}; \sigma = \{0, 2, 3\}; \sigma = \{1, 2, 3\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 10 relations centrales unaires pour ce type. 2. Cas où θ est de type 2-1-1. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$[0]_\theta = \{0, 1\}; [2]_\theta = \{2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$.

$\sigma = \{0,1\}; \sigma = \{2\}; \sigma = \{3\}; \sigma = \{0,1,2\}; \sigma = \{0,1,3\}; \sigma = \{2,3\}; \sigma = \{0,2,3\}; \sigma = \{1,2,3\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 14 relations centrales unaires pour ce type.

3. Cas où θ est de type 3-1. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
$[0]_\theta = \{0\}$ et $[1]_\theta = \{1,2,3\}$.
$\sigma = \{0\}; \sigma = \{1,2,3\}; \sigma = \{0,1\}; \sigma = \{0,2\}; \sigma = \{0,3\}; \sigma = \{0,1,2\}; \sigma = \{0,1,3\}; \sigma = \{0,2,3\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 14 relations centrales unaires pour ce type.

III. Nous énumérons toutes les relations centrales unaires σ sur E_5 telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur E_5.

1. Cas où θ est de type 2-1-1-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
$[0]_\theta = \{0,1\}; [2]_\theta = \{2\}; [3]_\theta = \{3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$.
$\sigma = \{0,1\}; \sigma = \{2\}; \sigma = \{3\}; \sigma = \{4\}; \sigma = \{0,1,2\}; \sigma = \{0,1,3\}; \sigma = \{0,1,4\}; \sigma = \{2,3,4\}; \sigma = \{0,1,2,3\}; \sigma = \{0,1,3,4\}; \sigma = \{0,1,2,4\}; \sigma = \{2,3\}; \sigma = \{2,4\}; \sigma = \{3,4\}; \sigma = \{0,2,3,4\}; \sigma = \{1,2,3,4\}$. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 30 relations centrales unaires pour ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
$[0]_\theta = \{0,1\}; [2]_\theta = \{2,3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$.
$\sigma = \{0,1\}; \sigma = \{2,3\}; \sigma = \{4\}; \sigma = \{0,1,2,3\}; \sigma = \{0,1,4\}; \sigma = \{2,3,4\}; \sigma = \{0,2,4\}; \sigma = \{0,3,4\}; \sigma = \{1,2,4\}; \sigma = \{1,3,4\}; \sigma = \{0,1,2,4\};$
$\sigma = \{0,1,3,4\}; \sigma = \{1,2,3,4\}; \sigma = \{0,2,3,4\}$. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 30 relations centrales unaires pour ce type.

3. Cas où θ est de type 2-3. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
$[0]_\theta = \{0,1\}$ et $[2]_\theta = \{2,3,4\}$.
$\sigma = \{0,1\}; \sigma = \{2,3,4\}; \sigma = \{0,2\}; \sigma = \{0,3\}; \sigma = \{0,4\}; \sigma = \{1,2\}; \sigma = \{1,3\}; \sigma = \{1,4\}; \sigma = \{0,1,2\}; \sigma = \{0,1,3\}; \sigma = \{0,1,4\}; \sigma = \{0,2,3\}; \sigma = \{0,2,4\}; \sigma = \{0,3,4\}; \sigma = \{1,2,3\}; \sigma = \{1,2,4\}; \sigma = \{1,3,4\}; \sigma = \{0,2,3,4\}; \sigma = \{1,2,3,4\}; \sigma = \{0,1,2,3\}; \sigma = \{0,1,2,4\}; \sigma = \{0,1,3,4\}$. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 25 relations centrales unaires pour ce type.

4. Cas où θ est de type 3-1-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
$[0]_\theta = \{0\}; [1]_\theta = \{1\}$ et $[2]_\theta = \{2,3,4\}$.
$\sigma = \{0\}; \sigma = \{1\}; \sigma = \{2,3,4\}; \sigma = \{0,1\}; \sigma = \{0,2,3,4\}; \sigma = \{1,2,3,4\}; \sigma = \{0,1,2\}; \sigma =$

$\{0,1,3\}; \sigma = \{0,1,4\}; \sigma = \{0,1,2,3\}; \sigma = \{0,1,2,4\}; \sigma = \{0,1,3,4\}$. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 30 relations centrales unaires pour ce type.

5. Cas où θ est de type 1-4. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0\}$ et $[1]_\theta = \{1,2,3,4\}$. $\sigma = \{0\}; \sigma = \{1,2,3,4\}; \sigma = \{0,1\}; \sigma = \{0,2\}; \sigma = \{0,3\}; \sigma = \{0,4\}; \sigma = \{0,1,2\}; \sigma = \{0,1,3\}; \sigma = \{0,1,4\}; \sigma = \{0,2,3\}; \sigma = \{0,2,4\}; \sigma = \{0,3,4\}; \sigma = \{0,1,2,3\}; \sigma = \{0,1,2,4\}; \sigma = \{0,1,3,4\}; \sigma = \{0,2,3,4\}$. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 30 relations centrales unaires pour ce type.

2.2 Cas où σ est une relation centrale binaire.

Définition 2.1. *Soient α et β deux relations binaires sur E_k. Le produit relationnel de α et β est définit par :*
$\alpha \circ \beta = \{(a,b) \in E_k^2 : \exists c \in E_k, (a,c) \in \alpha$ *et* $(c,b) \in \beta\}$.
On pose pour tout $n \geq 2, \alpha^n = \alpha \circ \alpha \circ \cdots \alpha \quad (n$ fois $\alpha)$.

Remarque 2.2.1.

1. Le produit relationnel est associatif.
2. Pour toutes relations binaires α et β sur E_k, $Pol\alpha \cap Pol\beta \subseteq Pol(\alpha \circ \beta)$.

Définition 2.2. *Soient σ une relation centrale binaire sur E_k et θ une relation d'équivalence non triviale sur E_k.*

1. *σ est dite θ-**fermée** lorsque $\sigma = \theta \circ \sigma \circ \theta$. Autrement dit, σ est dite θ-fermée lorsque $(a,b) \in \sigma$ chaque fois que $(a',b') \in \sigma$ pour un certain $(a',b') \in E_k^2$ avec $a\theta a'$ et $b\theta b'$.*
2. *σ est dite **faiblement** θ-**fermée** lorsque $\sigma = (\theta \circ \sigma) \cap (\sigma \circ \theta)$. Autrement dit, σ est dite faiblement θ-fermée lorsque $(a,b) \in \rho$ chaque fois que $(a',b),(a,b') \in \sigma$ pour un certain $(a',b') \in E_k^2$ avec $a\theta a'$ et $b\theta b'$.*
3. *Il existe une **transversale** T pour les θ-classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$ signifie qu'il existe $T = \{u_1, u_2, \cdots, u_t\}$ tel que $(u_i, u_j) \notin \theta$ pour tout $1 \leq i < j \leq t, u_i \sigma u_j$ pour tout $1 \leq i,j \leq t$.*

Exemple 2.2.1. Sur $E_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Nous définissons chaque relation d'équivalence par la partition associée.

I. Cas où σ est θ-fermée.

Prenons θ : $[0]_\theta = \{0,2,3\}; [1]_\theta = \{1\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$ et $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1)\}; C_\sigma = \{0,2,3\}$. Alors σ est θ-fermée.

II. Cas où σ est faiblement θ-fermée.

Prenons θ : $[0]_\theta = \{0,1\}; [2]_\theta = \{2,4\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$ et $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1)\}; C_\sigma = \{0,2\}$. Alors σ est faiblement θ-fermée.

III. Cas où il existe une transversale T pour les θ-classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$.

Prenons θ : $[0]_\theta = \{0,2\}; [1]_\theta = \{1\}; [3]_\theta = \{3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$ et $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,4),(4,2),(2,3),(3,2)\}$; $C_\sigma = \{0,1\}$. Alors $T = \{0,1,3,4\}$ est une transversale pour les θ-classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$.

Définition 2.3. *Une opération $m : E_k^3 \longrightarrow E_k$ est appelée opération majoritaire si $\forall a,b \in E_k$, $m(a,a,b) = m(a,b,a) = m(b,a,a) = a$.*

Exemple 2.2.2. L'application $m : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ définie par :
$m(x,y,z) = xy + xz + yz$ est une opération majoritaire.

Théorème 2.1. *(Baker et Pixley, 1975)*
Pour toute algèbre finie $\mathcal{A} = (A,F)$ avec une opération terme majoritaire, une opération $f : A^n \longrightarrow A$ est une opération terme de $\mathcal{A}$ si et seulement si f préserve tous les sous-univers de $\mathcal{A}^2$.

Théorème 2.2. *(Temgoua et Rosenberg 2012)*
Soient $k \geq 3$ et θ une relation d'équivalence non triviale sur E_k.
Pour toute relation centrale binaire σ sur E_k, le clone $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$ si et seulement si σ satisfait l'une des trois conditions suivantes :

I. $\theta \subseteq \sigma$ et chaque classe d'équivalence de θ contient un élément central de σ ;

II. σ est θ-fermée ;

III. σ est faiblement θ-fermée et il existe une transversale T pour les θ-classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$.

Définition 2.4. *Soit $l \in \{I,II,III\}$. On dit que σ est de type l si σ satisfait la condition l du théorème précédent.*

Proposition 2.1. *Soit θ une relation d'équivalence sur E_k ayant t classes d'équivalence. On désigne par s et φ les applications suivantes :*

$$\begin{array}{llllllll} s: & E_k & \longrightarrow & E_k/\theta & \varphi: & E_k/\theta & \longrightarrow & E_t \\ & a & \mapsto & [a]_\theta & \textit{et} & \mathcal{B}_i & \mapsto & i \end{array}.$$

Une relation centrale binaire σ est θ-fermée sur E_k si et seulement s'il existe une relation centrale binaire α sur E_t telle que $\sigma = (\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$.

Preuve.

$\Longrightarrow$) Soit σ est une relation binaire θ-fermée sur E_k.

Puisque σ est réflexive et symétrique, alors $(\varphi \circ s)(\sigma)$ est réflexive et symétrique.

Soit a un élément central de σ. Alors pour tout $b \in E_t$, on a $b = \varphi(\mathcal{B}_b) = \varphi \circ s(c)$, avec $s(c) = \mathcal{B}_b$. Ainsi, $(\varphi \circ s(a), b) = (\varphi \circ s(a), \varphi \circ s(c)) \in \varphi(\sigma)$ car $(a, c) \in \sigma$. Donc $(\varphi \circ s)(\sigma)$ est une relation centrale binaire. Puisque σ est θ-fermée, alors on peut prendre $\alpha = (\varphi \circ s)(\sigma)$.

$\Longleftarrow$) Soit α est une relation centrale binaire sur E_t.

Puisque α est réflexive et symétrique, alors $(\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$ est réflexive et symétrique.

Soit a un élément central de α. Alors $a = \varphi(\mathcal{B}_a) = \varphi \circ s(b)$, avec $s(b) = \mathcal{B}_a$. Ainsi, pour tout $c \in E_k$, $(\varphi \circ s(b), \varphi \circ s(c)) = (a, \varphi \circ s(c)) \in \alpha$. Donc $(\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$ est une relation centrale binaire.

Montrons que $(\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$ est θ-fermée.

Soit $(a, b) \in E_k^2$. Supposons qu'il existe $(a', b') \in (\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$ tel que $a\theta a'$ et $b\theta b'$.

Montrons que $(a, b) \in (\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$.

On a : $(\varphi \circ s(a), \varphi \circ s(b)) = (\varphi \circ s(a'), \varphi \circ s(b')) \in \alpha$. Donc $(\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$ est θ-fermée. ■

2.2.1 Inventaire des relations centrales binaires sur E_3 et sur E_4

Dans cette cette section, nous énumérons toutes les relations centrales binaires sur E_3 et sur E_4.

1. Sur E_3, on a 3 relations centrales binaires σ_0, σ_1 et σ_2 définies par :

$\sigma_0 = E_3^2 \setminus \{(1,2),(2,1)\}$; $\sigma_1 = E_3^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$ et $\sigma_2 = E_3^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$.

2. Sur E_4, on a 22 relations centrales binaires réparties en deux groupes :

a. Les relations centrales binaires ayant deux éléments centraux.

Le nombre de ces relations est 6.

$\sigma_1 = E_4^2 \setminus \{(2,3),(3,2)\}$; $\sigma_2 = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$; $\sigma_3 = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$;

$\sigma_4 = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0)\}$; $\sigma_5 = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1)\}$ et $\sigma_6 = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1)\}$.

b. Les relations centrales binaires ayant un élément central. Le nombre de ces relations est 16.

- Cas où 0 est l'élément central. On a :

$\sigma_1 = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$; $\sigma_2 = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$; $\sigma_3 = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$ et $\sigma_4 = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$.

-Cas où 1 est élément central. On a :

$\sigma_5 = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,3),(3,0),(2,3),(3,2)\}$; $\sigma_6 = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(2,3),(3,2)\}$; $\sigma_7 = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(2,3),(3,2)\}$ et $\sigma_8 = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,3),(3,0)\}$.

-Cas où 2 est l'élément central. On a :

$\sigma_9 = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$; $\sigma_{10} = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$; $\sigma_{11} = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(1,3),(3,1)\}$ et $\sigma_{12} = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(0,3),(3,0)\}$.

-Cas où 3 est l'élément central. On a :

$\sigma_{13} = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,1),(1,0),(2,1),(1,2)\}$; $\sigma_{14} = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(2,1),(1,2)\}$; $\sigma_{15} = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(2,1),(1,2)\}$ et $\sigma_{16} = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,1),(1,0)\}$.

2.2.2 Application

Soit $k \in \{3,4,5\}$. Dans cette section, nous énumérons toutes les relations centrales binaires σ sur E_k telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur E_k.

A. Sur E_3, on a trois relations centrales binaires σ_0, σ_1 et σ_2, où σ_i est la relation centrale binaire ayant pour élément central i. Désignons par θ_0, θ_1 et θ_2 les trois relations d'équivalence non triviales sur E_3, où θ_i est la relation d'équivalence telle que $[i]_{\theta_i} = \{i\}$.

Remarque 2.2.2. Sur E_3, σ ne peut pas être de type l, $l \in \{I, II\}$.

Il reste à étudier le cas où σ est faiblement θ-fermée et il existe une transversale T pour les θ-classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$.

1. Cas où $\theta = \theta_0$.

-Pour $\sigma = \sigma_1$, σ est faiblement θ-fermée et $T = \{0,1\}$ est une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$. Donc $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$.

-Pour $\sigma = \sigma_2$, σ est faiblement θ-fermée et $T = \{0,2\}$ est une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$. Donc $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$.

2. Cas où $\theta = \theta_1$.

-Pour $\sigma = \sigma_0$, σ est faiblement θ-fermée et $T = \{0,1\}$ est une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$. Donc $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$.

-Pour $\sigma = \sigma_2$, σ est faiblement θ-fermée et $T = \{1,2\}$ est une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$. Donc $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$.

3. Cas où $\theta = \theta_2$.

-Pour $\sigma = \sigma_0$, σ est faiblement θ-fermée et $T = \{0, 2\}$ est une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$. Donc $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$.

-Pour $\sigma = \sigma_1$, σ est faiblement θ-fermée et $T = \{1, 2\}$ est une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$. Donc $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$.

B. Soit $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Nous énumérons toutes les relations centrales binaires σ telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$. Reprenons les 13 relations d'équivalence non triviales sur E_4.

I. Cas où $\theta \subseteq \sigma$ et toute classe d'équivalence de θ contient un élément central de σ.

1. Cas où θ est de type 2-1-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1\}$; $[2]_\theta = \{2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$.

Désignons par C_σ le centre de σ. Alors $C_\sigma = \{0, 2, 3\}$ ou $C_\sigma = \{1, 2, 3\}$.

Si $C_\sigma = \{0, 2, 3\}$, alors pour tout $(a, b) \in E_4^2, a \neq b, a \in C_\sigma$ ou $b \in C_\sigma$ donc $\sigma = E_4^2$. Ce qui est impossible. Le raisonnement est le même pour les autres relations de ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0, 1\}$ et $[2]_\theta = \{2, 3\}$. Alors $C_\sigma \in \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

Si $C_\sigma = \{0, 2\}$, alors $\sigma = E_4^2 \setminus \{(1, 3), (3, 1)\}$. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 6 relations centrales binaires σ telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

3. Cas où θ est de type 3-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0, 1, 2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$. Alors $C_\sigma \in \{\{0, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Si $C_\sigma = \{0, 3\}$, alors $\sigma = E_4^2$. Ce qui est impossible. Le raisonnement est le même pour les autres relations de ce type.

Sur E_4, on a **6** relations centrales binaires σ de type **I** telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

II. Cas où σ est θ-fermée.

1. Cas où θ est de type 2-1-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $\mathcal{B}_0 = [0]_\theta = \{0, 1\}; \mathcal{B}_1 = [2]_\theta = \{2\}$ et $\mathcal{B}_2 = [3]_\theta = \{3\}$. Nous allons utiliser la proposition 2.1 pour déterminer la relation θ-fermée σ. En utilisant les notations de cette proposition , on $\sigma = (\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$.

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\sigma = E_4^2 \setminus \{(2, 3), (3, 2)\}$ et $C_\sigma = \{0, 1\}$;

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$, $\sigma = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$ et $C_\sigma = \{2\}$;
-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, $\sigma = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(1,2),(2,1)\}$ et $C_\sigma = \{3\}$. Le raisonnement est le même pour les autres relations de ce type. On a donc 10 relations centrales binaires θ-fermées pour ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2 ou 3-1.

Dans ce cas, on a deux classes d'équivalence pour chacune de ces relations et par conséquent pas de relations centrales binaires θ-fermées car sur E_2, il n'existe pas de relations centrales binaires.

Sur E_4, on a **10** relations centrales binaires σ de type **II** telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

III. Cas où σ est faiblement θ-fermée et il existe une transversale T pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$.

1. Cas où θ est de type 2-1-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0,1\}$; $[2]_\theta = \{2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$.

On a : $T = \{0,2,3\}$ ou $T = \{1,2,3\}$.

Si $T = \{0,2,3\}$, alors $\{(0,1),(0,2),(0,3)\} \subseteq \sigma$. D'où $0 \in C_\sigma$ et $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$. Par conséquent $C_\sigma = \{0\}$ ou $C_\sigma = \{0,2\}$ ou $C_\sigma = \{0,3\}$. On obtient :

$\sigma = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$; $\sigma = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1)\}$; $\sigma = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1)\}$. La description est la même pour les autres relations de même type. On a donc 18 relations centrales binaires pour ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0,2\}$ et $[1]_\theta = \{1,3\}$.

On a : $T = \{0,1\}$ ou $T = \{1,2\}$ ou $T = \{0,3\}$ ou $T = \{2,3\}$.

Si $T = \{0,1\}$, alors $C_\sigma = \{0\}$ ou $C_\sigma = \{1\}$.

$\sigma = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$ ou $\sigma = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(2,3),(3,2)\}$. La description est la même pour les autres relations de même type. On a donc 18 relations centrales binaires pour ce type.

3. Cas où θ est de type 1-3. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0,1,2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$.

On a : $T = \{0,3\}$ ou $T = \{1,3\}$ ou $T = \{2,3\}$.

Si $T = \{0,3\}$, alors $\{(0,1),(0,2),(0,3)\} \subseteq \sigma$. D'où $0 \in C_\sigma$ et $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$. Par conséquent $C_\sigma = \{0\}$ ou $C_\sigma = \{0,1\}$ ou $C_\sigma = \{0,2\}$.

$\sigma = E_4^2 \setminus \{(2,3),(3,2)\}$ ou $\sigma = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1)\}$ ou $\sigma = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$. La description est la même pour les autres relations de même type. On a donc 18 relations centrales binaires de ce type.

C. Soit $E_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Nous énumérons toutes les relations centrales binaires σ telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$. Reprenons les 50 relations d'équivalence non triviales sur E_5.

I. Cas où $\theta \subseteq \sigma$ et toute classe d'équivalence de θ contient un élément central de σ.

Soit θ une relation d'équivalence non triviale sur E_5.

1. Cas où θ est de type 2-1-1-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0,1\}$; $[2]_\theta = \{2\}$; $[3]_\theta = \{3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$.

On a : $C_\sigma = \{0,2,3,4\}$ ou $C_\sigma = \{1,2,3,4\}$. Pour tout $(a,b) \in E_5^2, a \neq b$, on a : $a \in C_\sigma$ ou $b \in C_\sigma$, donc $\sigma = E_5^2$. Ce qui est impossible et par conséquent un tel σ n'existe pas. Le raisonnement est analogue pour les autres relations de ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0,1\}$; $[2]_\theta = \{2,4\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$.

On a : $C_\sigma = \{0,2,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,3,4\}$ ou $C_\sigma = \{1,2,3\}$ ou $C_\sigma = \{1,3,4\}$.

Si $C_\sigma = \{0,2,3\}$, alors $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1)\}$. Le raisonnement est analogue pour les autres relations de ce type. On a donc 10 relations binaires centrales pour ce type.

3. Cas où θ est de type 2-3. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0,2,3\}$ et $[1]_\theta = \{1,4\}$.

On a : $C_\sigma = \{0,1\}$ ou $C_\sigma = \{1,2\}$ ou $C_\sigma = \{1,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,4\}$ ou $C_\sigma = \{2,4\}$ ou $C_\sigma = \{3,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,1,2\}$ ou $C_\sigma = \{0,1,3\}$ ou $C_\sigma = \{1,2,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,1,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,3,4\}$ ou $C_\sigma = \{2,3,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,2,4\}$ ou $C_\sigma = \{1,3,4\}$ ou $C_\sigma = \{1,2,4\}$.

-Si $C_\sigma = \{0,1\}$, alors $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,4),(4,2),(3,4),(4,3)\}$.

-Si $C_\sigma = \{2,3,4\}$, alors $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$. Le raisonnement est analogue pour les autres relations de ce type. On a donc 40 relations binaires centrales pour ce type.

4. Cas où θ est de type 1-1-3 ou de type 1-4.

Dans chacun de ces cas, un telle relation centrale binaire σ n'existe pas.

Sur E_5, on a **40** relations centrales binaires σ de type **I** telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

II. Cas où σ est θ-fermée($\sigma = \theta \circ \sigma \circ \theta$).

Nous allons utiliser la proposition 2.1 pour déterminer la relation θ-fermée σ. En utilisant les notations de cette proposition , on a : $\sigma = (\varphi \circ s)^{-1}(\alpha)$.

1. Cas où θ est de type 2-1-1-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$\mathcal{B}_0 = [0]_\theta = \{0,1\}; \mathcal{B}_1 = [2]_\theta = \{2\}; \mathcal{B}_2 = [3]_\theta = \{3\}$ et $\mathcal{B}_3 = [4]_\theta = \{4\}$.

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(2,3),(3,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(3,4),(4,3)\}$ et $C_\sigma = \{0,1,2\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,4),(4,2)\}$ et $C_\sigma = \{0,1,3\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,3),(3,2)\}$ et $C_\sigma = \{0,1,4\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(0,4),(4,0)\}$ et $C_\sigma = \{2,3\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(0,3),(3,0)\}$ et $C_\sigma = \{2,4\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(0,2),(2,0)\}$ et $C_\sigma = \{3,4\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$, on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,3),(3,2),(4,3),(2,4),(4,2),(3,4)\}$ et $C_\sigma = \{0,1\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,4),(4,2),(3,4),(4,3)\}$ et $C_\sigma = \{0,1\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$ et $C_\sigma = \{0,1\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}$ et $C_\sigma = \{0,1\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,3),(3,0),(2,3),(3,2)\}$, on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3),(0,4),(4,0),(0,3),(3,0)\}$ et $C_\sigma = \{2\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(2,3),(3,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(3,4),(4,3),(0,4),(4,0)\}$ et $C_\sigma = \{2\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(2,3),(3,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(3,4),(4,3),(0,3),(3,0)\}$ et $C_\sigma = \{2\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(0,2),(2,0)\}$,

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(3,1),(1,3),(0,4),(4,0),(0,3),(3,0)\}$ et $C_\sigma = \{2\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$, on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(0,4),(4,0),(0,2),(2,0)\}$ et $C_\sigma = \{3\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(0,4),(4,0)\}$ et $C_\sigma = \{3\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(1,3),(3,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(0,2),(2,0)\}$

et $C_\sigma = \{3\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(0,1),(1,0)\}$, on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(1,2),(0,2),(2,0),(2,1),(0,4),(4,0)\}$ et $C_\sigma = \{3\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,1),(1,0),(2,1),(1,2)\}$, on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(0,2),(2,0),(0,3),(3,0)\}$ et $C_\sigma = \{4\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,1),(1,0),(2,1),(1,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(0,2),(2,0)\}$ et $C_\sigma = \{4\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(2,1),(1,2)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(2,3),(3,2),(1,3),(3,1)\}$ et $C_\sigma = \{4\}$;

-Pour $\alpha = E_4^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,1),(1,0)\}$, on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(1,2),(2,1),(0,2),(1,2),(2,0),(2,1)\}$ et $C_\sigma = \{4\}$. La description est analogue pour les autres relations de ce type. On donc 72 relations centrales binaires θ-fermées pour ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $\mathcal{B}_0 = [0]_\theta = \{0,1\}; \mathcal{B}_1 = [2]_\theta = \{2,3\}$ et $\mathcal{B}_2 = [4]_\theta = \{4\}$.

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(1,2),(2,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,4),(4,2),(3,4),(4,3)\}$ et $C_\sigma = \{0,1\}$;

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(0,4),(4,0)\}$ et $C_\sigma = \{2,3\}$;

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$ et $C_\sigma = \{0,4\}$. Le raisonnement est analogue pour les autres relations de ce type. On a donc 30 relations centrales binaires θ-fermées pour ce type.

3. Cas où θ est de type 3-1-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $\mathcal{B}_0 = [0]_\theta = \{0,1,2\}; \mathcal{B}_1 = [3]_\theta = \{3\}$ et $\mathcal{B}_2 = [4]_\theta = \{4\}$.

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(1,2),(2,1)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(3,4),(4,3)\}$ et $C_\sigma = \{0,1,2\}$;

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(2,4),(4,2),(1,4),(4,1),(0,4),(4,0)\}$ et $C_\sigma = \{3\}$;

-Pour $\alpha = E_3^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$ et $C_\sigma = \{4\}$. Le raisonnement est analogue pour les autres relations de ce type. On a donc 30 relations centrales binaires θ-fermées pour ce type.

4. Cas où θ est de type 2-3 ou 1-4.

Dans chacun de ces types, on a deux classes d'équivalence pour une relation donnée, or sur E_2, il n'existe pas de relations centrales et par conséquent pas de relation centrale binaire θ-fermée pour chacun de ces types.

III. Cas où σ est faiblement θ-fermée et il existe une transversale T pour les θ classes telle que

$T^2 \subseteq \sigma$.

1. Cas où θ est de type 2-1-1-1. Par exemple, prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0,1\}$; $[2]_\theta = \{2\}$; $[3]_\theta = \{3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$.

Désignons par C_σ le centre de σ et T une transversale pour les θ classes telle que $T^2 \subseteq \sigma$.

On a : $T = \{0,2,3,4\}$ ou $T = \{1,2,3,4\}$.

Si $T = \{0,2,3,4\}$, alors $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\} \subseteq \sigma$. D'où $0 \in C_\sigma$ et $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$. par conséquent $C_\sigma = \{0\}$ ou $C_\sigma = \{0,2\}$ ou $C_\sigma = \{0,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,2,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,2,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,3,4\}$.

Pour $C_\sigma \in \{\{0\},\{0,2\},\{0,2,3\}\}$, on a : $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1)\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence pour ce type. On a donc 60 relations centrales binaires de ce type.

2. Cas où θ est de type 2-2-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0,1\}$; $[2]_\theta = \{2,3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$.

Si $T = \{0,2,4\}$, alors $\{(0,1),(0,2),(0,4)\} \subseteq \sigma$. Donc $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$. D'où $C_\sigma = \{0\}$ ou $C_\sigma = \{4\}$ ou $C_\sigma = \{1,2\}$ ou $C_\sigma = \{0,1,2\}$ ou $C_\sigma = \{0,2,3\}$ on a :

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(3,4),(4,3)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,4),(4,3)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(3,4),(4,3),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,2),(2,1)\}$;

$\sigma = E_5^2 \setminus \{(3,4),(4,3)\}$; $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1)\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 120 relations binaires centrales de ce type.

3. Cas où θ est de type 2-3. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0,1\}$ et $[2]_\theta = \{2,3,4\}$.

-Si $T = \{0,2\}$ et $T \cap C_\sigma = \emptyset$, alors $C_\sigma \subseteq \{1,3,4\}$. Dans ce cas , σ n'existe pas.

-Si $T = \{0,2\}$ et $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$, alors $C_\sigma = \{2,3\}$ ou $C_\sigma = \{2,4\}$ ou $C_\sigma = \{0\}$. Dans ce cas, $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,4),(4,1),(0,4),(4,0)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(1,3),(3,1)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 30 relations binaires centrales de ce type.

4. Cas où θ est de type 3-1-1. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0,1,2\}; [3]_\theta = \{3\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$.
Si $T = \{0,3,4\}$, alors $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\} \subseteq \sigma$. Donc $0 \in C_\sigma$. D'où $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$. Par conséquent, $C_\sigma = \{0,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,1,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,1,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,2,3\}$ ou $C_\sigma = \{0,2,4\}$ ou $C_\sigma = \{0,1\}$ ou $C_\sigma = \{0,2\}$. Dans ce cas, $\sigma = E_5^2 \backslash \{(2,3),(3,2),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,4),(4,2)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(2,4),(4,2),(2,3),(3,2)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(2,4),(4,2)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(2,3),(3,2)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(1,4),(4,1)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(1,3),(3,1)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \backslash \{(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(1,3),(3,1),(1,4),(4,1)\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 55 relations binaires centrales de ce type.

5. Cas où θ est de type 1-4. Par exemple θ définie par les classes d'équivalence suivantes :$[0]_\theta = \{0\}$ et $[1]_\theta = \{1,2,3,4\}$.
Si $T = \{0,1\}$, alors $\{(1,0),(1,2),(1,3),(1,4)\} \subseteq \sigma$. Donc $1 \in C_\sigma$ et $T \cap C_\sigma \neq \emptyset$. Par conséquent, $C_\sigma = \{1,2,3\}$ ou $C_\sigma = \{1,2,4\}$ ou $C_\sigma = \{1,3,4\}$ ou $C_\sigma = \{1,2\}$ ou $C_\sigma = \{1,3\}$ ou $C_\sigma = \{1,4\}$.
$\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,4),(4,0)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,3),(3,0),(0,4),(4,0)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,2),(2,0)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,4),(4,0)\}$ ou $\sigma = E_5^2 \setminus \{(0,2),(2,0),(0,3),(3,0)\}$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 40 relations binaires centrales de ce type.

Chapitre Trois

PERMUTATION PREMIÈRE ET RELATION D'ÉQUIVALENCE

Dans ce chapitre, nous caractérisons d'autres relations binaires σ telles que $Pol\sigma \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur $E_k (k \geq 2)$.

3.1 Relations d'équivalence et applications

Définition 3.1. *Soient θ_1 et θ_2 deux relations d'équivalence sur E_k. On dit que θ_1 et θ_2 sont :*

1. *compatibles si $\theta_1 \subsetneq \theta_2$ ou $\theta_2 \subsetneq \theta_1$.*
2. *orthogonales si θ_1(resp θ_2) à k_1; (resp k_2) classes d'équivalence $A_1^0, A_1^1, \cdots, A_1^{k_1-1}$ (resp $A_2^0, A_2^1, \cdots, A_2^{k_2-1}$); $|A_1^i| = k_2 \quad \forall i$, $|A_2^j| = k_1 \quad \forall j$; $|A_1^i \cap A_2^j| = 1 \quad \forall i, j$ et $k = k_1 k_2$.*

Exemple 3.1.1. Sur E_4. Nous définissons chaque relation d'équivalence par la partition associée.
Soient θ_1 et θ_2 les relations d'équivalence définies par les classes d'équivalence suivantes :
$\theta_1 : [0]_{\theta_1} = \{0, 3\}$ et $[1]_{\theta_1} = \{1, 2\}$.
$\theta_2 : [0]_{\theta_2} = \{0, 2\}$ et $[1]_{\theta_2} = \{1, 3\}$. Alors θ_1 et θ_2 sont orthogonales.

Exemple 3.1.2. Sur E_5. Nous définissons chaque relation d'équivalence par la partition associée.
Soient θ_1 et θ_2 les relations d'équivalence définies par les classes d'équivalence suivantes :
$\theta_1 : [0]_{\theta_1} = \{0, 3\}; [1]_{\theta_1} = \{1, 2\}$ et $[4]_{\theta_1} = \{4\}$.
$\theta_2 : [0]_{\theta_2} = \{0, 3\}; [1]_{\theta_1} = \{1\}; [2]_{\theta_2} = \{2\}$ et $[4]_{\theta_2} = \{4\}$. Alors $\theta_2 \subsetneq \theta_1$ donc θ_1 et θ_2 sont compatibles.

Théorème 3.1. *(Andrei, 2009)*
Soient θ_1 et θ_2 deux relations d'équivalence non triviale sur E_k. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$Pol\theta_1 \cap Pol\theta_2$ est maximal dans $Pol\theta_1$.*
2. *θ_1 et θ_2 sont soit compatibles soit orthogonales.*
3. *$Pol\theta_1 \cap Pol\theta_2$ est maximal dans $Pol\theta_1$ et dans $Pol\theta_2$.*

Soit $k \in \{3,4,5\}$. Dans cette section, nous énumérons toutes les relations d'équivalence non triviales ρ sur E_k telles que $Pol\theta \cap Pol\rho$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur E_k. Chaque relation sera définie par la partition associée.

I. Sur E_3, désignons par θ_0, θ_1 et θ_2 les trois relations d'équivalence non triviales, où θ_i est la relation d'équivalence telle que $[i]_{\theta_i} = \{i\}$.

Pour tout $i, j \in E_3, i \neq j$, θ_i et θ_j ne sont ni compatibles ; ni orthogonales.

Le clone $Pol\theta_i \cap Pol\theta_j$ n'est ni maximal dans $Pol\theta_i$; ni maximal dans $Pol\theta_j$.

Sur E_3, il n'existe pas de relation d'équivalence non triviale ρ telle que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

II. Reprenons les 13 relations d'équivalence non triviales sur E_4.

Nous énumérons toutes les relations d'équivalence non triviales ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

Soit θ une relation d'équivalence non triviale sur E_4.

1. Cas où θ est de type 2-2. Penons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :
$[0]_\theta = \{0,3\}$ et $[1]_\theta = \{1,2\}$.

a. Cas où θ et ρ sont compatibles. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

$\rho : [0]_\rho = \{0\}; [3]_\rho = \{3\}$ et $[1]_\rho = \{1,2\}$ car $\rho \subsetneq \theta$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,3\}; [1]_\rho = \{1\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$ car $\rho \subsetneq \theta$.

Dans ce cas, on ne peut pas avoir $\theta \subsetneq \rho$. Le raisonnement se fait de façon analogue pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 6 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

b. Cas où θ et ρ sont orthogonales. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

$\rho : [0]_\rho = \{0,1\}$ et $[2]_\rho = \{2,3\}$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,2\}$ et $[1]_\rho = \{1,3\}$. Le raisonnement se fait de façon analogue pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 3 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

2. Cas où θ est de type 2-1-1. Penons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0\}; [1]_\theta = \{1,2\}$ et $[3]_\theta = \{3\}$. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

$\rho : [0]_\rho = \{0,1,2\}$ et $[3]_\rho = \{3\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0\}$ et $[1]_\rho = \{1,2,3\}$ car $\theta \subsetneq \rho$. Le raisonnement se fait de façon analogue pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 4 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

On ne peut pas avoir $\rho \subsetneq \theta$ et le cas où θ et ρ sont orthogonales est impossible.

3. Cas où θ est de type 3-1. Penons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$\theta : [0]_\theta = \{0\}$ et $[1]_\theta = \{1,2,3\}$.

Dans ce cas, on ne peut pas avoir θ et ρ orthogonales et les cas où θ et ρ sont compatibles ont été traités précédemment. Le raisonnement se fait de façon analogue pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 6 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

III. Sur $E_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Reprenons les 50 relations d'équivalence non triviales.

Nous énumérons toutes les relations d'équivalence non triviales ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$. Soit θ une relation d'équivalence non triviale sur E_5.

Remarque 3.1.1. Puisque 5 est un entier naturel premier, on ne peut pas avoir θ et ρ orthogonales.

Il reste à étudier les cas où θ et ρ sont compatibles.

1. Cas où θ est est de type 2-1-1-1. Penons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0,3\}; [1]_\theta = \{1\}; [2]_\theta = \{2\}$ et $[4]_\theta = \{4\}$. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

$\rho : [0]_\rho = \{0,3\}; [1]_\rho = \{1,2\}$ et $[4]_\rho = \{4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,3\}; [1]_\rho = \{1,4\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,3\}; [2]_\rho = \{2,4\}$ et $[1]_\rho = \{1\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,3\}$ et $[1]_\rho = \{1,2,4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,3,4\}$ et $[1]_\rho = \{1,2\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,1,3\}$ et $[2]_\rho = \{2,4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,2,3\}$ et $[1]_\rho = \{1,4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,1,3\}; [2]_\rho = \{2\}$ et $[4]_\rho = \{4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,2,3\}; [1]_\rho = \{1\}$ et $[4]_\rho = \{4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

$\rho : [0]_\rho = \{0,3,4\}; [1]_\rho = \{1\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

ρ : $[0]_\rho = \{0, 2, 3, 4\}$ et $[1]_\rho = \{1\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

ρ : $[0]_\rho = \{0, 1, 3, 4\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

ρ : $[0]_\rho = \{0, 1, 2, 3\}$ et $[4]_\rho = \{4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$. Le cas où $\rho \subsetneq \theta$ est impossible. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 40 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

2. Cas où θ est de type 2-2-1. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 2\}; [1]_\theta = \{1\}$ et $[3]_\theta = \{3, 4\}$. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

ρ : $[0]_\rho = \{0, 2\}$ et $[3]_\rho = \{1, 3, 4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

ρ : $[0]_\rho = \{0, 1, 2\}$ et $[3]_\rho = \{3, 4\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

ρ : $[0]_\rho = \{0, 2, 3, 4\}$ et $[1]_\rho = \{1\}$ car $\theta \subsetneq \rho$. Les autres cas ont été traités précédemment. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 25 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

3. Cas où θ est de type 2-3. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$[0]_\theta = \{0, 3, 4\}$ et $[1]_\theta = \{1, 2\}$. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

ρ : $[0]_\rho = \{0, 3, 4\}; [1]_\rho = \{1\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$ car $\rho \subsetneq \theta$. Les autres cas ont été traités précédemment. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 35 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

4. Cas où θ est de type 3-1-1. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1, 4\}; [2]_\theta = \{2\}$ et $[3]_\rho = \{3\}$. Définissons ρ par les classes d'équivalence suivantes :

ρ : $[0]_\rho = \{0, 1, 2, 4\}$ et $[3]_\rho = \{3\}$ car $\theta \subsetneq \rho$;

ρ : $[0]_\rho = \{0, 1, 3, 4\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$ car $\theta \subsetneq \rho$. Les autres cas ont été traités précédemment. La description est la même pour les autres relations de ce type. On a donc 25 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

5. Cas où θ est de type 1-4. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes : $[0]_\theta = \{0, 1, 3, 4\}$ et $[2]_\rho = \{2\}$. Alors ρ est de type 2-1-1-1 ou 2-2-1 ou 2-3 ou 3-1-1. Ces cas ont été traités précédemment. On a donc 45 relations d'équivalence ρ telles que $Pol\rho \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

3.2 Permutations premières, relations d'équivalence et applications

Soit s une permutation d'ordre p, p premier, sans point fixe et θ une relation d'équivalence non triviale sur E_k, et $s^0 = \{(x, s(x)) : x \in E_k\}$ le graphe de s.

Lemme 3.1. *Si $Pols^0 \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$, alors soit $s^0 \subseteq \theta$, soit $s^0 \cap \theta$ est vide.*

Preuve. Soit $\tau = \{x \in E_k : (x, s(x)) \in \theta\}$ et soit $f^n \in Pols^0 \cap Pol\theta$.
Si $\tau = \emptyset$, alors $s^0 \cap \theta = \emptyset$. Sinon, soit $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \tau$. Alors $(x_1, s(x_1)), \cdots, (x_n, s(x_n)) \in \theta \cap s^0$. On a : $(f(x_1, \cdots, x_n), f(s(x_1), \cdots, s(x_n))) \in \theta$ et $f(s(x_1), \cdots, s(x_n)) = s(f(x_1, \cdots, x_n))$. On obtient alors que $(f(x_1, \cdots, x_n)), s(f(x_1, \cdots, x_n))) \in \theta$. Donc $Pols^0 \cap Pol\theta \subseteq Pol\tau$. De plus, $Pol\tau$ contient au moins une fonction constante si τ est non vide et par conséquent, on a : $Pols^0 \cap Pol\theta \subsetneq Pol\tau \cap Pol\theta \subseteq Pol\theta$. D'après le théorème **1.2**, On obtient $Pol\theta = Pol\tau$ ou $Pol\tau = \mathcal{O}_k$. Ainsi, $\tau \in \{\emptyset, E_k\}$. Donc $s^0 \cap \theta = \emptyset$ ou $s^0 \subseteq \theta$. ■

Lemme 3.2. *Si $Pols^0 \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$, alors soit $s^0 \subseteq \theta$, soit s applique chaque classe d'équivalence de θ sur une autre de façon surjective.*

Preuve. Soit $\tau = \{x \in E_k : (x, s(x)) \in \theta\}$.
Supposons que $Pols^0 \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$. Définissons la relation binaire μ sur E_k par :$(x, y) \in \mu \iff (s(x), s(y)) \in \theta$. Alors μ est une relation d'équivalence non triviale sur E_k.
En effet, $\forall x \in E_k, ((s(x), s(x)) \in \theta$ car θ est réflexive. Donc $(x, x) \in \mu$. Ce qui montre que μ est réflexive.
Soit $(x, y) \in \mu$ alors $(s(x), s(y)) \in \theta$ donc $(s(y), s(x)) \in \theta$ car θ est symétrique
d'où $(y, x) \in \mu$. Donc μ est symétrique.
Soient $(x, y), (y, z) \in \mu$, alors $(s(x), s(y)), (s(y), s(z)) \in \theta.\theta$ étant transitive, $(s(x), s(z)) \in \theta$ d'où $(x, z) \in \theta$. Donc θ est transitive.
Il existe $x, y \in E_k$ tels que $(x, y) \in \theta$ et $x \neq y$ d'où $((s^{-1}(x), s^{-1}(y)) \in \mu$ et $s^{-1}(x) \neq s^{-1}(y)$ car s est une permutation. De même, il existe $x, y \in E_k$ tels que $(x, y) \notin \theta$. Ainsi, $((s^{-1}(x), s^{-1}(y)) \notin \mu$ et $s^{-1}(x) \neq s^{-1}(y)$ car s est une permutation.
On conclut que μ est une relation d'équivalence non triviale sur E_k.
Soit $f^n \in Pols^0 \cap Pol\theta$ et $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n) \in \mu$.
Alors $(s(x_1), s(y_1)), \cdots, (s(x_n), s(y_n)) \in \theta$ donc $(f(s(x_1), \cdots, s(x_n)), (f(s(y_1), \cdots, s(y_n)) \in$

θ, donc $(s(f(x_1, \cdots, x_n)), s(f(y_1, \cdots, y_n)) \in \theta$. Ainsi, $(f(x_1, \cdots, x_n), f(y_1, \cdots, y_n)) \in \mu$. On conclut que $f \in Pol\mu$.

Donc $Pols^0 \cap Pol\theta \subsetneq Pol\theta \cap Pol\mu \subseteq Pol\theta$. La première inclusion étant stricte car $Pol\theta \cap Pol\mu$ contient toutes les fonctions constantes et $Pols^0$ ne contient aucune.

Donc si $Pols^0 \cap Pol\theta$ est sous-maximal dans $Pol\theta$, il faut que $\mu = \theta$ car ce sont des relations d'équivalence non triviales.

-Si $\tau = E_k$, $x\theta y \Longrightarrow s(x)\theta s(y)$ Donc s envoie chaque classe d'équivalence sur une autre.

-Si $\tau = \emptyset$, on sait que $s(x)$ est toujours dans une autre classe d'équivalence que x.

De plus, $s(x)\theta s(y) \Longrightarrow s^2(x)\theta s^2(y) \Longrightarrow, \cdots x = s^p(x)\theta s^p(y) = y$, donc s applique chaque classe d'équivalence de θ sur une autre de façon surjective. ■

Définition 3.2. *Soit ρ une relation h-aire sur E_l et ρ' une relation h-aire sur E_k.*

L'application $\phi : E_l \longrightarrow E_k$ est un homomorphisme de ρ dans ρ' si :

pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_h) \in \rho, (\phi(x_1), \phi(x_2), \cdots, \phi(x_h)) \in \rho'$.

On note par $Hom(\rho, \rho')$ l'ensemble des homomorphismes de ρ dans ρ'.

Soit $p \leq l$, on définit la relation p-aire $\rho \curvearrowright_p \rho'$ sur E_k par :

$\rho \curvearrowright_p \rho' = \{(\phi(0), \phi(1), \cdots, \phi(p-1)), \phi \in Hom(\rho, \rho')\}$.

Définition 3.3.

1. *Un graphe $G = (V, E)$ est donné par :*

   -un ensemble fini V dont les éléments sont appelés les sommets ou les noeuds de G.

   -un ensemble E de paires (non ordonnées) $\{x, y\}$ de sommets $(x, y \in V, x \neq y)$ appelés les arrêtes de G.

2. *un chemin de longueur $l, (l \in \mathbb{N})$ de $a \in V$ à $b \in V$ dans un graphe $G = (V, E)$ est une liste (ordonnée) $a = x_0, x_1, \cdots, x_l = b$ de $l + 1$ sommets avec $\{x_k, x_{k+1}\} \in E$, $k \in \{1, \cdots, l\}$.*

   Si $a = b$, alors on parle d'un chemin fermé sinon d'un chemin ouvert.

   Pour chaque sommet $a \in V$, il y' a un chemin unique de longueur 0 allant de a à a.

   Un chemin est dit orienté s'il suit une orientation.

Lemme 3.3. *Soit χ une relation d'équivalence sur E_l, $q \leq l \leq k$ et t^0 le graphe d'une fonction injective partielle sur E_l avec $t^0 \subsetneq \chi$ et t^0 étant la composée de cycles de longueur p et de chemins orientés de longueur plus petite que p.*

Soit T l'ensemble des cycles et chemins orientés de t^0 et $\sigma = (t^0 \times \chi) \curvearrowright_q (s^0 \times \theta)$ où $s^0 \subseteq \theta$.

a) *Si* $|E_q \cap C| \geq 2$ *pour un certain* C *dans* T*, alors* $Pol\sigma \subseteq Pols^0$.

b) *Si* $|E_q \cap B| \leq 1$ *pour toute classe d'équivalence* B *de* χ*, alors* $\sigma = E_k^q$.

c) *Soit* B *une classe d'équivalence de* χ *avec* $i, j \in E_q \cap C, i \neq j$*. Si* i *et* j *sont dans* C_i*, et* C_j *dans* T *avec* $C_i \neq C_j$*, alors* $Pol\sigma \subseteq Pol\theta$.

Preuve. a) Soit $i, j \in E_q \cap C$ avec $j = t^n(i)$. Pour a quelconque dans E_k, définissons $\varphi_a : E_l \longrightarrow E_k$ comme suit :

Pour tout C' de T, choisissons un certain $X'_C \in C'$ avec $X_C = i$.

Pour tout $y = t^n(X_{C'}), \varphi_a(y) = s^n(a)$. Finalement, si $y \notin C$ pour tout $C \in T$, fixons $\varphi_a(y) = a$.

On a $\varphi_a \in Hom(t^0, s^0)$, et puisque $Im(\varphi_a) = \langle s(a) \rangle$ et que $\tau = E_k$, $\varphi_a(x)\theta\varphi_a(y)$ pour tout $x, y \in E_l$.

Soit $\xi = pr_{ij}\sigma, (a, s^n(a))$ est dans ξ pour tout a car $\varphi_a \in Hom(t^0 \times \chi, s^0 \times \theta)$. De plus, pour tout (x, y) dans $\xi, (x, y) = (\varphi(i), \varphi(s^n(i))$ avec φ un homomorphisme de t^0 dans s^0. Donc $\xi = (s^n)^0$, et $Pol\xi = Pol(s^n)^0 = Pols^0$.

b) Si $|E_q \cap B| \leq 1$ pour toute classe d'équivalence B de χ, et avec $t^0 \subsetneq \chi$, on peut étendre toute fonction arbitraire $\varphi : E_q \longrightarrow E_l$ à un homomorphisme entre $\chi \times t^0$ et $\theta \times s^0$ puisque les projections de χ et de t^0 sur E_q sont triviales, donc $\sigma = E_k^q$.

c) Pour tout $(a, b) \in \theta$, définissons $\varphi_{ab} : E_l \longrightarrow E_k$ comme suit :

$\varphi_{ab}(i) = a, \varphi_{ab}(j) = b, \varphi_{ab} \in Hom(t^0, s^0)$. Par $(a, b) \in \theta$ et $s^0 \subsetneq \theta$, on sait que $\varphi_{ab} \in Hom(\chi, \theta)$.

En définissant à nouveau $\xi = pr_{ij}\sigma$, on aura que $\theta \subseteq \xi$ car $\varphi_{ab} \in Hom(\chi \times t^0, \theta \times s^0)$, et que $\xi \subseteq \theta$ car $i\chi j$, et donc pour tout couple $(x, y) \in \chi, (x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$ avec $\varphi \in Hom(\chi, \theta)$.

■

Lemme 3.4. *Si* $s^0 \subsetneq \theta$*, alors* $Pols^0 \cap Pol\theta$ *est sous-maximal dans* $Pol\theta$.

Preuve. Nous savons que pour tout sous-clone D de $\mathcal{O}_k$ avec $Pols^0 \cap Pol\theta \subseteq D, D$ est de la forme $Pol\sigma$ pour un certain σ défini comme dans le lemme 3.3. Nous ré-utiliserons donc la notation définie au lemme 3.3.

Si $|E_q \cap B| \leq 1$ pour toute classe d'équivalence B de χ, nous savons par le lemme 3.3 que $D = \mathcal{O}_k$.

Si $|E_q \cap C| \geq 2$ pour un certain C dans T et qu'il y' a deux éléments i et j avec $C_i \neq C_j$,

$(i,j) \in \chi \cap E_q$, alors par le lemme 3.3, $D \subseteq Pols^0 \cap Pol\theta$, donc $D = Pols^0 \cap Pol\theta$.
Supposons que $|E_q \cap C| \geq 2$ pour un certain C dans T mais que si $(i,j) \in \chi$ avec i, j dans E_q, alors $C_i = C_j$. Soit $\varphi : E_q \longrightarrow E_k$ arbitraire telle que $\varphi(t(x)) = s(\varphi(x))$ pour tout x, on peut la prolonger à E_l pour obtenir φ' qui soit dans $Hom(t^0 \times \chi, s^0 \times \theta)$ donc on a :
$(t^0 \times \chi) \curvearrowright_q (s^0 \times \theta) = t^0 \curvearrowright_q s^0 \Longrightarrow D = Pols^0$.
Par le même argument, si $|E_q \cap C| \leq 1$ pour tout C de T, mais $|E_q \cap B| \geq 2$ pour une classe d'équivalence B de χ, alors $(t^0 \times \chi) \curvearrowright_q (s^0 \times \theta) = \chi \curvearrowright_q \theta \Longrightarrow D = Pol\theta$. ■

Lemme 3.5. *Si s applique chaque classe d'équivalence de θ sur une autre de façon surjective, alors $Pols^0 \cap Pol\theta \subsetneq Pol\varepsilon \subsetneq Pol\theta$ avec $\varepsilon = s^0 \circ \theta$.*

Preuve.
1. $Pols^0 \cap Pol\theta \subsetneq Pol\varepsilon$.
Soit X et Y deux n-uplets tels que $(x_i, y_i) \in \varepsilon$ pour tout i, et soit $f^n \in Pols^0 \cap Pol\theta$.
Il existe un Z tel que $(x_i, z_i) \in \theta$ pour tout i et $s(Z) = Y$.
$(f(X); f(Z)) \in \theta, f(Y) = f(s(Z)) = s(f(Z))$ donc $(f(X), f(Y)) \in \varepsilon$.
De plus, soit $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un ensemble de représentants pour les classes d'équivalence de θ vérifiant pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, il existe j tel que $(s(a_j, a_i) \in \theta, s(a_j) \neq a_i$. Définissons f sur E_k par $f(x) = a_i$ avec $(a_i, x) \in \theta$. $f \in Pol\varepsilon$, mais ne commute pas avec s, donc $Pols^0 \cap Pol\theta \neq Pol\varepsilon$.
2. $Pol\varepsilon \subsetneq Pol\theta$.
Soit X et Y deux n-uplets tels que $(x_i, y_i) \in \theta$ pour tout i, et soit $f^n \in Pol\varepsilon$.
$(x_i, s(y_i)) \in \varepsilon$ pour tout i, donc $(f(X), f(s(Y)))$ est dans ε, donc $(f(X), s^{-1}(f(s(Y)))) \in \theta$.
De plus, $(y_i, s(y_i) \in \varepsilon$ pour tout i, donc $(f(Y), s^{-1}(f(s(Y)))) \in \theta$ donc $(f(X), f(Y)) \in \theta$.
Mais $Pol\theta$ contient toutes les fonctions constantes et $Pol\varepsilon$ n'en contient aucune car x et $s(x)$ ne sont jamais dans la même classe d'équivalence de θ donc $Pol\varepsilon \subsetneq Pol\theta$. ■

Théorème 3.2. *Le clone $Pols^0 \cap Pol\theta$ est maximal dans $Pol\theta$ si et seulement si $(x, s(x)) \in \theta$ pour tout x.*

Preuve. Par le lemme 3.2, soit s applique chaque classe d'équivalence de θ sur une autre de façon surjective, faisant de ce fait une permutation des classes d'équivalence de θ.
Par les lemmes 3.4 et 3.5, $Pols^0 \cap Pol\theta$ sera sous-maximal dans θ si et seulement si $s^0 \subseteq \theta$, c'est-à-dire que $(x, s(x)) \in \theta$ pour tout $x \in E_k$. ■

Soit $k \in \{3,4,5\}$. Dans cette section, nous énumérons toutes les permutations sans points fixes et d'ordre premier s sur E_k telles que $Pols^0 \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur E_k. Chaque relation d'équivalence sera définie par la partition associée.

I. Sur E_3, désignons par θ_0, θ_1 et θ_2 les trois relations d'équivalence non triviales, où θ_i est la relation d'équivalence telle que $[i]_{\theta_i} = \{i\}$.

pour tout $i \in E_3$, $[i]_{\theta_i} = \{i\}$. Ainsi, si s est une permutation de E_3 sans point fixe, alors $s^0 \nsubseteq \theta_i$ car $(i, s(i)) \in s^0$ et $s(i) \neq i$.

En résumé, sur E_3, il n'existe pas de permutation sans point fixe et d'ordre premier s telle que $Pols^0 \cap Pol\theta$ soit maximal dans $Pol\theta$.

II. Reprenons les 13 relations d'équivalence non triviales sur E_4.

1. Cas où θ est de type 2-2. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$[0]_\theta = \{0,2\}$ et $[1]_\theta = \{1,3\}$.

$s = (02)(13)$. La description est la même pour les autres relations d'équivalence de ce type. On a donc 3 permutations sans points fixes et d'ordre 2 telles que $s^0 \subseteq \theta$.

2. Cas où θ est de type 2-1-1 ou 3-1.

Dans chacun de ces cas, on ne pas pas trouver une permutation s sans point fixe et d'ordre premier telle que $s^0 \subseteq \theta$, car il existe au moins une classe d'équivalence de θ réduite à un singleton.

Sur E_4, on a **3** permutations s sans points fixes et d'ordre 2 telles que $Pols^0 \cap Pol\theta$ soit maximal dans θ.

III. Soit $E_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Reprenons les 50 relations d'équivalence non triviales sur E_5.

1. Cas où θ est de type 2-3. Prenons θ définie par les classes d'équivalence suivantes :

$[0]_\theta = \{0,2\}$ et $[1]_\theta = \{1,3,4\}$.

$s = (02)(134)$ ou $s = (02)(143)$. Dans chacun des cas, s n'est pas une permutation d'ordre premier. On raisonne de façon analogue pour les autres relations de ce type.

2. Cas où θ est de type 2-1-1-1 ou 2-2-1 ou 3-1-1 ou 1-4.

Dans chacun des types, on a au moins une classe d'équivalence contenant un seul élément et puisque s est une permutation sans points fixes, on ne peut avoir $s^0 \subseteq \theta$.

Sur E_5, il n'existe pas de permutation sans point fixe et d'ordre premier s telle que $Pols^0 \cap Pol\theta$ soit maximal dans θ.

♣ Implications pédagogiques ♣

L'opportunité de rédiger ce mémoire nous a offert l'occasion de faire nos premiers pas d'autonomie en termes d'investigations scientifiques et de déploiement de nos aptitudes à comprendre et à construire un raisonnement logique.

Nous avons également appris l'utilisation des outils de nouvelles technologies de l'information et de la communication indispensables pour tout enseignant en ces moments où les apprenants sont aspirés par les téléphones androïde, tablettes...

Nous nous proposons de relever dans cette partie quelques repères de l'impact de cet exercice sur le système éducatif.

3.3 Comprendre, mobiliser et construire des connaissances

Pour mener à terme ce travail, il a fallu puiser dans nos compétences à pouvoir comprendre une situation-problème, à proposer un formalisme et d'étudier les propriétés des objets mathématiques obtenus. Par transposition, le document de travail sur lequel porte notre compte rendu, Lau (1982), peut être perçu comme une ressource pédagogique dont le contenu doit être partager avec des apprenants. C'est ainsi que nous avons décomposé la ressource pour en donner une reconstitution en termes de définitions des concepts à étudier ; en termes de propriétés qui vérifient les concepts et en termes de résultats qu'on peut déduire en les mettant ensemble. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien d'un enseignant de mathématiques que nous aspirons à être. Nous pensons notamment à l'élaboration de nos futurs cours à construire à partir de diverses ressources éducatives.

3.4 Aptitude à mener un raisonnement logique

Le raisonnement mathématique permet d'associer, de différencier, de catégoriser, de mesurer, d'évaluer, de tester des hypothèses, de démontrer un processus, de tirer des conclusions à partir d'informations données ou de lois générales, de retrouver des informations manquantes par logique, d'aller des causes aux conséquences et inversement, de mettre au jour les contradictions ou incohérences, de justifier un résultat,...C'est donc un type de raisonnement essentiel pour comprendre et analyser le monde mais aussi pour beaucoup d'opérations de la vie quotidienne et professionnelle nous demandant d'analyser logiquement des situations et de prendre des décisions. On pourra donc ainsi développer chez les élèves des capacités qui contribueront à l'avancement vers des nouvelles connaissances. Celles ci ont pour but d'initier l'élève à la pratique de la recherche de la vérité par le biais du raisonnement en le rendant capable d'utiliser adéquatement les ressources documentaires, les méthodes d'investigation et d'analyse appropriées. L'élève sera donc à même de développer les capacités suivantes :

☞ Réfuter une proposition lorsqu'elle est fausse en donnant un contre-exemple ;
☞ Prouver une proposition lorsqu'elle est vraie en utilisant un raisonnement logique ;
☞ La valeur et la pertinence du nouveau savoir produit par le travail ;
☞ L'aptitude à intégrer les différentes connaissances ;
☞ L'aptitude à construire une problématique ;
☞ L'aptitude à la recherche : rigueur méthodologique, logique de l'argumentation et de la démonstration ;
☞ La qualité de la présentation selon les normes d'un travail scientifique ;
☞ La qualité de la présentation matérielle et typographique.

3.5 Initiation à l'usage des nouvelles technologies de l'information et de la communication

Pendant la rédaction de ce mémoire, nous avons eu à utiliser les outils des technologies de l'information et de la communication ; il s'agit : du **micro-ordinateur**, du **vidéoprojecteur**, du logiciel **Latex** (de son compilateur Miktex, de ses éditeurs TeXnicCenter, TeXmaker, TeXstudio et Winedit) ou d'internet. L'emploi de ces outils informatiques peut nous aider à faire des recherches sur internet pour actualiser les contenus à enseigner, à préparer un cours, à saisir une épreuve et à présenter une leçon. Notons que l'usage du vidéoprojecteur peut permettre d'illustrer une définition ou une propriété lorsqu'elle est introduite.

Ce mémoire a certainement contribué au développement de nos compétences à savoir :

☞ Réaliser les supports de qualité telles que les épreuves de mathématiques ;

☞ Préparer et présenter une leçon ;

☞ Utiliser un vidéprojecteur lors d'une leçon.

♣ Conclusion ♣

Dans notre travail, nous avons caractérisé quelques relations unaires et binaires σ telles que $Pol\theta \cap Pol\sigma$ soit maximal dans $Pol\theta$, où θ est une relation d'équivalence non triviale sur $E_k(k \in \{3, 4, 5\})$. Il en ressort au terme de notre caractérisation, que, si σ est une relation centrale unaire (resp. binaire), alors $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$ si et seulement si σ est une réunion de classes d'équivalence de θ ou $\sigma \cap B \neq \emptyset$, pour toute classe d'équivalence B de θ (resp. σ est de type I, II ou III) et lorsque σ est le graphe d'une permutation sans point fixe et d'ordre premier (resp. une relation d'équivalence non triviale), alors $Pol\theta \cap Pol\sigma$ est maximal dans $Pol\theta$ si et seulement si σ est contenu dans θ (resp. σ et θ sont soit compatibles soit orthogonales).

La liste des clones sous-maximaux de $Pol\theta$ fournie par ce mémoire n'est pas exhaustive. Cette étude nous motive à mener dans nos futurs recherches, un travail sous le thème $\ll$ Clones sous-maximaux inf-réductibles d'une relation d'équivalence non triviale sur un ensemble à k éléments $(k \in \{3, 4, 5\})$ $\gg$. Ce qui pourra nous permettre à mieux connaître les clones sous-maximaux de $Pol\theta$.

♣ Bibliographie ♣

[1] Andrei P.G. (2009) Clones sous-maximaux inf-réductibles, mémoire de master, Université de Montréal, Faculté des études supérieures.

[2] Baker K.A., Pixley A.F. (1975) Polynomial interpolation and the chinese remainder theorem for algebraic systems. Math. Z. 143 : 165-174.

[3] Burris S., Sankappanavar H.P. (1981) A course in Universal algebra.Springer, New york.

[4] Fearnley A. (2007) Clones de constantes et de permutations et leur intervalle monoïdal. Thèse Ph.D, Université de Montréal, Faculté des arts et des sciences.

[5] Lau D. (2006) function algebras on finite set. Springer Monographs in Mathematics, SpringerVerlag, Berlin-Heidelberg.

[6] Post E.L. (1941) The two-valued iterative systems of mathematical logic, Ann. Math. Studies,vol. 5, Princeton Univ. Press.

[7] Rosenberg I.G. (1965) La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. C.RAcad.Sci. Paris Ser.A-B,260 : 3817-3819.

[8] Temgoua E.R.A., Rosenberg I.G. (2012) Binary central relations and submaximal clones determined by nontrivial equivalence relations, Algebra Univers 67 : 299-311.