REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

CARACTERISATIONS DE LA REGLE MAJORITAIRE ET DES REGLES A SCORE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

MEKOUENG NOGHEN Achille
Licencié en mathématiques

Sous la direction
Pr Bertrand TCHANTCHO
Maitre de Conférences

Année Académique
2015-2016

♠ Dédicace ♠

Je dédie ce travail à mon père **NOGHEN Victor**.

♠ Remerciements ♠

La réalisation de ce mémoire n'aurait jamais été possible sans la collaboration de nombreuses personnes, comme le dit un adage africain, *" une seule main ne peut pas attacher un sac"*.
A ce titre, je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux personnes suivantes :
• Mon encadreur le Professeur **Bertrand TCHANTCHO** pour ses conseils, son aide et sa disponibilité sans faille qui m'ont permis de surmonter les difficultés rencontrées tout au long de ce travail.
• Tout les enseignants du département de mathématiques de la faculté des sciences de l'université de Yaoundé I, et ceux du département de mathématiques de l'école normale supérieure de Yaoundé pour la formation académique qu'ils m'ont donné.
• Mes parents papa **NOGHEN Victor** et maman **MONGOUNG Justine** pour leur amour indéfectible, leur soutien moral, spirituel, matériel et financier qui m'ont permis d'affronter mes défis quotidiens.
• Le Docteur **Armel MOMO KENFACK** pour son soutien incommensurable et ses multiples conseils qui m'ont permis de surmonter de nombreuses difficultés dans l'élaboration de ce mémoire.
• Madame **KENE FOKOU Viviane Laure** qui, au delà de ses encouragements, ma offert un ordinateur pour la réalisation ce mémoire.
• Mes amis et mes camarades de promotion pour les encouragements et les critiques qu'ils m'ont accordés, je pense particulièrement à **DZOKEM FOKOU Cyrille** et **TSASSE NEUCHY Pelvilin** qui a donné de son temps pour m'apprendre l'utilisation du logiciel Latex.

♠ Déclaration sur l'honneur ♠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

MEKOUENG NOGHEN Achille

♠ Résumé ♠

Le cadre arrowien de la théorie des choix collectifs est suffisamment flexible pour entreprendre une étude axiomatique précise des règles de vote qui sont communément utilisées dans des élections politiques et tout autre situation de choix collectif, comme la règle majoritaire et les règles positionnelles. L'objectif de ce mémoire est de rendre compte de certains résultats qui ont été obtenus dans cette direction depuis 1952. Nous présentons d'abord quelques notions préliminaires de la théorie des choix collectifs. Ensuite, nous exposons en détail la caractérisation des règles à score par Young [1974], deux caractérisations de la règle de Borda dont la première par Young [1974] et la seconde par Smith [1973], deux caractérisations de la règle de la pluralité dont l'une par Lepelley [1992] et l'autre par Richelson [1978]. Enfin, nous exposons avec des preuves détaillées, deux axiomatisations de la règle majoritaire dont la première par May [1952] et la seconde par Fishburn [1973].

Mots clés : Profil, règle majoritaire, règle à score, règle de Borda, règle de la pluralité.

♠ Abstract ♠

In social choice theory, the framework described by Arrow [1963] allows enough flexibility to handle questions such as axiomatic characterizations of some common voting rules used in political elections or any other situations of voting. The purpose of this work is to present some results on axiomatic characterizations of the majority voting rule and of scoring rules. In this respect, we provide a detailed characterization of scoring rules due to Young [1974], two characterization of Borda voting rule by Young [1974] and Smith [1973], two characterization of the plurality voting rule by Lepelley [1992] and Richelson [1978]. We conclude by two axiomatizations of the majority voting rule due to May [1952] and Fishburn [1973].

Keywords : Profile, majority rule, scoring rule, Borda rule, plurality rule.

♠ Table des matières ♠

♠ Introduction ♠

Un groupe d'individus est confronté au choix d'une décision collective parmi plusieurs autres qui s'offrent à eux. Considérons par exemple une situation où 10 individus veulent choisir une alternative parmi 5. Supposons que chaque individu classe ces alternatives par ordre de préférence et que, 6 individus classent une alternative a en tête de leurs préférences et une alternative b en seconde position. Les autres 4 individus classent l'alternative b en tête de leurs préférences et a en dernière position. Dans un premier temps, donnons un point à chaque candidat lorsqu'il est placé en tête d'une préférence individuelle et zéro point à tous les autres. On définit ainsi une règle de choix sociale appelée la règle de la pluralité et pour cette règle, a totalise 6 point et b 4 points. a est donc vainqueur sur b pour cette règle. Deuxièmement, donnons $5 - i$ points à chaque candidats lorsqu'il est placé en i-ieme position dans une préférence individuelle. On définit ainsi la règle de Borda et selon cette règle, a totalise 24 points et b 34 points, on assiste alors à une victoire de b. Il se pose ainsi un problème de désignation de la meilleure règle de choix à utiliser. Autrement dit, quelle est la règle de choix qui traduit le mieux la préférence collective des électeurs ? Dans la littérature, il existe deux plans d'approche des règles de choix social à savoir : l'approche positionnelle basée sur les points engrangés par les candidats à l'instar de la règle de Borda, la règle de la pluralité etc, et l'approche majoritaire basée sur les comparaisons par paire comme la règle majoritaire, la règle de Condorcet etc. Toutefois, plusieurs résultats comme le théorème d'impossibilité d'Arrow [1963] et le théorème d'impossibilité de Gibbard-Satterwaite (1973, 1975) montrent qu'il n'existe pas de "bonne règle" de choix social . C'est-à-dire de meilleure règle dans le sens de la traduction fidèle de la préférence collective. Après cela, plusieurs auteurs se sont engagés dans la caractérisation de plusieurs règles de choix communément utilisées dans nos sociétés. Parmi ceux-ci, Young[12] a montré en 1974 que les seules procédures d'agrégation des préférences vérifiant les propriétés de symétrie et de consistance sont les règles à score ; en 1975, il donne une caractérisation similaire pour les correspondances de choix social[14] ; il montre également en 1974 que la seule correspondance de choix social neutre, consistante, fidèle et annulatrice est la règle de Borda[13]. Il est montré en 1973 par Smith[11] et en 1976 par Fishburn et Gehrlein[4] que la règle de Borda est la seule règle à score simple satisfaisant la propriété du perdant de Condorcet. Richelson[10] montre en 1978 et Ching[1] en 1996 qu'il existe une et une seule correspondance de choix social satisfaisant la symétrie, la consistance et la réduction, c'est la règle de la pluralité. La liste de ces résultats est encore bien longue. Ces travaux sont rédigés et orientés en général vers un public du domaine, ce qui fait que ces résultats scientifiques ne sont accessibles qu'aux initiés.

Ce mémoire présente quelques caractérisations de la règle majoritaire et des règles à score. Nous reviendrons entre autre sur la présentation et donnerons une preuve de la caractérisation des correspondances de choix social à score par Young[12], deux axiomatisations de la règle de Borda dont la première par Young[13] et la seconde par Smith[11]. Nous reviendrons également sur deux caractérisations de la règle de la pluralité dont la première par Lepelley[7] et la seconde par Richelson[10]. Une autre contribution de ce travail est que nous détaillons le théorème de May[8] et le théorème de Fishburn[3] qui donnent des caractérisations de la règle majoritaire simple dans le cas d'un vote à deux options. Nous nous efforcerons donc le plus souvent de donner une preuve à chacun des théorèmes qui donnent ces caractérisations. Pour cela, notre travail est subdivisé en trois chapitres. Le premier présente quelques notions préliminaires de la théorie des choix collectifs nécessaire pour la compréhension des concepts développés dans les chapitres 2 et 3. Le chapitre 2 présente en entame une caractérisation des règles à score par Young (1974), ensuite, une caractérisation de la règle de Borda par Young (1974) et une autre par Smith (1973), enfin la caractérisation de la règle de la pluralité de Lepelley(1992) et celle de Richelson. Le chapitre 3 présente deux caractérisations de la règle majoritaire dont la première par May (1952) et la seconde par Fishburn (1973).

⋆ ⋆ **Chapitre Un** ⋆ ⋆

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions de base nécessaires à la mise en place des mécanismes collectifs de prise de décision ainsi que quelques-uns des concepts d'agrégation des opinions individuelles en décision collective.

1.1 Quelques rappels

Dans toute la suite de ce document, nous désignerons par A un ensemble fini non vide de cardinal m avec $m > 1$. Cet ensemble A représente l'ensemble des alternatives, des options, ou encore des candidats. On notera $A = \{x, y, z, ...\}$ (ou $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$).
Aussi, V est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appelés électeurs, votants ou agents. On notera en général $V = \{1, ..., v\}$ où $v =\mid V \mid$ est le cardinal de V. Chacun des votants dispose d'une préférence sur A et la décision collective se fera à partir de chacune des préférences individuelles.

1.1.1 Préférences individuelles

Définition 1.1. ***(Relation binaire)***
Soit E un ensemble fini. On appelle relation binaire sur E, toute partie de $E \times E$.

Si R est une relation binaire sur E, nous noterons aRb au lieu de $(a, b) \in R$.

Définition 1.2. ***(Pré-ordre)***
Soit R une relation binaire sur les éléments de A.
R est un pré-ordre sur A si R est :
-réflexive : $\forall x \in A, \quad xRx.$
-transitive : $\forall x, y, z \in A$, *(*xRy *et* yRz*)* $\Longrightarrow xRz.$

R est un pré-ordre Complet ou total si R est un pré-ordre et : $\forall x, y \in A, \quad xRy$ *ou* $yRx \quad$ (*i.e* $\neg(xRy) \Longrightarrow yRx$).

Définition 1.3. ***(Ordre)***

R est un ordre sur A si R est :

-un pré-ordre,

-antisymétrique : $\forall x, y \in A, \quad xRy$ *et* $yRx \Longrightarrow x = y$.

R est un ordre total si R est un ordre et : $\forall x, y \in A, \quad xRy$ *ou* $yRx \quad$ (*i.e* $\neg(xRy) \Longrightarrow yRx$).

Remarque 1.1.1. (Comparaison ordre pré-ordre)

Un ordre total est un classement sans ex-aequos tandis qu'un pré-ordre complet est un classement avec ex-aequos éventuels.

Si R est un pré-ordre complet sur A, on note par I sa partie symétrique et P sa partie assymétrique. i.e :

$$xI_Ry \iff x \approx_R y$$
$$xP_Ry \iff x >_R y$$

On désigne par B(A) l'ensemble des relations binaires sur A, $\mathcal{L}(A)$ (ou tout simplement $\mathcal{L}$) l'ensemble des ordres totaux sur A, et $\mathcal{R}(A)$ (ou tout simplement $\mathcal{R}$) l'ensemble des pré-ordres totaux sur A.

Définition 1.4. ***(Profil)***

-Un profil sur V est une application π *définie de V vers* $D \subset B(A)$.

-Un profil d'ordre totaux sur V est une application π *définie de V vers* $D \subset \mathcal{L}(A)$.

-Un profil de pré-ordre totaux sur V est une application π *définie de V vers* $D \subset \mathcal{R}(A)$.

Il résulte alors de cette définition qu'un profil sur V est la donné de toutes les préférences individuelles de V.

On dit que π est un profil d'ordres totaux resp (profil de pré-ordres totaux) lorsque $D \subset \mathcal{L}$ resp ($D \subset \mathcal{R}$).

L'ensemble des profils d'ordres totaux sur V sera noté $\mathcal{L}^v$ et l'ensemble des profils de pré-ordres totaux sera noté $\mathcal{R}^v$. i.e pour un profil d'ordres totaux sur V, on a : $\pi(V) = (L_i)_{i\in V} \in \mathcal{L}^v$;

Pour un profil de pré-ordres totaux sur A, on a : $\pi(V) = (R_i)_{i\in V} \in \mathcal{R}^v$.

Pour deux populations V et V' telles que $V \cap V' = \varnothing$, on définit la réunion des deux profils $\pi(V)$ et $\pi(V')$ par :

$\pi(V \cup V') = (L_k)_{k \in V \cup V'}$ si c'est un profil d'ordres totaux

$\pi(V \cup V') = (R_k)_{k \in V \cup V'}$ si c'est un profil de pré-ordres totaux.

Exemple 1.1.1. (Profil d'ordres totaux)

Soit $A = \{a, b, c\}$. L'ensemble $\mathcal{L}$ contient six éléments numérotés de 1 à 6. Chaque colonne représente une relation d'ordre. Soit :

$$\begin{array}{cccccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 \\ a & a & b & b & c & c \\ b & c & a & c & a & b \\ c & b & c & a & b & a \end{array}$$

Pour un ensemble V de 12 votants, un profil peut être le suivant :

$$\pi(V) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ \hline L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 \\ \hline \end{array}$$

De façon générale, si $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ alors $\mathcal{L}$ a m ! éléments. Un profil sur V est donc un v-uplet d'éléments de $\mathcal{L}$ où $\forall i \in V$, L_i est la préférence individuelle du joueur i.

Exemple 1.1.2. (Profil de pré-ordres totaux)

Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$$\begin{array}{rclrcl} \pi(V)^1 & = & abcde & \pi(V)^5 & = & bcaed \\ \pi(V)^2 & = & (bc)dae & \pi(V)^6 & = & aedbc \\ \pi(V)^3 & = & d(ae)cb & \pi(V)^7 & = & (aebd)c \\ \pi(V)^4 & = & (bc)ead & \pi(V)^8 & = & cdaeb \end{array}$$

Ici, un électeur peut être indifférent entre deux ou plusieurs candidats ; dans ce cas, ces candidats sont mis entre parenthèses dans la préférence de cet électeur.

Au sortir de cette partie, nous retenons donc qu'un profil est la donné pour chacun des électeurs, d'une préférence sur l'ensemble des alternatives.

1.1.2 Mécanisme de choix collectifs

Étant donné un profil d'une population donnée sur A, il se pose le problème de détermination du ou des vainqueurs sur le plan collectif, bref d'une préférence collective sur A.

Une règle de choix social est une opération qui à tout profil sur une population donnée associe le résultat de l'élection. Dépendant du problème à résoudre, le résultat collectif peut être :
• un candidat (élection d'un président, adoption d'un projet de loi, choix du jour de la soirée de gala d'une association etc),
• un ensemble de plusieurs candidats (choix des délégués d'une classe, élection du bureau dans un comité, choix d'un groupe d'étudiants pour effectuer un stage académique etc),
• un classement des différents candidats (classement des projets soumis à un parlement, classement des artistes dans une compétition etc).

Définition 1.5. ***(Règles du vote)***
• *On appelle fonction de choix social (FCS) toute application* $F : \mathcal{L}^v \longrightarrow A$ *ou* $F : \mathcal{R}^v \longrightarrow A$
Cette fonction fait référence au fait que le résultat collectif est un élément de A.
• *On appelle correspondance de choix social (CCS) toute application* $C : \mathcal{L}^v \longrightarrow 2^A$ *ou* $\mathcal{R}^v \longrightarrow 2^A$.
Cette fonction fait référence au fait que le résultat collectif est une partie non vide de A.
• *On appelle procédure d'agrégation des préférences (PAP) toute application f qui à un profil associe une relation binaire sur A.*

En général, "procédure de vote" ou "règle de vote" ou encore "mécanisme de décision collective" renvoie soit à une fonction de choix social, soit à une correspondance, soit à une procédure d'agrégation. Dans toute la suite, on utilisera la notation RCS pour règle de choix social.
Un tie break est un critère plus ou moins objectif permettant d'établir un ordre stricte entre plusieurs candidats en cas d'égalité entre ceux-ci. On a par exemple l'âge, la taille, le sexe, le tirage au sort, l'ordre alphabétique etc.

Remarque 1.1.2. (Comparaison FCS CCS)
A l'aide d'une règle de "tie break", une fonction de choix social peut toujours être définie à partir d'une correspondance de choix sociale.

1.2 Quelques exemples de mécanismes

1.2.1 Approche positionnelle

a) Règles positionnelles simples

On notera $S(x, s, \pi)$ le score de l'alternative x dans le profil π via le vecteur score s.

Définition 1.6. ***(Règle positionnelle simple)***

- Une CCS F est dite de type positionnelle simple s'il existe un vecteur score s tel que pour tout profil π

$$\begin{aligned} F_s(\pi) &= argmax_{x \in A} S(x, s, \pi) \\ &= \{x \in A : S(x, s, \pi) \geq S(y, s, \pi), \quad y \in A\} \end{aligned}$$

- Une PAP f est de type positionnelle simple s'il existe un vecteur score s tel que $\forall x, y \in A$*, pour tout profil* π*,*

$$x \geq_{f_s(\pi)} y \Longleftrightarrow S(x, s, \pi) \geq S(y, s, \pi).$$

Exemple :

• La pluralité : $s = (1, 0, ..., 0)$.

Elle est encore appelée, majorité simple ; l'élu est le candidat qui est le plus souvent classé en tête dans les préférences des électeurs.

• Antipluralité : $s = (1, ..., 1, 0)$.

L'élu ici est le candidat le moins souvent classé dernier dans les préférences des électeurs.

• La procédure de Borda : $s = (m-1, m-2, ..., 2, 1, 0)$. Le dernier reçoit 0, l'avant dernier reçoit 1, ainsi de suite et le premier reçoit $m-1$ points.

b) Règles positionnelles séquentielles

La composition de deux règles à score f^{s^1} et f^{s^2} noté $f^{s^2} \circ f^{s^1}$ est définie $\forall a, b \in A$ et pour tout profil $\pi(V)$ par :

$$\begin{aligned} aI^{s^2 \circ s^1} b &\Longleftrightarrow aI^{s^1} b \quad \text{et} \quad aI^{s^2} b \\ aP^{s^2 \circ s^1} b &\Longleftrightarrow aP^{s^1} b \quad \text{ou} \quad (aI^{s^1} b \quad \text{et} \quad aP^{s^2} b). \end{aligned}$$

La composée de plusieurs règles à scores encore appelée règle positionnelle séquentielle est donc décrite comme suit :

Soit $s^A = (s^m, ..., s^{|B|}, ..., s^2)$ une collection de vecteurs scores, $s^{|B|}$ étant le vecteur score devant être utilisé lorsque l'ensemble des options encore en compétition est B, $B \subseteq A$ et $\mid B \mid \geq 2$. A la première étape, les scores sont calculés en utilisant le vecteur score s^m et les options perdantes sont éliminées. On passe à la deuxième étape où on utilise le vecteur score approprié qui dépend du nombre de candidats non encore éliminés. On continue ce processus jusqu'à ce que l'on obtienne un ensemble de candidats parmi lesquels aucun n'est perdant.

De manière formelle, étant donnés A l'ensemble des candidats, V l'ensemble des joueurs, $B \in 2^A$,

$\pi \in \mathcal{L}^v$ et un vecteur score $s^{|B|} \in \mathbb{R}_+{}^{|B|}$, l'ensemble des perdants noté $L(B, \pi, s^{|B|})$ est défini par : Soit $S(B, x, \pi, s^{|B|})$ le score de x dans la restriction du profil π à B via le vecteur score $s^{|B|}$.

$$L(B, \pi, s^{|B|}) = \left\{ a_k \in B : \left\{ \begin{array}{c} S(B, a_k, \pi, s^{|B|}) \leq S(B, a_j, \pi, s^{|B|}) \quad \forall a_j \in B \\ \\ \text{et} \quad \exists a_j \in B : \quad S(B, a_k, \pi, s^{|B|}) < S(B, a_j, \pi, s^{|B|}) \end{array} \right\} \right\}.$$

On peut remarquer que lorsque B est un singleton, $L(B, R, s^1) = 0$.

Une règle positionnelle séquentielle associée à une collection de vecteurs scores $s^A = (s^m, ..., s^{|B|}, ...s^2)$ est une correspondance F_{s^A} telle que pour toute partie $B \subseteq A$, $R \in L^V$ et $a_h \in A$, $a_h \in F_{s^A}(R) \Longleftrightarrow a_h \in A_k$, avec A_k défini de manière séquentielle ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ A_2 &= A - L(A_1, R, s^{|A_1|}) \\ &\vdots \\ A_{|B|+1} &= A_{|B|} - L(A_{|B|}, R, s^{|B|}) \\ &\vdots \\ A_p &= A_{p-1} - L(A_{p-1}, R, s^{|A_{p-1}|}). \end{aligned}$$

Une règle positionnelle séquentielle élimine donc progressivement les perdants à chaque étape jusqu'à ce qu'il n'en existe plus.

Il faut aussi noter que le vecteur score peut varier d'une étape à une une autre.

Exemple :

Les règles positionnelles séquentielles usuelles sont les suivantes :

- La procédure de Hare notée $F_{s_0^A}$: A chaque étape, $s^{|B|}$ est le $\mid B \mid$-uplet (1,0....0) ; on élimine alors les perdants obtenus par la pluralité.
- La procédure de coombs notée $F_{s_1^A}$: A chaque étape, $s^{|B|}$ est le $\mid B \mid$-uplet (1,1...,1,0) ;on élimine alors les perdants obtenus par l'antipluralite.
- La procédure de Nanson notée $F_{s_2^A}$: A chaque étape, $s^{|B|}$ est le vecteur $(\mid B \mid -1, \mid B \mid -2, ..., 1, 0)$; on élimine alors à chaque étape les perdants de Borda.

Il doit être noté que si à une étape donnée il y a plusieurs perdants, ils doivent être simultanément supprimés. De plus, si toutes les options ont le même score à une étape donnée, alors l'ensemble des perdants à cette étape est vide.

1.2.2 Approche majoritaire

Dans cette partie, nous définirons la règle majoritaire et donnerons une caractérisation axiomatique dans le cas de deux candidats.

a) Règle majoritaire simple

Soit π un profil ; $x, y \in A$. $x >_i y$ signifie que x est placé avant y dans la préférence du joueur i (électeur i).

Posons :

$$N(x, y, \pi) = \{i \in V : x >_i y\} \quad \text{et} \quad n(x, y, \pi) = \mid N(x, y, \pi) \mid .$$

Définition 1.7. ***(Règle majoritaire)***
Soit π un profil sur V et f une RCS sur $\mathcal{L}^v$. f est la règle majoritaire simple ssi :
$\forall x, y \in A$,

$$x >_{f(\pi)} y \iff n(x, y, \pi) > n(y, x, \pi)$$
$$x =_{f(\pi)} y \iff n(x, y, \pi) = n(y, x, \pi)$$

On note $f = Maj$.

b) Règle de Condorcet

La relation collective est définie de la manière suivante : Pour tout profil π, on pose :

$$f(x, \pi) = min_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi) \quad \text{et on a} \quad Cond(\pi) = argmax_{x \in A} f(x, \pi).$$

Ce dernier ensemble et l'ensemble des vainqueurs pour la règle de condorcet.

Remarque 1.2.1. .
Si l'ensemble $C(\pi) = \{x \in A : \forall y \in A \setminus \{x\}, x >_{Maj(\pi)} y\}$ est non vide, alors on : $C(\pi) = Cond(\pi)$ et on appelle vainqueur de condorcet l'unique candidat de cet ensemble.

c) Règle de Copeland

Pour tout candidat x et tout profil π, on pose :

$$\begin{cases} V(x, \pi) &= \{y \in A : x >_{Maj(\pi)} y\} \\ D(x, \pi) &= \{y \in A : y_{Maj(\pi)} x\} \\ d(x, \pi) &= \mid V(x, \pi) \mid - \mid D(x, \pi) \mid \end{cases}$$

$d(x, \pi)$ désigne donc la différence entre le nombre de "victoires" et le nombre "défaites" de x dans le profil π.
La relation collective de Copeland est donc définie de la manière suivante :

$$\forall x, y \in A, x \geq_{cop(\pi)} y \Longleftrightarrow d(x, \pi) \geq d(y, \pi).$$

L'ensemble de Copeland est $Cop(\pi) = argmax_{x \in A} d(x, \pi)$.

d) Règle de Schwartz

Un ensemble est dit extérieurement stable pour le profil π si :

$$\forall (x, y) \in A^2, (x \in E \text{ et } y \notin E) \Longrightarrow non(y >_{Maj(\pi)} x)$$

L'ensemble de Schwartz est la réunion de tous les ensembles extérieurement stables minimaux non vides (au sens de l'inclusion).

e) Règle de Smith

Un ensemble est dit dominant pour le profil π si :

$$\forall (x, y) \in A^2, (x \in E \text{ et } y \notin E) \Longrightarrow (x >_{Maj(\pi)} y)$$

L'ensemble de Smith est le plus petit ensemble dominant (non vide).

Parvenus au terme de ce chapitre, il était question pour nous de rappeler quelques pré-requis nécessaires pour la compréhension de notre travail.

Dans le chapitre suivant, Nous allons donner une caractérisation générale de toutes les règles à scores, et des caractérisations de quelques règles à scores particulières.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

Caractérisation des règles à score

Dans ce chapitre, nous allons donner en prélude une caractérisation générale de toutes les règles à scores et ensuite nous caractériserons deux règles à scores particulières.

2.1 Caractérisation générale

Les règles à score sont parmi les processus de décision les plus rependus dans le monde entier. Pour une règle à score simple de vecteur score $s = (s_k)_{1 \leq k \leq m}$ et un profil π donnés, elle attribue s_k points à chaque alternative de rang k dans une préférence du profil π. Ainsi, une alternative x est collectivement préférée à une alternative y si et seulement si le nombre total de points de x est supérieure à celui de y.

Dans ce chapitre, les préférences sont les ordre totaux. De plus, l'expression "règle de choix social" renvoie à une correspondance de choix social ou à un procédure d'agrégation des préférences.

En 1974, Young a donné la caractérisation des règles à score suivante.

Théorème 2.1. *Young[12]*
Une procédure d'agrégation des préférences est symétrique et consistante si et seulement si c'est une règle à score. De plus, elle est continue si et seulement si c'est une règle à score simple.

Dans ce document, nous démontrons que cette caractérisation est aussi valable pour les correspondances de choix social. Pour cela nous démontrons d'abord l'existence et ensuite l'unicité.

2.1.1 Existence

Nous montrons dans ce paragraphe qu'il existe des règles de choix social vérifiant les propriétés d'anonymat, de neutralité, de consistance et de continuité que nous définissons au fur et à mesure.

Définition 2.1. ***(Anonymat)[9]***
Soient V, V' deux ensembles tels que $Card(V) = Card(V')$ et soit $\Gamma(V, V')$ l'ensemble des bijections de V dans V'.
Pour tout profil $\pi(V) = (R_i)_{i\in V}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma(V, V')$, on définit le profil image de $\pi(V)$ par γ par :

$$\gamma(\pi(V)) = (L_j)_{j\in V'} \quad / \quad \forall i \in V, \quad L_i = L_j \Longleftrightarrow j = \gamma(i).$$

Soit f une règle de choix social. On dit que f est anonyme si et seulement si :

$$\forall \gamma \in \Gamma(V, V') \quad , \quad f(\gamma(\pi(V))) = f(\pi(V))$$

La condition d' anonymat décrite par cette définition veut que pour une règle de choix social anonyme f et pour tout profil $\pi(V)$, $f(\pi(V))$ dépend uniquement du nombre d'électeurs ayant des préférences bien définies. La personnalité du votant n'a donc aucune importance, seule sa préférence sur les candidats est prise en compte.

Lemme 2.1. *Toute CCS à score est anonyme.*

Preuve :
Soit f une CCS à score simple. Montrons que f est anonyme.
-Si f est simple, soit s son vecteur score.
Soit V et V' deux populations de votants de même cardinalité v, π un profil sur V, γ une bijection de V dans V'. On a :

$$\text{Posons} \quad \pi(V) = (R_i)_{i\in V} \text{ et } \gamma(\pi(V)) = (R'_j)_{j\in V'}.$$

Pour tout $j \in V'$, il existe un unique $i \in V$ tel que $\gamma(i) = j$. Alors $R'_j = R_i$. On a alors : $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} S(x, s, \gamma(\pi(V))) &= \sum_{j\in V'} s_{rg(x,R'_j)} && \text{où } rg(x, R'_j) \text{ désigne le rang de } x \text{ dans } R_j \text{ et } s_r g(x, R'j) \\ &= \sum_{\gamma(i)\in V'} s_{rg(x,R'_{\gamma(i)})} && \text{le nombre de points attribué à } x \text{ au regard de son} \\ &= \sum_{i\in V} s_{rg(x,R_i)} && \text{rang relativement au vecteur score } s. \\ &= S(x, s, \pi(V)) \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} x \in f(\gamma(\pi(V))) &\iff S(x,s,\gamma(\pi(V))) \geq S(y,s,\gamma(\pi(V))) \quad \forall y \in A \\ &\iff S(x,s,\pi(V)) \geq S(y,s,\pi(V)) \\ &\iff x \in f(\pi(V)) \end{aligned}$$

D'où $f(\gamma(\pi(V))) = f(\pi(V))$. Donc f est anonyme.

-Si f est composée, posons $f = f^2 \circ f^1$.

Soient $\pi(V)$ et $\pi'(V')$ deux profils, γ une bijection de V dans V'.

On a $f^{s^2} \circ f^{s^1}(\gamma(\pi(V))) = f^{s^2}(f^{s^1}(\gamma(\pi(V)))) = f^{s^2} \circ f^{s^1}(\pi(V))$ (car f^1 est anonyme), ce qui montre que $f^{s^2} \circ f^{s^1}$ est anonyme. ■

Définition 2.2. ***(Neutralité)****[9]*

- Soit $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des permutations de A. Soit R un ordre total sur A, $\sigma \in \mathcal{S}_A$. On définit l'ordre $\sigma(R)$ par :

$$\forall x, y \in \{1, ..., m\}, \quad a_{\sigma(i)}\sigma(R)a_{\sigma(j)} \quad \iff \quad a_i R a_j.$$

Ainsi, pour tout profil $\pi(V) = (L_1, L_2, ..., L_v)$, on a $\sigma(\pi(V)) = (\sigma(L_1), \sigma(L_2), ..., \sigma(L_v))$.

- Soit f une règle de choix social, soit $\pi(V)$ un profil sur une population V, $\sigma \in S_A$.

On dit que f est neutre si et seulement si : $f(\sigma(\pi(V))) = \sigma(f(V))$.

La condition de neutralité décrite par la définition précédente veut que pour une règle de choix social neutre, aucune permutation dans l'ensemble des candidats ne joue un rôle particulier. Tous les candidats sont égaux et subissent le même traitement.

Lemme 2.2. *Toute CCS à score est neutre.*

Preuve :

Soit f une CCS à score, montrons que f est neutre.

-Si f est simple, soit s son vecteur score.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_A$, $\sigma(\pi(V)) = (\sigma(L_{i_1}), ..., \sigma(L_{i_v}))$, soient $a, b \in A$.

En posant $\sigma(a) = x \quad \sigma(b) = y$, on a $\quad rg(x, \sigma(L_{i_k})) = rg(a, L_{i_k}) \quad rg(y, \sigma(L_{i_k})) = rg(b, L_{i_k}) \quad (*)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} x \in f(\sigma(\pi(V))) &\iff S(x, s, \sigma(\pi(V))) \geq S(y, s, \sigma(\pi(V))) \quad \forall y \in \sigma(A) \\ &\iff \sum_{k=1}^{v} s_{rg(x,\sigma(L_{i_k}))} \geq \sum_{k=1}^{v} s_{rg(y,\sigma(L_{i_k}))} \\ &\iff \sum_{k=1}^{v} s_{rg(a,L_{i_k})} \geq \sum_{k=1}^{v} s_{rg(b,L_{i_k})} \qquad \text{d'après (*)} \quad \forall b \in A \\ &\iff S(a, s, \pi(V)) \geq S(b, s, \pi(V)) \\ &\iff a \in f(\pi(V)) \\ &\iff x \in \sigma(f(\pi(V))) \\ &\iff f(\sigma(\pi(V))) = \sigma(f(\pi(V))). \end{aligned}$$

Donc f est neutre.

-Si f est composée, posons $f = f^2 \circ f^1$.

$f^{s^2} \circ f^{s^1}(\sigma(\pi(V))) = f^{s^2}(f^{s^1}(\sigma(\pi(V)))) = f^{s^2}(\sigma(f^{s^1}(\pi(V)))) = \sigma(f^{s^2} \circ f^{s^1}(\pi(V)))$ (car f^{s^1} et f^{s^2} sont neutres), ce qui montre que $f^{s^2} \circ f^{s^1}$ est neutre. ■

Une RCS anonyme et neutre est dite symétrique.

Propriété 2.1. *Toute correspondance de choix social à score est symétrique.*

Cette propriété découle des deux lemmes précédents.

Définition 2.3. ***(Consistance d'une CCS)[9]***

Soit g une CCS. g est consistante si pour deux profils $\pi(V)$, $\pi(V')$ définis sur deux populations disjointes (V et V'), on a :

$$g(\pi(V)) \cap g(\pi(V')) \neq \varnothing \Longrightarrow g(\pi(V \cup V')) = g(\pi(V)) \cap g(\pi(V'))$$

D'après cette définition, une CCS est consistante lorsque : si un candidat est vainqueur pour deux populations disjointes, alors il reste vainqueur pour la réunion des deux populations.

Lemme 2.3. *Toute correspondance de choix social est consistante.*

Preuve :

Soit f une CCS à score de vecteur score s. Montrons que f est consistante.

Soient V et V' deux populations disjointes et $\pi(V)$ et $\pi(V')$ deux profils tels que $f(\pi(V)) \cap f(\pi(V')) \neq \varnothing$. Montrons que $f(\pi(V)) \cap f(\pi(V')) = f(\pi(V \cup V'))$.

$\forall x \in f(\pi(V)) \cap f(\pi(V'))$, on a :

$S(x,s,\pi(V)) = max_{y\in A}S(y,s,\pi(V))$ et $S(x,s,\pi(V')) = max_{y\in A}S(y,s,\pi(V'))$.

Or $S(x,s,\pi(V \cup V')) = S(x,s,\pi(V)) + S(x,s,\pi(V'))$ car $V \cap V' = \varnothing$.

Donc $S(x,s,\pi(V \cup V')) = max_{y\in A}S(y,s,\pi(V \cup V')$. $\quad \Longrightarrow x \in f(\pi(V \cup V'))$.

Réciproquement, si $x \in f(\pi(V \cup V'))$, alors $x \in f(\pi(V))$ ou $x \in f(\pi(V'))$ car sinon on aura :

$$\begin{cases} S(x,s,\pi(V)) < max_{y\in A}S(y,s,\pi(V)) \\ et \\ S(x,s,\pi(V)) < max_{y\in A}S(y,s,\pi(V)) \end{cases}$$

$\Longrightarrow S(x,s,\pi(V \cup V')) < max_{y\in A}S(y,s,\pi(V \cup V))$, ce qui est absurde.

Supposons sans nuire à la généralité que $x \in f(\pi(V))$ et montrons que $x \in f(\pi(V'))$.

On sait que $f(\pi(V)) \cap f(\pi(V')) \neq \varnothing$, alors soit $z \in f(\pi(V)) \cap f(\pi(V'))$, on a :

$S(x,s,\pi(V)) = S(z,s,\pi(V))$ car $z,x \in f(\pi(V))$. De plus, $S(x,s,\pi(V \cup V')) = S(x,s,\pi(V \cup V))$ car $x,z \in f(\pi(V \cup V'))$. Donc $S(x,s,\pi(V')) = S(x,s,\pi(V')) \Longrightarrow x \in f(\pi(V'))$

car $\quad S(z,s,\pi(V')) = max_{y\in A}S(y,s,\pi(V'))$.

Donc $f(\pi(V)) \cap f(\pi(V')) = f(\pi(V \cup V'))$, ce qui montre que f est consistante.

Propriété 2.2. *Toute règle à score est symétrique et consistante.*

Cette propriété découle du lemme et de la propriété précédentes.

Définition 2.4. ***(Continuité)****[9]*

Soit f une CCS définie sur $\mathbb{Q}^{m!}$. f est continue si $\forall(a,b) \in A^2$ et pour toute suite (x_n) de profils de $\mathbb{Q}^{m!}$ telle que $\forall n \geq n_o \quad aR_{x_n}b$, alors $lim_{n\to\infty}x_n = x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow aR_xb$. Cette propriété est notée CONT

Lemme 2.4. *Toute règle à score simple est continue.*

Preuve :

Soit f^s une règle à score simple, montrons que f est continue.

Soit $(a,b) \in A$ et $(x_n)_n$ une suite de vecteurs score telle que $\forall n \geq n_0$, $aR_{x_n}b$ et $lim_{n\to\infty}x_n = x$.

Montrons que aR_xb. On a : $\forall n \geq n_o$,

$$\begin{aligned}
aR_{x_n}b &\iff S(a,s,x_n) \geq S(b,s,x_n) \\
&\iff \sum_{k=1}^{m} s_kT_{ak}(x_n) \geq \sum_{k=1}^{m} s_kT_{bk}(x_n) \qquad \text{où } T_{ak}(x_n) =\mid \{i \in V : rg(a, x_n^i) = k\} \mid \\
&\Longrightarrow lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} s_kT_{ak}(x_n) \geq lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} s_kT_{bk}(x_n) \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} s_k(lim_{n\to\infty}T_{ak}(x_n)) \geq \sum_{k=1}^{m} s_k(lim_{n\to\infty}T_{bk}(x_n)) \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} s_kT_{ak}(x) \geq \sum_{k=1}^{m} s_kT_{ak}(x) \\
&\Longrightarrow aR_xb.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que f est continue. ■

Le résultat d'existence recherché dans cette partie est énoncé par la propriété suivante. Elle découle du lemme 2.4 et de la propriété 2.2.

Propriété 2.3. *Toute CCS à score est symétrique et consistante. De plus, toute règle à score simple est continue.*

Cette propriété montrent l'existence d'une RCS symétrique et consistante, et d'une RCS symétrique, consistante et continue.

2.1.2 Unicité

Nous montrons dans ce paragraphe l'unicité des règles de choix social satisfaisant les propriétés d'anonymat, de neutralité, de consistance et de continuité définies plus haut.

Définition 2.5. ***(Vecteur situation de vote)**[9]*
Soit $\pi(V) \in \mathcal{R}^v$ un profil sur une population V. On appelle vecteur situation de vote de $\pi(V)$, le vecteur défini par : $\tilde{n}(\pi(V)) = (n(\pi(V))_1, ..., n(\pi(V))_{m!}) \in \mathbb{N}^{m!}$ tel que $n(\pi(V))_p$ est le nombre d'individus ayant le classement R_p, $p \in 1, 2, ..., m!$.

Si aucune confusion n'est possible, $\tilde{n}(\pi(V))$ sera noté $\tilde{n}(\pi)$ ou $\tilde{n}$.
Alors tout vecteur situation de vote est de la forme

$$\tilde{n} = (n_1, ..., n_{m!}) \text{ où } n_i =\mid \{j \in V : R_j = R_i\} \mid \quad \forall i = 1, ..., m!$$

Exemple :

En considérant l'exemple 1.1 de la page 5, le vecteur situation de vote de $\pi(V)$ est : $\tilde{n}(\pi(V)) = (2,3,2,2,1,2)$.

Le théorème suivant montre que si une RCS est anonyme, alors pour elle, tout profil est équivalent à son vecteur situation de vote. Cela signifie que son domaine de définition peut être identifié à l'ensemble des vecteurs situation de vote.

Théorème 2.2. *Soient $\pi(V)$ et $\pi'(V')$ deux profils sur deux populations de même taille telles que $\tilde{n}(\pi(V)) = \tilde{n}(\pi'(V'))$.*
Si une RCS f est anonyme, alors : $f(\pi(V)) = f(\pi'(V')) = f(\tilde{n})$.

Preuve :

Soient V, V' deux populations, $\pi(V)$ et $\pi(V')$ deux profils telles que $\tilde{n}(\pi(V)) = \tilde{n}(\pi'(V')) = \tilde{n}$.
Considérons $V" = \{1,...,v\}$ une troisième population telle que :

$$v = Card(V) = Card(V') = Card(V").$$

Soit $\gamma \in \Gamma(V, V")$ tel que $\gamma(\pi(V)) = \pi(V")$ et $\gamma' \in \Gamma(V', V")$ tel que $\gamma'(\pi'(V')) = \pi'(V")$.
Par anonymat, on a : $f(\pi(V)) = f(\gamma(\pi(V))) = f(\pi(V")) \quad (1)$.
De même, on a : $f(\pi'(V')) = f(\gamma'(\pi'(V'))) = f(\pi'(V")) \quad (2)$.
De plus, comme $\gamma(\pi(V)) = \pi(V")$, l'ensemble des préférences des éléments de V est égal à celui des éléments de V". Ainsi,

$$\tilde{n}(\pi(V)) = \tilde{n}(\gamma(\pi(V))) = \tilde{n}(\pi(V")).$$

De même, $\tilde{n}(\pi'(V')) = \tilde{n}(\pi'(V"))$.
Posons $\pi(V") = (L_1, ..., L_v)$ et $\pi'(V") = (L'_1, ..., L'_v)$.
Comme $\tilde{n}(\pi(V)) = \tilde{n}(\pi'(V')$, on a $\tilde{n}(\pi'(V")) = \tilde{n}(\pi(V"))$. Alors, $\exists \gamma" \in \Gamma(V", V")$ tel que $\gamma"(i) = j \Longleftrightarrow L_i = L'_j$.
D'où $\gamma"(\pi(V")) = \pi'(V")$ et par anonymat de f on a : $f(\pi(V")) = f(\gamma"(\pi(V"))) = f(\pi'(V"))$ (3).
D'après (1) (2) et (3), on a $f(\pi(V)) = f(\pi'(V')) = f(\tilde{n})$. ■
Ainsi, si une RCS est anonyme, alors son domaine est $\mathbb{N}^{m!}$.

Définition 2.6. ***(Indépendance d'un profil symétrique)****[9]*
Soit f une RCS symétrique, définie sur $\mathbb{N}^{m!}$. Alors, f est dite indépendante d'un profil symétrique si

et seulement si

$$\forall \tilde{n} \in \mathbb{N}^{m!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f(\tilde{n} + ke) = f(\tilde{n})$$

Cela signifie qu'une RCS est indépendante d'un profil symétrique lorsqu'en ajoutant un même nombre de points à tous les candidats on ne change rien sur le résultat de l'élection.
Le théorème suivant montre que si une RCS est symétrique et indépendante d'un profil, alors on peut étendre son domaine à $\mathbb{Z}^{m!}$.

Théorème 2.3. *Soit f une RCS symétrique et indépendante d'un profil symétrique défini sur $\mathbb{N}^{m!}$. Alors il existe un unique prolongement de f sur $\mathbb{Z}^{m!}$ définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \tilde{n} \in \mathbb{N}^{m!}, \quad f(\tilde{n} - ke) = f(\tilde{n}).$$

Preuve :
Déterminons le prolongement $\tilde{f}$ de f sur $\mathbb{Z}^{m!}$. Soit $\tilde{a} \in \mathbb{Z}^{m!}$, $\tilde{a} = (a_1, ..., a_{m!})$ telle que $\tilde{a} \notin \mathbb{N}^{m!}$. Alors $\exists i \in \{1, ..., m!\}$ tel que $a_i < 0$. Posons : $\alpha = min\{a_i, 1 \leq i \leq m!\}$, alors $\alpha < 0$; de plus, $\tilde{a} - \alpha e \in \mathbb{N}^{m!}$.
Posons :

$$\tilde{f}(\tilde{a}) = \begin{cases} f(\tilde{a}) & si \quad \tilde{a} \in \mathbb{N}^{m!} \\ f(\tilde{a} - \alpha e) & sinon. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est bien définie car f est indépendante d'un profil symétrique. De plus, $\tilde{f}$ est indépendant d'un profil symétrique. Montrons que $\tilde{f}$ ainsi définie est unique :
Supposons le contraire ; soit alors $g : \mathbb{Z}^{m!} \longrightarrow \mathcal{L}$, indépendante d'un profil symétrique et prolongeant f sur $\mathbb{Z}^{m!}$. On a alors $\tilde{f}_{/\mathbb{N}^{m!}} = g_{/\mathbb{N}^{m!}}$. Soit $\tilde{a} \in \mathbb{Z}^{m!}$, $\tilde{a} = (a_1, ..., a_{m!})$ et $\tilde{a} \notin \mathbb{N}^{m!}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{a}) &= f(\tilde{a} - \alpha e) \\ &= g(\tilde{a} - \alpha e) \quad car \quad \tilde{a} - \alpha e \in \mathbb{N}^{m!} \\ &= g(\tilde{a}) \end{aligned}$$

car g est indépendant d'un profil symétrique. ■

Définition 2.7. ***(Homogénéité)****[9]*
Soit $V^1, V^2, ..., V^k$, k populations disjointes de même taille v, π un profil tel que $\forall t \in \{1, ..., k\}$, $\pi(V^t) = \pi(V^1)$. Soit $\pi(kV^1) = \pi(V^1 \cup V^2 \cup ... \cup V^k)$. Alors, une RCS f est homogène si et seulement si $f(\pi(kV^1)) = f(\pi(V^1))$.

Cette condition stipule que si les électeurs sont répliqués k fois avec chaque fois les mêmes préférences, créant ainsi une nouvelle population de taille kv, le résultat collectif est le même que pour la population V.

Le théorème suivant montre que cette condition peut permettre d'étendre le domaine d'une RCS.

Théorème 2.4. *Soit f une RCS homogène, symétrique et indépendante d'un profil symétrique définie sur $\mathbb{Z}^{m!}$. Alors il existe une unique extension de f sur $\mathbb{Q}^{m!}$ définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \tilde{n} \in \mathbb{Z}^{m!}, f(\frac{\tilde{n}}{k}) = f(\tilde{n}).$$

Preuve :

Existence :

Soit $\tilde{a} \in \mathbb{Q}^{m!}, \tilde{a} = (a_i)_{i=1,\dots,m!}$. $\forall i \in \{1, ..., m!\}, a_i \in \mathbb{Q}$. Alors, $\exists (n_i, k_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a_i = \frac{n_i}{k_i}$ et tel que $a_i = \frac{n_i}{k_i}$ soit irréductible.

Posons $p = ppcm\{k_i, 1 \leq i \leq m!\}$. Alors $p\tilde{a} \in \mathbb{Z}^{m!}$.

Posons :

$$\tilde{f}(\tilde{a}) = \begin{cases} f(\tilde{a}) & si \quad \tilde{a} \in \mathbb{Z}^{m!} \\ f(p\tilde{a}) & sinon \end{cases}$$

$\tilde{f}$ ainsi définie prolonge f sur $\mathbb{Q}^{m!}$ et $\tilde{f}$ est bien définie car f est homogène.

De plus, $\tilde{f}$ est homogène. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \tilde{a} \in \mathbb{Q}^{m!}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k\tilde{a}) &= f(kp\tilde{a}) \\ &= f(p\tilde{a}) \quad \text{car } f \text{ est homogène} \\ &= \tilde{f}(\tilde{a}) \end{aligned}$$

Donc $\tilde{f}$ est homogène.

Unicité :

Soit g une RCS homogène qui prolonge f sur $\mathbb{Q}^{m!}$, montrons que $g = \tilde{f}$. On a : $\tilde{f}_{/\mathbb{Z}^{m!}} = g_{/\mathbb{Z}^{m!}}$.

Soit $\tilde{a} \in \mathbb{Q}^{m!}$ telle que $\tilde{a} \notin \mathbb{Z}^{m!}$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{a}) &= f(p\tilde{a}) \\ &= g(p\tilde{a}) \quad car \quad pa \in \mathbb{Z}^{m!} \\ &= g(\tilde{a}) \quad car \quad g \quad est \quad homogne. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{f}$ est unique. ■

Ce dernier théorème montre que le domaine d'une RCS symétrique, homogène et indépendante d'un profil symétrique peut être le suivant :

$$S(m!) = \left\{ x = (x_1, ..., x_{m!}) \in \mathbb{Q}^{m!} / \sum_{t=1}^{m!} = 1, \text{ et } x_t \geq 0, 1 \leq t \leq m! \right\}$$

où x_t est la fraction des votants possédant L_t comme préférence individuelle.

Formellement, on peut définir une règle à score f^s définie sur $\mathbb{Q}^{m!}$ comme suit : pour $L_p \in \mathcal{L}$, soit E_p la matrice de m lignes et m colonnes contenant 1 à la position (i, j) ssi a_j est la i-ieme alternative de L_p. Pour tout $\tilde{n} \in \mathbb{Q}^{m!}$, on définit :

$$T(\tilde{n}) = \sum_{L_p \in \mathcal{L}} n_p E_p \quad \text{ où } \tilde{n} = (n_p)_{1 \leq p \leq m!}.$$

Le vecteur colonne $T_j(\tilde{n})$ donne les positions qu'occupe l'alternative a_j dans le profil $\tilde{n}$.
Soit $\pi(V)$ un profil et $\tilde{n}$ son vecteur situation de vote ; soit s un vecteur score. Alors, la règle à score simple f^s est définie par :

$$a_i R^s_{\tilde{n}} a_j \iff s.T_i(\tilde{n}) \geq s.T_j(\tilde{n}) \text{ avec } R^s_{\tilde{n}} = f^s(\tilde{n})$$

où $s.T_i(\tilde{n})$ est le score de l'alternative a_i avec pour vecteur score s et pour vecteur situation de vote $\tilde{n}$.
Le résultat d'unicité recherché dans ce paragraphe est donné par la propriété suivante que nous démontrons dans la suite.

Propriété 2.4. *Soit f une CCS. Si f vérifie les propriétés (A), (N) et (C) alors f est une règle à score. De plus, si f satisfait CONT, alors f est une règle à score simple.*

Pour démontrer cette propriété, nous allons utiliser la notion d'ensemble $\mathbb{Q}$-convexe. En général, on dit qu'un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est $\mathbb{Q}$-convexe si :

$$S \subseteq \mathbb{Q}^n \text{ et } \forall (x, y) \in S^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q} : \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ on a } \lambda x + (1 - \lambda) y \in S.$$

Pour deux alternatives a et b de A et une règle à score simple f^s, on définit $D^s_a = \{x \in \mathbb{Q}^{m!} / a R^s_x b\}$. C'est l'ensemble des profils pour lesquels a est meilleure que b pour f^s. L'ensemble D^s_a est $\mathbb{Q}$-convexe. En effet, pour $x, y \in D^s_a$, on a $s.T_a(x) \geq s.T_b(x)$ et $s.T_a(y) \geq s.T_b(y)$. Ainsi, pour tout rationnel $\lambda \in [0, 1]$,

$$s.(T_a(x) + (1 - \lambda) T_a(y)) \geq s.(T_b(x) + (1 - \lambda) T_b(y)) \text{ i.e } a R_{\lambda x + (1-\lambda) y} b \text{ et par suite, } \lambda x + (1 - \lambda) y \in D^s_a.$$

On montre de même que $B_a^s = \{x \in \mathbb{Q}^{m!}/aP_x^s b\}$ est $\mathbb{Q}$-convexe.

Pour $S \subseteq \mathbb{R}^n$, soit $CvxS$ la couverture convexe de S. On a l lemme suivant. Nous aurons besoin dans la suite des résultats suivants.

Lemme 2.5. *Young[1974]*
Si S est $\mathbb{Q}$-convexe, alors $\bar{S} = \overline{CvxS}$ et $\bar{S}$ est convexe.

Propriété 2.5. *Toute CCS symétrique et consistante est homogène et indépendante d'un profil symétrique.*

Preuve :

Soit f un CCS symétrique et consistante. Posons e le vecteur de $\mathbb{N}^{m!}$ qui contient 1 sur ses m ! composantes. f est anonyme et neutre, donc f ne privilégie aucun candidat ni aucun électeur. Ainsi, on a $f(e) = A$.

Soit $\tilde{n}$ un profil, $k \in \mathbb{N}^*$, montrons que $f(\tilde{n}) = f(\tilde{n} + ke)$.

Comme f est consistante, on a :

$$f(e) \cap f(e) = f(e) \neq \varnothing \Longrightarrow f(2e) = f(e) \cap f(e) = f(e) = A.$$

On montre ainsi que $f(ke) = A \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(\tilde{n}) &= f(\tilde{n}) \cap A = f(\tilde{n}) \cap f(ke) \neq \varnothing \\ &\Longrightarrow f(\tilde{n}) = f(\tilde{n} + ke) \end{aligned}$$

Donc f consistante $\Longrightarrow f$ indépendante d'un profil symétrique.

Soient $V^1, V^2, ..., V^k$ k populations disjointes de même taille v et π un profil tel que : $\forall t \in \{1, 2..., k\}$, $\pi(V^t) = \pi(V^1)$. Montrons que $f(\pi(kV^1)) = f(\pi(V^1))$.

On a : $f(\pi(V^1)) \cap f(\pi(V^2)) \neq \varnothing \Longrightarrow f(\pi(V^1 \cup V^2)) = f(\pi(V^1)) \cap f(\pi(V^2)) = f(\pi(V^1))$

$f(\pi(V^1 \cup V^2)) \cap f(\pi(V^3)) = f(\pi(V^1)) \cap f(\pi(V^3)) \neq \varnothing \Longrightarrow f(\pi(V^1 \cup V^2 \cup V^3)) = f(\pi(V^1 \cup V^2)) \cap f(\pi(V^3)) = f(\pi(V^1) \cap f(\pi(V^3)) = f(\pi(V^1))$.

On montre ainsi que $f(\pi(V^1 \cup V^2 \cup ... \cup V^k)) = f(\pi(kV^1)) = f(\pi(V^1))$

Donc f est homogène, on peut donc étendre le domaine de f à $\mathbb{Q}^{m!}$. ■

Puisque f est symétrique, homogène et indépendant d'un profil symétrique, on peut donc étendre le domaine de f à $\mathbb{Q}^{m!}$.

Preuve de la propriété 2.4

Soit $(a,b) \in A$. On définit l'application suivante :

$$\alpha^{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^{m!} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{m} \\ x & \longmapsto & \alpha^{a,b}(x) = T_a(x) - T_b(x) \end{array}$$

tel que $\alpha_i^{a,b}(x)$ est le nombre de fois où a occupe la position i dans x moins le nombre de fois où b occupe la position i dans x. ie

$$\alpha_i^{a,b}(x) = |\{j \in V : rg(a, x_j) = i\}| - |\{j \in V : rg(b, x_j) = i\}| \quad \text{où } x = (x_1, ..., x_{m!}).$$

Il est clair que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{a,b}(x) = n - n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^{m!}$. Ce qui montre que $dimIm(\alpha^{a,b}) = m - 1$.
Or $\mathbb{Q}^{m!}$ et $\mathbb{Q}^{m}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ et de plus, $\alpha^{a,b}$ est une application linéaire, on a alors :

$$dim(\mathbb{Q}^{m!}) = dimKer(\alpha^{a,b}) + dimIm(\alpha^{a,b}).$$

Ce qui montre que $dimKer(\alpha^{a,b}) = m! - (m-1)$ avec $Ker(\alpha^{a,b}) = \{x \in \mathbb{Q}^{m!} / \quad \alpha^{a,b}(x) = 0\}$.
Déterminons une base de $Ker(\alpha^{a,b})$. On utilisera deux catégories d' éléments de $\mathcal{L}$.
Pour tout $L_p \in \mathcal{L}$, soit e_p le profil contenant 1 à la p-ieme coordonnée et 0 ailleurs.

1ère catégorie :

Soit $\mathcal{L}'$ l'ensemble des préférences de $\mathcal{L}$ dans lesquels ni a ni b n'est placé au rang m. $\mathcal{L}'$ a $(m-2)(m-1)!$ éléments. En effet, l'obtention d'un élément de $\mathcal{L}'$ se fait par une succession de 2 expériences : la première qui consiste à choisir les positions de a et b qui produit $2C_{m-1}^{2}$ résultats, la deuxième qui consiste à placer les autres éléments qui produit $(m-2)!$ résultats.
On a donc $Card(\mathcal{L}') = 2C_{m-1}^{2} \times (m-2)! = (m-2)(m-1)!$
Pour chaque $L_p \in \mathcal{L}'$, on associe le profil $\eta_p = e_p + e_{\sigma(p)} + e_{\sigma^2(p)}$, où σ est une permutation de $\{a, b, x\}$, x étant le m-ieme élément de L_p. Montrons que $\forall L_p \in \mathcal{L}', \quad \alpha^{a,b}(\eta_p) = 0$.
On a :

$$\alpha^{a,b}(\eta_p) = T_a(\eta_p) - T_b(\eta_p)$$

$$\begin{array}{ccccc} rg(a, L_p) & \xrightarrow{\sigma} & rg(a, L_{\sigma(p)}) = rg(b, L_p) & \xrightarrow{\sigma^2} & rg(x, L_p) \\ rg(b, L_p) & \xrightarrow{\sigma} & rg(b, L_{\sigma(p)}) = rg(x, L_p) & \xrightarrow{\sigma^2} & rg(a, L_p) \\ rg(x, L_p) & \xrightarrow{\sigma} & rg(x, L_{\sigma(p)}) = rg(a, L_p) & \xrightarrow{\sigma^2} & rg(b, L_p) \end{array}.$$

Soit j, k et m les positions occupées par a, b et x dans L_p.

$$\text{Alors, } \forall i \in \{1, ..., m\}, \quad i \notin \{j, k, m\} \Longrightarrow T_a^i(\eta_p) = 0 = T_b^i(\eta_p)$$

car ni a ni b n'occupe la position i dans η_p.
Si $i \in \{j, k, m\}$, $\quad T_a^i(\eta_p) = 1 = T_b^i(\eta_p)$ et par suite, $T_a^i(\eta_p) - T_b^i(\eta_p) = \alpha_i^{a,b}(\eta_p) = 0$.
Donc $\alpha^{a,b}(\eta_p) = 0_{\mathbb{R}^m} \quad \forall L_p \in \mathcal{L}', \quad i.e \quad \eta_p \in Ker\alpha^{a,b} \quad \forall L_p \in \mathcal{L}'$.

Montrons que $(\eta_p)_p$ ainsi définie est libre.
Soient $p, q \in \{1, ..., m!\} \quad /L_p \in \mathcal{L}'$. Alors, $p \neq q \Longrightarrow \sigma(p) \neq \sigma(q) \Longrightarrow \sigma^2(p) \neq \sigma^2(q)$. Car σ est une permutation. Si $\sigma(p) = \sigma^2(q)$, alors $p = \sigma(q)$ ce qui est absurde car $L_{\sigma(q)} \notin \mathcal{L}'$ mais $L_p \in \mathcal{L}'$. Donc $\forall p \neq q, \quad \sigma(p) \neq \sigma^2(q)$. De même, $\forall p \neq q, \quad p \neq \sigma(q)$. Ce qui montre que pour tout η_p et η_q tel que $p \neq q$, aucune composante de η_p contenant 1 ne rencontre une composante de η_q contenant 1. Ainsi, les $(\eta_p)_p$ sont linéairement indépendants.

2ieme catégorie :

$$\text{Posons} \quad \mathcal{L}" = \{L \in \mathcal{L} : \quad rg(a, L) = m \text{ ou } rg(b, L) = m\}$$

Les éléments de $\mathcal{L}"$ tels que a est en dernière position sont au nombre de $(m-1)!$; ceux tels que b est en dernière position sont également au nombre de $(m-1)!$. Donc $\mathcal{L}"$ a $2(m-1)!$ éléments.
Considérons les éléments de $\mathcal{L}"$ comme les sommets d'un graphe dans lequel L_p et L_q sont adjacents si L_p est obtenu de L_q en permutant a avec b ou en permutant a avec b et c avec d où c et d sont différents de a et b.
Ce graphe comporte plusieurs composantes connexes définies comme suit.

Définition 2.8. ***(Composante connexe)***
Soit C une portion du graphe précédent. C est une composante connexe si : $R, R' \in C \Longleftrightarrow R$ *est adjacent à R' ou s'il existe une suite d'adjacence dans C qui relie R et R'.*

Le lemme suivant nous permet de décrire les éléments d'une composante connexe.

Lemme 2.6. *Soit C une composante connexe. Alors* $R, R \in C \Longleftrightarrow \{rg(a, R), rg(b, R)\} = \{rg(a, R'), rg(b, R')\}$.

Preuve :
Si $R, R' \in C$, Soient $R_1, R_2, ..., R_p$ la suite d'adjacence qui relie R à R' (avec $R = R_1$ et $R' = R_p$).
Alors $\forall i \in \{1, ..., p\}$, $\{rg(a, R_i), rg(b, R_i)\} = \{rg(a, R_{i+1}), rg(b, R_{i+1})\}$ par définition de R_i et R_{i+1}.
Donc $\{rg(a, R), rg(b, R)\} = \{rg(a, R'), rg(b, R')\}$.

Montrons que si $\{rg(a,R),rg(b,R)\} = \{rg(a,R'),rg(b,R')\}$, alors R et R' appartiennent à la même composante connexe.

Posons $\{rg(a,R),rg(b,R)\} = \{i,m\}$ et $\gamma = (im)$. Comme R et R' ont le même nombre d'élément, il existe une bijection R vers R'. Soit β une telle bijection. On sait que toute permutation de $\{1,...,m\}$ peut se décomposer en un produit de transpositions.

Soit donc $\beta = \sigma_1...\sigma_k$ une telle décomposition. Pour $t = 1,...,k$, on pose $\beta_t = \sigma_t \circ \gamma$, $R_k = \beta(R')$ et pour $t = k-1,...,1$, $R_t = \beta_t(R_{t+1})$ et $R_1 = R$. D'après cette définition, R_k est adjacent à R' et par induction sur t, on montre que R est adjacent à R'.

On conclut donc que deux relations R et R' sont dans la même composante connexe ssi $\{rg(a,R),rg(b,R)\} = \{rg(a,R'),rg(b,R')\}$, ce qui montre qu'on a exactement $m-1$ composantes connexes.

Dans une composante connexe, il y a autant d'éléments se terminant par a que d'éléments se terminant par b, de plus, les positions de a et b sont fixées. Pour choisir un élément se terminant par a, on choisit c et d distincts de a et b qui produit C_{m-2}^2 résultats et on permute les autres éléments et cette expérience produit $(m-4)!$ résultats. Ainsi, dans une composante connexe, on a $2\times C_{m-2}^2 \times (m-4)! = (m-2)!$ éléments se terminant par a, donc chaque composante connexe à $2(m-2)!$ éléments. Pour deux éléments L_p et L_q dans la même composante connexe, on pose : $\epsilon_{pq} = e_p + e_q$ on a donc $(m-1)(2(m-2)!-1)$ vecteur ϵ_{pq} pour tout le graphe.

Montrons que les ϵ_{pq} sont linéairement indépendants dans chaque composante connexe.

Soit C une composante connexe. Posons $T = \{L_{t_1},...,L_{t_{2(m-2)!}}\}$ l'ensemble des éléments de C tels que L_{t_i} et $L_{t_{i+1}}$ soient adjacents. Soit $(\lambda_{t_{i+1}}^{t_i}) \subset \mathbb{R}^{2(m-2)!}$ tels que $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t+1}^{t_i}\epsilon_{t_i,t_{i+1}} = O_{\mathbb{R}^{m!}}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t+1}^{t_i}\epsilon_{t_i,t_{i+1}} &= \sum_{0\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t+1}^{t_i}(e_{t_i}+e_{t_{i+1}}) \\
&= \sum_{0\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t_{i+1}}^{t_i} e_{t_i} + \sum_{0\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t_{i+1}}^{t_i} e_{t_{i+1}} \\
&= \lambda_{t_2}^{t_0} e_{t_0} + \sum_{1\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t_{i+1}}^{t_i} e_{t_i} + \sum_{1\leq j\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t_j}^{t_{j-1}} e_{t_j} + \lambda^{2(m-2)!-1} e_{2(m-2)!} \\
&= \lambda_{t_2}^{t_0} e_{t_0} + \sum_{1\leq i\leq 2(m-2)!-1} (\lambda_{t_{i+1}}^{t_i} + \lambda_{t_j}^{t_{i-1}}) e_{t_i} + \lambda^{2(m-2)!-1} e_{2(m-2)!}
\end{aligned}$$

Alors on a , $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq 2(m-2)!-1} \lambda_{t+1}^{t_i}\epsilon_{t_i,t_{i+1}} = O_{\mathbb{R}^{m!}} \iff \begin{cases} \lambda_{t_1}^{t_0} = 0 \\ \lambda_{t_{i+1}}^{t_i} + \lambda_{t_i}^{t_{i-1}} = 0 \quad i = 1,...,2(m-2)!-1 \\ \lambda_{2(m-2)!}^{2(m-2)!-1} = 0 \end{cases}$

Ce qui montre que $\lambda_{t_{i+1}}^{t_i} = 0 \quad \forall i = 1, ..., 2(m-2)!$ et on a le résultat recherché. ■

Lemme 2.7. *Young[1974]*
La famille $\{\eta_p, \epsilon_{p,q}\}$ définie plus haut est linéairement indépendante pour tout le graphe($L_p, L_q \in \mathcal{L}$).

Montrons que $(\epsilon_{p,q}) \subset Ker(\alpha^{a,b})$.
On a $\epsilon_{a,b} = e_q + e_p$, soit $\{k, m\}$ l'ensemble des positions occupés par a et b dans L_p et L_q.
$\forall i \in 1, ..., m$, $i \notin k, m \Longrightarrow T_a^i(\epsilon_{p,q}) = 0 = T_b^i(\epsilon_{p,q})$.
$i \in k, m \Longrightarrow T_a^i(\epsilon_{p,q}) = 1 = T_b^i(\epsilon_{p,q})$. Alors $\alpha_i^{a,b}(\epsilon_{p,q}) = T_a^i(\epsilon_{p,q}) - T_b^i(\epsilon_{p,q}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., m$.
Donc $(\epsilon_{p,q}) \subset Ker(\alpha^{a,b})$.

$$\text{Posons} \quad W_1 = (\eta_p), \quad W_2 = (\epsilon_{p,q}), \quad W = W_1 \cup W_2.$$

Alors W est une base de $Ker(\alpha^{a,b})$ car on a $W \subset Ker(\alpha^{a,b})$, $\quad Card(W_1) = (m-2)(m-1)!$, $\quad Card(W_2) = (m-1)(2(m-2)! - 1)$ et $dim(Ker(\alpha^{a,b})) = m! - (m-1) = Card(W)$.

Considérons l'ensemble W précédent. Il est clair que $\forall x \in W$, a et b occupent exactement les mêmes positions et le même nombre de fois dans x. Ainsi, puisque f est symétrique, on a aI_xb. Cependant, puisque tout profil de $Ker\alpha^{a,b}$ est combinaison linéaire des éléments de W (avec de coefficients rationnels), on a :

$$\forall x \in Ker\alpha^{a,b}, \quad x = \sum_i \lambda_i w_i, \quad w_i \in W, \quad \lambda_i \in \mathbb{Q}.$$

Puisque $aI_{w_i}b \quad \forall i$, on a $aI_{\lambda_i w_i}b$. Par consistance de f, on a $aI_{\sum_i \lambda_i w_i}b$, i.e aI_xb.
Soient x et y deux profils de $\mathbb{Q}^{m!}$. Si $\alpha^{a,b}(x) = \alpha^{a,b}(y)$, alors $x - y \in Ker\alpha^{a,b}$. Ainsi, $aI_{x-y}b$. Or $x = x - y + y$, donc aP_xb ssi aP_yb. Ainsi, f relativement à a et b dépend uniquement de $\alpha^{a,b}(x) \in \mathbb{Q}^m$ et on peut considérer comme domaine de f l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{Q}^m / \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 0\}$ et on a le lemme suivant.

Lemme 2.8. *Young[1974]*
Considérons les ensembles : $D = \{x \in \mathbb{Q}^m / \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 0\}$, $\quad D_1 = \{x \in D / \quad aP_xb\}$, $\quad D_2 = \{x \in D / \quad bP_xa\}$. Alors $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ ont des intérieures (relativement à D) non vides et d'intersection vide.

Dans la suite, nous aurons aussi besoin des résultats suivants.

Théorème 2.5. ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)**[5]*

Soit H un espace de Hilbert. Étant donné l une forme linéaire sur H, il existe $y \in H$ unique tel que :

$$l(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H. \text{ De plus, on a : } \mid y \mid = \parallel l \parallel_{H'}$$

.

Théorème 2.6. ***(De séparation des convexes)[2]***

Soit E un espace de Hilbert. Soient H et M deux convexes disjoints tels que l'un des deux contient un point intérieur. Il existe $l \in E^*$ tel que et une constante c tels que $l(u) \leq c \leq l(v)$ pour tout $u \in H$, $v \in M$.

Les ensembles $D_1 = \{x \in D/ \quad aP_xb\}$ et $D_2 = \{x \in D/ \quad bP_xa\}$ sont $\mathbb{Q}$-convexes (par consistance de f) et disjoints (par antisymétrique de f). De plus, D_1 et D_2 sont non vides. D'après le lemme 2.8, $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont des ensembles non vide convexes.
Si $\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \neq \overline{D} = \{x \in \mathbb{R}^m / \sum_{i=1}^{m} x_i = 0\}$, alors l'ensemble $\overline{D} \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$ est un ouvert de $\overline{D}$ contenant un rationnel x pour lequel aI_xb. Pour tout $y \in \overline{D_1}$, et $\lambda > 0$ un rationnel suffisamment petit tel que $(1-\lambda)x + \lambda y$ est un rationnel de $\overline{D} \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$, on a $aP_{(1-\lambda)x+\lambda y}b$, ce qui est absurde. Donc $\overline{D} = (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$. D'après le lemme 2.5 précédent, $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont deux ensembles convexes avec des intérieurs disjoints non vides (relativement à D), alors d'après le théorème de séparation des convexes, il existe une forme linéaire l sur $\overline{D}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $l(x) \leq c \leq l(y) \quad \forall x \in \overline{D_1}, y \in \overline{D_2}$.
Posons $g = l - c$. On a $g(x) \leq 0 \leq g(y) \quad \forall x \in \overline{D_1}, y \in \overline{D_2}$.
Puisque g est une forme linéaire sur $\overline{D}$, d'après le théorème de représentation de Riez, il existe un vecteur non nul $s^1 \in \overline{D}$ tel que $g(x) = \langle s^1, x \rangle = s^1.x \quad \forall x \in \overline{D}$. i.e $s^1.x \geq 0 \quad \forall x \in \overline{D_1}$ et $s^1.x \leq 0 \quad \forall x \in \overline{D_2}$.
Si $x \in D$ et $s^1.x > 0$, alors $x \in \overline{D_1} \setminus \overline{D_2}$, ainsi, x est un vecteur intérieure à $\overline{D_1}$ et puisque x est rationnel, on a $x \in D_1$. Cependant, $s^1.x > 0 \Longrightarrow aP_xb$.
De même, $\forall x \in D$, $s^1.x < 0 \Longrightarrow bP_xa$.
Si $D^1 = \{x \in D/ \quad s^1.x = 0\}$ contient des points x tels que aP_xb, on peut définir $D_1^1 = \{x \in D^1/ \quad aP_xb\}$ et $D_2^1 = \{x \in D^1/ \quad bP_xa\}$.
En appliquant le même argument précédant sur D^1, on obtient qu'il existe un vecteur non nul s^2 non colinéaire à s^1 tel que $\forall x \in D^1, \quad s^2.x > 0 \Longrightarrow aP_xb$ et $\forall x \in D^1, \quad s^2.x < 0 \Longrightarrow bP_xa$. Puisque D est de dimension fini $m-1$, cette construction se termine avec la construction d'une sequence de vecteurs $s^1, s^2, ..., s^k$.

Lemme 2.9. *Young[1974]*
Les vecteurs $s^1, s^2, ..., s^k$ sont tels que : $\forall i = 1, ..., k, \quad s^i_j \geq s^i_{j+1} \quad \forall i = 1, ..., m$ et $s^i_1 > s^i_m$. De plus, si f est continue, alors $aI_x b \, \forall x \in D^1$.

D'après le lemme précédent, f est une règle à score pour la paire $\{a, b\}$. De plus, si f est continue, c'est une règle à score simple. Par symétrie de f, ces mêmes vecteurs sont construits pour une paire quelconque d'éléments de A ce qui montre que f est une règle à score. ■
L'existence et l'unicité des règles de choix social vérifiant les propriétés (A), (N), (C) et (CONT) nous permettent d'obtenir le théorème suivant qui donne une caractérisation axiomatique des règles à score.

Théorème 2.7. *Une correspondance de choix social est symétrique et consistante si et seulement si c'est une règle à score. De plus, elle est continue si et seulement si c'est une règle à score simple.*

Ce théorème découle des propriétés 2.3 et 2.4. Cette caractérisation est propre à toute règles à score, simple ou composée. Cependant, chaque règle à score peut encore avoir ses caractérisations particulières. Dans la suite, nous allons nous intéresser à deux règle à scores particulières à savoir la règle de Borda et la règle de la pluralité.

2.2 Quelques cas particuliers

2.2.1 Cas de la pluralité

2.2.1.1 Le théorème de Lepelley

Dans cette partie, on veut répondre à la question de savoir s'il existe des règles de choix social vérifiant des propriétés normatives à l'instar de : la symétrie, la consistance, la continuité et la propriété de condorcet faible que nous définirons dans la suite. Nous répondons par l'affirmative en considérant la règle de la pluralité. C'est la règle à score simple dont le vecteur score est : $s = (1, 0, ..., 0)$. L'élu ici est le candidat qui est le plus souvent classé en tête dans les préférences des électeurs.

Définition 2.9. ***(Condorcet fort)****[9]*

Une alternative $x \in A$ est un vainqueur fort de condorcet si pour tout profil d'ordre $\pi(V)$,

$$Card\{i \in V / xP_iy \quad \forall y \in A \setminus \{x\}\} > v/2$$

Une règle de choix social vérifie la propriété de "condorcet fort" ssi son unique vainqueur est le vainqueur fort de condorcet lorsqu'il existe.

Cette propriété est notée $COND^{-}$.

Définition 2.10. ***(Consistance d'une CCS)****[9]*
Soit g une CCS. g est consistante si pour deux profils $\pi(V)$, $\pi(V')$ définis sur deux populations disjointes (V et V'), on a :

$$g(\pi(V)) \cap g(\pi(V')) \neq \varnothing \Longrightarrow g(\pi(V \cup V')) = g(\pi(V)) \cap g(\pi(V'))$$

Le théorème suivant donne une axiomatisation de la règle de la pluralité.

Théorème 2.8. *Lepelley[7]*
La seule CCS qui vérifie les propriétés SYM, CONT, CONS et $COND^{-}$ est la pluralité.

L'objectif de ce paragraphe est de donner une preuve à ce théorème.

Propriété 2.6. .
Soit F_α une CCS (resp f_α une PAP) à score de vecteur score α. Alors $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$, $F_\alpha = F_{k\alpha}$ (resp $f_\alpha = f_{k\alpha}$).

Preuve : Soient $x, y \in A$, π un profil sur une population V.
$x \in F_{k\alpha}(\pi) \Longleftrightarrow S(x, k\alpha, \pi) = max_{z\in A} S(z, k\alpha, \pi)$. Or $\forall z \in A$,

$$\begin{aligned} S(z, k\alpha, \pi) &= \sum_{i\in V} k\alpha_{rg(z,\pi^i)} && (2.1)\\ &= k\sum_{i\in V} \alpha_{rg(z,\pi^i)} && (2.2)\\ &= kS(z, \alpha, \pi) && (2.3) \end{aligned}$$

-Pour la CCS F, on a :

$$\begin{aligned} x \in F_{k\alpha}(\pi) &\Longleftrightarrow & kS(x, \alpha, \pi) &= kmax_{z\in A} S(s, \alpha, \pi)\\ &\Longleftrightarrow & S(x, \alpha, \pi) &= max_{z\in A} S(z, \alpha, \pi)\\ &\Longleftrightarrow & x \in F_\alpha(\pi). \end{aligned}$$

Donc $F_\alpha = F_{k\alpha}$.

-Pour la PAP f, on a :

$$\begin{aligned} x \geq_{f_{k\alpha}(\pi)} y &\iff S(x,k\alpha,\pi) \geq S(y,k\alpha,\pi) \\ &\iff kS(x,\alpha,\pi) \geq kS(y,\alpha,\pi) \\ &\iff S(s,\alpha,\pi) \geq S(y,\alpha,\pi) \\ &\iff x \geq_{f_\alpha(\pi)} y \end{aligned}$$

Donc $f_{k\alpha} = f_\alpha$.

Lemme 2.10. .

Soit F une règle à score simple de vecteur score α. Alors, il existe un vecteur score β tel que : $F_\alpha = F_\beta$, $\beta_1 = 1$ et $\beta_m = 0$.

Preuve : .

Soit π un profil sur un population V de taille v, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_m$ et $\alpha_1 > \alpha_m$.

$\forall i \in \{1, ..., m-1\}$, $\quad \alpha_i - \alpha_m \geq 0$ et $\alpha_1 - \alpha_m > 0$.

Posons :

$$\beta = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m}, \frac{\alpha_2-\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m}, ..., \frac{\alpha_m-\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m}\right) \tag{2.4}$$

$$= \left(1, \frac{\alpha_2-\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m}, ..., 0\right) \tag{2.5}$$

β est un vecteur score.

$\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} S(x,\beta,\pi) &= \sum_{i=1}^{m} x_i\beta_i, \quad \text{avec} \quad x_i = \mid \{j \in V : \quad rg(x,\pi^j) = i\} \mid \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\alpha_i-\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m} \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\alpha_i}{\alpha_1-\alpha_m} - \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m} \\ &= S(x, \frac{\alpha}{\alpha_1-\alpha_m}, \pi) - n\frac{\alpha_m}{\alpha_1-\alpha_m} \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit d'après la propriété précédente que $F_\alpha = F_\beta$.

Preuve du théorème de Lepelley :

Montrons que la règle de la pluralité vérifie les propriétés SYM, CONT, CONS et $COND^-$.

D'après le théorème de Young[14], la règle de la pluralité est symétrique, consistante et continue car c'est une règle à score simple. Il reste donc à montrer qu'elle vérifie $COND^{-}$.

Soit $x \in A$ et $\pi(V)$ un profil tel que $\quad Card\{i \in V/xP_iy \quad \forall y \in A \setminus \{x\}\} > v/2 \quad (*)$ où $v = \mid V \mid$. Montrons que $Plur(\pi(V)) = \{x\}$.

Si $\forall y \in A \setminus \{x\}$ on a xP_iy alors, x est placé en tête des préférences de l'électeur i. i.e l'électeur i attribue un point au candidat x et zero point à tout les autres. Ainsi, (*) implique que x est placé en tête des préférences de plus de la moitié des électeurs. i.e $S(x, s, \pi(V)) > v/2$. Or $\sum\limits_{y \in A} S(y, s, \pi(V)) = v$, donc $S(x, s, \pi(V)) > S(y, s, \pi(V)) \quad \forall y \in A\setminus\{x\}$. i.e $Plur(\pi(V)) = \{x\}$, donc Plur vérifie $COND^{-}$.

On a ainsi montré que la règle de la pluralité vérifie les propriété SYM, CONT, CONS et $COND^{-}$.

Réciproquement, soit f une R.C.C vérifiant les conditions SYM, CONT, CONS et $COND^{-}$. D'après le théorème 2.7, f est une règle positonnelle simple ; on peut donc lui associer un vecteur score $s = (s_1, ..., s_m)$ de $\mathbb{R}^m$.

Supposons qu'il existe $j \neq 1$ tel que $s_j \geq s_1$. Soient deux candidats x et y. Considérons un profil π tel que $rg(x, \pi^i) = 1$ et $rg(y, \pi^i) = j \; \forall i \in V$.

On a alors $\sum\limits_i s_{rg(y,\pi^i)} = ns_j \geq \sum\limits_i s_{rg(x,\pi^i)} = ns_1$, et il résulte que $[x \notin f(\pi)$ ou $\{x, y\} \subseteq f(\pi)]$.

Or par la condition $COND^{-}$, on a $f(\pi) = \{x\}$, une contradiction. Donc $s_1 > s_j \; \forall j \neq 1$.

Pour établir que f est la règle de la pluralité, il reste à montrer que $s_j = s_{j+1} \; \forall j \in \{2, ..., m-1\}$.

Supposons le contraire : $\exists j \in \{2, ..., m-1\}$ tel que $s_j \neq s_{j+1}$. On aurait ainsi soit $s_j > s_{j+1}$, soit $s_j < s_{j+1}$.

Considérons le premier cas : $s_j > s_{j+1}$. Soit alors k un entier tel que $k > \dfrac{s_1 - s_j}{s_j - s_{j+1}}$. k existe car $\mathbb{R}$ est Archimédien.

Posons $n = 2k + 1$ et construisons le profil π' tel que $[rg(x, \pi'^i) = 1$ et $rg(y, \pi'^i) = j$ $\forall i \in \{1, ..., k, k+1\}]$ et $[rg(x, \pi'^i) = j + 1$ et $rg(y, \pi'^i) = 1 \; \forall i \in \{k+2, ..., n\}]$.

Pour ce profil , les scores des options x et y sont respectivement $S(x, s, \pi') = (k+1)s_1 + ks_{j+1}$ et $S(y, s, \pi') = (k+1)s_j + ks_1$.

$S(x, s, \pi') - S(y, s, \pi') = (s_1 - s_j) - k(s_j - s_{j+1}) < 0$ car $k > \dfrac{s_1 - s_j}{s_j - s_{j+1}}$; d'où

$S(x, s, \pi') < S(y, s, \pi') \Longrightarrow x \notin f(\pi')$. Or la condition $COND^{-}$ implique $f(\pi') = \{x\}$, ce qui est une contradiction. Donc $s_j \leq s_{j+1}$.

Supposons maintenant que l'on ait $s_j < s_{j+1}$. En permutant j et $j+1$ dans le raisonnement précédant, on a également une contradiction, donc $s_j \geq s_{j+1}$ et par suite, on a $s_j = s_{j+1} \quad \forall j \in \{2, ..., m-1\}$. D'après le lemme 2.10, on peut remplacer le vecteur score s par le vecteur : (1,0,...,0) ce qui montre que f est la règle de la pluralité simple . ■

2.2.1.2 Le théorème de Richelson

Le théorème suivant (de Richelson) donne une autre caractérisation de la règle de la pluralité.

Théorème 2.9. *Richelson[10]*
Il existe une et une seule correspondance de choix social satisfaisant l'anonymat, la neutralité, la consistance et la réduction, c'est la règle de la pluralité.

Nous définissons ici les termes clés utilisés dans ce théorème.

Définition 2.11. ***(Réduction)****[9]*
Soit $\pi(V)$ un profil tel qu'il existe x et y deux alternatives telles que $N(x, y, \pi(V)) = V$. Une CCS g satisfait la propriété de réduction (R) si et seulement si :

$$g(A, \pi(V)) = g(A \setminus \{x\}, \pi(V)).$$

En d'autre termes, une CCS satisfait la propriété de réduction si et seulement si la préférence collective reste inchangée si on enlève de l'ensemble des candidats une alternative rejetée par tous les votants par rapport à un autre candidat.
La propriété suivante montre qu'en plus de satisfaire les propriétés (A), (N) et (C), la règle de la pluralité satisfait cette propriété.

Propriété 2.7. *La règle de la pluralité vérifie les propriétés (A), (N), (C) et (R).*

preuve :
D'après le théorème 2.7, la règle de la pluralité vérifie les propriétés (A), (N) et (C) ; montrons qu'elle satisfait (R).

Soient $x, y \in A$ et $\pi(V)$ un profil tel que $N(x, y, \pi(V)) = V$. Montrons que $y \notin plu(\pi(V))$.
Posons : $\pi(V) = (L_1, ..., L_v)$. $\forall i \in V, \quad xL^i y \Longrightarrow rg(y, L^i) > 1 \Longrightarrow \alpha_{rg(y,L^i)} = 0$.
Ainsi,

$$\forall i \in V, \quad \alpha_{rg(y,L^i)} = 0 \text{ et par suite, } \quad \sum_{i \in V} \alpha_{rg(y,L^i)} = S(y, \beta, \pi(V)) = 0 \text{ où } \beta = (1, 0, ..., 0).$$

$\Longrightarrow y \notin plu(\pi(V))$. Donc $plu(A, \pi(V)) = plu(A \setminus \{x\}, \pi(V))$. ■

La réciproque de ce résultat est donnée par la propriété suivante que nous n'allons pas démontrer dans le cadre de ce travail.

Propriété 2.8. *Richelson[1978], Ching[1996].*
Soit f une CCS. Si f satisfait les propriétés (A), (N), (C) et (R) alors, f est la règle de la pluralité.

Les deux propriétés précédentes nous permettent d'obtenir le théorème de Richelson.

2.2.2 Cas de la règle de Borda

2.2.2.1 Le théorème de Young

C'est la règle à score simple ayant pour vecteur score : $s = (m-1, m-2, ..., 2, 1, 0)$ lorsqu'il y a m candidats. Le théorème suivant (Young [1974(a)])[13] donne une caractérisation axiomatique de cette règle.

Théorème 2.10. *Pour un nombre fixé d'alternatives, il existe une et une seule correspondance de choix social satisfaisant simultanément la neutralité, la consistance, la fidélité, et l'annulation ; c'est la règle de Borda.*

La définition des concepts utilisés dans ce théorème et la démonstration de ce théorème feront l'objet de cette partie.

Définition 2.12. ***(Fidélité)****[9]*
Soit $\pi(V) = (L_i) \in \mathcal{L}^v$ un profil sur une population contenant un seul individu. Soit a_i l'élément de rang 1 dans L_i. Alors, une CCS g est fidèle ssi $g(\pi(V)) = g(L_i) = a_i$.

Cette définition veut que, préférence collective et préférence individuelle signifient la même chose si le collectivité est réduite à un seul individu. La fidélité sera noté (F).

Définition 2.13. ***(Annulation)****[9]*
Considérons un profil $\pi(V) \in \mathcal{L}^v$ tel que pour toute paire d'alternatives $\{x, y\}$, $Card(N(x, y, \pi(V))) = Card(N(y, x, \pi(V)))$. Alors une CCS g vérifie la propriété d'annulation (AN) ssi $g(\pi(V)) = A$.

D'après cette définition, une CCS vérifie la propriété d'annulation si et seulement si lorsque tous les candidats sont égaux majoritairement(comparaisons deux à deux), alors ils sont collectivement tous vainqueurs.

Propriété 2.9. *Pour tout $x \in A$ et tout profil $\pi(V)$, α le vecteur score de Borda, on a :*

$$S(x, \alpha, \pi(V)) = \sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V))$$

Preuve :

On a $\displaystyle\sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V)) = \sum_{y \in A \setminus \{x\}} \sum_{i \in V} n(x, y, \pi(V)^i)$ où $n(x, y, \pi(V)^i) = \begin{cases} 1 & si \quad x >_{\pi(V)^i} y \\ 0 & sinon. \end{cases}$

Posons $rg(x, \pi(V)^i) = j$, $j \in \{1, ..., m\}$.

- Si $j = 1$, alors $\displaystyle\sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V)^i) = m - 1 = \alpha_{rg(x, \pi(V)^i)}$
- Si $j > 1$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V)^i) &= \sum_{k=1}^{j-1} n(x, y_k, \pi(V)^i) + \sum_{k=j}^{m-1} n(x, y_k, \pi(V)^i) \\ &= m - 1 - j + 1 = m - j = m - rg(x, \pi(V)^i) \end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V)^i) = m - rg(x, \pi(V)^i) = \alpha_{rg(x, \pi(V)^i)}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V)) = \sum_{i \in V} \sum_{y \in A \setminus \{x\}} n(x, y, \pi(V)^i) = \sum_{i \in V} \alpha_{rg(x, \pi(V)^i)} = S(x, \alpha, \pi(V))$, et on a le résultat. ■

Propriété 2.10. *:*

La règle de Borda vérifie les propriétés (N), (C), (F), et (AN).

Preuve :

D'après le théorème 2.7 précédant, toute règle à score vérifie (N) et (C), donc la règle de Borda vérifie (N) et (C).

Soit s le vecteur score de Borda.

- Montrons que la règle de Borda vérifie (F).

  Posons $\pi(V) = (L_i) \in \mathcal{L}^v$, et soit a_i l'élément de rang 1 dans L_i. Montrons que $Borda(\pi(V)) =$

$\{a_i\}$.

$$\begin{aligned}\forall j = 1,...,m, \quad S(a_j, \alpha, \pi(V)) &= \alpha_{rg(a_j,\pi(V))} \\ &= m - rg(a_j, \pi(V)) \\ &< m - rg(a_i, \pi(V)) \text{ car } rg(a_j, \pi(V)) > rg(a_i, \pi(V)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \forall j \neq i \\ &= S(a_i, \alpha, \pi(V))\end{aligned}$$

Donc $Borda(\pi(V)) = \{a_i\}$.

– Montrons que la règle de Borda vérifie (AN).

On sait que $\forall x \in A, \quad S(x, \alpha, \pi(V)) = \sum\limits_{y\in A, y\neq x} n(x, y, \pi)$. Alors, comme $n(x, y, \pi) = n(y, x, \pi) \quad \forall x, y \in A$, on a $S(x, \alpha, \pi(V)) = S(y, \alpha, \pi(V)) \quad \forall x, y \in A$ et par suite, on a $Borda(\pi(V)) = A$. Donc Borda vérifie (AN). ■

On a ainsi montré que la règle de Borda vérifie les propriétés (N), (C), (F) et (AN).

Soit w un profil sur une population W, $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. On pourra noter $n(a_i, a_j, w)$ par $\pi_{ij}(w) \quad \forall i \neq j, i, j = 1, ..., m$.

$\forall k = 1, ..., m$, posons $\beta_k(w) = \sum\limits_{1\leq j\leq m j\neq k} \pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w)$.

Propriété 2.11. *Si α est le vecteur score de Borda et w un profil, alors $\forall a_k \in A$, on peut remplacer $S(a_k, \alpha, w)$ par $\beta_k(w)$.*

Preuve :

On sait que $\forall k = 1, ..., m$, $S(a_k, \alpha, w) = \sum\limits_{j=1, j\neq k}^{m} n(a_k, \alpha, w)$.

Soient $k, l = 1, ..., m$. Alors,

$$\begin{aligned}S(a_k, \alpha, w) \geq S(a_l, \alpha, w) &\iff \sum_{j=1,j\neq k}^{m} \pi_{kj}(w) \geq \sum_{j=1,j\neq l}^{m} \pi_{lj}(w) \\ &\iff \sum_{j=1,j\neq k}^{m} (n - 2\pi_{kj}(w)) \leq \sum_{j=1,j\neq l}^{m} (n - 2\pi_{lj}(w)) \\ &\iff \sum_{j=1,j\neq k}^{m} (\pi_{jk}(w) - \pi_{kj}(w)) \leq \sum_{j=1,j\neq l}^{m} \pi_{jl}(w) - \pi_{lj}(w) \\ &\iff \sum_{j=1,j\neq k}^{m} (\pi_{kj}(w) - \pi_{jk}(w)) \geq \sum_{j=1,j\neq l}^{m} \pi_{lj}(w) - \pi_{jl}(w) \\ &\iff \beta_k(w) \geq \beta_l(w)\end{aligned}$$

et on a le résultat. ■

Propriété 2.12. *Soit f une CCS. Si f vérifie les propriétés (N), (C), (F) et (AN) alors f est la règle de Borda.*

Avant de donner une preuve de cette propriété, donnons une conséquence des hypothèses d'annulation et de consistance.
On dit qu'une règle de choix social est basée sur les comparaisons par paires si elle dépend uniquement des nombres de votants pour ou contre les paires d' alternatives. C'est-à-dire que pour tout profil w, $f(w)$ dépend uniquement des nombres $\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w) \quad \forall \quad 1 \leq i \neq j \leq m$. En d'autres termes, cela signifie que toutes les expressions de préférences sur les paires d'alternatives ont le même poids indépendamment des noms des votants et de leurs préférences sur les autres alternatives. La propriété 11 précédente montre que la règle de Borda est basée sur les comparaisons par paires.

Lemme 2.11. *Soit f une CCS. Si f est consistante et vérifie la propriété d'annulation (AN), alors est basée sur les comparaisons par paire.*

Preuve :
Soit w_1, et w_2 deux profils sur V_1 et V_2 respectivement tels que w_1, et w_2 possèdent le même nombre de votants pour ou contre dans tous les duels majoritaires. i.e

$$\pi_{ij}(w_1) - \pi_{ji}(w_1) = \pi_{ij}(w_2) - \pi_{ji}(w_2) \quad \forall i \neq j \quad (1)$$

Puisque tout votant préfère soit a_i à a_j soit a_j à a_i, on à aussi

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(w_1) + \pi_{ji}(w_1) &= \mid V_1 \mid \quad \forall i \neq j \quad (2) \\ \pi_{ij}(w_2) + \pi_{ji}(w_2) &= \mid V_2 \mid \quad \forall i \neq j \quad (3) \end{aligned}$$

En combinant (2) et (3) avec (1), on obtient :

$$2\pi_{ij}(w_1) + \mid V_2 \mid = 2\pi_{ij}(w_2) + \mid V_1 \mid \quad (4)$$

Sans nuire à la généralité, posons $n = \mid V_1 \mid - \mid V_2 \geq 0$. D'après (4), n est pair.
Soit t un profil sur un ensemble à n votants T disjoint de $V_1 \cup V_2$ tel que $n/2$ votants de T aient le classement $a_1 a_2 .... a_m$ et les $n/2$ autres, le classement $a_m a_{m-1}, ..., a_2 a_1$. Ainsi, $\pi_{ij}(t) = \pi_{ji}(t) = n/2 \quad \forall i \neq j$. Comme f vérifie (AN), on a : $f(t) = A$. Par consistance de f, on a :

$$f(w_2 + t) = f(w_2) \cap f(t) = f(w_2) \quad (5)$$

Par construction, on a

$$| V_2 \cup T |=| V_1 | \text{ et } \pi_{ij}(w_2 + t) = \pi_{ij}(w_1) \quad \forall i \neq j \quad (6)$$

Soient u et u' deux copies de w_1 définies sur U et U' respectivement où $| U |=| U' |=| V_1 |$, $U \cap U' = \varnothing$ et U, U' disjoints de $V_1 \cup V_2 \cup T$. Soit $\overline{u'}$ le profil obtenu de u' en inversant les ordres des préférences individuelles. Comme f vérifie (AN),on a $f(u + \overline{u'}) = f(w_1 + \overline{u'}) = A$. Ainsi, par consistance de f, on a

$$f(u) = f(u) \cap A = f(u + (w_1 + \overline{u'})) = f(w_1 + (u + \overline{u'}))$$

$$\Longrightarrow f(u) = f(w_1) \cap A = f(w_1).$$

De façon similaire, (7) implique que

$$\pi_{ij}(w_2 + t + \overline{u'}) = \pi_{ji}(w_2 + t + \overline{u'}) \quad \forall i \neq j$$

. Cependant, $f(w_2 + t + \overline{u'}) = f(u + \overline{u'}) = A$ et il suit que $f(u) = f(w_2 + t)$. D'après (5), on a $f(w_2) = f(w_2 + t) = f(u) = f(w_1)$ d'où la preuve du lemme. ■

Si f est basée sur les comparaisons par paire, alors chaque profil w peut être représenté simplement par un graphe dont les sommets sont les éléments de A, et chaque arrête (a_i, a_j) reliant les sommets a_i et a_j porte le poids $\pi_{ij}(w)$. Une telle représentation d'un profil sera appelée "suffrage". On pourra représenter le suffrage obtenu de w par la formule :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq m, i \neq j} \pi_{ij}(w)(a_i, a_j).$$

Comme f dépend uniquement des comparaisons par paire, on pourra identifier (a_i, a_j) avec $-(a_j, a_i)$ dans un telle expression. On a alors

$$\pi_{ij}(w)(a_i, a_j) + \pi_{ji}(a_j, a_i) = (\pi_{ij}(w) - \pi_{ji}(w))(a_i, a_j),$$

(on peut tout simplement omettre les termes avec pour coefficient zéro). L'ensemble $\mathcal{D}$ de toutes les sommes $\sum_{i \neq j} q_{ij}(a_i, a_j)$ où q_{ij} est un rationnel et (a_i, a_j) est identifié à $-(a_i, a_j)$ forme un espace vectoriel de dimension C_m^2 sur le corps $\mathbb{Q}$.

L'ensemble $\mathcal{D}'$ de tous les suffrages est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}$.

Tout suffrage $D = \sum_{i \neq j} q'_{ij}(a_i, a_j) \in \mathcal{D}$ peut être écrit

$$D = \sum_{i \neq j} q'_{ij}(a_i, a_j) \text{ où } q_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$$

Cependant, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nq'_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall i \neq j$. Il s'en suit que :

$$\mathcal{D} = \{D/n, \quad D \in \mathcal{D}', \quad n \in \mathbb{N}\}$$

et $\mathcal{D}$ est donc l'ensemble des suffrages dans lesquels le nombre de votant préférant a_i à a_j est remplacé par la fraction de la population préférant a_i à a_j. On appellera cela suffrage généralisé.
Supposons maintenant que f est consistante, cela est équivalent à dire que

$$\forall D, D' \in \mathcal{D}', \quad f(D) \cap f(D') \neq \varnothing \Longrightarrow f(D) \cap f(D') = f(D + D')$$

En particulier, $\forall D \in \mathcal{D}'$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(nD) = f(D + D + ... + D) = f(D)$. On peut alors étendre f à $\mathcal{D}$ en définissant $f(D/n) = f(D)$. Ceci est non ambigu puisque $D/n = D'/n' \Longleftrightarrow n'D = nD'$ et $f(D) = f(D')$.

Lemme 2.12. *Young[13]*
L'extension de f à $\mathcal{D}$ vérifie les propriétés (N), (C), (F) et (AN).

Définition 2.14. *Soit f une CCS. On dit que f vérifie la condition de pareto si :*

$$\forall \pi \in \mathcal{L}^v, \forall x, y \in A, (x >_{\pi^i} y \quad \forall i \in V) \Longrightarrow y \notin f(\pi)$$

Lemme 2.13. *Young[13]*
Si f est fidèle et consistante, alors f vérifie pareto.

Ainsi, l'extension de f sur $\mathcal{D}$ est consistante et on a aussi $f(\lambda D) = f(D) \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q}$.

Preuve de la propriété 2.12

Si f satisfait les conditions (N), (C), (F) et (AN), alors f est basée sur les comparaisons par paires.
Ensuite, d'après la discussion précédente, on peut étendre f à $\mathcal{D}$.
La neutralité de l'extension de f sur $\mathcal{D}$ signifie que pour toute permutation σ sur A, on a $f(\tilde{\sigma}(D)) = \sigma(f(D))$, où $\tilde{\sigma}$ est la permutation sur $\mathcal{D}$ induite par σ.
Pour tout suffrage le généralisé $D = \sum_{i \neq j} q_{ij}(a_i, a_j)$, le score de Borda de l'alternative k est donné par :

$$\beta_k(D) = \sum_{i \neq j} q_{kj} - q_{jk}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

cette dernière relation définie un application linéaire β de $\mathcal{D}$ vers $\mathbb{Q}^m$:

$$\beta \left[\sum_{i \neq j} q_{ij}(a_i, a_j) \right] = \left(\sum_{j \neq 1} (q_{1j} - q_{j1}), \sum_{j \neq 2} (q_{2j} - q_{j2}), ..., \sum_{j \neq m} (q_{mj} - q_{jm}) \right)$$

Pour tout i, $1 \leq i \leq m$, soit w^i le profil généralisé dans lequel la moitié des votants a la préférence $a_i, a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_{m-1}, a_m$ et l'autre moitié $a_i, a_m, a_{m-1}, ..., a_{i+1}, a_{i-1}, ..., a_2, a_1$. D'après le lemme 2.13 précédant, $f(w^i) = a_i$.

Le suffrage correspondant à w^i est $E^i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i} 1(a_i, a_j)$ Ainsi, $f(E^i) = a_i, \quad 1 \leq i \leq m.$

On a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \beta(E^1) & = & (m-1, -1, ..., -1) \\ \beta(E^2) & = & (-1, m-1, ..., -1) \qquad (*) \\ \vdots & & \\ \beta(E^1) & = & (-1, -1, ..., -1, m-1). \end{array}$$

Du fait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \beta_k(D) = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}$ et que ces vecteurs sont linéairement indépendants, ils engendrent $Im(\beta)$ (car $dim(Im\beta) = m-1$). Donc $dim(ker\beta) = dim\mathcal{D} - dim(Im\beta) = \binom{2}{m} - m + 1$.

Un k cycle $k \geq 3$ est un suffrage de la forme

$$(a_{i_1}, a_{i_2}) + (a_{i_2}, a_{i_3}) +, ..., + (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}) + (a_{i_k}, a_{i_1})$$

où les $i_1, i_2, ..., i_k$ sont distincts. On note ce k-cycle par $C_{i_1 i_2, ..., i_k}$.

Lemme 2.14. *Harary[6]*

Pour $3 \leq k \leq m$, chaque k-cycle est une combinaison linéaire de $(k+1)$-cycles, puisque $(k-1)$-$C_{i_1 i_2,...,i_k} = C_{i_l i_1,...,i_k} + C_{i_1 i_l,...,i_k} +, ..., + C_{i_1 i_2,...,i_{k-1} i_l i_k}$. De plus, l'ensemble des k-cycles $(k \geq 3)$ est de dimension $\binom{2}{m} - m + 1$.

On montre alors par induction sur k que chaque k-cycle est un combinaison linéaire des m cycles.

L'ensemble des k-cycles $(k \geq 3)$ est de dimension $\binom{2}{m} - m + 1$ d'après le lemme précédent, c'est aussi la dimension de l'ensemble des m-cycles ; et puisque chaque m-cycle est un élément de $Ker(\beta)$, alors les m-cycles engendrent $Ker(\beta)$. Ainsi, $\forall D \in Ker(\beta), \quad D = \displaystyle\sum_r q_r C^r$ où C^r est un m-cycle, $\forall r, \quad q_r \in \mathbb{Q}$, et d'après l'orientation des m-cycles, $q_r > 0$. Chaque m-cycle est invariant par toute permutation sur A, ainsi, par neutralité de f, on a $f(C^r) = A \quad \forall r$. Par suite, par consistance de f, on a :

$$f(D) = \cap_r f(q_r C^r) = \cap_r f(C^r) = A,$$

on a alors $f(D) = A \quad \forall D \in Ker(\beta)$.

Supposons que $\beta(D) = \beta(D'), \quad \forall D, D' \in \mathcal{D}$. Alors $D - D' \in Ker(\beta)$; ainsi, $f(D - D') = A$ et par consistance de f,

$$f(D) = f(D' + (D - D')) = f(D') \cap A = f(D').$$

Ceci prouve que pour tout suffrage D, $f(D)$ dépend uniquement des scores de Borda de $\beta(D)$. Pour achever la preuve du théorème, il reste à montrer que f choisi l'alternative ayant le plus grand score de Borda.

Soit $D \in \mathcal{D}$. Supposons sans nuire à la généralité que $\beta_1(D) \geq \beta_2(D) \geq, ..., \geq \beta_m(D)$, et montrons que $f(D) = \{a_j : \quad \beta_j(D) = \beta_1(D)\}$. Puisque $Im(\beta)$ est engendré par les $\beta(E^i)$, on a : $\beta(D) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \beta(E^j), \quad \lambda_j \in \mathbb{Q}$.

Puisque $\sum_{j=1}^{m} \beta(E^j) = 0$, on a : $\beta(D) = \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \sum_{i \leq j} \beta(E^i)$, et d'après la relation (*), on a :

$$\beta_i(D) - \beta_j(D) = \left[(m-1)\lambda_i - \sum_{k \neq i} \lambda_k\right] - \left[(m-1)\lambda_j - \sum_{k \neq j} \lambda_k\right] = m(\lambda_i - \lambda_j).$$

D'après l'hypothèse, sur $\beta(D)$, on a : $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 0, \quad 1 \leq j \leq m-1$. Cependant, $\{j : \quad \beta_j(D) = \beta_1(D)\} = \{j : \quad \lambda_j = \lambda_1\}$.

Dans la suite, nous prouvons par induction sur $m - j$ que $f(\sum_{i \leq j} E^i) = \{a_1, a_2, ..., a_j\}$. (**)

Pour $m - j = 0$, $f(\sum_{i \leq m} E^i) = A$ car f est neutre. Supposons (**) pour $m - j - 1$, $j < m$. $\sum_{i \leq j} E^i$ est invariant pour les permutations $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma'}$ induites par les permutations cycliques $\sigma = (a_1 a_2, ..., a_j)$ et $\sigma' = (a_{j+1} a_{j+2}, ..., a_m)$. Si pour $k > j, \quad a_k \in f(\sum_{i \leq j} E^i)$, alors en appliquant σ' à $f(\sum_{i \leq j} E^i)$, on conclut par la neutralité de f que $a_{k+1} \in f(\sum_{i \leq j} E^i)$. Mais comme f est consistante on a :

$$f(\sum_{i \leq j+1} E^i) = f(\sum_{i \leq j} E^i) \cap f(E^{j+1}) = \{a_{j+1}\},$$

ce qui contredit l'hypothèse d'induction. Ainsi,

$$k \leq j \quad \forall a_k \in f(\sum_{i \leq j} E^i) \neq \varnothing.$$

En appliquant σ à $f(\sum_{i \leq j} E^i)$, on conclut que $f(\sum_{i \leq j} E^i) = \{a_1, ..., a_j\}$, et (**) est prouvé.

On a $f(D) = f\left[\sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \sum_{i \leq j} E^i\right]$, puisque $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq 0$ et que f est consistante, on a

$f\left[\sum_{i=1}^{m-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{i\leq j}E^i\right] = A\cap_{j:\lambda_j-\lambda_{j+1}>0}\{a_1,...,a_j\} = \{a_j : \lambda_j = \lambda_1\} = \{a_j : \beta_j(D) = \beta_1(D)\}$, cette dernière relation montre que f c'est la règle de Borda. ■

Lemme 2.15. *Young[13] .*

Les conditions (N), (F), (AN) et (C) vérifiées par la règle de Borda sont indépendantes.

Les propriétés 2.8 et 2.10 donnent une preuve au théorème de Young développé dans cette partie.

2.2.2.2 Le théorème de Smith

Le théorème suivant (Smith[1973], Fishburn et Gehrlein [1976]) donne une seconde caractérisation de la règle de Borda.

Théorème 2.11. *Smith[11], Fishburn et Gehrlein[4]*

La règle de Borda est la seule règle à score simple qui satisfait la propriété du perdant de condorcet.

Nous définissons ici les termes clés utilisés dans ce théorème.

Définition 2.15. ***(Perdant de condorcet)****[9]*

Soit A un ensemble d'alternatives, $\pi(V)$ un profil, $x \in A$. On dit que x est un perdant de condorcet si :

$$\forall y \in A\setminus\{x\},\ n(x,y,\pi(V)) < n(y,x,\pi(V))$$

Une règle de choix sociale f satisfait la propriété du perdant de condorcet si et seulement si un perdant de condorcet lorsqu'il existe, ne peut pas être un vainqueur pour f.

Dans cette partie, il est question de savoir s'il existe des RCS qui vérifient cette propriété. Nous répondons par l'affirmative en considérant la règle de Borda.

Propriété 2.13. *La règle de Borda satisfait la propriété du perdant de condorcet.*

preuve :

Soit $\pi(V)$ un profil admettant un perdant de condorcet $x \in A$. Montrons que $x \notin Borda(\pi(V))$.

Soit α le vecteur score de Borda sur la population A. D'après la propriété 2.5, on a $S(x,\alpha,\pi(V)) = \sum_{y\in A\setminus\{x\}} n(x,y,\pi(V))$. De plus, $n(x,y,\pi(V)) < v/2 \quad \forall y \in A\setminus\{x\}$.

$\Longrightarrow S(x,\alpha,\pi(V)) < \sum\limits_{y\in A\setminus\{x\}} v/2 = \dfrac{v(m-1)}{2}.$

On a alors : $S(x,\alpha,\pi(V)) < \dfrac{v(m-1)}{2} \quad (1).$

Supposons que x est vainqueur de Borda pour $\pi(V)$, alors, $S(x,\alpha,\pi(V)) \geq S(y,\alpha,\pi(V)) \quad \forall y \in A\setminus\{x\}$. Donc $\sum\limits_{y\in A} S(x,\alpha,\pi(V)) = mS(x,\alpha,\pi(V)) \geq \sum\limits_{y\in A} S(y,\alpha,\pi(V))$.

On a de plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{y\in A} S(y,\alpha,\pi(V)) &= \sum_{y\in A}\sum_{i\in V} \alpha_{rg(y,\pi(V)^i)} \\
&= \sum_{i\in A}\sum_{y\in A} \alpha_{rg(y,\pi(V)^i)} \\
&= \sum_{i\in A} \frac{m(m-1)}{2} \\
&= \frac{vm(m-1)}{2}
\end{aligned}$$

On a alors : $mS(x,\alpha,\pi(V)) \geq \dfrac{mv(m-1)}{2} \Longrightarrow S(x,\alpha,\pi(V)) \geq \dfrac{v(m-1)}{2}) \quad (2).$

D'après (1) et (2), on a : $\dfrac{v(m-1)}{2} \leq S(x,\alpha,\pi(V)) < \dfrac{v(m-1)}{2}$, ce qui est absurde ■.

La propriété suivante donne le chemin inverse de la précédente.

Propriété 2.14. *Smith[1973], Fishburn et Gehrlein[1976].*

Soit f une règle à score simple. Si f satisfait le propriété du perdant de condorcet, alors f est la règle de Borda.

Le théorème développé dans cette partie s'obtient à partir des deux propriétés précédentes. Parvenus au terme de ce chapitre, il était question pour nous de donner une caractérisation générale de toutes les règles à score et d'étudier quelques cas particuliers. Nous nous sommes intéressés donc à la règle de Borda et à la règle de la pluralité. Dans le chapitre suivant , nous nous intéresserons uniquement à la règle majoritaire simple.

⋆ ⋆ Chapitre Trois ⋆ ⋆

Quelques caractérisations de la règle majoritaire

Dans ce chapitre, nous donnons des caractérisations de la règle majoritaire simple dans le cas d'un vote à deux options. Dans tout le chapitre, les préférences sont des pré-ordres totaux. Commençons par rappeler la définition de la règle majoritaire simple.

Soit π un profil ; $x, y \in A$. $x >_i y$ signifie que x est placé avant y dans les préférences du joueur i (électeur i).
Posons :

$$N(x, y, \pi) = \{i \in V : x >_i y\} \quad \text{et} \quad n(x, y, \pi) = \mid N(x, y, \pi) \mid$$

.

Définition 3.1. ***(Règle majoritaire)****[9]*
Soit π un profil sur V et f une règle de choix social définie sur $\mathcal{L}^v$ où $v = \mid V \mid$. f est la règle majoritaire simple ssi :
$\forall x, y \in A$,

$$x >_{f(\pi)} y \iff n(x, y, \pi) > n(y, x, \pi)$$
$$x =_{f(\pi)} y \iff n(x, y, \pi) = n(y, x, \pi)$$

3.1 Le théorème de May

Dans cette partie, on veut répondre à la question de savoir s'il existe des règles de choix social vérifiant des propriétés normatives à l'instar de : la neutralité, l'anonymat et la monotonie que nous définirons dans la suite. Nous répondons par l'affirmative en considérant la règle majoritaire.

3.1.1 Existence

Définition 3.2. *(Monotonie)[9]*

Soit f une PAP. f est monotone (ou vérifie la propriété de réponse positive) si $\forall x, y \in A$, $\pi(V)$ un profil sur V tel que $x \geq_{f(\pi(V))} y$ et $\pi'(V)$ un second profil tels que :

$$\exists j \in V / \quad (xI_jy \text{ et } xP'_jy) \text{ ou } (yP_jx \text{ et } xI'_jy) \text{ et } \forall i \neq j, \, \pi'(V)^i = \pi(V)^i, \text{ alors } x \geq_{f(\pi(V'))} y.$$

La propriété de réponse positive (ou monotonie) décrite par la définition précédente veut tout simplement dire que, si un candidat est au moins aussi bon collectivement qu'un autre et qu'un électeur accroit sa préférence pour le premier par rapport au second, alors la préférence collective du premier par rapport au second s'accroit aussi. Cette propriété sera notée (RP).

La propriété suivante donne le résultat d'existence d'une règle de choix sociale satisfaisant les propriétés (A), (N), (RP) dans le cas d'un vote à deux options. On suppose donc dans toute la suite que $A = \{x, y\}$.

Propriété 3.1. *La règle majoritaire simple vérifie les propriétés (A), (N) et (RP).*

Preuve :

-Montrons que Maj est anonyme.

Soient V, V' deux populations telles que $CardV = CardV'$, γ une bijection de V dans V', $\pi(V) = (R_i)_{i \in V}$ un profil sur V. Montrons que $Maj(\gamma(\pi(V))) = Maj(\pi(V))$. On pourra noter $\gamma(\pi(V))$ par $\gamma(\pi)$, $xP_\pi y$ par $x >_{Maj(\pi)} y$.

On sait que $x >_{Maj(\pi)} y \Longleftrightarrow n(x, y, \pi) > n(y, x, \pi)$.

$$\gamma(\pi(V)) = (R_j)_{j \in V'} \text{ et } \forall j \in V', \quad \exists! i \in V \text{ tel que } R_i = R_j, \quad (j = \gamma(i))$$

Ainsi, $n(x, y, \gamma(\pi)) = n(x, y, \pi)$ et $n(y, x, \gamma(\pi)) = n(y, x, \pi)$

Alors,

$$\begin{aligned} x >_{Maj(\gamma(\pi))} y &\Longleftrightarrow n(x, y, \gamma(\pi)) = n(y, x, \gamma(\pi)) \\ &\Longleftrightarrow n(x, y, \pi) > n(x, y, \pi) \\ &\Longleftrightarrow x >_{Maj(\pi)} y \end{aligned}$$

Ainsi, $x >_{Maj(\gamma(\pi))} y \Longleftrightarrow x >_{Maj(\pi)} y$ d'où $Maj(\gamma(\pi)) = Maj(\pi)$. Donc Maj est anonyme.

-Montrons que Maj est neutre. Soit σ la permutation de A définie par : $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$. $\pi(V)$ un profil sur V. Montrons que $Maj(\sigma(\pi(V))) = \sigma(Maj(\pi(V)))$.
Par définition de σ, on a :

$$n(x, y, \sigma(\pi(V))) = n(y, x, \pi(V)) \text{ et } n(y, x, \sigma(\pi(V))) = n(x, y, \pi(V))$$

$$\begin{aligned} x >_{Maj(\sigma(\pi(V)))} y &\iff n(x, y, \sigma(\pi(V)) > n(y, x, \sigma(\pi(V))) \\ &\iff n(y, x, \pi(V)) > n(x, y, \pi(V)) \\ &\iff y >_{Maj(\pi(V))} x \\ &\iff \sigma(x) >_{Maj(\pi(V))} \sigma(y) \\ &\iff x >_{\sigma(Maj(\pi(V)))} y \end{aligned}$$

D'où $Maj(\sigma(\pi(V))) = \sigma(Maj(\pi(V)))$.

Donc Maj est neutre.

-Montrons que Maj est monotone. Soient $\pi(V)$ et $\pi'(V)$ deux profils tels que :

$$\exists j \in V/(xI_jy \text{ et } xP'_jy) \text{ ou } (yp_jx \text{ et } xI'_jy) \text{ et } \forall i \neq j, R'_i = R_i \text{ et } x \geq_{Maj(\pi)} y.$$

Montons que $x >_{Maj(\pi')} y$.

– Si $(xI_jy$ et $xP'_jy)$ alors on a :

$$n(x, y, \pi') = n(x, y, \pi) + 1 \text{ et } n(y, x.\pi') = n(y, x, \pi).$$

Comme $x \geq_{Maj(\pi)} y$, on a

$$\begin{aligned} n(x, y, \pi) \geq n(y, x, \pi) &\implies n(x, y, \pi') - 1 \geq n(y, x, \pi') \\ &\implies n(x, y, \pi') \geq n(y, x, \pi') + 1 > n(y, x, \pi') \\ &\implies n(y, x, \pi') > n(y, x, \pi') \\ &\implies x >_{Maj(\pi')} y \end{aligned}$$

– Si $(yP_jx$ et $xI'_jy)$ alors on a :

$$n(x, y, \pi') = n(x, y, \pi) \text{ et } n(y, x, \pi') = n(y, x, \pi) - 1$$

comme $x \geq_{Maj(\pi)} y$, on a :

$$\begin{aligned} n(x, y, \pi) \geq n(y, x, \pi) &\implies n(x, y, \pi') \geq n(y, x, \pi') + 1 > n(y, x, \pi') \\ &\implies n(x, y, \pi') > n(y, x, \pi') \\ &\implies x >_{Maj(\pi')} y. \end{aligned}$$

Donc Maj est monotone. ■

3.1.2 Unicité

La propriété suivante donne le résultat d'unicité de la règle de choix sociale satisfaisant les propriétés (A), (N), (RP).

Propriété 3.2. *Soit $A = \{x, y\}$. Soit f une PAP. Si f est anonyme, neutre, et monotone alors f est la règle majoritaire simple.*

preuve :

Considérons f une PAP anonyme, neutre et monotone. Comme f est anonyme, alors d'après le théorème 2.1.2, on peut la définir sur l'ensemble des vecteurs situation de vote.
Considérons V une population telle que pour tout profil $\pi(V)$, on a :

$$f(\pi(V)) = f(n_1, n_2, n_3), \text{ avec } n_1 = n(x, y, \pi), \quad n_3 = n(y, x, \pi) \text{ et } n_2 = v - n_1 - n_3 \text{ et } \mid V \mid = v.$$

n_2 ainsi défini est le nombre de joueurs indifférents entre x et y.
Montrons les implications suivantes :

$$\begin{aligned} n_1 = n_3 &\implies xI_\pi y \\ n_1 > n_3 &\implies xP_\pi y \\ n_1 < n_3 &\implies yP_\pi x \end{aligned}$$

1. Supposons $n_1 = n_3$ et montrons que $xI_\pi y$.

   Supposons par l'absurde $non(xI_\pi y)$. Considérons sans nuire à la généralité que $xP_\pi y$.

   Soient σ la permutation de A définie par :

   $$\sigma(x) = y, \quad \sigma(y) = x;$$

   γ une permutation de V telle que : $\gamma(i) = j$ ssi $xP_i y$ et $yP_j x$. Une telle permutation existe puisque $n_1 = n_3$.

   Par neutralité de f , on a $yP_{\sigma(\pi)}x$ avec $\sigma(\pi) = (n_3, n_2, n_1)$ et puisque f est anonyme, on a $yP_{\gamma(\sigma(\pi))}x$. Mais $\gamma(\sigma(\pi)) = (n_1, n_2, n_3)$ par définition de γ. Alors $yP_\pi x$, ce qui est absurde car $xP_\pi y$ par hypothèse. Donc $xI_\pi y$.

2. Supposons $n_1 > n_3$ et montrons que $xP_\pi y$.

   Comme $n_1 > n_3$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1 = n_3 + p$. Montrons par récurrence sur p que $xP_\pi y$.

   Pour $p = 1$, on a $n_1 = n_3 + 1$; $N(x, y, \pi) = \{i_1, ..., i_{n_3}, p\}$.

   Considérons le profil $\pi'(V)$ définit par $R'_i = R_i \quad \forall i \neq k$ et $R'_k = (xy)$.

Il est clair que $n(x,y,\pi') = n(y,x,\pi')$ et d'après (1), $xI_{\pi'}y$. Par ailleurs, en appliquant la monotonie de f, on a : $xP_{\pi}y$.

Si $p > 1$, posons $N(x,y,\pi) = \{i_1,...,i_{n_3}\} \cup \{k_1,...,k_p\}, N(y,x,\pi) = \{j_1,...,j_{n_3}\}$, définissons la suite de profil suivante : $(\pi_t)_{t=1,...,p}$ où

$$\pi_1 : \begin{cases} R_j^1 = R_j & \forall j \neq k_1 \\ R_{k_1}^1 = (xy) \end{cases}$$

et en supposant $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{p-1}$ construis, on définit

$$\pi_p : \begin{cases} R_j^p = R_j^{p-1} & \forall j \neq k_p \\ R_{k_p}^p = (xy) \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\forall t \in \{1,...,p-1\}, \quad xP_{\pi_t}y$.

On a par construction $n(x,y,\pi_p) = n(y,x,\pi_p)$ et d'après 1), on a $xI_{\pi_p}y$. En utilisant la réponse positive, on a $xP_{\pi_{p-1}}y$

Soit $t \in \{2,...,p-1\}$ tel que $xP_{\pi_t}y$. Par définition de π_t et π_{t-1}, on a grâce à la monotonie de f que $xP_{\pi_{t-1}}y$.

On a donc en fin de compte $xP_{\pi_1}y$ et par suite, $xP_{\pi}y$ à cause de la monotonie de f.

On vient ainsi de montrer que $n_1 > n_3 \Longrightarrow xP_{\pi}y$.

3. Supposons que $n_1 < n_3$.

   Considérons le profil π' défini par : $\forall i \in V, \quad R'_i = \sigma(R_i)$ où σ est une permutation de A définie par : $\sigma(x) = y, \quad \sigma(y) = x$.

   On a :

   $$\sigma(\pi) = \pi', \sigma(\pi') = \pi \text{ et } \quad n(x,y,\pi') = n(y,x,\pi) > n(x,y,\pi) = n(y,x,\pi').$$

   On a alors d'après ce qui précède $xP_{\pi'}y$. En appliquant la neutralité de f on obtient $yP_{\sigma(\pi')}x$ i.e $yP_{\pi}x$.

En définitive, (1),(2)et (3) montrent que $f = Maj$ ■.

Les propriétés 3.1 et 3.2 précédentes nous permettent d'obtenir le théorème suivant qui donne une caractérisation axiomatique de la règle majoritaire.

Théorème 3.1. *May[8]*
Une règle de choix sociale est anonyme, neutre et monotone si et seulement si c'est la règle majoritaire.

3.2 Le théorème de Fishburn

Le théorème de Fishburn que nous développons dans cette partie donne une seconde caractérisation de la règle majoritaire.

Soit n le nombre de votants, $A = \{a, b\}$ l'ensemble des candidats. Choisir une alternative entre a et b est encore équivalent à voter pour ou contre l'alternative a.
L'ensemble des profils sera noté $\{-1, 0, 1\}^n$ où $\forall x \in \{-1, 0, 1\}^n$,

$$\begin{cases} x_i = 1 & \Longleftrightarrow \quad aP_x^i b \quad i \text{ est pour} \\ x_i = 0 & \Longleftrightarrow \quad aI_x^i b \quad i \text{ est indifferent)} \\ x_i = -1 & \Longleftrightarrow \quad bP_x^i b \quad i \text{ est contre} \end{cases}$$

Nos axiomes seront appliqués à une fonction définie par : $f : \{-1, 0, 1\}^n \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ et interprété comme suit : on a n votants indicés par i de 1 à n et une issue par rapport à laquelle on vote. Pour tout profil $x, \quad f(x) = 1$ signifie que la collectivité vote pour, $f(x) = 0$ si elle est indifférente et $f(x) = -1$ si elle est contre. Le profil nul sera noté 0, e_i le vecteur ayant 1 à la i-ième composante et 0 ailleurs et $e = \{e_i, ..., e_n\}$.
$\forall x \in \{-1, 0, 1\}^n$, on note : $-x = (-x_1, ..., -x_n)$ et pour tout σ, permutation de l'ensemble des votants, on a $x^\sigma = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$. On notera $x > y$ pour dire que $x_i \geq y_i \quad \forall i$ et $\exists i$ tel que $x_i > y_i$.
La règle majoritaire simple est définie par :

$$f(x) = sgn\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \text{ où } sgn(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > 0 \\ 0 & \text{si} \quad r = 0 \\ -1 & \text{si} \quad r < 0 \end{cases}$$

Considérons les axiomes suivants[3]

$$
\begin{array}{ll}
A.1 & f(x^\sigma) = f(x) \\
A.2 & f(-x) = -f(x) \\
A.3 & \{f(y) \geq 0, x - y \in e\} \Longrightarrow f(x) = 1 \\
A.3^* & \{f(y) = 0, x - y \in e\} \Longrightarrow f(x) = 1 \\
 & \{f(x) = 0, x - y \in e\} \Longrightarrow f(y) = -1 \\
A.4 & \{f(x) = 1, x - y \in e\} \Longrightarrow f(y) \geq 0 \\
A.4^* & \quad A.4 \text{ et } \{f(y) = -1, x - y \in e\} \Longrightarrow f(x) \leq 0 \\
A.5 & \quad x > 0 \Longrightarrow f(x) = 1; \quad x < 0 \Longrightarrow f(x) = -1
\end{array}
$$

L'axiome A.1 est l'anonymat, A.2 est la neutralité, A.5 est la condition de paréto, la condition A.3 est la réponse positive de May. On voit que si f est neutre, alors les deux parties de $A.3^*$ sont équivalentes.

L'axiome A.4 est une version de la réponse positive définie par Fishburn (1973) : si une issue passe pour un profil x, elle ne devrai pas être rejetée si un électeur qui était initialement indifférent vote "pour" ou si un électeur qui était "contre" initialement s'abstient.

Les deux parties de $A.4^*$ sont équivalentes si f vérifie A.2.

D'après le théorème de May, on a : f est la règle majoritaire simple ssi f vérifie A.1, A.2 et A.3.

Les théorème suivant donne une caractérisation de la règle majoritaire en utilisant les propriétés définies plus haut.

Théorème 3.2. *Fishburn[3]*

La seule règle de choix social qui vérifie les propriétés $A.3^*$, $A.4^*$ et A.5 c'est la règle majoritaire simple.

Nous donnons dans la suite une preuve à ce théorème. Pour cela, nous démontrons l'existence et ensuite l'unicité.

3.2.1 Existence

Propriété 3.3. *Soit f la règle majoritaire définie sur $\{-1, 0, 1\}^n$. Alors f vérifie $A.3^*$, $A.4^*$ et A.5.*

Preuve :

Soit f la règle majoritaire définie sur $\{-1, 0, 1\}^n$, x et y deux profils. Soit a l'option pour et b

l'option contre de la situation faisant l'objet du vote.

1) Montrons que f vérifie $A.3^*$.

- Première partie.

$$\begin{aligned}\{f(y)=0 \text{ et } x-y\in e\} &\Longrightarrow n(a,b,y)=n(b,a,y) \text{ et } n(a,b,x)=n(a,b,y)+1\\ &\Longrightarrow n(a,b,x)-1=n(b,a,y)\geq n(b,a,x)\\ &\Longrightarrow n(a,b,x)\geq n(b,a,x)+1>n(b,a,x)\\ &\Longrightarrow n(a,b,x)>n(b,a,x)\\ &\Longrightarrow f(x)=1\end{aligned}$$

- Deuxième partie

$$\begin{aligned}\{f(x)=0 \text{ et } x-y\in e\} &\Longrightarrow n(a,b,x)=n(b,a,x) \text{ et } n(a,b,x)=n(a,b,y)+1\\ &\Longrightarrow n(b,a,y)\geq n(b,a,x)=n(a,b,y)+1>n(a,b,y)\\ &\Longrightarrow n(b,a,y)>n(a,b,y)\\ &\Longrightarrow f(y)=-1\end{aligned}$$

2) Montrons que f vérifie $A.4^*$.

- $\{f(x)=1, \quad x-y\in e\}\Longrightarrow n(a,b,y)\geq n(b,a,y)\Longrightarrow f(y)\geq 0$

- $\{f(y)=-1, \quad x-y\in e\}\Longrightarrow n(a,b,x)\leq n(b,a,x)\Longrightarrow f(x)\leq 0$. Donc f vérifie $A.4^*$.

3)Montrons que f vérifie A.5 - $x>0\Longrightarrow \sum_i x_i>0\Longleftrightarrow n(a,b,x)>n(b,a,x)\Longleftrightarrow f(x)=1$.

- $x<0\Longrightarrow \sum_i x_i<0\Longleftrightarrow n(b,a,x)>n(a,b,x)\Longleftrightarrow f(x)=-1$. Donc f vérifie A.5. ■

3.2.2 Unicité

Propriété 3.4. *Soit f une règle de choix sociale définie sur $\{-1,0,1\}^n$. Si f vérifie les propriétés $A.3^*$, $A.4^*$ et A.5 alors, f est la règle majoritaire simple.*

Avant de donner une preuve à cette propriété, énonçons et démontrons les lemmes suivants.

Lemme 3.1. *Soient x et y deux profils vérifiant les hypothèses du théorème. Supposons que $f(x)=0$, $x_i=1$, $x_j=-1$, $y_i=y_j=0$ et $y_k=x_k \quad \forall k\notin\{i,j\}$. Alors $f(y)=0$.*

Lemme 3.2. *Soient x et y deux profils vérifiant les hypothèses du théorème. Supposons $f(x)=0$, $x_i=x_j=0$, $y_i=1$, $y_j=-1$ et $y_k=x_k \quad \forall k\notin\{i,j\}$. Alors $f(y)=0$.*

Preuve du lemme 1 :

Soient $x'=x-e_i$ et $x"=x+e_j$. Alors $y=x'+e_j=x"-e_i=x-e_i+e_j$.

Comme $f(x) = 0$ et $x - x' = e_i$, on a $f(x') = -1$ d'après la seconde partie de $A.3^*$. D'autre part, on a $y - x' = e_j$. Ainsi, $(f(x') = -1$ et $y - x' = e_j) \Longrightarrow f(y) \leq 0$ d'après la, seconde partie de $A.4^*$.

De façons similaire, $\{f(x) = 0$ et $x" - x = e_j\} \Longrightarrow f(x") = 1$, d'après la première partie de $A.3^*$. De plus, $\{f(x") = 1$ et $x" - y = e_i\} \Longrightarrow f(y) \geq 0$ d'après la première partie de $A.4^*$. Ainsi $f(y) = 0$ et la preuve de ce lemme est terminée. ■

Preuve du lemme 2 :

Soient $y' = y - e_i$, $y" = y + e_j$.

On a $x = y' + e_j = y" - e_i = y + e_j - e_i \quad \Longrightarrow y' = y - e_i \Longrightarrow y - y' = e_i$.

$\{x - y' = e_j \quad f(x) = 0\} \Longrightarrow f(y') = -1$.

$y - y' = e_i$ et $f(y') = -1\} \Longrightarrow f(y) \leq 0 \quad (*)$ d'après $A.4^*$.

$y" = y + e_j \Longrightarrow y" - y = e_j$.

$x = y" - e_i \Longrightarrow y" - x = e_i$.

$\{y" - x = e_i$ et $f(x) = 0\} \Longrightarrow f(y") = 1$ d'après $A.3^*$.

$\{f(y") = 1$ et $y" - y = e_j\} \Longrightarrow f(y) \geq 0 \quad (**)$ d'après $A.4^*$.

(*) et (**) montrent que $f(y) = 0$ ce qui achève la preuve du lemme. ■

Lemme 3.3. $f(x) = 0$ *ssi* $\sum\limits_i x_i = 0$

Preuve :

Si $\sum\limits_i x_i \neq 0$ et $f(x) = 0$.

-Supposons $\sum\limits_i x_i > 0$. Alors $\exists j / \quad x_j = -1$ car sinon, on aurait $x > 0$ et $f(x) = 0$ ce qui contredirait A.5.

Posons $N_1 = \{i, i = 1, ..., n / x_i = 1\}$.

Soit $i_1 \in N_1$, posons $y^1_{i_1} = 0, \quad y^1_j = 0$ et $y^1_k = x_k \quad \forall k \notin \{i_1, j\}$. D'après le lemme 1, on a $f(y^1)$.

y^1 étant construis, soit $i_2 \neq i_1, \quad i_2 \in N_1$. Posons $y^2_{i_2} = 0$ et $y^2_k = y^1_k \quad \forall k \neq i_2$.

Alors on a $x_{i_2} = 1, \quad x_j = -1; \quad y^2_{i_2} = 0, \quad y^2_j = 0$ et $y^2_k = y^1_k \quad \forall k \notin \{i_2, j\}$. D'après le lemme 1, on a $f(y^2) = 0$. On construit ainsi une suite $(y^k)_{k \in N_1}$ avec $y^m < 0$ et $f(y^m) = 0$ où $m = maxN_1$, ce qui contredit A.5. Donc $f(x) \neq 0$. -Supposons $\sum\limits_i x_i < 0$. Alors $\exists j / \quad x_j = 1$ car sinon, on aurait $x < 0$ et $f(x) = 0$ ce qui contredit A.5.

Posons $N_2 = \{i, \quad i = 1, ..., n / \quad x_i = -1\}$

Soit $i_1 \in N_2$ Posons $y^1_{i_1} = 0, y^i_j = 0$ et $y^1_k = x_k \quad k \notin \{i_1, j\}$. D'après le lemme 1, on a $f(y^1) = 0$.

y^1 étant construit, soit $i_2 \neq i_i / x_{i_2} \in N_2$. Posons $y^2_{i_2} = 0$, $y^2_k = y^1_k \quad \forall k \neq i_2$. D'après le lemme 1, on a $f(y^2) = 0$. On construit ainsi une suite de profils $(y^k)_{k \in N_2}$ avec $y^m > 0$ et $f(y^m) = 0$ Ce qui contredit A.5. Donc $f(x) \neq 0$.
On conclut que $\sum_i x_i \neq 0 \Longrightarrow f(x) \neq 0$

Réciproquement, d'après A.5, $f(e_1) = 1$ et $f(-e_1) = -1$. Ainsi, $f(0) \geq 0$ d'après la première partie de $A.4^*$ et $f(0) \leq 0$ d'après la deuxième partie. Donc $f(0) = 0$. ■

Preuve de la propriété 3.4 :

Soit f une règle de choix sociale définie sur $\{-1, 0, 1\}^n$ et vérifiant les propriétés $A.3^*$, $A.4^*$ et A.5. Montrons que f est la règle majoritaire simple.
D'après le lemme 3, pour tout profil x, $f(x) = 0$ ssi $\sum_i x_i = 0$; il nous reste à montrer que :

$$\sum_i x_i > 0 \Longrightarrow f(x) = 1, \text{ et } \sum_i x_i < 0 \Longrightarrow f(x) = -1$$

- Soit x un profil tel que $\sum_i x_i > 0$, y le profil tel que $y_i = x_i$ si $x_i \geq 0$ et $y_i = 0$ sinon. Alors $y > 0$ et d'après A.5, on a $f(y) = 1$.
Si $x_i \geq 0 \quad \forall i$, alors $x > 0$ et par A.5, $f(x) = 1$; sinon,
posons : $k = \{i : x_i = -1\} = \{i_1, ..., i_l\}$, $y^1_{i_1} = -1$, $y^1_j = y_j \quad \forall j \neq i_1$ et
$\forall k = 2, ..., l, \quad y^k_{i_k} = -1, \quad y^k_j = y^{k-1}_j \quad \forall j \neq i_k$.
on a $\{f(y) = 1$ et $y - y^1 \in e\} \Longrightarrow f(y^1) \geq 0$ d'après la première partie de $A.4^*$. De plus, comme $\sum_i y^1_i > 0$, on a $f(y^1) = 1$ d'après le lemme 3.
De même, $\forall k = 2, ..., l$, on montre que $\{f(y^{k-1}) = 1$ et $y^{k-1} - y^k \in e\} \Longrightarrow f(y^k) \geq 0$ et comme $\sum_i y^k_i > \sum_i x_i > 0$, on a $f(y^k) = 1$ d'après le lemme 3. Ainsi, on a $f(y^l) = f(x) = 1$.
Donc $\sum_i x_i > 0 \Longrightarrow f(x) = 1 \quad (1)$
- Soit x un profil tel que $\sum_i x_i < 0$ et y tel que $y_i = x_i$ si $x_i \leq 0$ et $y_i = 0$ sinon. Alors $y < 0$ et d'après A.5, $f(y) = -1$.
Si $x_i \leq 0 \quad \forall i$, alors $x < 0$ et d'après A.5, $f(x) = -1$. Sinon, posons $L = \{i : x_i = 1\} = \{i_1, ..., i_l\}$,
$y^1_{i_1} = 1, \quad y^1_j = y_j, \quad \forall j \neq i_1$.
On a $\{f(y) = -1$ et $y^1 - y \in e\} \Longrightarrow f(y^1) \leq 0$ d'après la deuxième partie de $A.4^*$.
$\forall k = 2, ..., l, \quad$ pose : $\quad y^k_{i_k} = 1, \quad y^k_j = y^{k-1}_j \quad \forall j \neq i_k$.

Par construction de y^{k-1}, on a $f(y^{k-1}) = -1$. Ainsi, $\{f(y^{k-1}) = -1, y^k - y^{k-1} \in e\} \Longrightarrow f(y^k) \leq 0$ d'après la deuxième partie de $A.4^*$.
Puisque $\sum_i y_i^k < \sum_i x_i < 0$, on a $f(y^k) \neq 0$ d'après le lemme 3, i.e $f(y^k) = -1$. On obtient alors $f(y^l) = f(x) = -1$. Donc $\sum_i x_i < 0 \Longrightarrow f(x) = -1$ (2).
(1), (2) et le lemme 3 montrent que f est la règle majoritaire simple. ■
Les deux propriétés précédentes donne une preuve au théorème de Fishburn.

Parvenus au terme de ce chapitre, il était question pour nous de présenter quelques caractérisations de la règle majoritaire. Nous en avons présenté deux à savoir celle de May et ensuite celle de Fishburn, ce qui marque ainsi la fin de ce chapitre.

♠ Conclusion ♠

L'ensemble des théorèmes présentés dans ce mémoire ne constitue pas une liste exhaustive des résultats de la théorie des choix collectifs donnant les caractérisations des règles de choix social communément utilisées dans nos sociétés. Cependant, il était question pour nous dans ce mémoire d'en présenter quelques uns. On devait dans un premier temps, présenter la caractérisation des correspondances de choix social à score par Young, ensuite, présenter la caractérisation de la règle de Borda par Young, la caractérisation de la règle de la pluralité de Lepelley, et ensuite présenter la caractérisation de la règle majoritaire de May et enfin celle de Fishburn. Toutefois, nous ne nous sommes pas limités à la présentation de ces résultats, mais nous avons donné une preuve à chacun de ces résultats indéniables en théorie des choix collectifs. Il ressort donc de notre travail qu'une procédure d'agrégation de préférences satisfait l'anonymat, la neutralité et la consistance si et seulement si c'est une règle à score. En plus, elle est continue si et seulement si c'est une règle à score simple. La seule correspondance de choix social neutre, consistante, fidèle et annulatrice est la règle de Borda. Il existe une seule correspondance de choix social satisfaisant simultanément les propriétés d'anonymat, de neutralité, de consistance, de continuité et de Condorcet fort, c'est la règle de la pluralité. Il en ressort également que pour un vote à deux alternatives, la règle majoritaire est la seule procédure d'agrégation des préférences satisfaisant les propriétés définies dans le théorème de Fishburn[1973]. C'est également la seule procédure d'agrégation des préférences anonyme, neutre et monotone d'après le théorème de May.

Au vu de tout cela, nous pouvons dire que la caractérisation d'une règle de choix social peut nous permettre de faire ressortir des propriétés mathématiques caractéristiques de cette règle afin de prévoir des implications sociales de son utilisation. Il serait donc très important de caractériser davantage les règles de choix social que nous utilisons couramment dans nos sociétés, par exemple la procédure électorale utilisée lors de élections présidentielles Française qui est une composée de deux règles de choix à savoir la règle de la pluralité au premier tour et la règle majoritaire simple au second tour pour les deux candidats en tête à l'issue du premier tour.

♠ Implication pédagogique ♠

Ce mémoire étant un outil de recherche, il serait important de dire quelle est son implication pédagogique pour la formation d'enseignant du secondaire que nous subissons. Nous pouvons dire pour cela que ce mémoire nous aide à plusieurs niveaux :

• Il accroit notre habileté non seulement à créer des situations de la vie courante pour expliquer les notions mathématiques que nous enseignons, mais aussi à montrer leur importance dans la vie courante, ce qui accroit notre habileté à appliquer l'APC.

• Il développe en nous l'esprit de recherche et de créativité, et nous permet d'être au dessus de notre sujet au lycée.

• Il participe à notre culture mathématiques et accroit notre habileté à modéliser les phénomènes sociaux et les situations de vie afin de prévoir une résolution mathématiques de certains problèmes de la vie courante.

♠ Bibliographie ♠

[1] **CHING S.** A Simple Characterization of Plurality Rule, *Journal of Economic Theory 71, 1996, p. 298-302*.

[2] **FENCHEL W.** Convex Cones, Sets and Function, Mineographed Lecture Notes, *Princeton U., 1951*.

[3] **FISHBURN**, A New Characterization of Simple Majority, *Economic letters 13, (1983) 31-35*.

[4] **FISHBURN and GEHERLEIN W.V.**, Borda's Rule, Positional Voting, and Condorcet's Simple Majority Principle, *Public Choice 28,1976, p.79-88*.

[5] **HAIM B.**, Analyse Fonctionnelle, *Dunod, 2005*.

[6] **HARARY F**, Graph Theory, *Addison-Wesley, Reading, MA, 1969*.

[7] **LEPELLEY D.**, Une caractérisation du vote à la majorité simple, *RAIRO Operations Research 26, 1992, p. 361-365*.

[8] **MAY K.O**, A set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decisions, *Econometrica 20 1952 p. 680-684*

[9] **MERLIN V.**, The Axiomatic Caracterizatons Of Majority Voting And Scoring Rules, *Mathematical social sciences 161, 2003, p.87-109*.

[10] **RICHELSON J.T**, A Characterization Result for Plurality Rule, *Journal of Economic Theory 19, 1978,p. 548-550*.

[11] **SMITH J.H.**, Aggregation of Preferences with Variable Electorate, *Econometrica 41, 1973, p.1027-1041*.

[12] **YOUNG H.P.**, A Note on Preference Aggregation, *Econometrica 42, 1974, p. 1129-1131*.

[13] **YOUNG H.P.**, An Axiomatization of Borda's Rule, *Journal of Economic Theory 9, 1974, p. 43-52.*

[14] **YOUNG H.P.**, Social Choice Scoring Functions, *SIAM Journal Of Applied Mathematics 28, 1975, p. 824-838.*