REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

DOMAINE DES PRÉFÉRENCES SÉPARABLES ET MANIPULATION

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

FEUDJIO JEMELE Jean Jacques
Licencié en mathématiques

Sous la direction
MOYOUWOU Issofa
Maitre de Conférences

Année Académique
2015-2016

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce travail à mes très chers parents JEMELE et MEMANFO Marcelle qui m'ont toujours soutenu et à qui je dois les enseignements que tout n'est pas toujours facilité dans la vie et que le savoir c'est le pouvoir.

✠ Remerciements ✠

Je rends grâce à Dieu qui m'a permis de parachever ce travail dans la paix. Qu'il me soit permis d'adresser mes sincères remerciements et d'exprimer ma gratitude à tous ceux qui de près comme de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je pense tout singulièrement à :

♡ Mon directeur de Mémoire, **le professeur Issofa MOYOUWOU** pour la confiance placée en moi en acceptant de diriger ce travail et pour sa grande disponibilité.

♡ Tous les **enseignants de l'École Normale Supérieure de Yaoundé**, en particulier ceux du département de Mathématiques pour ma formation académique et sociale.

♡ Mes parents Mr et Mme **JEMELE** pour leur soutien spirituel et leur amour sans faille qui ont su me donner la force d'affronter mes défis quotidiens.

♡ Mon encadreur de stage **Mr. Alain GOUET** enseignant de mathématiques au lycée de Ngoa-Ekellé pour son dévouement et les conseils reçus lors du stage.

♡ Mes frères et sœurs **Christelle Jemele**, **Joel Jemele**, **Vanessa Jemele** et **Jordane Jemele** pour le soutien moral et tous les sacrifices consentis .

♡ Les familles **TSAFACK** et **ZANGUE** pour leurs soutiens moral et financier.

♡ Tous mes oncles et tantes pour leur soutien à la fois moral et matériel.

♡ Mes cousins et cousines particulièrement **Alice NANFACK**, **Chantal VOUGMO** et **Narcisse JEMELE** pour le soutien moral qu'ils ne cessent de m'apporter.

♡ Toute l'AMAEC en particulier mes amis **Serge MOUDASSI** et **Ghislain DONGMO** .

♡ Mes camarades de promotion pour leur inconditionnel soutien pendant ma formation.

♡ **Gildas FOPA** pour avoir bien accepté de lire ce mémoire.

♡ Mes amis sincères de promotion en particulier **Adin SAFOKEM**, **Luc Kevin ABOUGNE**, **Sylviane CHEDJOUN**, **Roussel KOTSAP** et **Paul Alain KALDJOB KALDJOB** pour leurs conseils et assistance logistique.

♡ Mon frère et ami **Parfait ELAT** pour tout son soutien scolaire.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

FEUDJIO Jean Jacques

✠ Table des matières ✠

✠ Résumé ✠

Dans ce mémoire et sur la base du travail de Biung-Ghi (2003), nous présentons une étude de la non manipulabilité des règles de vote et leur indépendance vis-à-vis des candidats neutres lorsque les préférences individuelles sont des préordres totaux séparables. Nous montrons que les dictatures hiérarchisées sont les seules règles satisfaisant l'efficience ainsi que les deux propriétés précédentes.

Mots-clés : Non manipulabilité, Indépendance vis-à-vis des candidats neutres, Préférence séparable, Efficience et Quasi-efficience.

✠ Abstract ✠

On the basis of Biung-Ghi (2003) contribution, an analysis of voting rules satisfying strategy-proofness and null-independence properties for separable complete weak orderings is provided. It is shown that serially dictatorial rules are the only rules satisfying the efficiency and the two preceding properties.

Keywords : Strategy-proofness, Null-independance, Separable preference, Efficiency and Weak-efficiency.

✠ INTRODUCTION GÉNÉRALE ✠

En choix collectif, le problème est celui de transformer les opinions des individus en une opinion collective. L'une des difficultés rencontrées est celle de construire une bonne règle de décision non manipulable en ce sens qu'elle incite les individus à être sincères ; de sorte qu'exprimer des opinions sincères en toute situation de prise de décision aboutit à un résultat au moins autant préféré à tout autre résultat qu'on obtiendrait en exprimant des opinions non sincères ou stratégiques. L'un des résultats fondamentaux obtenus à ce sujet, dû à Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975), établit de façon surprenante l'impossibilité de construire une bonne règle non manipulable lorsque les opinions individuelles consistent à classer au moins trois candidats du meilleur au pire sans ex-aequo. Plusieurs pistes ont été alors prospectées dans la littérature en vue de lever cette difficulté. C'est notamment le cas des travaux de Biung-Ghi (2003) dont nous nous proposons de donner un compte rendu détaillé et illustré d'exemples.

Concrètement, Biung-Ghi (2003) s'intéresse aux règles de décision qui permettent à une collectivité de sélectionner une partie des candidats à partir des opinions individuelles. Ces mécanismes sont connus sous le nom de correspondances de choix social. C'est par exemple le cas des règles utilisées dans les présélections des étudiants dans une faculté. Une hypothèse est faite sur les opinions individuelles en ce sens que chaque individu classe les candidats en groupes de candidats désirables, indésirables ou neutres. Les opinions ainsi formulées sur les candidats sont dites séparables lorsqu'elles vérifient certaines propriétés de cohérence. Cette façon de procéder est courante dans la littérature et est appelée démarche par restriction des domaines utilisée par plusieurs autres auteurs tels que Moulin (1980) avec les préférences unimodales, Border et Jordan (1983) sur les préférences quadratiques dans un modèle multidimensionnel ou encore Barberà et al. (1991) sur le domaine des préférences séparables.

Notons que plusieurs autres aspects de la manipulation des règles de prise de décision ont été analysés. Sans être exhaustifs, nous pensons à Tchantcho et Diffo (2009) qui caractérisent les correspondances de choix social non manipulables en sélectionnant un nombre fixé de candidats. Andjiga et al. (2008) prennent en compte l'influence de l'information disponible au moment de la manipulation par un individu dans le cas des fonctions de choix social (un seul candidat à sélectionner). Récemment, Martinez et Moreno (2013) ont repris le domaine des préférences séparables pour étudier les fonctions de choix social qui ne dépendent que de la collection des candidats désirables.

Dans ce compte rendu de vulgarisation des recherches en choix collectif, nous nous sommes limités à ressortir les principaux résultats obtenus par Biung-Ghi (2003) ; notamment la caractérisation des règles de décision non manipulables lorsqu'on prend en compte les propriétés telles que l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres, l'efficience ou la monotonie globale. Après nous être impreignés des techniques développées par l'auteur, nous avons de notre propre initiative proposé des preuves originales à certaines assertions. En particulier, nous nous sommes rendus compte, preuve à l'appui, qu'une propriété a été indûment attribuée au sous domaine des préférences séparables linéaires.

L'ensemble du travail s'articule autour de trois chapitres. Le chapitre un aborde les préliminaires sur les préférences individuelles et les différents domaines définis par Biung-Ghi. Nous donnons un aperçu du formalisme des préférences individuelles et étudions certaines propriétés entre les sous-domaines des préférences séparables. Dans le chapitre deux consacré à la non manipulabilité des correspondances de choix social, nous présentons les différentes propriétés des règles de vote abordées par l'auteur ainsi que les caractérisations de certaines familles de règles de décision non manipulables. Au chapitre trois, nous donnons l'implication de notre travail sur le plan éducatif en ressortant les acquis durant cette expérience.

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

DOMAINES DE PRÉFÉRENCES INDIVIDUELLES ET CORRESPONDANCES DE CHOIX SOCIAL

La qualité d'une décision collective dépend généralement des opinions des acteurs en présence et de la règle de décision en application. C'est par exemple le cas de l'élection d'un président par une collectivité pour laquelle la collection des opinions individuelles et une règle de décision sont indispensables. Plusieurs autres contextes de décision existent où l'interprétation des candidats et leur structure peuvent suggérer des restrictions de préférences raisonnables qui induisent un certain type d'opinions observables ou encore des domaines de préférences individuelles. Dans ce chapitre, nous donnons un aperçu de la notion de préférence individuelle en choix collectif ainsi que certains domaines de préférences individuelles qui nous intéressent.

1.1. Préférences individuelles

Dans la vie de tous les jours, des preneurs de décision (hommes politiques, consommateurs, producteurs, citoyens, ...) ont à faire un choix parmi plusieurs options possibles. On suppose qu'il existe un ensemble fixé représentant l'ensemble des options sur lesquelles la société doit décider. En plus, on admet que chaque individu de la société peut exprimer ses préférences sur deux options quelconques en les classant.

1.1.1. Préférences individuelles et préordres totaux sur un ensemble

Dans toute la suite, on se donne un ensemble d'individus $N = \{1, ..., n\}$ fini et de cardinal n ; puis un ensemble A d'options (ou de candidats) fini contenant au moins deux éléments.

Définition 1.1.1

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur A est une partie du produit cartésien $A \times A$.

On note par commodité $x\mathcal{R}y$ plutôt que $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Intuitivement, la notation $x\mathcal{R}y$ signifie que, selon la relation $\mathcal{R}$, x est au moins aussi bon que y.

Notation 1.1.1. *On désigne par $B(A)$ l'ensemble des relations binaires sur A.*

On suppose que chaque individu i peut exprimer son opinion sur les éléments de A par une relation binaire sur A que nous notons R_i ou $\succeq_i$.

Définition 1.1.2

On appelle **préférence individuelle** (ou simplement préférence) sur A toute relation binaire sur A représentant une comparaison possible des options par un individu.

Étant donné deux options a et b, $a \succeq_i b$ signifie que l'individu i préfère l'option a à l'option b. Une préférence individuelle sur A est donc une relation binaire sur A indiquant pour un individu donné, une manière possible de comparer les éléments de A entre eux.

La préférence $\succeq_i$ (ou R_i) de l'individu i se décompose en deux parties :

– La composante asymétrique (ou composante stricte) notée $\succ_i$ (ou P_i) et définie pour $x, y \in A$ par :

$$x \succ_i y \text{ si } x \succeq_i y \text{ et non } (y \succeq_i x).$$

Ainsi, $x \succ_i y$ signifie que pour l'individu i, x est meilleur que y.

– La composante symétrique (ou indifférence) notée $\sim_i$ (ou I_i) et définie pour $x, y \in A$ par :

$$x \sim_i y \text{ si } x \succeq_i y \text{ et } y \succeq_i x\,;$$

Ainsi, $x \sim_i y$ signifie que l'individu i est indifférent entre x et y (pour i, x et y ont la même valeur).

Définition 1.1.3

Un **préordre** $\mathcal{R}$ sur A est une relation binaire sur A réflexive et transitive.

Notation 1.1.2. *On désigne par $W(A)$ l'ensemble des préordres totaux sur A.*

Comme A est fini, un préordre total n'est rien d'autre qu'un classement de toutes les options de la meilleure au pire avec la possibilité d'avoir des ex-æquo.

Exemple 1.1.1. *Posons $A = \{x, y, z\}$ et $R = \{(x, y),(x, z),(y, z),(z, y),(x, x),(y, y),(z, z)\}$. On peut vérifier que R est un préordre total sur A que nous notons $R = x(yz)$ pour dire que, dans l'ordre décroissant de préférence suivant R, x est premier ; puis y et z sont deuxièmes ex-æquo.*

Définition 1.1.4

Un ordre sur A est un préordre antisymétrique sur A

Notation 1.1.3. *On désigne par $L(A)$ l'ensemble des ordres totaux (encore appelé ordres linéaires) sur A.*

Comme A est fini, un ordre linéaire est un classement de toutes les options de la meilleure au pire sans ex-æquo.

Exemple 1.1.2. *Posons $A = \{x, y, z\}$ et $R = \{(x, y),(x, z),(y, z),(x, x),(y, y),(z, z)\}$. On peut vérifier que R est un ordre total sur A que nous notons $R = xyz$ pour dire que, dans l'ordre décroissant de préférence suivant R, x est premier, y est deuxième et z est troisième.*

La nature des alternatives et certaines considérations individuelles peuvent suggérer des restrictions de préférences et induire un domaine de préférences pour chaque décideur ou votant.

Définition 1.1.5

Un **domaine de préférences** individuelles $\mathcal{D}$ est toute partie non vide de B(A).

Pour chaque décideur i, on note par $\mathcal{D}_i$ son domaine de préférences. Notons que des votants différents peuvent avoir des domaines différents. Les éléments de $\mathcal{D}_i$ sont notés par R_i, $R_i^{'}$, ... Tout comme R_i représente la préférence du votant i, nous convenons de noter par R_{-i} la collection des préférences des votants autres que i. Le produit cartésien des domaines de préférences des votants est $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times ... \times \mathcal{D}_n$.

Définition 1.1.6

Étant donnés $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_n$ les différents domaines de préférences.
On appelle **profil** tout élément $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times ... \times \mathcal{D}_n$ que nous convenons de noter $\mathcal{R} = (R_i)_{i \in N}$.

1. Si $\forall i \in N$, $D_i \subseteq L(A)$, on dit que $\mathcal{R}$ est un profil d'ordres totaux.
2. Si $\forall i \in N$, $D_i \subseteq W(A)$, on dit que $\mathcal{R}$ est un profil de préordres totaux.
3. En général, s'il existe $D^0 \subseteq B(A)$ tel que $\forall i \in N$, $D_i \subseteq D^0$, on dit que $\mathcal{R}$ est un profil de préférences de D^0.

Dans la suite, sans risque de confusion, nous écrirons simplement L au lieu de $L(A)$ et W au lien de $W(A)$. En plus, L^N(respectivement W^N) représente l'ensemble des profils d'ordres totaux (respectivement préordres totaux) sur A.

1.1.2. Parties d'un ensemble et préférences séparables

Dans la suite, nous nous intéresserons aux situations de prise de décision où chaque décision collective est une partie non vide de l'ensemble des candidats. Par conséquent, il est important de savoir comment est-ce que les individus comparent les sous-ensembles de A. Nous sommes donc amenés à considérer les opinions individuelles sur l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties (vides ou non) de A . Plus précisément, nous portons notre attention sur un domaine de préférences dites séparables que nous présentons ci-dessous. Mais avant, nous convenons :

1. que la relation de préférence de l'individu i est un préordre total sur $\mathcal{P}(A)$ noté R_i ;
2. de noter par P_i la partie stricte de R_i et par I_i sa relation d'indifférence ;
3. de noter $\{x\}$ simplement par x dans les relations de comparaison (si aucune confusion n'est à craindre).

Définition 1.1.7

Une préférence R_i sur $\mathcal{P}(A)$ est dite **séparable** si R_i est un préordre total et :

$$\forall x \in A \text{ et } \forall X \subseteq A \setminus x\,;$$

$$\bullet\ (X \cup x)P_iX \text{ si et seulement si } xP_i\emptyset\,;$$

$$\bullet\ (X \cup x)I_iX \text{ si et seulement si } xI_i\emptyset.$$

Interprétation :

– $xP_i\emptyset$ signifie que x est désirable pour l'individu i ; car i préfère avoir x que ne rien avoir

– $\emptyset P_ix$ signifie que x est indésirable pour l'individu i ; car i préfère ne rien avoir qu'avoir x

– $xI_i\emptyset$ signifie que x est neutre pour l'individu i ; car i est indifférent entre avoir x et ne rien avoir.

Ainsi, la séparabilité pour une préférence R_i signifie que pour toute partie X de A et $\forall x \notin X$, le sous-ensemble $X \cup x$ est préféré au sous-ensemble X si et seulement si l'option x est une option désirable ; tandis que l'individu i est indifférent entre $(X \cup x)$ et X si et seulement si l'option x est une option neutre pour i.

<u>Notation</u> **1.1.4.** *On désigne par S l'ensemble de toutes les préférences séparables sur $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Pour les préférences séparables, les éléments de A sont toujours partitionnés en 3 groupes :

Définition 1.1.8

Étant donnés un individu i de préférence $R_i \in S$ et $x \in A$,

1. On dit que x est **désirable** si $xP_i\emptyset$;
2. On dit que x est **indésirable** si $\emptyset P_ix$;
3. On dit que x est **neutre** si $xI_i\emptyset$.

Définition 1.1.9

Une préférence R sur $\mathcal{P}(A)$ est dite **additive** s'il existe une application $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall X, Y \subseteq A,\, XRY \Leftrightarrow \sum_{x\in X} u(x) \geq \sum_{y\in Y} u(y) \text{ ; où } \sum_{x\in\emptyset} u(x) = 0$$

Remarque : On dit alors que u est une fonction d'utilité associée à R et que pour tout $x \in A$, $u(x)$ est l'utilité que procure la possession de x. **Interprétation** : Lorsqu'une préférence est additive, une alternative est désirable si elle donne utilité positive, elle est indésirable si elle donne utilité négative et neutre si elle donne utilité nulle.

Notation 1.1.5. *On désigne par S_{add} l'ensemble de toutes les préférences additives.*

Proposition 1.1.1

Les préférences additives sont séparables.

***Preuve*.** Soit $i \in N$ de préférence R_i additive. Montrons que R_i est séparable.
Soient $X \subseteq A$ et $x \in A \setminus X$ On a R_i est un préordre total. De plus,

$$(X \cup x)P_iX \Leftrightarrow \sum_{y\in X\cup x} u(y) > \sum_{y\in X} u(y) \Leftrightarrow \sum_{y\in X\cup x} u(y) - \sum_{y\in X} u(y) > 0 \Leftrightarrow u(x) > 0 \Leftrightarrow xP_i\emptyset.$$

De même, on a :

$$(X \cup x)I_iX \Leftrightarrow \sum_{y\in X\cup x} u(y) = \sum_{y\in X} u(y) \Leftrightarrow \sum_{y\in X\cup x} u(y) - \sum_{y\in X} u(y) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow xI_i\emptyset.$$

On conclut alors que toute préférence additive est séparable. ■

Définition 1.1.10

Une préférence $R \in S$ est dite **linéaire** si R est un ordre total.

Notation 1.1.6. *On désigne par S_{Lin} l'ensemble des préférences séparables linéaires .*

Notons qu'il est immédiat qu'une préférence séparable est linéaire si et seulement si l'ensemble des options neutres est vide.

Notation 1.1.7. *Soit $\mathcal{R}$ un profil de préférences séparables.*

- *Étant donné un individu i de préférence R_i, notons par :*
  - *$G(R_i)$ l'ensemble des options désirables suivant R_i ;*
  - *$B(R_i)$ l'ensemble des options indésirables suivant R_i.*
- *Pour tout $x \in A$, on dira que x est neutre pour $\mathcal{R}$ si x est neutre pour $R_i, \forall i \in N$;*
- *Pour tout $x \in A$, on note respectivement par $N_x^G(R)$ et $N_x^B(R)$ l'ensemble des agents pour lesquels x est désirable et l'ensemble des agents pour lesquels x est indésirable.*

1.1.3. Préférences trichotomiques et dichotomiques

En considérant le problème de la sélection d'une partie de l'ensemble des options, il peut arriver que les préférences des agents soient telles que l'ensemble des options soit partitionné en deux groupes d'options (désirables et indésirables) ou encore en trois groupes (désirables, indésirables et neutres). Ici, on suppose en plus que des options de même nature procure des utilités égales.

Définition 1.1.11

Une préférence $R_0 \in S$ est dite **trichotomique** si :
$\forall X, X' \subseteq A, (XR_0X') \Leftrightarrow \mid G(R_0) \cap X \mid - \mid B(R_0) \cap X \mid \geqslant \mid G(R_0) \cap X' \mid - \mid B(R_0) \cap X' \mid$.

Notation 1.1.8. *Soit S_{Tri}^N la famille des préférences trichotomiques.*

Ainsi, tout agent i avec une préférence trichotomique ne se soucie que du nombre exact d'options désirables et du nombre exact d'options indésirables dans chaque sous-ensemble d'options de A. Notons que R_i est entièrement définie par la donnée de $G(R_i)$ et $B(R_i)$ puisque l'ensemble des options neutres est donné par $A \setminus (G(R_i) \cup B(R_i))$.

Notation 1.1.9. *Lorsque la préférence R_i de l'individu i est trichotomique, On pose*
$R_i = (G(R_i), B(R_i))$.

Exemple 1.1.3. *Pour $A = \{a, b, c\}$, la préférence d'un décideur i donnée par*
$R_i = (\{a\}; \{b\})$ est une préférence trichotomique où l'option a est désirable, l'option b indésirable et l'option c est neutre. Les sous-ensembles de A sont : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$; $\{b, c\}$ et $\{a, b, c\}$.
On dit alors que pour le décideur i, les sous-ensembles $\{a\}$ et $\{b, c\}$ sont premiers ex-æquo ; $\emptyset$, $\{c\}$, $\{a, b\}$ et $\{a, b, c\}$ sont deuxièmes ex-æquo ; et $\{b\}$ et $\{b, c\}$ sont troisièmes ex-æquo.

Définition 1.1.12

Une préférence $R_0 \in S$ est dite **dichotomique** si R_0 est trichotomique et $G(R_0) \cup B(R_0) = A$.

__Notation__ **1.1.10.** *On désigne par S^N_{Di} la famille des préférences dichotomiques.*

Exemple **1.1.4.** *Pour $A = \{a, b, c, d\}$, la préférence d'un décideur donnée par $R_0 = (\{a, c\}; \{b, d\})$ est une préférence dichotomique où les options a et c sont désirables, et les options b et d sont indésirables.*

Remarque **1.1.1.** *On a $S^N_{Di} \subset S^N_{Tri}$: toute préférence dichotomique est trichotomique.*

1.2. Les domaines de Biung-Ghi

Nous présentons à présent des domaines de préférences introduits par Biung-Ghi et qui nous seront utiles dans la suite. Nous supposons en plus que les individus ont des préférences séparables ; mais que deux individus peuvent avoir des domaines de préférences différents. Ainsi, pour chaque agent i, l'ensemble de ses préférences admissibles $\mathcal{D}_i$ contenu dans S.

1.2.1. Les domaines essentiels

Biung-Ghi a introduit trois axiomes sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des profils admissibles que nous présentons dans la définition qui suit.

Définition 1.2.1

Un domaine $\mathcal{D}$ de profils est dit **essentiel** si $\mathcal{D}$ vérifie les trois propriétés (A_1), (A_2) et (A_3) suivantes :

(A_1) : $\forall i \in N$, $\forall x \in A$, $\exists R_i, R'_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $x \in G(R_i)$ et $x \in B(R'_i)$;

(A_2) : $\forall i \in N$, $\forall R_i \in \mathcal{D}_i$, $\forall x \in A \setminus G(R_i)$, $\exists R'_i \in \mathcal{D}_i$ tel que

$$x \cup G(R_i) \subseteq G(R'_i) \text{ et } B(R'_i) \subseteq B(R_i) \setminus x\,;$$

(A_3) : $\forall i \in N$, $\forall R_i, R'_i \in \mathcal{D}_i$, $\forall x \in B(R_i) \setminus [G(R'_i) \cup B(R'_i)]$, $\exists R''_i \in \mathcal{D}_i$ tel que

$$G(R_i) \subseteq G(R''_i)\,;\, B(R''_i) \subseteq B(R_i) \text{ et } x \notin G(R''_i) \cup B(R''_i).$$

Interprétation : **La première propriété** (A_1) signifie que pour chaque agent i et pour chaque option x, il existe deux préférences admissibles R_i et R'_i telles que x est une option désirable suivant R_i et x est une option indésirable suivant R'_i.

La deuxième propriété (A_2) stipule que pour chaque agent i et chaque option x, si x n'est pas une option désirable pour la préférence R_i, alors il existe une autre préférence admissible R'_i suivant laquelle x est désirable, toute option désirable suivant R_i l'est aussi suivant R'_i et tout option indésirable suivant R'_i l'est aussi suivant R_i.

La troisième propriété (A_3) requiert que pour chaque agent i et chaque option x, si x est indésirable pour la préférence R_i et neutre pour la préférence R'_i alors il existe une autre préférence admissible R''_i suivant laquelle x est neutre , toute option désirable suivant R_i l'est aussi suivant R''_i et toute option indésirable suivant R''_i l'est aussi suivant R_i.

Proposition 1.2.1

Le domaine de profils de préférences séparables linéaires satisfait (A_1) et (A_3).

Preuve.

↬ Montrons que (A_1) est satisfaite.

Considérons $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Définissons la relation R_i comme suit :

Posons $u(a_1) = 1$ et $\forall k \geq 2$, $u(a_k) = \sum_{1 \leq j \leq k-1} u(a_j) + 1$.

$$XR_iY \Leftrightarrow \sum_{a_j \in X} u(a_j) \geq \sum_{a_j \in Y} u(a_j)$$

• Soit $a \in A$, $u(a) > 0$ donc $\{a\}P_i\emptyset$ et ainsi, $G(R_i) = A$ et $B(R_i) = \emptyset$; toute option est donc toujours désirable. Donc $\forall x \in A$, $x \in G(R_i)$

• R_i est complète et transitive par définition.

• On a : $\sum_{a_j \in X \cup x} u(a_j) \geq \sum_{a_j \in X} u(a_j)$ si et seulement si $u(x) > 0$ donc $(X \cup x)P_iX$ et on conclut que R_i est séparable.

• Soit $X \neq Y$.

- Si $X \subsetneqq Y$ alors YP_iX ;

- Si $Y \subsetneqq X$ alors XP_iY ;

Supposons que $X - Y \neq \emptyset$ et $Y - X \neq \emptyset$

Posons $p = \max_{a_j \in X-Y} j$ et $q = \max_{a_j \in Y-X} j$

Sans nuire à la généralité, supposons $p > q$. On a : $Y - X \subseteq \{a_1, a_2, ..., a_p\}$.

$\sum_{a_j \in X} u(a_j) - \sum_{a_j \in Y} u(a_j) = \sum_{a_j \in X-Y} u(a_j) - \sum_{a_j \in Y-X} u(a_j) \geq \sum_{q+1 \leq j \leq p} u(a_j) \geq 0.$
On obtient alors une quantité positive, donc XR_iY.

De même, définissons la relation R'_i de la façon suivante :

$$\text{Posons } u(a_1) = -1 \text{ et } \forall k \geq 2,\, u(a_k) = \sum_{1 \leq j \leq k-1} u(a_j) - 1 \text{ tel que}$$
$$XR'_iY \Leftrightarrow \sum_{a_j \in X} u(a_j) \geq \sum_{a_j \in Y} u(a_j)$$

Soit $a \in A$, $u(a) < 0$ donc $\emptyset P_i \{a\}$ $B(R_i) = A$ et alors $G(R_i) = \emptyset$; toute option est donc toujours indésirable. Donc $\forall x \in A$, $x \in B(R_i)$.

On vérifie de même que R'_i est une préférence linéaire séparable. Donc le domaine linéaire séparable satisfait la propriété (A_1).

↬ La condition $x \in B(R_i) \setminus [G(R'_i) \cup B(R'_i)]$ entraine que x est une option indifférente pour la préférence R'_i ; Le domaine étant linéaire, aucune option n'est neutre par conséquent, la propriété (A_3) est trivialement satisfaite par le domaine linéaire séparable.

■

Exemple 1.2.1. *Considérons $A = \{a, b, c\}$.*
Soit $\mathcal{D}^\star$ le domaine constitué des trois seules préférences admissibles suivantes.
La première est une préférence R_0 dans laquelle seule l'option a est désirable et les options b et c sont neutres.
La deuxième est une préférence R'_0 dans laquelle seule l'option b est désirable et les options a et c sont neutres.
La dernière est une préférence R''_0 dans laquelle l'option a est désirable, l'option b est indésirable et l'option c est neutre.
Le domaine $\mathcal{D}^\star$ ne satisfait pas la propriété (A_1) puisque l'option a n'est jamais une option indésirable et l'option c est toujours une option neutre.

1.2.2. Les domaines riches

Définition 1.2.2

Un domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times ... \times \mathcal{D}_n$ est dit **riche** si $\forall B \subseteq A$, $\exists R_i \in \mathcal{D}_i : G(R_i) = B$.

Lorsque les préférences sont séparables linéaires sur $\mathcal{P}(A)$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1.2.2

Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times .... \times \mathcal{D}_n$ un domaine de profils de préférences séparables linéaires.

Si $\mathcal{D}$ est en plus riche, alors $\mathcal{D}$ est un domaine essentiel.

Preuve. Pour cela, il suffira de montrer que $\mathcal{D}$ satisfait les propriétés (A_1) ; (A_2) et (A_3) de Biung-Ghi .
Le domaine $\mathcal{D}$ étant linéaire séparable, il a été prouvé à la proposition 1.2.1 que les propriétés (A_1) et (A_3) sont satisfaites. Pour (A_2), supposons $\forall i \in N$ et $\forall R_i \in \mathcal{D}_i$ et $x \in A$ avec $x \notin G(R_i)$. On a $G(R_i) \cup x \subseteq A$, et $B(R_i) \setminus x \subseteq A$ puisque $\mathcal{D}$ est un domaine riche, $\exists R'_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $G(R'_i) = G(R_i) \cup x$ et $B(R'_i) = B(R_i) \setminus x$, on a alors $x \cup G(R_i) \subseteq G(R'_i)$ et $B(R'_i) \subseteq B(R_i) \setminus x$. ■

Biung-Ghi (2003) relève que les propriétés (A_2) et (A_3) ne sont pas très intuitives ; mais découlent cependant de la propriété (A_4) suivante qui s'interprète aisément.

Définition 1.2.3

Un domaine $\mathcal{D}$ est dit **fortement riche** si $\mathcal{D}$ vérifie la propriété (A_4) suivante :

(A_4) : $\forall i \in N, \forall X, X' \subseteq A$ avec $X \cap X' = \emptyset$, $\exists R_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $G(R_i) = X$ et $B(R_i) = X'$.

En fait, la propriété (A_4) précise que pour deux sous ensembles disjoints d'options, chaque agent a une préférence admissible suivant laquelle les deux ensembles deviennent respectivement l'ensemble des options désirables et l'ensemble des options indésirables.

Proposition 1.2.3

Tout domaine satisfaisant la propriété (A_4) satisfait aussi les propriétés (A_2) et (A_3).

Preuve. • Pour (A_2).

Considérons un domaine qui satisfait (A_4), alors $\forall i \in N$, $\forall X, X' \subseteq A$ avec $X \cap X' = \emptyset$ $\exists R'_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $G(R'_i) = X$ et $B(R'_i) = X'$.

Considérons $X = G(R_i) \cup x$ et $X' = B(R_i) \setminus x$.

On a d'une part : $X \cap X' = (G(R_i) \cup x) \cap (B(R_i) \setminus x) = [(G(R_i) \cap (B(R_i) \setminus x)] \cup [x \cap ((B(R_i) \setminus x)]$ or $x \cap ((B(R_i) \setminus x) = \emptyset$ et $(G(R_i) \cap (B(R_i) \setminus x) \subseteq G(R_i) \cap B(R_i) = \emptyset$. Ainsi, on a $X \cap X' = \emptyset$.

D'autre part, $x \cup G(R_i) \subseteq G(R'_i)$ et $B(R'_i) \subseteq B(R_i) \setminus x$.

Donc (A_2) est satisfaite.

• Pour (A_3).

Considérons un domaine qui satisfait (A_4), alors $\forall i \in N$, $\forall X, X' \subseteq A$ avec $X \cap X' = \emptyset$ $\exists R''_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $G(R''_i) = X$ et $B(R''_i) = X'$.

Si on considère $X = G(R_i)$ et $X' = B(R_i) \setminus x$.

On a d'une part $X \cap X' = G(R_i) \cap (B(R_i) \setminus x) \subseteq G(R_i) \cap B(R_i) = \emptyset$.

D'autre part, $G(R_i) \subseteq G(R''_i)$; $B(R''_i) \subseteq B(R_i)$ et $x \notin G(R''_i) \cup B(R''_i)$.

Donc (A_3) est satisfaite. ■

1.2.3. Les domaines de type $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$

Nous présentons ici de nouveaux domaines de préférences qui sont des domaines pour lesquels il est requis une diversité de comparaisons.

Définition 1.2.4

Un domaine $\mathcal{D}$ satisfait **la propriété** $\mathcal{P}$ s'il existe au moins 3 options et $\mathcal{D}$ satisfait les deux conditions suivantes :

(P_1) : $\forall i \in N$, $\forall x, y, z \in A$, $\exists R_i, R'_i, R''_i, R'''_i \in \mathcal{D}_i$ tels que :

- $x P_i \{x, z\} P_i y P_i \varnothing P_i z$ et $\forall w \notin \{x, y, z\}$, $\varnothing P_i w$.
- $x P'_i \varnothing P'_i y P'_i \{x, z\} P'_i z$ et $\forall w \notin \{x, y, z\}$, $\varnothing P'_i w$.
- $x P''_i \varnothing$; $y P''_i \varnothing$; $z P''_i \{x, y\}$, et $\forall w \notin \{x, y, z\}$, $\varnothing P''_i w$.
-$\varnothing P'''_i x$; $\varnothing P'''_i y$, $\{x, y\} P'''_i z$ et $\forall w \notin \{x, y, z\}$, $\varnothing P'''_i w$.

(P_2) : $\forall i \in N$, $\forall x, y, z \in A$, $\exists R_i, R'_i \in \mathcal{D}_i$ tel que :

- $x I_i y I_i \varnothing$ et $\forall w \notin \{x, y\}$, $\varnothing P_i w$.
- $x I'_i y I'_i \varnothing$ et $\forall w \notin \{x, y, z\}$, $\varnothing P'_i w$.

Interprétation : la propriété $\mathcal{P}$ requiert l'existence d'au moins trois options et que le domaine $\mathcal{D}$ admette une variété de préférences individuelles permettant d'observer certaines comparaisons préalables. Il en est de même de la propriété $\mathcal{Q}$ suivante. Mais à la différence qu'elle accentue la comparaison sur les sous-ensembles de l'ensemble des candidats.

Définition 1.2.5

Un domaine $\mathcal{D}$ satisfait **la propriété** $\mathcal{Q}$ s'il existe au moins 3 options et $\mathcal{D}$ satisfait les deux conditions suivantes :

(Q_1) : $\forall i \in N$ et $\forall x, y, z \in A$, $\exists R_i, R_i', R_i'', R_i''' \in \mathcal{D}_i$ tel que :

- $yP_i\emptyset P_iz$ et $\forall Y, Y' \subseteq A \setminus x$, $[Y \cup x]P_iY'$.
- $xP_i'\varnothing P_i'y$ et $\forall Y, Y' \subseteq A \setminus z$, $YP_i'[Y' \cup x]$.
- $xP_i''\emptyset$, $yP_i''\varnothing$ et $\forall Y, Y' \subseteq A \setminus z$, $[Y \cup z]P_i''Y'$.
- $\emptyset P_i'''x$, $\varnothing P_i'''y$, et $\forall Y, Y' \subseteq A \setminus z$, $YP_i'''[Y' \cup z]$.

(Q_2) : $\forall i \in N$ et $\forall x, y, z \in A$, avec $x \neq y \neq z$, $\exists R_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $xI_iyI_izI_i\emptyset$.

Définition 1.2.6

Un domaine $\mathcal{D}$ satisfait **la propriété** $\mathcal{R}$ si $\mathcal{D}$ satisfait les deux conditions suivantes :

(R_1) : $\forall i \in N$, $\forall R_i \in \mathcal{D}_i$, $\forall x \in G(R_i)$, $\exists R_i' \in \mathcal{D}_i$ tel que $G(R_i) = G(R_i')$, $B(R_i) = B(R_i')$ et $\forall Y, Y' \subseteq A \setminus x$, $[Y \cup x]P_i'Y'$.

(R_2) : $\forall i \in N$, $\forall R_i \in \mathcal{D}_i$, $\forall x \in B(R_i)$, $\exists R_i' \in \mathcal{D}_i$ tel que $G(R_i') = G(R_i)$, $B(R_i) = B(R_i')$ et $\forall Y, Y' \subseteq A \setminus x$, $YP_i'[Y' \cup x]$.

Cette propriété $\mathcal{R}$ se traduit par le fait que pour chaque agent i, pour chaque option x et pour toute préférence R_i, si x est une option désirable, il existe une préférence admissible R_i' qui a les mêmes ensembles d'options désirables et d'options indésirables que la préférence initiale et dans laquelle, indépendamment des autres options, il est toujours préférable que l'option x soit choisie. De même, si x est une option indésirable, il existe une préférence admissible R_i'' qui a les mêmes ensembles d'options désirables et d'options indésirables que la préférence initiale et dans laquelle indépendamment des autres options, il est toujours préférable que l'option x ne soit pas choisie.

Proposition 1.2.4

Le domaine des préférences séparables linéaires S^N_{Lin} ne satisfait pas les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

***Preuve*.** Dans le domaine des préférences séparables linéaires, aucune indifférence n'est admise donc les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne peuvent être vérifiées. ■

♣ Bien que Biung-Ghi affirme imprudemment que le domaine des préférences séparables linéaires vérifie la propriété $\mathcal{R}$, notre exemple ci-dessous démontre le contraire.

Exemple 1.2.2. *Considérons $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Soit R_1 une préférence additive associée à la fonction d'utilité u définie par :*

$$u(a_1) = 4\,;\ u(a_2) = 2 \text{ et } u(a_3) = 1$$

Cette préférence est séparable linéaire et le classement des sous-ensembles de A est donné par :
$R_1 = \{a_1, a_2, a_3\}; \{a_1, a_2\}; \{a_1, a_3\}; \{a_1\}; \{a_2, a_3\}; \{a_2\}, \{a_3\}; \emptyset$.
Supposons que le domaine des préférences séparables linéaires vérifie la propriété $\mathcal{R}$ alors pour R_1, il existe R'_1 satisfaisant la condition suivante :

$$\forall x \in G(R_1) = A,\ \forall Y, Y' \subseteq A \setminus x,\ [Y \cup x] P'_1 Y'$$

Or $\emptyset$, $\{a_2\} \subseteq A \setminus \{a_1\}$ donc $\{a_1\} P'_1 \{a_2\}$.
De même, $\emptyset$, $\{a_1\} \subseteq A \setminus \{a_2\}$ donc $\{a_2\} P'_1 \{a_1\}$. Ce qui est une contradiction.

1.3. Constitutions de choix et correspondances de choix social

Dans cette partie, nous présentons les différentes règles de décision qui nous intéressent.

1.3.1. Constitutions de choix

On suppose que dans la sélection d'une partie des candidats, les avis des individus sont pris en considération candidat par candidat. On convient que l'avis d'un individu peut compter sur un candidat et pas sur un autre. On suppose ainsi que la sélection d'un candidat dépend finalement du groupe d'individus qui désirent sa sélection et de ceux qui s'y opposent. De façon formelle, notons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des couples de sous-ensembles disjoints de N. On a :
$\mathcal{N} = \{(N_1, N_2) : N_1 \subseteq N \text{ et } N_2 \subseteq N \backslash N_1\} = \{(N_1, N_2) : N_1, N_2 \subseteq N \text{ et } N_1 \cap N_2 = \emptyset\}$.

Définition 1.3.1

On appelle **constitution de choix** toute collection $C = (C^x)_{x\in A}$ vérifiant à la fois :

• La cohérence : $\forall x \in A, C^x \subseteq \mathcal{N}$;

• La monotonie :

$\forall x \in A, \forall (C_1, C_2) \in C^x, \forall (C'_1, C'_2) \in \mathcal{N}$: $[(C_1 \subseteq C'_1)$ et $(C'_2 \subseteq C_2)] \Longrightarrow (C'_1, C'_2) \in C^x$.

Intuitivement, C^x est l'ensemble des couples d'intersection vide de décision sur x. Un couple $(C_1, C_2) \in C^x$ peut être perçu comme suit : C_1 est la partie des individus qui désirent la sélection de l'option x et C_2 la partie des individus qui s'opposent à la sélection de l'option x. La monotonie exige que pour une option $x \in A$ choisie, si l'ensemble des individus qui sont pour la sélection de x s'agrandit tandis que l'ensemble de ceux qui sont contre la sélection de x diminue, alors l'option x doit toujours être choisie.

Remarque 1.3.1. *Si $(C_1, C_2) \in C^x$, on dit que (C_1, C_2) a le pouvoir de décision (sélection) sur x.*

Exemple 1.3.1. *Nous donnons ci-dessous des exemples de constitutions de choix.*

1. ***La majorité simple** : Une option est choisie si le nombre des individus qui sont en faveur de sa sélection est supérieur à la moitié de l'effectif de tous les individus. Dans ce cas,*

$$C^x = \{(C_1, C_2) \in \mathcal{N} : \mid C_1 \mid > \frac{n}{2}; C_2 \subseteq N \setminus C_1\}.$$

2. ***Le vote à la majorité qualifiée** : Dans la majorité simple, la sélection d'un candidat requiert que la proportion des individus qui sont favorables soit au moins égale à $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une proportion $q > \frac{1}{2}$ est requise pour toute sélection, on parle de majorité qualifiée de quota q. Formellement, $C = (\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ est une constitution de choix à la majorité qualifiée s'il existe $q \in]\frac{1}{2}; 1[$*

$$\forall x \in A, \forall (C_1, C_2) \in \mathcal{N} : (C_1, C_2) \in C^x \Leftrightarrow \mid C_1 \mid > qn; C_2 \subseteq N \setminus C_1\}.$$

Nous donnons ensuite quelques propriétés sur les constitutions de choix :

Définition 1.3.2

Une constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ satisfait la **P- unanimité** (unanimité forte) lorsque :

$$\forall x \in A,\ (N, \emptyset) \in \mathcal{C}^x \text{ et } (\emptyset, N) \notin \mathcal{C}^x.$$

De façon précise, la P- unanimité traduit le fait que si tous les individus sont favorables à la sélection de l'option x alors l'option x est sélectionnée.

Définition 1.3.3

Une constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ satisfait la **P- neutralité** (neutralité forte) lorsque :

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall (C_1, C_2) \in \mathcal{N},\ (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^x \Leftrightarrow (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^y.$$

En fait, la P- neutralité traduit le fait que pour deux options quelconques x et y, toute paire de décideurs peut être décisive soit sur x soit sur y.

Définition 1.3.4

Une constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ satisfait la **P- anonymat** (forte anonymat) si :

$$\forall x \in A,\ \exists \mathcal{F}_x \subseteq \{(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : t_1 + t_2 \leq n\} \text{ tel que : } (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^x \Leftrightarrow (\mid C_1 \mid, \mid C_2 \mid) \in \mathcal{F}_x.$$

En cas de P-anonymat, la décision sur un candidat donné ne dépend pas de l'identité ; seul la configuration du nombre de décideurs pour et du nombre de décideurs contre est pris en compte.
Notation : On appelle $\mathcal{F}_x$ l'ensemble indexé par x.

1.3.2. Constitutions de choix et correspondances de choix social associées

Définition 1.3.5

On appelle **correspondance de choix social** (ou règle) toute application d'une partie non vide de $B(A)$ vers 2^A.

Interprétation : une correspondance de choix social est un mécanisme de prise de décision qui permet à partir d'un profil de sélectionner un sous-ensemble non vide de candidats.

Définition 1.3.6

Soient φ une correspondance de choix social et $C = (\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ une constitution de choix.
On dit que φ est associée à C ou encore la règle φ est dans la **famille** $\phi^\star$ lorsqu'il existe une constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ telle que :

$$\forall R \in \mathcal{D}, \forall x \in A : x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x.$$

Exemple 1.3.2. *La correspondance de choix C associée à la majorité simple est dans la* ***famille*** $\phi^\star$.

Définition 1.3.7

Barberà et al. (1991)
Une correspondance de choix social φ est un **mécanisme de vote par comités** si :
$\forall x \in A$, $\exists \mathbf{C}_x \subseteq \mathcal{P}(N)$
(i) $\emptyset \notin \mathbf{C}_x$;
(ii) $\forall \mathcal{C}_0 \in \mathbf{C}_x$, $\forall \mathcal{C}_0' \supseteq \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_0' \in \mathbf{C}_x$;
(iii) $\forall R \in \mathcal{D}$, $x \in \varphi(R) \Leftrightarrow N_x^G(R) \in \mathbf{C}_x$.

On dit alors que φ est associée à $(\mathbf{C}_x)_{x\in A}$.

Remarque 1.3.2. *Biung-Ghi (2003)*
Tout mécanisme de vote par comités associé à $(\mathbf{C}_x)_{x\in A}$ est une règle dans la famille $\phi^\star$ en considérant la constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ définie comme suit :

$$\forall x \in A, \mathcal{C}^x = \{(C_1, C_2) \in \mathcal{N},\ C_1 \in \mathbf{C}^x,\ C_2 \subseteq N \setminus C_1\}.$$

Exemple 1.3.3. *La correspondance de choix social C associée à la majorité simple est un mécanisme de vote par comités associé à $(\mathbf{C}_x)_{x\in A}$ défini comme suit :*

$$\forall x \in A, \forall C_0 \subseteq N,\ C_0 \in \mathbf{C}_x \Leftrightarrow \mid C_0 \mid \geq \frac{(\mid N \mid +1)}{2}\}.$$

Proposition 1.3.1

Sur le domaine séparable linéaire, il y a équivalence entre :

1. φ est un mécanisme de vote par comités
2. φ est une correspondance de choix social associée à une constitution de choix P-unanime.

***Preuve*.** $1) \Rightarrow 2)$ On sait déjà que toute correspondance de choix par comités associée à $(\mathbf{C}^x)_{x\in A}$ est une règle dans la famille $\phi^\star$. Le caractère non vide de $\mathcal{C}^x$ découle du fait que $\mathbf{C}^x \neq \emptyset$. D'après (i) de la définition précédente, $\emptyset \notin \mathbf{C}^x \Rightarrow (\emptyset, N) \notin \mathcal{C}^x$.
De plus, comme $\mathbf{C}^x \neq \emptyset$, soit $N_1 \in \mathbf{C}^x$, on a $N_1 \subseteq N$ et d'après (ii), $N \in \mathbf{C}^x$ et il suit que $(N, \emptyset) \in \mathcal{C}^x$. D'où le profil satisfait la P-unanimité.
$2) \Rightarrow 1)$ Considérons une règle dans la famille $\phi^\star$ associée une constitution de choix satisfaisant la P-unanimité.
La constitution de choix étant P-unanime, la condition (i) est satisfaite. La règle satisfait la condition (ii) car toute constitution de choix dans la famille $\phi^\star$ satisfait la monotonie.
Finalement, la règle étant dans la famille $\phi^\star$, on a :

$$\forall R \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in A,\, x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x$$

or la constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ considérée est :

$$\forall x \in A, \mathcal{C}^x = \{(C_1, C_2) \in \mathcal{N}, C_1 \in \mathbf{C}^x, C_2 \subseteq N \setminus C_1\}.$$

On a alors $x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x \Leftrightarrow N_x^G(R) \in \mathbf{C}^x$.
Donc la condition (iii) est satisfaite. ■

Définition 1.3.8

Pour tout $i \in N$, $\forall R_i \in \mathcal{D}_i$ et $\forall \mathcal{X} \subseteq A$, soit $Max[R_i : \mathcal{X}]$ l'ensemble de toutes les meilleures options pour R_i dans $\mathcal{X}$.
Une règle φ est **dictatoriale** si $\exists i \in N$ tel que $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{D}$, $\varphi(\mathcal{R}) \in Max[R_i : 2^A]$.
On dit alors que i est un **dictateur** suivant φ.

Proposition 1.3.2

Une règle dans la famille $\phi^\star$ est dictatoriale si et seulement si sa constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ a la propriété suivante :

$$\exists i \in N \text{ tel que } \forall x \in A, (i, N \setminus i) \in \mathcal{C}^x \text{ et } (N \setminus i; i) \notin \mathcal{C}^x.$$

Preuve.
$\Rightarrow$) Soit φ une règle en famille $\phi^\star$ dictatoriale.
φ étant une règle en famille $\phi^\star$, il existe une constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ tel que :
$\forall R \in \mathcal{D}$ et $\forall x \in A$, $x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x$.
φ étant dictatoriale, $\exists i \in N$ tel que $\forall R \in \mathcal{D}$, $\varphi(R) \in Max[R_i : 2^A]$. Ainsi,
$\forall x \in A$, $x \in \varphi(R) \in Max[R_i : 2^A]$ et donc $x \in Max[R_i : 2^A]$ et puisque $Max[R_i : 2^A] \subseteq N_x^G(R)$ c'est-à-dire, x est une meilleure option pour i dans 2^A et donc $(i, N \setminus i) \in \mathcal{C}^x$.
Considérons un profil $\overline{R}$ tel que $N_x^G(R) = N \setminus i$ et $N_x^B(R) = i$ alors $x \notin \varphi(\overline{R})$ et donc $(N_x^G(\overline{R}), N_x^B(\overline{R})) \in \mathcal{C}^x$ c'est-à-dire $(N \setminus i; i) \notin \mathcal{C}^x$.
$\Leftarrow$) Soit φ une règle dans la famille $\phi^\star$ satisfaisant la propriété $\forall x \in A$, $(i, N \setminus i) \in \mathcal{C}^x$ et $(N \setminus i; i) \notin \mathcal{C}^x$.
Soit $x \in A$ tel que $x \in \varphi(R)$.
Puisque $x \in \varphi(R)$ alors $(N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x$ or $\exists i \in N$ tel que $(i, N \setminus i) \in \mathcal{C}^x$ donc $i \in N_x^G(R)$ c'est-à-dire, pour i, x est une meilleure alternative.
Donc $\varphi(R) \in Max[R_i : 2^A]$. ■

Corollaire 1.3.1. *Toute règle dictatoriale sur S n'est pas nécessairement dans la famille $\phi^\star$.*

Preuve. Posons $A = \{a, b, c\}$ et considérons $i_0 \in N$.
Soit φ la règle de vote telle que $\varphi(R) = G(R_{i_0}) \cup I(R_{i_0})$ pour tout $R \in S$.
Par définition, φ est dictatoriale et i_0 est un dictateur. Considérons le profil R tel que :
$(G(R_{i_0}), B(R_{i_0})) = (\{a\}, \{c\})$ et $\forall i \in N \setminus i_0$, $(G(R_i), B(R_i)) = (\{b, c\}, \{a\})$.
Par définition, on a alors $\varphi(R) = \{a, b\}$. Supposons que φ est dans la famille $\phi^\star$, alors il existe une constitution de choix $C = (C^x)_{x\in A}$ telle que φ soit associée à C. Or,
$(N_b^G(R), N_b^B(R)) = (N \setminus i_0, \emptyset) \notin \mathcal{C}^b$ et donc $b \notin \varphi(R)$ ce qui est contradictoire. ■

Définition 1.3.9

Soit π une permutation sur N et $R \in \mathcal{D}$.

Soit $M^1(R,\pi) \equiv Max[R_{\pi(1)} : 2^A], \forall k \in \{2,3,..,n\}$,

considérons la relation $M^k(R,\pi) \equiv Max[R_{\pi(k)} : M^{k-1}(R,\pi)]$

Une règle φ est une **dictature hiérarchisée** par rapport à π si

$$\forall R \in \mathcal{D} \text{ et } k \in N, \varphi(R) \in M^k(R,\pi).$$

De façon précise, une dictature hiérarchisée est une correspondance de choix social pour laquelle une priorité sur l'ordre des agents est donnée de sorte qu'en tout profil :

- le premier agent, encore considéré comme le dictateur sélectionne ses meilleures options et élimine les autres ;
- le second agent sélectionne ses meilleures options parmi les options sélectionnées par le premier agent et élimine les autres ;
- ainsi de suite jusqu'au dernier agent qui sélectionne ses meilleures options parmi les options en cours et elle sera considérée comme décision finale.

Remarque 1.3.3. *La constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ d'une dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^\star$ associée à π est telle que $\forall x \in A$ et pour tout $C_1, C_2 \subseteq \mathcal{N}$,*
$(C_1,C_2) \in \mathcal{C}^x \Leftrightarrow \exists k \in \{1,...,n\}$ tel que $\pi(k) \in C_1$ et $\forall k' < k, \pi(k') \notin C_1 \cup C_2$.

Corollaire 1.3.2. *Toute dictature hiérarchisée sur S n'est pas nécessairement dans la famille $\phi^\star$.*

Preuve. Soit π une permutation de N.
Posons $A = \{a,b,c\}$ et considérons $i_0 \in N$.
Soit φ la règle de vote telle que $\varphi(R) = \underset{k\in N}{\cup}[G(R_{\pi(k)}) \cup I(R_{\pi(k)})]$ pour tout $R \in S$. Par définition, φ est une dictature hiérarchisée. On prend $\pi = Id_N$.
Considérons le profil R tel que :
$\forall i \in N, (G(R_i), B(R_i)) = (\{a\},\{c\}$.
Par définition, on a alors $\varphi(R) = \{a,b\}$. Supposons que φ est dans la famille $\phi^\star$, alors il existe une constitution de choix $C = (C^x)_{x\in A}$ telle que φ soit associée à C. Or,
$(N_a^G(R), N_a^B(R)) = (N,\emptyset) \in \mathcal{C}^a$;

$(N_b^G(R), N_b^B(R)) = (\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{C}^b$

cela entraine donc que :

$\exists k \in \{1, ..., n\}$ tel que $\pi(k) \in \emptyset$ et pour $(N, \emptyset) \in \mathcal{C}^a$ cela impliquerait $\exists k \in \{1, ..., n\}$ tel que $\forall k' < k, \pi(k') = k' \notin N$.

Ce qui est impossible. On conclut alors que la correspondance φ considérée n'est pas dans la famille $\phi^\star$. ∎

1.3.3. Correspondances à score local.

La famille $\phi^\star$ définie précédemment est un sous ensemble d'une large famille de règles de votes dans laquelle les décisions sont réalisées selon la procédure suivante :

D'abord, pour chaque option, l'ensemble des agents en faveur de la sélection de celle-ci et l'ensemble des agents contre sa sélection sont identifiés ;

Ensuite, sur la base de ces 2 groupes, le score de l'option est déterminé par une fonction score.

Puis, étant donné la liste de scores pour les options, une comparaison est faite par rapport à un score seuil requis ;

Finalement, une option est **acceptée** si et seulement si son score est supérieur ou égal au score seuil.

Définition 1.3.10

Une **fonction de score** associée à $x \in A$ est une application $S_x : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante :

$\forall (C_1, C_2), (C_1', C_2') \in \mathcal{C}^x$, si $C_1 \subseteq C_1'$ et $C_2 \supseteq C_2'$ alors $S_x(C_1, C_2) \leq S_x(C_1', C_2')$.

Intuitivement, pour une fonction de score, si le nombre de décideurs en faveur d'une option augmente tandis que le nombre décideurs qui s'opposent diminue, alors le score de l'option augmente.

Définition 1.3.11

Une **fonction de score seuil** est une application $\overline{S} : \mathbb{R}^{|A|} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante :

$\forall (s_x)_{x\in A}$, $(s_x')_{x\in A} \in \mathbb{R}^{|A|}$, si $(s_x)_{x\in A} \leq (s_x')_{x\in A}$ alors $\overline{S}((s_x)_{x\in A}) \leq \overline{S}((s_x')_{x\in A})$.

Une fonction de score seuil attribue à chaque profil de scores (un score par candidat) un score seuil de sélection. Il est requis en plus que, lors du passage du profil de scores $(s_x)_{x\in A}$ à $(s'_x)_{x\in A}$, le score seuil ne doit pas baisser tant qu'aucune option n'ait vu son score diminuer de $(s_x)_{x\in A}$ à $(s'_x)_{x\in A}$.

Définition 1.3.12

Une règle φ est une **règle à score** s'il existe une collection $(s_x)_{x\in A}$ de fonctions score S_x et une fonction de score seuil $\overline{S}$ telles que $\forall R \in \mathcal{D}$, $\forall x \in A$:

$$x \in \varphi(R) \Leftrightarrow S_x(N_x^G(R), N_x^B(R)) \geq \overline{S}((s_x)_{x\in A}), R \text{ où pour } A = \{x_1, x_2, ..., x_m\},$$
$$\overline{S}((s_x)_{x\in A}), R)=$$
$$\overline{S}(S_{x_1}(N_{x_1}^G(R), N_{x_1}^B(R)), S_{x_2}(N_{x_2}^G(R), N_{x_2}^B(R)), ..., S_{x_m}(N_{x_m}^G(R), N_{x_m}^B(R))).$$

On dit alors que φ est associée à la collection de fonctions scores $(S_x)_{x\in A}$ et à la fonction de score seuil $\overline{S}$.

Une règle à score nécessite donc la donnée d'une collection $(S_x)_{x\in A}$ de fonctions de scores et une fonction de score seuil . Étant donnés un profil R et une option x, x est choisie si et seulement si le score de x pour la configuration $(N_x^G(R), N_x^B(R))$ est supérieure ou égale au score seuil de la collection de tous les scores obtenus par les candidats au profil R.

La pluralité moyenne locale formalise la règle pour laquelle une option est sélectionnée s'il y a plus d'agents en faveur de sa sélection que contre elle. Formellement, on a :

Définition 1.3.13

La pluralité moyenne locale notée par φ^{pl} est une règle qui est associée à la collection de fonctions de scores $(S_x)_{x\in A}$ et à la fonction score seuil $\overline{S}$ définies par :

- $\forall x \in A, \forall (C_1, C_2) \in \mathcal{N}, S_x(C_1, C_2) =\mid C_1 \mid - \mid C_2 \mid -1$;
- $\forall (s_x)_{x\in A} \in \mathbb{R}^{|A|}, \overline{S}((s_x)_{x\in A}) = max\{\sum_{x\in A} \dfrac{s_x}{\mid A \mid}, 0\}$.

Proposition 1.3.3

Toute règle dans la famille $\phi^\star$ associée à $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$ est une règle à score associée à la collection $(S_x)_{x\in A}$ de fonctions scores et à la fonction score seuil définies par :

• $\forall x \in A, \forall (C_1, C_2) \in \mathcal{N}, S_x(C_1, C_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^x \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$,

• $\forall (s_x)_{x\in A} \in \mathbb{R}^{|A|}, \overline{S}((s_x)_{x\in A}) = 1.$

Preuve. Soit φ une règle dans la famille $\phi^\star$ associée à la collection de fonctions scores $(S_x)_{x\in A}$ tels que $\forall x \in A$ et $\forall (C_1, C_2) \in \mathcal{N}$, $S_x(C_1, C_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^x \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

On veut montrer que $x \in \varphi(R) \Leftrightarrow S_x(N_x^G(R), N_x^B(R)) \geq \overline{S}((S_x(N_x^G(R), N_x^B(R)))_{x\in A})$.

Puisque φ une règle dans la famille $\phi^\star$, alors

$$\forall R \in \mathcal{D}, \forall x \in A : x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x.$$

On a alors :

$$x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x.$$
$$\Leftrightarrow S_x(N_x^G(R), N_x^B(R)) = 1 \geq 1 = \overline{S}((S_x(N_x^G(R), N_x^B(R)))_{x\in A}).$$

D'où le résultat. ■

Exemple 1.3.4. *Considérons $N = \{1,2,3\}$ et $A = \{a,b,c\}$ et un profil de préférences $R = (R_1, R_2, R_3)$ tels que :*

$$(G(R_1); B(R_1)) = (\{a,b\}; \{c\});$$
$$(G(R_2); B(R_2)) = (\{a,c\}; \{b\});$$
$$(G(R_3); B(R_3)) = (\{a,b\}; \{c\})$$

Considérons la pluralité moyenne locale φ^{pl} comme règle :

Le nombre de décideurs favorables pour l'option a est 3, le nombre de décideurs non favorables à l'option a est 0 et donc le score de a est $3-0-1=2$. Le nombre de décideurs favorables pour l'option b est 2, le nombre de décideurs non favorables à l'option b est 1 et donc le score de b est $2-1-1=0$. Le nombre de décideurs favorables pour l'option c est 1, le nombre de décideurs non favorables à l'option c est 2 et donc le score de c est $1-2-1=-2$. Le score seuil est alors $Max(\frac{2+0-2}{3};0) = 0$. Ainsi, les scores de a et b étant supérieurs au score seuil, on a : $\varphi^{pl}(R_1, R_2, R_3) = \{a;b\}$.

Remarque 1.3.4. *Notons que pour toute règle à score, le score d'une option x pour un profil de préférence R dépend de $(N_x^G(R), N_x^B(R))$. Ainsi, les autres informations sur $(G(R_i), B(R_i))_{i\in N}$ n'influencent pas le score de x. En particulier, pour les règles en famille $\phi^\star$, la décision sur x ne porte pas sur le score, on s'appuie uniquement sur $(N_x^G(R), N_x^B(R))$.*

Cependant, il existe une variété d'autres types de règle dont la suivante :

Définition 1.3.14

La pluralité pondérée notée par $\varphi^{plu-pond}$ est une règle de vote telle que :
$\forall R \in \mathcal{D}, \forall x \in A$, $x \in \varphi^{plu-pond}(R) \Leftrightarrow \sum_{i\in N_x^G(R)} \frac{1}{\mid G(R_i)\mid} \geq \sum_{i\in N_x^B(R)} \frac{1}{\mid B(R_i)\mid}$
où la sommation sur $N_x^G(R)$ (respectivement $N_x^B(R)$) est mise à 0 si $N_x^G(R) = \emptyset$ (respectivement $N_x^B(R) = \emptyset$).

De façon intuitive, pour la décision sur x, le vote favorable par un agent i en faveur de x est pondérée par $\frac{1}{\mid G(R_i)\mid}$ et le vote défavorable par un agent i contre x est pondérée par $\frac{1}{\mid B(R_i)\mid}$. L'option x est donc acceptée si la somme pondérée des votes en sa faveur est supérieure à la somme pondérée des votes contre elle.
Plus précisément, pour savoir si l'option x est choisie, on dénombre d'abord le nombre d'agents l'ayant choisi comme désirable ; Ensuite, on trouve le nombre d'options désirables pour chacun des agents pour qui l'option x est désirable, la somme pondérée des votes en faveur de l'alternative x est donc la somme des inverses de ces nombres.
De même, en dénombrant le nombre d'agents l'ayant choisi comme option indésirable ; on trouve ensuite le nombre d'options indésirables pour chacun des agents pour qui l'option x est indésirable, la somme pondérée des votes contre l'option x est donc la somme des inverses de ces nombres. L'option x est choisie si la somme pondérée des votes en sa faveur est supérieure à la somme pondérée des votes contre elle.

Exemple 1.3.5. *Considérons un profil de préférences $R = (R_1, R_2, R_3)$ tel que :*

$$(G(R_1); B(R_1)) = (\{a, b\}; \{c\})\,;$$
$$(G(R_2); B(R_2)) = (\{a, b, c\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R_3); B(R_3)) = (\{a\}; \{b, c\}).$$

Pour l'alternative a*, la somme pondérée des votes favorables est* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{11}{2}$ *qui est supérieure à la somme des votes défavorables qui est* 0 *donc l'option* a *est choisie.*
Pour l'alternative b*, la somme pondérée des votes favorables est* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ *qui est supérieure à la somme des votes défavorables qui est* $\frac{1}{2}$ *donc l'option* b *est choisie.*
Pour l'alternative c*, la somme pondérée des votes favorables est* $\frac{1}{3}$ *qui est inférieure à la somme des votes défavorables qui est* $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ *donc l'option* c *n'est pas choisie.*
On conclut que $\varphi^{pl-pond}(R_1, R_2, R_3) = \{a; b\}$.

Chapitre Deux

NON MANIPULABILITÉ DES CORRESPONDANCES DE CHOIX SOCIAL EN DOMAINES RESTREINTS

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats obtenus par Biung-Ghi parmi lesquels des caractérisations des règles de décision et des résultats sur la restriction des domaines. Nous présentons les propriétés que satisfont les règles de décision qui nous intéressent, ainsi que des caractérisations des règles vérifiant certaines combinaisons de propriétés.

2.1. Règles de décision non manipulables, monotones et indépendantes

L'étude de la manipulation consiste, pour une règle donnée, de vérifier s'il est profitable ou non d'être sincère. Concrètement :

Définition 2.1.1

Une correspondance de choix social satisfait la propriété de **non manipulabilité** lorsque :

$$\forall R \in \mathcal{D}, \forall i \in N, \forall R' \in \mathcal{D}, \varphi(R_i, R_{-i})\ R_i\ \varphi(R'_i, R_{-i}).$$

Une règle qui ne satisfait pas la non manipulabilité est dite manipulable.

Cette propriété traduit le fait que modifier sa préférence ne doit jamais profiter indépendamment des préférences des autres. Dans ce cas, exprimer son classement sincère des choses est la meilleure action à faire.

Proposition 2.1.1

En présence d'au moins 3 options et au moins 3 votants, la pluralité moyenne locale sur S est manipulable.

Preuve. Considérons $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ et $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$ et un profil de préférences $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ tels que :

$$(G(R_1); B(R_1)) = (A \setminus \{a_3\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R_2); B(R_2)) = (\{a_1, a_3\}; A \setminus \{a_1, a_3\})\,;$$
$$(G(R_3); B(R_3)) = (A \setminus \{a_3\}; \{a_3\})\,; (G(R_i); B(R_i)) = (\emptyset; \emptyset), \forall i \in \{4, 5, ..., n\}$$

Alors, le score de a_1 est 2, le score de a_2 est 0, le score de a_3 est -1 et $\forall i \in \{4, 5, ..., n\}$, le score de a_i est 0. Ainsi, le score seuil est $\frac{1}{n}$ et ainsi seule l'option a_1 est choisie alors $\varphi^{pl}(R_1, R_2, ..., R_n) = \{a_1\}$. Si nous supposons maintenant que l'agent 1 modifie sa préférence de R_1 à R'_1 telle que $(G(R'_1); B(R'_1)) = (A \setminus \{a_3\}; a_3)$. Alors le score de c diminue à -2 ce qui donne le nouveau score seuil qui sera de 0 et puisque les scores des autres options restes inchangés, on a alors $\varphi^{pl}(R'_1, R_2, R_3) = A \setminus \{a_3\}$. Puisque $A \setminus \{a_3\} P_1 \{a_1\}$. L'agent 1 profite donc de la modification de sa préférence de R_1 à R'_1. On conclut donc que la règle φ est manipulable. ■

Dans la suite, on suppose que les règles satisfont la propriété suivante :

Définition 2.1.2

Une règle φ respecte les **avis essentiels** si

$$\forall R, R' \in \mathcal{D}, \text{ si } \forall i \in N, G(R_i) = G(R'_i) \text{ et } B(R_i) = B(R'_i) \text{ alors } \varphi(R) = \varphi(R').$$

Nous dirons simplement φ vérifie (RAE).

Le respect des votes essentiels stipule que le résultat collectif ne change pas tant que le statut d'au moins un candidat n'a pas changé entre désirable, indésirable et neutre pour au moins un individu.

2.1.1. Correspondances de choix social monotones

Définition 2.1.3

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété de **monotonie globale** lorsque :

$$\forall R, R' \in \mathcal{D}, \text{ si } \forall i \in N \text{ , } G(R_i) \subseteq G(R'_i), B(R_i) \supseteq B(R'_i) \text{ alors } \varphi(R) \subseteq \varphi(R').$$

La monotonie globale exige que, pour une option x choisie, si l'ensemble des individus qui sont pour la sélection de x augmente, tandis que l'ensemble des individus qui sont contre la sélection de x diminue éventuellement, l'option x doit être choisie de nouveau.

Exemple 2.1.1. *Considérons $A = \{a, b, c\}$ et $N = \{1, 2\}$.*
$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = (R_0, R'_0, R''_0)$ *avec*

$$(G(R_0); B(R_0)) = (\{a\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R'_0); B(R'_0)) = (\{b\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R''_0); B(R''_0)) = (\{a\}; \{b\}).$$

Soit $\varphi^\star$ la règle définie dans la table suivante où chaque cellule représente le résultat pour le profil composé des deux décideurs ou votants.

	R_0	R'_0	R''_0
R_0	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$
R'_0	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
R''_0	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$

On remarque que l'ensemble des options désirables croit tandis que l'ensemble des options indésirables diminue uniquement lorsque la préférence passe de R''_0 à R_0 et pour chacun de ces passages, l'ensemble des élus croit.
On conclut que $\varphi^\star$ satisfait la monotonie globale.

Définition 2.1.4

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété de **monotonie objet par objet** si :

$\forall x \in A$ et $\forall R, R' \in \mathcal{D}$, si $N_x^G(R) \subseteq N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) \supseteq N_x^B(R')$, $x \in \varphi(R) \Rightarrow x \in \varphi(R')$.

Nous dirons que φ est monotone objet par objet.

Exemple 2.1.2. *En considérant l'exemple 2.1.1, le mécanisme $\varphi^\star$ ne vérifie pas la monotonie objet par objet. En effet, la table nous dit que $b \in \varphi^\star(R_0, R_0)$.*

$$\text{\textit{On a :} } N_b^G(R_0, R_0) = \emptyset \subseteq \{1, 2\} = N_b^G(R'_0, R'_0)$$
$$N_b^B(R_0, R_0) = \emptyset \supseteq \emptyset = N_b^B(R'_0, R'_0)$$

mais $b \notin \varphi^\star(R'_0, R'_0)$. $\varphi^\star$ ne satisfait donc pas la monotonie objet par objet.

2.1.2. Correspondances de choix social indépendantes

Pour tout $R_i \in \mathcal{S}$ et $x \in A$; soit $R_i \mid_{\{\{x\},\emptyset\}}$ la restriction de R_i à $\{\{x\}, \emptyset\}$.

Posons $R \mid_{\{\{x\},\emptyset\}} \equiv (R_i \mid_{\{\{x\},\emptyset\}})_{i \in N}$.

Définition 2.1.5

Une correspondance de choix social satisfait la propriété **d'indépendance** ou **d'indépendance globale** lorsque :

$$\forall x \in A, \forall R, R' \in \mathcal{D}, \text{ si } R \mid_{\{\{x\},\emptyset\}} = R' \mid_{\{\{x\},\emptyset\}}, \text{ alors } x \in \varphi(R) \Leftrightarrow x \in \varphi(R').$$

Nous dirons que φ est globalement indépendante.

L'indépendance globale exige que la décision sur chaque option doit dépendre uniquement du jugement sur cette option selon qu'elle est désirable, indésirable ou neutre.

Définition 2.1.6

Une correspondance de choix social satisfait la propriété d' **indépendance vis-à-vis des candidats neutres** lorsque :

$\forall i \in N, \forall x \in A, \forall R_i, R'_i \in \mathcal{D}$ et $R_{-i} \in \prod_{j\neq i} \mathcal{D}_j$, si x est neutre pour R_i et R'_i alors

$$x \in \varphi(R_i, R_{-i}) \Leftrightarrow x \in \varphi(R'_i, R_{-i}).$$

Nous dirons que φ est indépendante vis-à-vis des candidats neutres..

Lorsqu'un individu change unilatéralement ses préférences, le statut de toute option qui reste neutre dans ce passage ne change pas : soit elle est sélectionnée dans les deux profils soit elle n'est sélectionnée pour aucun des deux profils.

Exemple 2.1.3. *Biung-Ghi (2005)*

Considérons la pluralité moyenne locale Posons $N = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a, b, c\}$ *et un profil de préférences* $R = (R_1, R_2, R_3)$ *tels que :*

$$(G(R_1); B(R_1)) = (\{a, b\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R_2); B(R_2)) = (\{a, c\}; \{b\})\,;$$
$$(G(R_3); B(R_3)) = (\{a, b, c\}; \emptyset).$$

Alors, $\varphi^{pl}(R_1, R_2, R_3) = \{a\}$*. Soit* R'_1 *tel que* $(G(R'_1); B(R'_1)) = (\{a\}; \{b\})$.
Alors, $\varphi^{pl}(R'_1, R_2, R_3) = \{a, c\}$*. Puisque* c *est neutre pour* R_1 *et* R'_1 *. Cela montre une violation de l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres.*

2.1.3. Première caractérisation de Biung-Ghi

Ici, les règles qui sont monotones et indépendantes sont caractérisées.

Proposition 2.1.2

Une règle satisfait la monotonie globale et l'indépendance globale si et seulement si elle est dans la famille $\phi^\star$.

Pour prouver la proposition 2.1.2, nous montrons que la combinaison de la monotonie globale et l'indépendance globale est équivalente à la propriété de monotonie objet par objet.
Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.1.1

$\forall R, R' \in \mathcal{D}$ et $\forall x \in A$, si $N_x^G(R) \subseteq N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) \supseteq N_x^B(R')$ alors il existe $\overline{R} \in \mathcal{D}$ telle que $\overline{R}|_{\{\{x\},\emptyset\}} \equiv R'|_{\{\{x\},\emptyset\}}$ et $\forall i \in N$, $G(\overline{R}_i) \supseteq G(R_i)$ et $B(\overline{R}_i) \subseteq B(R_i)$.

Preuve. Soient $R, R' \in \mathcal{D}$ et $x \in A$ tels que $N_x^G(R) \subseteq N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) \supseteq N_x^B(R')$. Puisque $N_x^G(R) \subseteq N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) \supseteq N_x^B(R')$, alors N est subdivisé en les 5 sous-ensembles disjoints suivants, $N_x^G(R)$, $N_x^G(R') \setminus N_x^G(R)$, $N_x^B(R')$, $N_x^B(R) \setminus (N_x^B(R') \cup N_x^G(R'))$,
et $N \setminus (N_x^G(R') \cup N_x^B(R))$.
$\forall i \in N_x^G(R) \cup N_x^B(R') \cup [N \setminus (N_x^G(R') \cup N_x^B(R))]$, on considère $\overline{R_i} = R_i$.
D'après la propriété (A_2), $\forall i \in N_x^G(R') \setminus N_x^G(R)$, il existe $\overline{R}_i \in \mathcal{D}_i$ telle que
$G(\overline{R}_i) \supseteq G(R_i) \cup \{x\}$ et $B(\overline{R}_i) \subseteq B(R_i) \setminus \{x\}$.
D'après la propriété (A_3), $\forall i \in N_x^B(R) \setminus N_x^B(R') \cup N_x^G(R')$, il existe $\overline{R}_i \in \mathcal{D}_i$ telle que
$G(\overline{R}_i) \supseteq G(R_i)$, $B(\overline{R}_i) \subseteq B(R_i)$, et $x \notin G(\overline{R}_i) \cup B(\overline{R}_i)$. Ainsi, on a
$\forall i \in N$, $G(\overline{R}_i) \supseteq G(R_i)$, $B(\overline{R}_i) \subseteq B(R_i)$, et $\overline{R}_i \mid_{\{\{x\},\emptyset\}} \equiv R'_i \mid_{\{\{x\},\emptyset\}}$. ■

Lemme 2.1.2

Une règle satisfait la monotonie globale et l'indépendance globale si et seulement si elle satisfait la monotonie objet par objet.

Preuve. $\Rightarrow$) Soit $\varphi : \mathcal{D} \to 2^A$ une règle satisfaisant la monotonie globale et l'indépendance globale. Soit $x \in A$ et $R, R' \in \mathcal{D}$ tel que $N_x^G(R) \subseteq N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) \supseteq N_x^B(R')$, et $x \in \varphi(R)$. D'après le lemme 2.1.1, il existe $\overline{R}$ telle que $\overline{R} \mid_{\{\{x\},\emptyset} \equiv R \mid_{\{\{x\},\emptyset}$ et $\forall i \in N$, $G(\overline{R}_i) \supseteq G(R_i)$, $B(\overline{R}_i) \subseteq B(R_i)$. Alors, par la monotonie globale, $x \in \varphi(R) \Rightarrow x \in \varphi(\overline{R})$.
Puisque $\overline{R}_i \mid_{\{\{x\},\emptyset} = R'_i \mid_{\{\{x\},\emptyset}$, alors par l'indépendance globale, $x \in \varphi(R')$.
$\Leftarrow$) Considérons une règle satisfaisant la monotonie objet par objet. On veut montrer qu'elle satisfait la monotonie globale et l'indépendance globale.
Soit $R, R' \in \mathcal{D}$, supposons que $\forall i \in N$, $G(R_i) \subseteq G(R'_i)$, $B(R_i) \supseteq B(R'_i)$ et montrons que $\varphi(R) \subseteq \varphi(R')$. Pour cela, soit $x \in \varphi(R)$. Comme $\forall i \in N$, $G(R_i) \subseteq G(R'_i)$, $B(R_i) \supseteq B(R'_i)$ alors $N_x^G(R) \subseteq N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) \supseteq N_x^B(R')$ et vu que la règle est monotone objet par objet, on a $x \in \varphi(R')$.

Soit $R, R' \in \mathcal{D}$ et $x \in A$, avec $R\mid_{\{\{x\},\emptyset\}} = R'\mid_{\{\{x\},\emptyset\}}$, on veut montrer que $\varphi(R) = \varphi(R')$.
D'après ce qui précède, on a déjà $\varphi(R) \subseteq \varphi(R')$. Reste à montrer que $\varphi(R') = \varphi(R)$.
Soit $x \in \varphi(R')$, puisque $R\mid_{\{\{x\},\emptyset\}} = R'\mid_{\{\{x\},\emptyset\}}$ alors $N_x^G(R) = N_x^G(R')$ et $N_x^B(R) = N_x^B(R')$.
Ce qui entraine donc $N_x^G(R') \subseteq N_x^G(R)$ et $N_x^B(R') \supseteq N_x^B(R)$ et vu que la règle est monotone objet par objet, on a $x \in \varphi(R)$. D'où le résultat.

■

Lemme 2.1.3

Soit φ une règle de vote non manipulable. Soit $R \in \mathcal{D}$, $i \in N$ et $x \in A$. Alors si $x \in \varphi(R)$ alors $\forall R_i' \in \mathcal{D}_i : x \in G(R_i') \Rightarrow x \in \varphi(R_i', R_{-i})$.

***Preuve*.** Soit φ une règle de vote non manipulable et satisfaisant (RAE) . Soit $i \in N$ et $x \in A$.
Soit $R \in \mathcal{D}$ et $R_i' \in \mathcal{D}_i$ tel que $x \in \varphi(R)$ et $x \in G(R_i')$.
Par R_1, il existe $R_i^\star \in \mathcal{D}_i$ telle que $(G(R_i^\star), B(R_i^\star)) \equiv (G(R_i^{'}), B(R_i^{'}))$ et $\forall X, X' \subseteq A \setminus x$, $X \cup x P_i^\star X'$. Alors, par (RAE), $\varphi(R_i^\star, R_{-i}) = \varphi(R_i^{'}, R_{-i})$. Et ensuite, par la non manipulabilité, $x \in \varphi(R_i^\star, R_{-i})$ par conséquent, $x \in \varphi(R_i^{'}, R_{-i})$. ■

Lemme 2.1.4

Soit φ une règle de vote non manipulable. Soit $R \in \mathcal{D}$, $i \in N$, et $x \in A$. Alors si $x \notin \varphi(R)$ alors $\forall R_i' \in \mathcal{D}_i : x \in B(R_i') \Rightarrow x \notin \varphi(R_i', R_{-i})$.

***Preuve*.** Soit une règle de vote non manipulable et satisfaisant (RAE). Soit $i \in N$ et $x \in A$.
Soit $R \in \mathcal{D}$ et $R_i' \in \mathcal{D}_i$ tel que $x \notin \varphi(R)$ et $x \in B(R_i')$.
Par R_2, il existe $R_i^\star \in \mathcal{D}_i$ tel que $(G(R_i^\star), B(R_i^\star)) \equiv (G(R_i^{'}), B(R_i^{'}))$ et $\forall X \subseteq A \setminus x$, $X P_i^\star X \cup x$. Alors, par (RAE), $\varphi(R_i^\star, R_{-i}) = \varphi(R_i^{'}, R_{-i})$. Et ensuite, par la non manipulabilité, $x \notin \varphi(R_i^\star, R_{-i})$ par conséquent, $x \notin \varphi(R_i^{'}, R_{-i})$. ■

Lemme 2.1.5

Toute règle de vote satisfaisant l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la non manipulabilité satisfait la monotonie globale.

Preuve. Soit φ une règle de vote non manipulable et satisfaisant l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et (RAE). Soient $R, R' \in \mathcal{D}$ tel que $\forall i \in N$, $G(R_i) \subseteq G'(R_i)$ et $B(R_i) \supseteq B'(R_i)$. Soit $x \in \varphi(R)$ alors

- si $x \in G(R_1)$, on a puisque $x \in G'(R_1)$, le lemme 2.1.3 entraine $x \in \varphi(R'_1, R_{-1})$;
- si $x \in B(R_1)$, alors le lemme 2.1.4 entraine $x \in \varphi(R'_1, R_{-1})$;
- si $x \notin G(R_1) \cup B(R_1)$, alors on a 2 cas : soit $x \in G(R'_1)$ soit $x \notin G(R'_1) \cup B(R'_1)$;
- si $x \in G(R'_1)$, alors par le lemme 2.1.3, $x \in \varphi(R'_1, R_{-1})$;
- si $x \notin G(R'_1) \cup B(R'_1)$, alors par l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres, $x \in \varphi(R'_1, R_{-1})$; et par conséquent, $\varphi(R) \subseteq \varphi(R'_1, R_{-1})$.

En appliquant le même raisonnement successivement en modifiant les préférences des agents, on montre que $\varphi(R) \subseteq \varphi(R')$. ■

Lemme 2.1.6

Toute règle de vote satisfaisant l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la non manipulabilité satisfait la propriété d'indépendance globale.

Preuve. Soit φ une règle de vote satisfaisant l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres, (RAE) et la non manipulabilité.
Soit $R, R' \in \mathcal{D}$ tel que $R|_{\{x,\emptyset\}} \equiv R|_{\{x,\emptyset\}}$. Nous avons juste besoin de montrer que $x \in \varphi(R) \Rightarrow x \in \varphi(R')$.
Soit $S_1 = N_x^G(R)(= N_x^G(R'))$, $S_2 = N_x^B(R)(= N_x^B(R'))$ et $S_3 = N \setminus (S_1 \cup S_2)$.
$\forall i \in S_1$, d'après le lemme 2.1.3, $x \in \varphi(R'_i, R_{-i})$. Si on applique le même raisonnement en modifiant les préférences des agents dans S_1 successivement, on obtient alors $x \in \varphi(R'_{S_1}, R_{-S_1})$.
Soit $\overline{R} \equiv (R'_{S_1}, R_{-S_1})$.
$\forall i \in S_2$, d'après le lemme 2.1.4, $x \in \varphi(R'_i, \overline{R}_{-i})$. Si on applique le même raisonnement en modifiant les préférences des agents dans S_2 successivement, on obtient alors $x \in \varphi(R'_{S_2}, \overline{R}_{-S_2})$.
Soit $R^\star \equiv (R'_{S_2}, \overline{R}_{-S_2})$.
$\forall i \in S_3$, l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres, $x \in \varphi(R'_i, R^\star_{-i})$. Si on applique le même raisonnement en modifiant les préférences des agents dans S_3 successivement, on obtient alors $x \in \varphi(R'_{S_3}, R^\star_{-S_3})$. Par conséquent, puisque $(R'_{S_3}, R^\star_{-S_3}) = R'$, on a alors $x \in \varphi(R')$. ■

Preuve. **Preuve de la proposition 2.1.2 proprement dite** :
$\Rightarrow$) Soit φ une règle satisfaisant la monotonie globale et l'indépendance globale. Alors par le

lemme 2.1.2, la règle φ satisfait la monotonie objet par objet.

Soit $x \in A$. Soit $\mathcal{C}^x$ défini comme suit : $(C_1, C_2) \in \mathcal{C}^x \Leftrightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$ et $\exists R \in \mathcal{D}$ tel que $N_x^G(R) \subseteq C_1$, $N_x^B(R) \supseteq C_2$, et $x \in \varphi(R)$. Alors par la monotonie objet par objet,

$\forall x \in A$, $\mathcal{C}^x$ satisfait la P-monotonie.

Soit $\widehat{\varphi}$ la règle en famille $\phi^\star$ associée à la constitution de choix $(\mathcal{C}^x)_{x \in A}$.

Nous devons juste prouver que $\varphi = \widehat{\varphi}$. Soit $R \in \mathcal{D}$.

Si $x \in \varphi(R)$, alors $(N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x$ et ainsi $x \in \widehat{\varphi}(R)$. Par conséquent, $\varphi(R) \subseteq \widehat{\varphi}(R)$.

Soit $x \in \widehat{\varphi}(R)$; alors $(N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x$ et donc $\exists R' \in \mathcal{D}$ telle que $N_x^G(R') \subseteq N_x^G(R)$, $N_x^B(R') \supseteq N_x^B(R)$, et $x \in \varphi(R')$. Par la monotonie objet par objet, $x \in \varphi(R)$ et ainsi $\varphi(R) \supseteq \widehat{\varphi}(R)$. On conclut donc que φ est une règle dans la famille $\phi^\star$.

$\Leftarrow)$ Soit φ est une règle dans la famille $\phi^\star$ alors elle satisfait la non manipulabilité et la propriété d'indépendance vis-à-vis des candidats neutres.

L'indépendance vis-à-vis des candidats neutres est immédiate puisque pour les règles en famille $\phi^\star$, on se soucie uniquement des individus qui sont favorables (ou défavorables) pour une option. La non-manipulabilité peut être montrée comme suit : chaque règle dans la famille $\phi^\star$ prend des décisions option après option. Autrement dit, la décision relative à chaque option x ne s'appuie que sur le groupe d'agents en faveur de x et le groupe d'agents contre x. De plus, la décision d'être choisie correspond à une augmentation dans le premier groupe et la décision de ne pas être choisie correspond à l'augmentation dans le second groupe. Ainsi, quand un agent est en faveur de x, il ne peut pas augmenter le risque de l'acceptation de x en disant qu'il est contre x. Il ne peut pas faire sélectionner une option en mentant sur sa préférence. Par conséquent dire la vérité est toujours mieux que mentir, indépendamment des préférences des autres. Ainsi, d'après les lemmes 2.1.5 et 2.1.6, on obtient que toute règle dans la famille $\phi^\star$ satisfait la monotonie globale et l'indépendance globale. ■

Nous établissons bien après la relation logique entre les deux combinaisons d'axiomes suivants : la non manipulabilité et de l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres ; puis la combinaison de la monotonie globale et l'indépendance globale.

Proposition 2.1.3

Une règle de vote est non manipulable et indépendante vis-à-vis des candidats neutres si et seulement si elle est globalement monotone et globalement indépendante.

Preuve. D'après les lemmes 2.1.5 et 2.1.6, la non manipulabilité et l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres impliquent la monotonie globale (et l'indépendance globale).
On sait également d'après la proposition 2.1.2 que toute règle de vote satisfaisant la monotonie globale et l'indépendance globale est dans la famille $\phi^\star$ et par suite satisfait donc la non manipulabilité et l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres. D'où le résultat. ■

Il découle des propositions 2.1.2 et 2.1.3 que les règles dans la famille $\phi^\star$ sont les seules règles de vote satisfaisant la non manipulabilité et la propriété d'indépendance vis-à-vis des candidats neutres. On a alors :

Théorème 2.1.1. *Une règle de vote satisfait la non manipulabilité et l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres si et seulement si elle est dans la famille $\phi^\star$.*

Preuve. La preuve découle clairement des propositions 2.1.2 et 2.1.3. ■

2.2. Règles de décision efficientes et quasi-efficientes

2.2.1. Correspondances de choix social efficientes ou quasi-efficientes

Définition 2.2.1

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété d'**efficience** lorsque :
$\forall R \in \mathcal{D}$, $\nexists X \subseteq A$ tel que $\forall i \in N$, $XR_i\varphi(R)$ et pour un certain $j \in N$, $XP_j\varphi(R)$.
Nous disons que φ est efficiente.

Plus précisément, une correspondance de choix social est dite efficiente lorsqu'aucune partie non vide de l'ensemble des options n'est strictement préférée à l'ensemble des options sélectionnées dans un profil par un votant et aucun votant ne préfère strictement cette partie à l'ensemble des options sélectionnées pour tout profil.

Définition 2.2.2

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété de **quasi-efficience** lorsque :
$\forall R \in \mathcal{D}$, $\nexists X \subseteq A$ tel que $\forall i \in N$, $XP_i\varphi(R)$.

Nous disons que φ est quasi-efficiente.

Pour une correspondance de choix social quasi-efficiente, il est requis qu'aucun individu ne préfère strictement une partie à l'ensemble des options sélectionnées dans un profil.

Proposition 2.2.1

Toute correspondance de choix social efficiente est quasi-efficiente.

***Preuve*.** Pour cela, nous montrons que toute règle non quasi-efficiente est non efficiente. Soit φ une règle non quasi-efficiente alors il existe $X \subseteq A$ tel que $\forall i \in N$, $XP_i\varphi(R)$ or $XP_i\varphi(R) \Rightarrow XR_i\varphi(R)$ et de plus, puisque $\forall i \in N$, $XP_i\varphi(R)$ alors il existe un certain $j \in N$, $XP_j\varphi(R)$. Et on obtient le résultat. ■

2.2.2. Deuxième caractérisation de Biung-Ghi

Ici, il est établi qu'en tenant compte de l'efficience, de la monotonie globale et de l'indépendance globale, on obtient la dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^{\star}$. Mais au préalable, nous donnons les définitions des notions de décision suivantes :

Définition 2.2.3

Soit φ une règle. Soit $M \subseteq N$ et $x \in A$.

Un groupe $S \subseteq N \setminus M$ est **positivement M- décisif** pour x si :

$\forall R \in \mathcal{D}$ avec $M \subseteq N \setminus (N_x^G(R) \cup N_x^B(R))$, $S \subseteq N_x^G(R) \Rightarrow x \in \varphi(R)$.

Lorsque $M = \emptyset$, on dit que S est positivement décisif pour x.

Définition 2.2.4

Soit φ une règle. Soit $M \subseteq N$ et $x \in A$.

Un groupe $S \subseteq N \setminus M$ est **positivement M- décisif** lorsque le groupe est positivement M-décisif pour tout $x \in A$.

Lorsque $M = \emptyset$, on dit que S est positivement décisif.

Définition 2.2.5

Soit φ une règle. Soit $M \subseteq N$ et $x \in A$.

Un groupe $S \subseteq N \setminus M$ est **négativement M- décisif** pour x si :

$\forall R \in \mathcal{D}$ avec $M \subseteq N \setminus (N_x^G(R) \cup N_x^B(R))$, $S \subseteq N_x^B(R) \Rightarrow x \notin \varphi(R)$.

Lorsque $M = \emptyset$, on dit que S est négativement décisif pour x

Définition 2.2.6

Soit φ une règle. Soit $M \subseteq N$ et $x \in A$.

Un groupe $S \subseteq N \setminus M$ est **négativement M- décisif** si le groupe est négativement M-décisif pour tout $x \in A$.

Lorsque $M = \emptyset$, on dit que S est négativement décisif.

Proposition 2.2.2

Une règle satisfait la monotonie globale, l'indépendance globale et l'efficience si et seulement si c'est une dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^\star$.

Afin de prouver la proposition 2.2.2 , nous utilisons une séries de lemmes semblables à celles de la preuve du théorème d'impossibilité d'Arrow (1964).

Lemme 2.2.1

Soit φ une règle monotone objet par objet et $x \in A$. Soit $M \subseteq N$.

Supposons $\exists R \in \mathcal{D}$ telle que $M \subseteq N \setminus (N_x^G(R) \cup N_x^B(R))$ et $N_x^G(R) = (N \setminus M) \setminus N_x^B(R)$

(i) Si $x \in \varphi(R)$, alors $N_x^G(R)$ est positivement M-décisif pour x.

(ii) Si $x \notin \varphi(R)$, alors $N_x^B(R)$ est négativement M-décisif pour x.

Lemme 2.2.2

Soit $M \subseteq N$ et $N \subseteq M \neq \emptyset$. Étant donnée une règle efficiente et monotone objet par objet, si un groupe est positivement M- décisif pour une option, alors le groupe est positivement M- décisif.

***Preuve*.** Nous allons dans cette preuve utiliser la propriété $\mathcal{P}$ du domaine $\mathcal{D}$. Soit donc φ une règle efficiente et monotone objet par objet ; soit $S \subseteq N \setminus M$ et $x \in A$. Supposons que S est positivement M- décisif pour x. Soit $y \in A \setminus \{x\}$, il nous faut juste montrer que S est positivement M- décisif pour y.
$\forall i \in S$, d'après la propriété P_1, il existe $R_i \in \mathcal{D}_i$ tel que $yP_ixP_i\emptyset$ et $\forall z \in A \setminus \{x, y\}$, $\emptyset P_iz$.
$\forall j \in (N \setminus M) \setminus S$, d'après la propriété P_1, $\exists R_j \in \mathcal{D}_i$ tel que $\emptyset P_jyP_jx$ et $\forall z \in A \setminus \{x, y\}$, $\emptyset P_jz$.
$\forall m \in M$, d'après la propriété P_2,
$\exists R_m \in \mathcal{D}_m$ tel que $xI_myI_m\emptyset$ et $\forall z \in A \setminus \{x, y\}$, $\emptyset P_mz$.
Alors par l'efficience, $\varphi(R) \subseteq \{x, y\}$. Puisque S est positivement M- décisif pour x, alors $\varphi(R) = \{x\}$ ou $\{x, y\}$. Comme $\forall j \in (N \setminus M)$, $\{y\}P_j\{x\}$, et $\forall m \in M$, $\{y\}I_m\{x\}$, et
$N \subseteq M \neq \emptyset$, alors par l'efficience, $\varphi(R) = \{x, y\}$. Puisque $M \subseteq N \setminus (N_y^G(R) \cup N_y^B(R))$, $N_y^G(R) = S$ et $N_x^B(R) = N \setminus S$ alors d'après le lemme 2.2.1, S est positivement M- décisif pour y. ■

Lemme 2.2.3

Soit $M \subseteq N$ et $N \subseteq M \neq \emptyset$. Étant donné une règle efficiente et monotone objet par objet, si un groupe contenant plus de 2 options est positivement M- décisif, alors le groupe contient un sous groupe propre positivement M-décisif.

***Preuve*.** Nous allons dans cette preuve utiliser la propriété $\mathcal{P}$ du domaine $\mathcal{D}$. Soit $M \subseteq N$ et $N \subseteq M \neq \emptyset$. Soit donc φ une règle efficiente et monotone objet par objet ; soit $S \subseteq N \setminus M$, $\mid S \mid \geq 2$ et $i \in S$. Supposons que S est positivement M- décisif pour x. Nous devons montrer que soit $S \setminus i$ soit i est positivement $M-$ décisive. D'après le lemme 2.2.2, nous avons juste à montrer qu'il existe $x \in A$ tel que soit $S \setminus i$ soit i est positivement $M-$ décisive pour tout $x \in A$. Puisque $\mid A \mid \geq 3$, il existe trois objets $x, y, z \in A$.
D'après la propriété P_1, $\exists R_i \in \mathcal{D}_i$ tel que

$yP_i\{y,z\}P_ixP_i\emptyset P_iz$ et $\forall w \in A \setminus \{x,y,z\}$, $\emptyset P_iw$.
$\forall j \in S \setminus i$, d'après la propriété P_1, $\exists R_j \in \mathcal{D}_j$ tel que
$zP_j\{y,z\}P_jxP_j\emptyset P_jy$ et $\forall w \in A \setminus \{x,y,z\}$, $\emptyset P_jw$.
$\forall h \in (N \setminus M) \setminus S$, d'après la propriété P_1, $\exists R_h \in \mathcal{D}_h$ tel que :
$\emptyset P_h\{y\}$, $\emptyset P_h\{z\}$, $\emptyset P_h\{y,z\}P_h\{x\}$ et $\forall w \in A \setminus \{x,y,z\}$, $\emptyset P_h\{w\}$.
$\forall m \in M$, d'après la propriété P_2, $\exists R_m \in \mathcal{D}_m$ telle que :
$\{x\}I_m\{y\}I_m\{z\}\emptyset$ et $\forall w \in A \setminus \{x,y,z\}$, $\emptyset P_mw$.
Par la séparabilité et l'efficience, $\varphi(R) \subseteq \{x,y,z\}$. Puisque S est positivement M- décisif pour x, alors $x \in \varphi(R)$. De plus, $\forall j \in N \setminus M$, $\{y,z\}P_j\{x\}$, $\forall m \in M$, $\{y,z\}I_m\{x\}$ et $N \subseteq M \neq \emptyset$, alors par l'efficience, $\varphi(R) \cap \{y,z\} \neq \emptyset$. Puisque $M \subseteq N \setminus (N_y^G(R) \cup N_y^B(R))$, $N_y^G(R) = \{i\}$ et $N_y^B(R) = (N \setminus M) \setminus \{i\}$, $M \subseteq N \setminus (N_z^G(R) \cup N_z^B(R))$, $N_z^G(R) = S \setminus \{i\}$ et $N_z^B(R) = (N \setminus M) \setminus (S \setminus \{i\}$). Alors d'après le lemme 2.2.1, si $y \in \varphi(R)$, alors i est positivement M- décisif pour y et si $z \in \varphi(R)$ alors $S \setminus \{i\}$ est positivement M- décisif pour z. ∎

Lemme 2.2.4

Soit $M \subseteq N$ et $M \subseteq N \neq \emptyset$. Étant donnée une règle efficiente et monotone objet par objet, si un groupe est négativement M- décisif pour une option, alors le groupe est négativement M-décisif.

Lemme 2.2.5

Soit $M \subseteq N$ et $M \subseteq N \neq \emptyset$. Étant donnée une règle efficiente et monotone objet par objet, si un groupe contenant plus de 2 options est négativement M- décisif, alors le groupe contient un sous groupe propre négativement M-décisif.

<u>**Notation**</u> **2.2.1.** *: Dans toute la suite, nous convenons de se conformer à l'écriture suivante :* $\forall R_i \in \mathcal{D}_i$ *et* $\forall Y \subseteq A$, *soit* $G(R_i,Y) \equiv (G(R_i) \cap Y$ *et* $B(R_i,Y) \equiv (B(R_i) \cap Y$.

Nommons ensuite une propriété utile d'une préférence séparable.

Lemme 2.2.6

Soient X et Y deux sous ensembles disjoints de A. Soit $R_0 \in S$ alors
$T \in Max\{R_0, \{X \cup Z : Z \subseteq Y\}\} \Leftrightarrow X \cup G(R_0, Y) \subseteq T \subseteq X \cup (Y \setminus B(R_0, Y))$.

Lemme 2.2.7

Si une règle est efficiente et monotone objet par objet alors elle est une dictature hiérarchisée.

***Preuve*.** Soit φ une règle efficiente et monotone objet par objet.

Étape 1 :

Il existe une permutation π sur N tel que $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\pi(k)$ est $\{\pi(1), ..., \pi(k-1)\}-$ décisive.

Soit $M^1 \equiv \emptyset$. Nous montrons premièrement qu'il existe un agent qui est à la fois positivement et négativement M^1- décisive. Par l'efficience de φ, N est positivement M^1- décisive. D'après le lemme 2.2.3, il existe un sous-groupe propre S de N positivement M^1- décisif. Si S est un singleton, alors on a le résultat. Sinon, on applique à S le lemme 2.2.3. Comme il y a un nombre fini d'agents, alors en répétant cet argument, nous pouvons trouver un agent $i \in N$ qui soit positivement M^1- décisif. En utilisant le lemme 2.2.5 et le même argument que précédemment, nous montrons qu'il existe un agent $j \in N$ qui est négativement M^1- décisif. Si $i \neq j$, alors $\forall R \in \mathcal{D}$ avec $a \in G(R_i)$ et $a \in B(R_j)$, on a donc $a \in \varphi(R)$ et $a \notin \varphi(R)$ qui est une contradiction par conséquent $i = j$.

Soit i_1 M^1- décisif. Soit $M^2 \equiv \{i_1\}$. Si $N \setminus M^2$ est non vide, alors par l'efficience, $N \setminus M^2$ est M^2- décisive. En utilisant le même argument que précédemment, on montre qu'il existe $i_2 \in N \setminus M^2$ qui soit M^2- décisive. Soit $M^3 \equiv \{i_1, i_2\}$ alors si $N \setminus M^3$ est non vide, alors par l'efficience, $N \setminus M^3$ est M^3- décisive. En utilisant le même argument que précédemment, on montre qu'il existe $i_3 \in N \setminus M^3$ qui soit M^3- décisive. En procédant de cette façon, nous trouvons $(i_1, i_2, ..., i_n)$ tel que $\forall k \in \{1, ..., n\}$, i_k est M^k- décisif, où $M^k \equiv \{i_1, ..., i_k\}$. Soit π la permutation sur N que $\forall k \in N$, $\pi(k) = i_k$ alors π satisfait la propriété voulue.

Étape 2

Soit $X_{\pi(1)} \equiv \emptyset$ et $Y_{\pi(1)} \equiv A$. $\forall k \in \{2, ..., n\}$, soit $X_{\pi(k)} \equiv X_{\pi(k-1)} \cup G(R_{\pi(k-1)}, Y_{\pi(k-1)})$ et $Y_{\pi(k)} \equiv Y_{\pi(k-1)} \setminus [G(R_{\pi(k-1)}, Y_{\pi(k-1)}) \cup B(R_{\pi(k-1)}, Y_{\pi(k-1)})]$. Alors $\forall k \in \{1, ..., n-1\}$,

$M^k(R, \pi) = \{X_{\pi(k+1)} \cup Z : Z \subseteq Y_{\pi(k+1)}\}$.

Sans nuire à la généralité, nous supposons que $\pi(1) = 1, ..., \pi(n) = n$. Par la séparabilité, $M^1(R, \pi) \equiv Max\{R_1, 2^A\} = \{G(R_1, A) \cup Z : Z \subseteq A \setminus [G(R_1, A) \cup B(R_1, A)]\}$. Par conséquent le résultat est valable pour $k = 1$. Supposons par induction que le résultat soit valable pour $k = m$, où $m \in \{1, ..., n-2\}$. Par définition, $M^m(R, \pi) \equiv Max\{R_m, M^{m-1}(R, \pi)\}$. Comme par hypothèse d'induction, $M^{m-1}(R, \pi) = \{X_m \cup Z : Z \subseteq Y_m$, alors par le lemme 2.2.6, $M^m(R, \pi) = X_m \cup G(R_m, Y_m) \cup Z : Z \subseteq Y_m \setminus [G(R_m, Y_m) \cup B(R_m, Y_m)]$. Alors $M^m(R, \pi) = X_{m+1} \cup Z : Z \subseteq Y_{m+1}\}$.

Étape 3 : La règle φ est une dictature hiérarchisée en accord avec π

Sans nuire à la généralité, nous supposons que $\pi(1) = 1, ..., \pi(n) = n$. D'après l'étape 2 et le lemme 2.2.6, nous avons juste à montrer que

$\forall k \in N$, $X_k \cup G(R_k, Y_k) \subseteq \varphi(R) \subseteq X_k \cup (Y_k \setminus B(R_k, Y_k))$. $\quad\quad$ ⋇

L'agent 1 étant décisif, $G(R_1) \subseteq \varphi(R) \subseteq A \setminus B(R_1)$. Et alors ⋇ est satisfait pour $k = 1$.

Supposons par induction que (3) est satisfait pour $k \in \{2, ..., n-1\}$. Nous montrons premièrement que $X_{k+1} \cup G(R_{k+1}, Y_{k+1}) \subseteq \varphi(R)$.

Soit $x \in X_{k+1} \cup G(R_{k+1}, Y_{k+1})$.

Si $x \in X_{k+1}$ alors $x \in X_k \cup G(R_k, Y_k)$ et donc d'après l'hypothèse d'induction, $x \in \varphi(R)$.

Si $x \in G(R_{k+1}, Y_{k+1}) \setminus X_{k+1}$, alors, x étant dans Y_{k+1}, pour tout $i \leq k$, $\{x\}I_i\emptyset$ et comme $k+1$ est $\{1, ..., k\}$- décisive, alors $x \in \varphi(R)$. Et par conséquent, $X_{k+1} \cup G(R_{k+1}, Y_{k+1}) \subseteq \varphi(R)$.

Ensuite, nous montrons que $\varphi(R) \subseteq X_{k+1} \cup (Y_{k+1} \setminus B(R_{k+1}, Y_{k+1}))$.

Par contraposée, supposons que $x \notin X_{k+1} \cup (Y_{k+1} \setminus B(R_{k+1}, Y_{k+1}))$, et montrons que $x \notin \varphi(R)$.

$x \notin X_{k+1} \cup (Y_{k+1} \setminus B(R_{k+1}, Y_{k+1}))$ alors $x \notin X_{k+1}$ et $x \notin Y_{k+1}$ or $x \in B(R_{k+1}, Y_{k+1}))$.

Nous scindons la preuve en deux cas.

Cas 1. $x \notin X_{k+1}$ et $x \notin Y_{k+1}$.

Puisque $x \notin X_{k+1}$ alors $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $x \notin G(R_i, Y_i)$. Et comme $x \notin Y_{k+1}$, $x \notin \cup_{i=1}^{k}[G(R_i, Y_i) \cup B(R_i, Y_i)]$. Et par conséquent, il existe $i^\star \in \{1, ..., k\}$ tel que $x \in B(R_{i^\star}, Y_{i^\star})$ et pour tout $i < i^\star$, $x \notin G(R_i, Y_i) \cup B(R_i, Y_i)$. On a alors $x \in Y_{i^\star}$.

Comme $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ... \supseteq Y_n$, alors pour tout $i < i^\star$, $x \in Y_i$. Et par conséquent pour tout $i \leq i^\star$, $\{x\}I_i\emptyset$. $i^\star$ étant $\{1, ..., i^\star - 1\}$-décisive et $x \in B(R_{i^\star}, Y_{i^\star}$, alors $x \notin \varphi(R)$.

Cas 2 : $x \notin X_{k+1}$ et $x \in B(R_{k+1}, Y_{k+1})$.

Puisque $x \notin X_{k+1}$, alors pour tout $i \leq k$, $\{x\}I_i\emptyset$ et comme $k+1$ est $\{1, ..., k\}$- décisive et $x \in B(R_{k+1}, Y_{k+1}$, alors $x \notin \varphi(R)$ ■

Preuve. **Preuve de la proposition 2.2.2 proprement dite**

$\Rightarrow$) D'après le lemme 2.1.2, on a toute règle est monotone et indépendante si et seulement si elle est monotone objet par objet ; de plus la proposition 2.1.2 nous précise que une règle est monotone et indépendante si et seulement si elle est dans la famille $\phi^\star$. Ainsi, toute règle est monotone et indépendante si et seulement si elle est monotone objet par objet et est dans la famille $\phi^\star$. D'après le lemme 2.2.7, toute règle monotone objet par objet et efficiente est une dictature hiérarchisée. Il en ressort alors que toute règle est monotone, indépendante et efficiente est une dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^\star$.

$\Leftarrow$) Toute dictature hiérarchisée étant dans la famille $\phi^\star$ est monotone et indépendante d'après la proposition 2.1.2. Reste donc à montrer qu'elle est efficiente.

Soit φ une règle non efficiente alors :

$$\exists R \in \mathcal{D}, \exists X \subseteq A, \forall i \in N, X R_i \varphi(R) \text{ et } \exists j \in N \text{ tel que } X P_j \varphi(R).$$

Soit $E = \{t \in N : G(R_t) \cap (X \setminus \varphi(R)) \neq \emptyset\}$.

On a : $X P_j \varphi(R) \Rightarrow \exists x \in G(R_j$ tel que $x \in X$ et $x \notin \varphi(R)$

alors $j \in E$ et donc $E \neq \emptyset$. On pose alors $k = min(E)$.

$$\forall i < k, G(R_i) \cap (X \setminus \varphi(R)) = \emptyset \Rightarrow X \setminus \varphi(R) \subseteq I(R_i) \cup G(R_i)$$

Or $X R_i \varphi(R)$ alors $X \setminus \varphi(R) \subseteq I(R_i)$. De plus, $G(R_k) \cap (X \setminus \varphi(R)) \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in G(R_k) \cap (X \setminus \varphi(R))$ alors $x_0 \in G(R_k)$ et $\forall i < k, x_0 \in I(R_i)$. Et puisque φ est une dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^\star$, on obtient $x_0 \in \varphi(R)$. On a alors $x_0 \in \varphi(R)$ et $x_0 \in X \setminus \varphi(R)$: ce qui est impossible. Il en résulte donc que toute dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^\star$ est efficiente. ■

2.2.3. Troisième caractérisation de Biung-Ghi

Bien que l'efficience soit affaiblie en passant à la quasi-efficience, nous montrons que la monotonie globale, l'indépendance globale et la quasi-efficience conduisent à la dictature.

Proposition 2.2.3

Une règle satisfait la monotonie globale, l'indépendance globale et la quasi-efficience si et seulement si c'est une règle dictatoriale dans la famille $\phi^\star$.

Pour la preuve de cette proposition , nous énonçons au préalable le lemme suivant qui découle des lemmes 2.1.4 à 2.2.1 et du lemme 2.2.7

Lemme 2.2.8

Si une règle est quasi-efficiente et monotone objet par objet alors :

$$\exists i \in N \text{ tel que } \forall R \in \mathcal{D}, G(R_i) \subseteq \varphi(R) \subseteq A \setminus B(R_i).$$

Preuve. **Preuve de la proposition 2.2.3 proprement dite**

$\Rightarrow$) D'après le lemme 2.1.2, on a toute règle est monotone et indépendante si et seulement si elle est monotone objet par objet ; de plus la proposition 2.1.2 nous précise que une règle est monotone et indépendante si et seulement si elle est dans la famille $\phi^\star$. Ainsi, toute règle est monotone et indépendante si et seulement si elle est monotone objet par objet et est dans la famille $\phi^\star$. D'après le lemme 2.2.8, toute règle monotone objet par objet et quasi-efficiente est une règle dictatoriale. Il en ressort alors que toute règle est monotone, indépendante et quasi-efficiente est une règle dictatoriale dans la famille $\phi^\star$.

$\Leftarrow$) Toute règle dictatoriale étant dans la famille $\phi^\star$ est monotone et indépendante d'après la proposition 2.1.2.

Il reste donc à montrer que cette règle est quasi-efficiente.

Pour cela, soit φ une règle non quasi-efficiente alors : $\exists R \in \mathcal{D}, \exists X \subseteq A, \forall i \in N, XP_i\varphi(R)$.

On a : $\forall i \in N, XP_i\varphi(R)$ alors $X \setminus \varphi(R) \neq \emptyset$ donc :

$$\forall i \in N, X \setminus \varphi(R) \subseteq G(R_i) \Rightarrow X \setminus \varphi(R) \subseteq \bigcap_{i\in N} G(R_i)$$

Soit $x_0 \in X \setminus \varphi(R)$ alors $x_0 \in \bigcap_{i\in N} G(R_i)$.

$(N^G_{x_0}(R), N^G_{x_0}(R)) = (N, \emptyset) \notin \mathcal{C}^{x_0}$ car $x_0 \notin \varphi(R)$. De plus, la règle φ étant dictatoriale dans la famille $\phi^\star$, on a : $(x_0, N \setminus x_0) \in \mathcal{C}^{x_0}$; or $x_0 \subseteq N$ et $N \setminus x_0 \supseteq \emptyset$ alors d'après la monotonie des constitutions de choix, $(N, \emptyset) \notin \mathcal{C}^{x_0}$ ce qui est absurde.

Il résulte donc que toute règle dictatoriale est quasi-efficiente. D'où le résultat. ■

Exemple 2.2.1. *Nous donnons ici un exemple de domaine ne satisfaisant pas les propriétés A_1 et A_3 et pour lesquels les propositions 2.2.2 et 2.2.3 ne sont plus valides.*

Considérons $A = \{a, b, c\}$ et $N = \{1, 2\}$

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = (R_0, R_0', R_0'')$ *avec*

$$(G(R_0); B(R_0)) = (\{a\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R'_0); B(R'_0)) = (\{b\}; \emptyset)\,;$$
$$(G(R''_0); B(R''_0)) = (\{a\}; \{b\}).$$

Soit φ la règle définie dans la table suivante où chaque cellule représente le résultat pour le profil composé des deux décideurs ou votants.

	R_0	R'_0	R''_0
R_0	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a\}$
R'_0	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$
R''_0	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$

Il est immédiat que la règle φ ne satisfait pas les propriétés A_1 et A_3. Toutefois, elle vérifie la monotonie globale (on notera que l'ensemble des options désirables augmente et l'ensemble des options indésirables diminue uniquement lorsque la préférence change de R''_0 à R_0), on vérifie aussi que cette règle est indépendante et efficiente. Puisque l'agent 1 n'atteint pas sa meilleure alternative à (R'_0, R''_0) et l'agent 2 n'atteint pas sa meilleure alternative à (R''_0, R'_0), alors aucun des deux agents ne peut être un dictateur et dans ce cas, φ ne peut être dictatoriale bien que satisfaisant les 3 propriétés précédentes.

Les propositions 2.1.3, 2.2.2 et 2.2.3 conduisent au résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Biung-Ghi (2003)*

(i) Une règle satisfait la non manipulabilité, l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et l'efficience si et seulement si c'est une dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^{\star}$.

(ii) Une règle satisfait la non manipulabilité, l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la quasi-efficience si et seulement si c'est une règle dictatoriale dans la famille $\phi^{\star}$.

***Preuve*.**

La preuve découle clairement des propositions 2.2.2 et 2.2.3 et des lemmes 2.1.5 et 2.1.6 (i) D'après la proposition 2.2.2, on sait que toute règle est globalement monotone, globalement indépendante et efficience si et seulement c'est une dictature hiérarchisée dans la famille $\phi^{\star}$ et d'après les lemmes 2.1.5 et 2.1.6 toute règle de vote satisfaisant l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la non manipulabilité satisfait la monotonie globale et l'indépendance globale. On obtient alors le résultat. Le (ii) se prouve de la même façon. ■

2.3. Correspondances de choix par comités

2.3.1. Correspondances de choix social satisfaisant la souveraineté, l'anonymat et la neutralité

Définition 2.3.1

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété de **souveraineté des électeurs** lorsque : $\forall x \in A$, il existe $R, R' \in \mathcal{D}$ tel que $x \in \varphi(R)$ et $x \notin \varphi(R')$.

La souveraineté des électeurs prévoit qu'aucun choix social ne doit être imposé ou exclu à priori.

Les notations suivantes sont utiles dans la suite :

Notation 2.3.1. 1. *Étant donnée une permutation π sur N, $\forall R \in \mathcal{D}$, on pose $R^\pi \equiv (R_{\pi(i)})_{i\in N}$.*

2. *Pour tout $X \in 2^A$ et $\forall x, y \in A$, on désigne par $\rho_{x,y}$ le sous-ensemble de A tel que :*

$$X \setminus \{x, y\} = \rho_{x,y}(X) \setminus \{x, y\} \text{ ; } x \in \rho_{x,y}(X) \Leftrightarrow y \in X \text{ et } y \in \rho_{x,y}(X) \Leftrightarrow x \in X.$$

Ainsi, $\rho_{x,y}$ est l'opération qui consiste à intervertir les rôles joués par x et y.

3. *Étant donné $i \in N$, pour chaque $Ri \in \mathcal{D}_i$, soit $\rho_{x,y}R_i \in \mathcal{D}_i$ la préférence où les rôles de x et y sont permutés. Ainsi,*

$$\forall X, X' \subseteq A \text{ ,} X\rho_{x,y}R_iX' \Leftrightarrow \rho_{x,y}(X)R_i\rho_{x,y}(X')$$

Alors x (ou y) joue le même rôle dans R_i que y (ou x) dans $\rho_{x,y}R_i$.

Pour chaque $R \in \mathcal{D}$, soit $\rho_{x,y}R \equiv (\rho_{x,y}R_i)_{i\in N}$.

Définition 2.3.2

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété d'**anonymat** si toute permutation π sur N, on a :

$\forall R \in \mathcal{D}$, $\varphi(R) = \varphi(R^\pi)$.

Nous dirons que φ est anonyme.

L'anonymat voudrait qu'il y ait égal traitement des décideurs ou votants.

Définition 2.3.3

Une correspondance de choix social φ satisfait la propriété de **neutralité** si :

$\forall R \in \mathcal{D}, \forall x, y \in A,\ x \in \varphi(R) \Leftrightarrow y \in \varphi(\rho_{x,y}R)$.

Nous dirons que φ est neutre.

La neutralité voudrait qu'il y ait égal traitement des candidats ou options.

Dans la famille $\phi^\star$, on remarque que la souveraineté des électeurs, l'anonymat et la neutralité sont équivalents respectivement aux 3 propriétés de P-unanimité, P-anonymat et P-neutralité des constitutions de choix.
Par conséquent, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.1.

(i) Une règle satisfait la monotonie globale, l'indépendance globale et la souveraineté des électeurs si et seulement c'est une règle dans la famille $\phi^\star$ associée à la P- unanimité des constitutions de choix.
(ii) Une règle satisfait la monotonie globale, l'indépendance globale et l'anonymat si et seulement c'est une règle dans la famille $\phi^\star$ associée à la P- anonymat des constitutions de choix.
(iii) Une règle satisfait la monotonie globale, l'indépendance globale et la neutralité si et seulement c'est une règle dans la famille $\phi^\star$ associée à la P-neutralité des constitutions de choix.

Á partir du corollaire précédent et de la proposition 2.1.3, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 2.3.2.

(i) Une règle de vote satisfait la non manipulabilité, la propriété d'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la souveraineté des électeurs si et seulement si c'est une règle dans la famille $\phi^\star$ associé à une constitution de choix P-unanime.

(ii) Une règle de vote satisfait la non manipulabilité, la propriété d' indépendance vis-à-vis des candidats neutres et l'anonymat si et seulement si c'est une règle dans la famille $\phi^\star$ associé à une constitution de choix P-anonyme.

(iii) Une règle de vote satisfait la non manipulabilité, la propriété d' indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la neutralité si et seulement si c'est une règle dans la famille $\phi^\star$ associé à une constitution de choix satisfaisant la P-neutralité.

2.3.2. Application : caractérisation des mécanismes de vote par comités

Les résultats précédents permettent d'obtenir une caractérisation des mécanismes de vote par comités.

Proposition 2.3.1

Barberà et al (1991)

Sur les domaines linéaires séparables S^N_{Lin}, les mécanismes de vote par comités sont les seules règles de votes satisfaisant la non manipulabilité et la souveraineté des électeurs.

Preuve. Soit φ une correspondance de choix dans le domaine linéaire séparable.

$\Rightarrow$) Supposons que φ est un mécanisme de vote par comités.

• Soit $R \in \mathcal{D}$, $\forall i \in N$, $\forall R'_i \in \mathcal{D}_i$, supposons que $\varphi(R'_i, R_{-i})\ P_i\ \varphi(R_i, R_{-i})$.

Soit $x \in \varphi(R_i, R_{-i})$ alors $N^G_x(R'_i, R_{-i}) = N^G_x(R_i, R_{-i})$ ou $N^G_x(R'_i, R_{-i}) = N^G_x(R_i, R_{-i}) \cup \{i\}$. On a donc toujours $N^G_x(R_i, R_{-i}) \subseteq N^G_x(R'_i, R_{-i})$ et d'après (ii), $N^G_x(R'_i, R_{-i}) \in \mathbf{C}^x$. Il suit que $x \in \varphi(R'_i, R_{-i})$ ce qui est absurde d'après l'hypothèse. D'où φ est non-manipulable.

• Soit $x \in A$, comme $\mathbf{C}^x \neq \emptyset$ alors il existe un sous-ensemble $B \in \mathbf{C}^x$. Ainsi, considérons le profil $\mathcal{R}$ tel que $N^G_x(R) = B$. Puisque $B \in \mathbf{C}^x$ alors $x \in \varphi(R)$. De même, en considérant le profil $\mathcal{R}'$ tel que $N^G_x(R') = \emptyset$. Puisque $\emptyset \in \mathbf{C}^x$ alors $(iii) \Rightarrow x \notin \varphi(R)$.

$\Leftarrow$) Soit φ une correspondance qui satisfait la non-manipulabilité et la souveraineté des électeurs et montrons que c'est un mécanisme de votes par comités.

On sait que sur le domaine séparable linéaire, l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres est une propriété satisfaite par toute règle. Ainsi, la correspondance de choix φ satisfait la non manipulabilité, l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres et la souveraineté des électeurs alors d'après le (i) du corollaire 2.3.2, $\varphi(R)$ est une règle dans la famille $\phi^\star$ associée à une constitution de choix P-unanime $(\mathcal{C}^x)_{x\in A}$:

$\forall x \in A$, $\mathcal{C}^x = \{(C_1, C_2) \in \mathcal{N},\ C_1 \in \mathbf{C}^x,\ C_2 \subseteq N \setminus C_1\}$.

Définissons $\mathbf{C}^x = \{C_1 \subseteq N : \exists C_2 \subseteq N \setminus C_1; (C_1, C_2) \in \mathcal{C}^x\}$.

La P-unanimité entraine $(N, \emptyset) \in \mathcal{C}^x \Rightarrow N \in \mathbf{C}^x \Rightarrow \mathbb{C}^x \neq \emptyset$.

(i) La P-unanimité entraine aussi que $(\emptyset, N) \notin \mathcal{C}^x \Rightarrow \emptyset \notin \mathbf{C}^x$.

(ii) Soit $\mathcal{C}_0 \in \mathbf{C}^x$, $\forall \mathcal{C}'_0 \supseteq \mathcal{C}_0$ montrons que $\mathcal{C}'_0 \in \mathbf{C}^x$

$\mathcal{C}_0 \in \mathbf{C}^x \Rightarrow \exists C_2 \subseteq N \setminus C_0; (C_0, C_2) \in \mathcal{C}^x$. Puisque $\mathcal{C}'_0 \supseteq \mathcal{C}_0$ et $C_2 \subseteq C_2$ alors du fait que les constitutions de choix sont monotones, on a : $(C'_0, C_2) \in \mathcal{C}^x$ et alors $\mathcal{C}'_0 \in \mathbf{C}^x$.

(iii) Soit $R \in \mathcal{D}$, et $x \in \varphi(R)$, montrons que $N_x^G(R) \in \mathbf{C}^x$.

$x \in \varphi(R) \Leftrightarrow (N_x^G(R), N_x^B(R)) \in \mathcal{C}^x \Leftrightarrow N_x^G(R) \in \mathbb{C}^x$.

On conclut alors que c'est un mécanisme de votes par comités. $\blacksquare$

Chapitre Trois

IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUES

L'opportunité de rédiger ce mémoire nous a offert l'occasion de faire nos premiers pas d'autonomie en termes d'investigations scientifiques et de déploiements de nos aptitudes à comprendre, à construire un raisonnement logique sans oublier la maîtrise indispensable des outils de nouvelles technologies de l'information et de la communication incontournables pour tout enseignant en ces moments où les apprenants sont aspirés par les tablettes, téléphones androïdes, ordinateur portable...

Nous nous proposons de relever dans ce chapitre quelques repères de l'impact de cet exercice au plan pédagogique sur le système éducatif.

3.1. Aptitude à comprendre, mobiliser et construire des connaissances

Pour mener à terme ce travail, il a fallu que nous puisions dans nos compétences à pouvoir comprendre une situation-problème, en proposer un formalisme et d'étudier les propriétés de objets mathématiques obtenus. Par transposition, le document de travail sur lequel est basé notre compte rendu Biung-Ghi(2003) peut être perçu comme une ressource pédagogique dont le contenu doit être partagé avec les apprenants. C'est ainsi que nous avons décomposé la ressource pour en donner une reconstitution en termes de chapitres ; par suite de définitions des concepts à étudier et des propriétés qui vérifient ces concepts. En mettant ainsi ces propriétés ensemble, on déduit donc des résultats. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien d'un enseignant de mathématiques que nous aspirons à être . Nous pensons notamment à l'élaboration de nos cours futurs à partir des diverses ressources éducatives.

3.2. Aptitude à faire un raisonnement logique

Le raisonnement mathématique permet d'associer, de différencier, de catégoriser, de mesurer, d'évaluer, de tester des hypothèses, de démontrer un processus, de tirer des conclusions à partir d'informations données ou de lois générales, de retrouver des informations manquantes par logique, d'aller des causes aux conséquences et inversement, de mettre au jour les contradictions ou incohérences (affirmer une chose et son contraire par exemple), de justifier un résultat,...C'est donc un type de raisonnement essentiel pour comprendre et analyser le monde mais aussi pour beaucoup d'opérations de la vie quotidienne et professionnelle nous demandant d'analyser logiquement des situations et de prendre des décisions. On pourra donc ainsi développer chez les élèves des capacités de chercheur et à contribuer à l'avancement des connaissances. Ceux-ci ont pour but d'initier l'élève à la pratique de la recherche en le rendant capable d'utiliser adéquatement les sources documentaires et les méthodes d'investigation et d'analyse appropriées.

L'élève sera donc ainsi à même de développer les capacités suivantes :

• l'aptitude à intégrer les différentes connaissances ;

• l'aptitude à construire une problématique ;

• l'aptitude à la rigueur méthodologique, logique de l'argumentation et la valeur de la démonstration ;

• la qualité de la présentation selon les normes d'un travail scientifique ;

• la qualité de la présentation au niveau du style et de la langue utilisée ;

• la qualité de la présentation matérielle et typographique.

3.3. Initiation aux nouvelles technologies de l'information et de la communication

Les outils technologiques tels que le micro-ordinateur, vidéo-projecteur, l'utilisation des logiciels (Word, Latex) et internet ont été d'un grand appui au cours de la rédaction de ce mémoire. Ces moyens de communication (en particulier internet) pourra être utile d'une part à l'enseignant dans la mesure où il devra s'arrimer à cela pour compléter le déficit ou l'insuffisance d'informations contenus dans les manuels scolaires. Ils peuvent de même l'assister dans la préparation, la saisie et la présentation d'une leçon ou d'une épreuve. D'autre part, ils seront utiles à l'élève pour compléter les cours qui lui ont été transmis par l'enseignant.

Ce mémoire permettra donc le développement des compétences reposant fondamentalement sur la qualité de la compréhension des apprentissages et sur l'utilisation fréquente et variée de cette compréhension dans un contexte donné et des contextes similaires. De ce fait, les élèves pourront alors bien comprendre ce qui est à apprendre, et les enseignants devront d'abord se préoccuper de vérifier constamment la qualité de la compréhension des apprentissages effectués. De même, l'élève professeur pourra initier l'enfant tel qu'il a appris à ressortir un bon rapport de lecture sur un document scientifique (livre au programme, fascicule) permettant de juger de la qualité de l'approche scientifique, de l'authenticité des données et de la justesse des résultats. L'élève sera ainsi entraîné à rechercher une documentation, observer et comparer, réaliser et évaluer des résultats, dégager des critères simples de choix et les utiliser.

✠ CONCLUSION ET PERSPECTIVE ✠

Au terme de ce travail dont le but était de rendre compte des travaux de Biung-Ghi (2003) sur la caractérisation des correspondances de choix social non manipulables pour des préordres séparables, plusieurs points essentiels ont retenu notre attention.

Dans l'optique de simplifier la compréhension, nous avons commencé par donner un aperçu du formalisme des préférences individuelles et l'étude de certaines propriétés entre les sous-domaines des préférences séparables. À la suite de ces préalables, nous avons continué la manipulation et la séparabilité. Nous avons alors donné une caractérisation des règles de vote satisfaisant certaines propriétés telles que l'efficience, la non-manipulabilité et l'indépendance vis-à-vis des candidats neutres... Et enfin, nous avons caractérisé les mécanismes de vote par comités sur le domaine linéaire séparable. Par ailleurs, contrairement à ce qu'affirme Biung-Ghi, nous avons montré que la propriété $\mathcal{R}$ n'est pas satisfaite dans le domaine des préférences séparables linéaires. Les implications pédagogiques que nous avons évoquées porte sur l'intérêt de ce mémoire sur le plan professionnel.

Toute la contribution de Biung-Ghi (2003) est basée sur l'hypothèse selon laquelle les préférences des individus sont des préordres séparables . Il serait intéressant de regarder ce que deviennent ces résultats lorsqu'on s'intéresse à la non manipulabilité collective.

✠ Bibliographie ✠

[1] Andjiga N. G., Mbih B., and Moyouwou I. (2008) *Manipulation of voting schemes with restricted beliefs*. Journal of Mathematical Economics, 44 : 1232-1242.

[2] Barberà et al. (1991) *Voting by commitees* . Econometrica, 59 : 595-609.

[3] Border K, Jordan J (1983) *Straightforward elections, unanimity and phantom voters* . Rev Econ Stud 50 : 153-170

[4] Ju, B-G (2003) *A characterization of strategy-proof voting rules for separable weak orderings*. social choice and welfare, 21, 469-499.

[5] Ju, B-G (2005) *An efficiency characterization of plurality social choice on simple preference domains*. Economic theory, 26, 115-128.

[6] Le Breton, M and A. Sen (1995) *Strategy proofness and decomposability : weak orderings*, Discussions papers in Economics N° 95-04, Indian statistical Institute, Delhi centre.

[7] Le Breton, M and A. Sen (1999) *Separable preference, strategy proofness, and decomposability*. Econometrica, 67 : 605-628.

[8] Ricardo.M et Bernardo M. (2013) *Strategy-proofness on restricted separable domains*.Econometrica, 17 : 323-333.

[9] Tchantcho B. et Diffo L. (2009) *A note on the manipulation of social choice correspondance*. Mathematics and Social Sciences 47(186) : 65-75.