REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

Une représentation simplifiée des jeux simples complets

Mémoire de Di.P.E.S II de mathématiques

Par :

KENFACK LAMBOU Gervais
Licencié en Mathématiques

Sous la direction
Pr TCHANTCHO Bertrand
Maître de Conférences

Année Académique
2015-2016

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents M. Lambou Victor et Mme Meugang Agnés-Marie

Remerciements

Seul, il est très difficile d'arriver à bâtir.

J'adresse ici mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont porté jusque là par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements, leurs aides et leurs reproches. Ma profonde reconnaissance va tout d'abord :

- ♡ Au Seigneur **Jésus christ** , pour son amour, sa miséricorde, sa bonté, pour la protection qu'il m'a accordée durant toutes ces cinq années. Merci Seigneur pour tous ces dons.

  Mes remerciements s'adressent également de façon particulière :
- ♡ À mon encadreur, professeur **Tchantcho Bertrand** qui a de bon gré accepté de diriger ce travail. Malgré ses occupations, il a soutenu mes efforts jusqu'au bout. Vous vous êtes révélé réellement présent et surtout ouvert et avez ménagé beaucoup d'effort pour que ce travail puisse être effectué dans les délais. Merci grandement.
- ♡ À monsieur **Tsague Bill Proces** qui, malgré ses occupations,a accepté de me consacrer du temps ; de corriger et amélioré plusieurs parties de ce travail. il m'a soutenu jusqu'au bout. Merci infiniment.
- ♡ **À tous les enseignants de mathématiques de l'école normale supérieure de Yaoundé** , pour les enseignements et le suivi qu'ils m'ont apportés durant ces cinq années passées à l'école normale. Merci beaucoup.
- ♡ À tous mes frères et soeurs, je n'oublie pas l'amour et le réconfort que vous m'avez toujours témoigné ; à mes amis, pour leur encouragement. Merci à vous tous.
- ♡ À mes parents pour la grande attention que vous m'accordez et pour votre soutient sans cesse, merci pour vos conseils et vos encouragements.
- ♡ À tous mes camarades de promotion,particulièrement **Donfack**, **Kaldjob**, **Fouotsa**, **Djoumessi**, **Safokem**, **Feudjio**, **Kam tsemo**, pour l'esprit d'équipe qui n'a cessé de régner au cours de notre promotion.

Abstract

This work is a report of the work of F. Carreras and J. Freixas which deals with the class of complete simple games and centers on their structure. Using an extension of Isbell's desirability relation to coalitions, different from the normally used, F. Carreras and J. Freixas associate with any complete simple game a lattice of coalition models based upon the types of indifferent players. F. Carreras and J. Freixas establish the basic properties of a vector with natural components and a matrix with non negative integer entries, both closely related to the lattice, which are also shown to be characteristic invariants of the game, in the sense that they determine it uniquely up to isomorphisms.

Keywords : Simple games ; Completeness ; Weighted voting ; Desirability relation ; Lattice

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Relation de désirabilité dans un jeu simple complet **4**

1.1 Jeu simple 4

1.1.1 Définition et propriétés 4

1.1.2 Quelques jeux simples particuliers 7

1.1.3 Caractérisation des jeux à quota 9

1.2 Relation de désirabilité 10

1.2.1 Définitions 11

1.2.2 Quelques Propriétés 11

2 Treillis associé à un jeu simple complet **16**

2.1 Treillis 16

2.1.1 Treillis algébrique 16

2.1.2 Treillis ordonné 17

2.2 Extension de la relation de désirabilité à l'ensemble des coalitions 17

2.2.1 Définitions et propriétés 17

2.2.2 Caractérisation de l'indifférence coalitionnelle 20

2.3 Construction du treillis 22

2.3.1 Cas des jeux simples complets 22

2.3.2 Illustration et jeux simples non complets 30

3 Caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet **33**

3.1 Une représentation simplifiée d'un jeu simple complet 33

3.2 Unicité de représentation d'un jeu simple complet 38

4 Autre caractérisation des jeux simples à quota **47**

4.1 Le théorème de caractérisation 47

4.2 Exemples 50

Conclusion et perspectives **54**

Implication pédagogique **55**

Bibliographie **56**

Introduction générale

Les jeux modélisent les situations d'interactions entre des individus ou agents. La théorie des jeux est un domaine des mathématiques dans lequel on développe des outils permettant d'analyser les situations dans lesquelles l'action optimale pour un agent dépend des anticipations qu'il forme sur la décision des autres agents. Dans cette théorie on retrouve deux types de jeux : Les jeux non coopératifs qui modélisent les situations d'interactions dans lesquelles les différentes parties d'un accord de coopération ne sont pas liées par leur engagement ; Les jeux coopératifs qui modélisent les situations d'interactions dans lesquelles des individus s'associent afin d'obtenir le meilleur résultat pour chaque associé. Ici l'accent est mis sur les accords de coopérations entre les individus, les conséquences de ces accords et sur la procédure de répartition des richesses, des coûts, des honneurs ou des pouvoirs entre les différentes parties d'un accord. Dans cette classe de jeux, on retrouve les jeux simples. Un jeu simple est une formalisation mathématique de certaines situations de vote appelées les votes pour ou contre (yes-no voting). Un jeu simple est constitué de deux composantes. Une assemblée constituée d'un nombre fini de membres appelés joueurs, électeurs, agents ou votants, une règle de prise de décision collective. Lorsqu'une proposition est présentée, chaque votant dit s'il est pour l'adoption de la proposition ou s'il est contre l'adoption de la proposition. Une coalition c'est tout groupe non vide de joueurs et une coalition gagnante ou majoritaire c'est toute coalition telle que dès que tous les membres de ladite coalition sont favorables à la proposition, alors elle est adoptée. Dans les jeux simples, on retrouve les jeux à quota dont la définition se résume à la donnée de : l'assemblée ou l'ensemble des votants, le poids de chaque votant et le seuil qui est le poids minimale d'une coalition gagnante. Les jeux à quota sont très prisés à cause de la simplicité de leurs représentations. Mais tous les jeux simples n'étant pas toujours à quota, ils ne bénéficient pas de cette représentation. En général, il est difficile de définir et de manipuler la définition donnée d'un jeu simple qui n'est pas à quota lorsque le nombre de joueur est important. A.D Taylor et W. Zwicker (1999) [7] caractérisent les jeux à quota. Si un jeu n'est pas à quota, le définir revient à donner la liste des coalitions gagnantes or cette liste peut être très longue, ce qui rend la définition très lourde. C'est cela qui motive le travail de F. Carreras et J. Freixas (1996) [3] qui apportent une représentation plus simple qui s'applique sur une classe plus grande de jeux simples : les jeux simples complets. La représentation que F. Carreras et J. Freixas [3] donnent d'un jeu simple complet se résume à la donnée d'un vecteur qui donne dans l'ordre décroissant d'influence dans le jeu, le nombre de joueurs de chaque classe d'influence, et d'une matrice où chaque ligne représente un modèle de coalition minimal gagnant et rangé de tel sorte qu'un vecteur est au dessus d'un autre s'il possède plus de joueurs influents que cet autre. Pour aboutir à cette représentation, F. Carreras et J. Freixas (1996) démontrent trois principaux résultats : le premier, qui s'appuie sur l'indifférence coalitionnelle issue de l'extension de la relation de désirabilité, donne une nouvelle structure au jeu de départ. Le deuxième s'appuie sur le premier pour construire et mettre en isomorphisme, le jeu de départ doté de la structure que fourni le premier résultat et un treillis ordonné. Le troisième résultat s'appuie sur l'isomorphisme issu du deuxième résultat, et donne une caractérisation des caractéristiques invariants d'un jeu simple complet. Dans ce mémoire, il est question pour nous de faire un compte rendu clair, détaillé et bien illustré des travaux de F. Carreras et J. Freixas (1996) qui ont abouti à la représentation présentée plus haut. Nous donnerons des preuves aux propositions énoncées ici et là par F. Carreras et J. Freixas (1996) sans preuve parce que évidentes pour le lecteur expérimenté. Nous donnerons également des illustrations et des exemples. Nous proposons également dans ce mémoire, une autre preuve du résultat qui montre l'efficacité de la représentation de F. Carreras et J. Freixas (1996) pour tester si un jeu complet est à quota. Nous donnons également, des exemples illustrant la méthode pour tester si un jeu est à quota en utilisant la représentation de F. Carreras et J. Freixas. Ce travail qui est constitué de quatre chapitres se déroule ainsi qu'il suit.

Dans le chapitre I nous donnons les définitions, propriétés, remarques et exemples constituant les préliminaires ou les prérequis pour comprendre les chapitres suivants. Au chapitre II, nous présentons l'extension de la relation de désirabilité, la relation d'indifférence coalitionnelle, le premier et le second résultat de F. Carreras et J. Freixas (1996) et la construction du treillis associé à un jeu simple complet. Dans le chapitre III, nous donnons les caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet et nous présentons le troisième résultat de F. Carreras et J. Freixas décrivant les caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet. Dans le dernier chapitre, la question de l'efficacité de la représentation ci-dessus pour tester si un jeu simple est à quota est abordée et nous illustrons cela par des exemples qui montrent l'efficacité de leur représentation pour tester si un jeu est à quota. Le travail s'achève par une conclusion.

Chapitre I

Relation de désirabilité dans un jeu simple complet

1.1 Jeu simple

Les jeux simples sont une classe de jeux formalisant les situations de vote où chaque votant a deux options : Oui (voter pour) ou non (voter contre). Pour définir clairement la notion de jeu simple, il convient pour nous de définir d'abord la notion de jeu sous forme coopératif avec compensation et ensuite présenter les jeux simples comme cas particulier.

Définition 1.1.1 :

Un jeu sous forme coopératif avec compensation est un couple (N, ν) où N représente l'ensemble des joueurs et ν est une application de l'ensemble des parties de N dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, telle que $\nu(\varnothing) = 0$.

ν est appelé la fonction caractéristique du jeu.

Définition 1.1.2 :

Un jeu simple est un jeu coopératif (N, ν) où la fonction caractéristique ν du jeu vérifie les conditions suivantes :

(1) $\forall S \subseteq N, \nu(S) \in \{0, 1\}$

(2) Si $S \subset T$, $\nu(S) \leq \nu(T)$, *où* S *et* T *sont deux parties de* N

(3) $\nu(N) = 1$

1.1.1 Définition et propriétés

Soit (N, ν) un jeu simple. Dans la suite, nous utiliserons le vocabulaire suivant :

"Coalition" pour désigner toute partie non vide de N. L'ensemble des coalitions sera noté $\mathcal{C}(N)$.

"Coalition gagnante" pour désigner toute coalition $S \subseteq N$ telle que $\nu(S) = 1$. On notera $\mathcal{W}$ l'ensemble des coalitions gagnantes d'un jeu simple.
"Coalition perdante" pour désigner toute coalition $S \subseteq N$ telle que $\nu(S) = 0$. On notera $\mathcal{L}$ l'ensemble des coalitions perdantes d'un jeu simple.
La proposition suivante donne une caractérisation de la structure des ensembles des coalitions gagnantes d'un jeu simple.

Proposition 1.1.1 :

Si A est un ensemble non vide qui vérifie les conditions suivantes :

1- $A \subseteq \mathcal{P}(N)$

2- $\varnothing \notin A$.

3- Si $S \in A$, $T \subseteq N$ et $S \subseteq T$ alors $T \in A$.

Alors A est l'ensemble des coalitions gagnantes d'un jeu simple (N, ν).

Preuve:

Soit A un ensemble non vide qui vérifie les conditions : $1), 2)$ et $3)$. Montrons qu'il existe un jeu simple (N, ν) pour lequel A représente l'ensemble des coalitions gagnantes. Pour cela, posons :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & S & \longmapsto & \varphi(S) \end{array}$$

tels que :

$$\varphi(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

φ est une application de $\mathcal{P}(N)$ dans $\mathbb{R}$, $\varphi(\mathcal{P}(N)) = \{0, 1\}$ et $\varphi(\varnothing) = 0$ par définition de φ et du fait que $\varnothing \notin A$ d'après la propriété (2) de A. De plus φ vérifie les conditions de fonction caractéristique d'un jeu simple.

En effet A étant non vide, il existe $S \subseteq N$ tel que $\varnothing \neq S \in A$ vu que $\varnothing \notin A$. Il suit que $N \in A$ d'après la propriété (3) de A et de ce fait, $\varphi(N) = 1$.
D'autre part, Soient S et T deux coalitions telles que $S \subseteq T$, on veut montrer que $\varphi(S) \leq \varphi(T)$.

- Si $T \in A$ alors $\varphi(T) = 1 \geq max\{0, 1\} \geq \varphi(S)$ par définition de φ.
- Si $T \notin A$ alors $S \notin A$, en effet si $S \in A$ il suit d'après la propriété (3) de A que $T \in A$ ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi, $S \notin A$ et donc $\varphi(S) = 0$ et il suit que $\varphi(S) = \varphi(T)$

Dans les deux cas on a $\varphi(S) \leq \varphi(T)$.

Il résulte que l'application ϕ ainsi construite est la fonction caractéristique d'un jeu simple.

De plus par définition de φ, on a :

$$\begin{aligned} S \in \mathcal{W} &\iff \varphi(S) = 1 \\ &\iff S \in A \end{aligned}$$

Il suit que $A = \mathcal{W}$ c'est-à-dire que A est l'ensemble des coalitions gagnantes du jeu simple (N, φ). D'où le résultat (prendre $\nu = \varphi$). ■

La remarque ci-dessous découle de ce qui précède.

Remarque 1.1.1 :

Si (N, ν) est un jeu simple et $\mathcal{W}$ l'ensemble de ses coalitions gagnantes, alors le jeu (N, ν) peut encore être défini par la donnée du couple $(N, \mathcal{W})$.

Dans la suite, les jeux simples seront donnés sous la forme $(N, \mathcal{W})$ où N sera toujours l'ensemble des joueurs et $\mathcal{W}$ l'ensemble des coalitions gagnantes du jeu simple. Après cette proposition, nous ajoutons le vocabulaire suivant :

Une coalition S sera dite gagnante minimale si $S \in \mathcal{W}$ et $\forall T \in \mathcal{C}(N), T \subset S, T \neq S$, $T \notin \mathcal{W}$. C'est-à-dire que S est une coalition gagnante et chaque sous coalition stricte de S est perdante. L'ensemble des coalitions gagnantes minimales sera noté $\mathcal{W}^m$.

Une coalition S sera dite perdante maximale si $S \notin \mathcal{W}$ et $\forall T \in \mathcal{C}(N), S \subset T, S \neq T$, $T \in \mathcal{W}$ C'est-à-dire que S est une coalition perdante et chaque sur-coalition stricte de S est gagnante. L'ensemble des coalitions perdantes maximales sera noté $\mathcal{L}^M$.

Remarque 1.1.2 :

1– Un jeu simple peut se définir par la donnée de l'ensemble des joueurs N, et l'ensemble des coalitions gagnantes minimales $\mathcal{W}^m$

En effet, on a $\mathcal{W} = \{T \in \mathcal{C}(N) : \exists R \in \mathcal{W}^m \text{ et } T \supseteq R\}$.

2– Un jeu simple peut se définir par la donnée de l'ensemble des joueurs N, et l'ensemble des coalitions perdantes maximales $\mathcal{L}^M$

En effet, on a $\mathcal{W} = \{T \in \mathcal{C}(N) : \exists R \in \mathcal{L}^M, \quad T \neq R \text{ et } T \supseteq R\}$.

La proposition suivante donne une caractérisation de la structure des ensembles des coalitions gagnantes minimales d'un jeu simple.

Proposition 1.1.2 :

Si A est un ensemble non vide qui vérifie les conditions suivantes :

1- $A \subseteq \mathcal{P}(N)$

2- $\varnothing \notin A$.

3- $\forall S, T \in A, S \nsubseteq T$.

Alors, A est l'ensemble des coalitions gagnantes minimales d'un jeu simple (N, ν).

Preuve:

Soit A un ensemble non vide qui vérifie les conditions (1), (2), (3), on va d'abord montrer que l'ensemble $B = \{S \in \mathcal{C}(N) : \exists R \in A \text{ et } R \subseteq S\}$ vérifie les conditions (1), (2), (3) de la proposition 1.1.1 et de ce fait il existe un jeu simple (N, ν) tel que B soit l'ensemble des coalitions gagnantes. Par suite on montrera que A est l'ensemble des coalitions gagnantes minimales de (N, ν).

- ♣ Par définition de B il suit que $B \subseteq \mathcal{P}(N)$. Comme $\varnothing \notin A$ d'après la propriété (2) de A, $\varnothing \notin B$. En effet, si on suppose que $\varnothing \in B$ alors par définition de B, il existerait $R \in \mathcal{W}$ tel que $R \subseteq \varnothing$. Or $R \subseteq \varnothing$ implique que $R = \varnothing$. Il vient que $\varnothing = R \in A$ c'est-à-dire $\varnothing \in A$ ce qui serait absurde d'après (2). Donc $\varnothing \notin B$.
- ♣ Soient S et T deux éléments de $\mathcal{C}(N)$ tels que $S \subseteq T$ et $S \in B$. Comme $S \in B$ il existe $R \in A$ tel que $R \subseteq S \subseteq T$. Ainsi, $\exists R \in A$ tel que $R \subseteq T$ et il suit que $T \in B$.

  Il en résulte que, B vérifie les conditions (1), (2), (3) de la proposition 0.1.1 et de ce fait il existe un jeu simple (N, ν) tel que B soit l'ensemble des coalitions gagnantes.
- ♣ Soit $S \in A$, montrons que $S \in \mathcal{W}$ et que $\forall R \subsetneq S$, $R \notin \mathcal{W}$ où $\mathcal{W}$ est l'ensemble des coalitions gagnantes du jeu (N, ν).

  $S \subseteq S$ et $S \in A$ donc $S \in B$ par définition de B, d'où $S \in B = \mathcal{W}$. Soit $R \subsetneq S$, supposons que $R \in \mathcal{W} = B$ alors $\exists T \in A$ tel que $T \subseteq R$. Ainsi on a : $T \subseteq R \subsetneq S$ et $S, T \in A$ qui impliquent que $T \subsetneq S$ et $S, T \in A$ ce qui contredit la propriété (3) de A d'où $S \notin B$. Il suit donc que $\forall R \subsetneq S$, $R \notin \mathcal{W} = B$. Donc A est l'ensemble des coalitions gagnantes minimales de (N, ν).

D'où le résultat. ∎

1.1.2 Quelques jeux simples particuliers

Nous supposons donné un ensemble non vide N de cardinal $n > 0$.

Définition 1.1.3 :

1) L'unanimité

C'est le jeu simple obtenu en prenant $\mathcal{W} = \{N\}$.

2) La dictature

Un jeu $\mathcal{W}$ est dit dictatorial s'il existe $i \in N$ tel que :

$\forall S \in \mathcal{C}(N) \quad , S \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow i \in S.$

3) L'oligarchie

Un jeu $\mathcal{W}$ est dit oligarchique s'il existe $T \subseteq N$ tel que :

$\forall S \in \mathcal{C}(N) \quad , S \in \mathcal{W} \Longrightarrow T \subseteq S.$

4) La majorité simple ou Vote à la majorité

C'est le jeu simple obtenu en prenant $\mathcal{W} = \{S \in \mathcal{C}(N) : |S| > \frac{n}{2}\}$.

De manière générale, la règle q-majoritaire, $1 > q \geq \frac{1}{2}$ est définie par :

$\mathcal{W} = \{S \in \mathcal{C}(N) : \frac{|S|}{n} > q\}.$

5) Jeu à quota ou jeu pondéré

Un jeu simple $\mathcal{W}$ est dit à quota s'il existe $(\omega_i)_{i \in N} \subset \mathbb{N}^n, \quad q \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall S \in \mathcal{C}(N), \quad S \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow \sum_{i \in S} \omega_i \geq q$$

Un jeu à quota $(N, \mathcal{W})$ peut encore être représenté par $[q; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n]$.

Un jeu à quota $G = [q; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n]$ est encore appelé un n-jeu à quota.

Si pour tout $i \in N, \quad \omega_i = \omega$ on note $G = (\omega, q)$

Un n-jeu à quota est dit Poids-minimal si : $\omega_n = 1, \quad \omega_i - \omega_{i+1} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N$.

Exemple 1.1.1 :

Considérons le jeu simple à quota suivant : $[46; 10, 10, 10, 10, 8, 8, 8, 1, 1, 1, 1, 1]$. On peut constater que cette représentation est bien plus simple que la donnée de $\mathcal{W}$ ou de $\mathcal{W}^m$. En effet ici $N = \{1, 2, ..., 12\}$ et l'ensemble des coalitions minimales est composé de 42 coalitions.

Nous pouvons constater à partir de l'exemple précédent que tout jeu à quota possède une représentation simplifiée. Mais il existe des jeux simples qui ne sont pas à quota et qui par conséquent ne bénéficient pas de cette représentation. l'exemple ci-dessous en est un cas illustratif.

Exemple 1.1.2 :

Soit le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ défini par :

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^m \quad = \quad & \{\{1,2,3\}\{1,2,4\}\{1,2,5\}\{1,2,6\} \\ & \{1,3,4\}\{1,3,5\}\{1,3,6\}\{1,4,5\}\{1,4,6\}\{1,5,6\} \\ & \{2,3,4\}\{2,3,5\}\{2,3,6\}\{2,4,5\}\{2,4,6\}\{2,5,6\}\} \end{aligned}$$

Le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ ainsi défini n'est pas un jeu à quota.

En effet, si c'était le cas, il existerait un vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)$ avec tous ses composantes positives et tel que ω_i soit le poids du joueur i.

Comme $\{2,5,6\} \in \mathcal{W}^m \subset \mathcal{W}$ et que $\{1,2\} \notin \mathcal{W}$ car a moins de 3 éléments, il vient que $\omega_2 + \omega_5 + \omega_6 > \omega_1 + \omega_2$ et donc $\omega_5 + \omega_6 > \omega_1$ $(*)$

De même, comme $\{1,3,4\} \in \mathcal{W}^m \subset \mathcal{W}$ et que $\{3,4,5,6\} \notin \mathcal{W}$ car ne contient ni le joueur 1, ni le joueur 2, il vient que $\omega_1 + \omega_3 + \omega_4 > \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$ et donc $\omega_1 > \omega_5 + \omega_6$ $(**)$.

Les relations $(*)$ et $(**)$ nous donnent une contradiction. Donc $(N, \mathcal{W})$ ne saurait être un jeu à quota.

1.1.3 Caractérisation des jeux à quota

Définition 1.1.4 :

Soit $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple. On dit que G est π-robuste si :

$\forall S, T \in \mathcal{W}, \quad \forall i, j \in N : (i \in S \smallsetminus T \text{ } et \text{ } j \in T \smallsetminus S) \Longrightarrow (S \smallsetminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{W} \text{ } ou \text{ } (T \smallsetminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{W}$

Définition 1.1.5 :

Soit $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple. Un commerce sur G est une suite $[(S_1, ..., S_k); (T_1, ..., T_k)]$ vérifiant :

$\forall i \in N, \quad |\{p : i \in S_p\}| = |\{p : i \in T_p\}|$

Les coalitions $(S_i)_{i \in \{1,...,k\}}$ sont appelées les coalitions avant-commerce et les $(T_i)_{i \in \{1,...,k\}}$ après-commerce.

Définition 1.1.6 :

Soit $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple. On dit que G est commercialement robuste s'il n'existe aucun commerce sur G dans lequel toutes les coalitions avant-commerce sont gagnantes et toutes les coalitions après-commerce sont perdantes.

La propriété suivante donne un caractérisation des jeux à quota.

Proposition 1.1.3 :

Tout jeu simple pondéré est π-robuste.

Preuve:

Soit $G = [q; (\omega_k)_{k \in \{1,...,n\}}]$ un jeu pondéré. Soient $S, T \in \mathcal{W}$, soient $i, j \in N$ tels que $i \in S \smallsetminus T$ et $j \in T \smallsetminus S$. Comme $\omega_i, \omega_j \in \mathbb{N}$ alors soit on a $\omega_i \geq \omega_j$ soit on a $\omega_i \leq \omega_j$. Sans nuire à la généralité, supposons que $\omega_i \leq \omega_j$.

Comme $S \in \mathcal{W}$, il suit que :

$$q \leq \sum_{k\in S}\omega_i = \sum_{k\in S\setminus\{i\}}\omega_k + \omega_i \leq \sum_{k\in S\setminus\{i\}}\omega_k + \omega_j = \sum_{(k\in S\setminus\{i\})\cup\{j\}}\omega_k$$

d'où $q \leq \sum\limits_{(k\in S\setminus\{i\})\cup\{j\}}\omega_k$ c'est-à-dire $(S\setminus\{i\})\cup\{j\}\in\mathcal{W}$ d'où le résultat. ■

Proposition 1.1.4 :

Tout jeu simple pondéré est commercialement robuste.

Preuve:

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $G = [q;(\omega_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}]$ un jeu simple pondéré qui n'est pas commercialement robuste.

G n'étant pas commercialement robuste, il existe un commerce $[(S_1,\dots,S_k);(T_1,\dots,T_k)]$ vérifiant :

$\forall i\in N,\quad |\{p : i\in S_p\}| = |\{p : i\in T_p\}|$, $\forall t\in\{1,\dots,k\}, S_t\in\mathcal{W}$ et $\forall t\in\{1,\dots,k\}, T_t\notin\mathcal{W}$.

Comme $\forall i\in N,\quad |\{p : i\in S_p\}| = |\{p : i\in T_p\}|$, il suit que :

$$\sum_{t=1}^{k}(\sum_{i\in S_t}\omega_i) = \sum_{t=1}^{k}(\sum_{i\in T_t}\omega_i)$$

Or $\forall t\in\{1,\dots,k\}, S_t\in\mathcal{W}$ donc $\forall t\in\{1,\dots,k\},\quad \sum\limits_{i\in S_t}\omega_i \geq q$ par conséquent :

$$\sum_{t=1}^{k}(\sum_{i\in S_t}\omega_i) \geq \sum_{t=1}^{k} q = kq$$

Mais comme $\forall t\in\{1,\dots,k\}, T_t\notin\mathcal{W}$, il suit que $\forall t\in\{1,\dots,k\},\quad \sum\limits_{i\in T_t}\omega_i < q$ et par conséquent : $\sum\limits_{t=1}^{k}(\sum\limits_{i\in T_t}\omega_i) < \sum\limits_{t=1}^{k} q = kq$

Ainsi $\sum\limits_{t=1}^{k}(\sum\limits_{i\in T_t}\omega_i) = \sum\limits_{t=1}^{k}(\sum\limits_{i\in S_t}\omega_i) \geq \sum\limits_{t=1}^{k} q = kq > \sum\limits_{t=1}^{k}(\sum\limits_{i\in T_t}\omega_i)$ et on a $\sum\limits_{t=1}^{k}(\sum\limits_{i\in T_t}\omega_i) > \sum\limits_{t=1}^{k}(\sum\limits_{i\in T_t}\omega_i)$ ce qui est absurde !

Donc tout jeu pondéré est à quota. ■

Taylor [8] démontre le théorème suivant qui achève la caractérisation des jeux à quota.

Théorème 1.1.1 :

Soit $G = (N,\mathcal{W})$ un jeu simple.

G est à quota si et seulement si G est commercialement robuste.

1.2 Relation de désirabilité

Dans cette section, nous rappelons la relation de désirabilité initialement introduite par J. R. Issbell (1956) [5] et reconsidéré par E. Einy (1985) [4] et A.D Taylor, W. Zwicker(1999) [7], ainsi que quelques propriétés.

1.2.1 Définitions

Soit E un ensemble non vide.

Un préordre R sur E est une relation binaire sur E qui est réflexive et transitive

Un relation binaire R est total sur E si $\forall x, y \in E$,$(x, y) \in R$ ou $(y, x) \in R$

Une relation d'équivalence sur E est une relation binaire sur E qui est réflexive, symétrique et transitive.

Une relation d'ordre large sur E est une relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition 1.2.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple.

1. *Considérons $\mathcal{W}_i = \{S \in \mathcal{W} / i \in S\}$ l'ensemble des coalitions gagnantes contenant i et $\tau_{ij} : N \to N$ désigne la transposition des joueurs i et j.*
   On définit la relation de désirabilité noté $\boldsymbol{D}$ par : $\forall i, j \in N \quad i\boldsymbol{D}j \Leftrightarrow \tau_{ij}(\mathcal{W}_j) \subseteq \mathcal{W}_i$
2. *$\forall i, j \in N,\ i\boldsymbol{I}j \Leftrightarrow i\boldsymbol{D}j$ et $j\boldsymbol{D}i$.*
3. *Le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ est dit complet si pour tout $i, j \in N$ on a : $i\boldsymbol{D}j$ ou $j\boldsymbol{D}i$.*

$\mathbf{D}$ traduit la désirabilité et dire que i est au moins aussi désirable que j signifie qu'en substituant j par i dans une coalition gagnante, elle reste gagnante.

$\mathbf{I}$ traduit l'indifférence entre deux joueurs ou une sorte d'équivalence.

1.2.2 Quelques Propriétés

Proposition 1.2.1 :

Soient i et j deux éléments de N.

1) $i\boldsymbol{D}j$ si et seulement si $\forall S \in \mathcal{C}(N)$, tel que $i \notin S$ et $j \notin S$, $S + j \in \mathcal{W}$ implique $S + i \in \mathcal{W}$. où $S + i$ désigne $S \cup \{i\}$.

2) $\boldsymbol{D}$ est un préordre sur N.

Preuve:

1) $\Longrightarrow$) Supposons que $i\mathbf{D}j$, soit $S \in \mathcal{C}(N)$ tel que $i \notin S$ et $j \notin S$. Si $S + j \in \mathcal{W}$ alors $S + j \in \mathcal{W}_j$.Ainsi, $\tau_{ij}(S + j) \in \tau_{ij}(\mathcal{W}_j)$, or $\tau_{ij}(\mathcal{W}_j) \subseteq \mathcal{W}_i$ car $i\mathbf{D}j$. il en résulte que $\tau_{ij}(S + j) \in \mathcal{W}_i$. Comme $\tau_{ij}(S + j) = \tau_{ij}(S) + \pi_{ij}(\{j\}) = S + i$ car $i \notin S$, $j \notin S$ et τ_{ij} est une bijection. Ainsi $S + i \in \mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}$, d'où $S + i \in \mathcal{W}$.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\forall S \in \mathcal{C}(N)$, telle que

$i \notin S$ et $j \notin S$, $S + j \in \mathcal{W} \Longrightarrow S + i \in \mathcal{W}$.

Soit $S \in \mathcal{W}_j$, on a deux cas possibles : soit $i \in S$ soit $i \notin S$.

♦ Si $i \in S$, alors $\tau_{ij}(S) = S$ et $S \in \mathcal{W}_j \subset \mathcal{W}$.Ainsi $i \in S$ et $S \in \mathcal{W}$, ce qui entraine que $S \in \mathcal{W}_i$.

♦♦ Si $i \notin S$, alors en posant $T = S \setminus \{j\}$, on a : $i \notin T$ et $j \notin T$ et $T + j = S \in \mathcal{W}$. Par conséquent, $T + i \in \mathcal{W}$ d'après l'hypothèse de départ. Par ailleurs, comme $i \notin T$ et $j \notin T, \tau_{ij}(T) = T$ et par suite, $\tau_{ij}(S) = \tau_{ij}(T + j) = \tau_{ij}(T) + \tau_{ij}(\{j\}) = T + i \in \mathcal{W}$. D'où $\tau_{ij}(\mathcal{W}_j) \subseteq \mathcal{W}_i$, c'est-à-dire $i\mathbf{D}j$.

2) **Réflexivité** .

$\mathbf{D}$ est un préordre sur N. En effet, $\forall i \in N$, $\tau_{ii} = Id_{P(N)}$, et il en résulte que $\tau_{ii}(\mathcal{W}_i) = \mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}_i$ et donc $i\mathbf{D}i$, D'où $\mathbf{D}$ est réflexive.

Transitivité .

Soient $i, j, k \in N$, tels que $i\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}k$. On veut montrer que $i\mathbf{D}k$. Pour cela il suffira de montrer que $\forall S \in \mathcal{C}(N)$,telle que $i \notin S$ et $k \notin S$, $S + k \in \mathcal{W} \Longrightarrow S + i \in \mathcal{W}$, et appliquer la première partie de la **Proposition 1.2.1** pour conclure.

Soit $S \in \mathcal{C}(N)$ telle que $i \notin S$, $k \notin S$ et $S + k \in \mathcal{W}$. On a deux cas possibles : Soit $j \in S$, soit $j \notin S$

♦ Si $j \notin S$, alors $S \in \mathcal{C}(N)$ avec $j \notin S$, $k \notin S$ et $S + k \in \mathcal{W}$. $S + j \in \mathcal{W}$ vu que $j\mathbf{D}k$ et vu la première partie de la **Proposition 1.2.1**. Or par choix de S on a également $j \notin S$, $i \notin S$. Donc $S \in \mathcal{C}(N)$ avec $i \notin S$, $j \notin S$ et $S + j \in \mathcal{W}$ ce qui entraine que $S + i \in \mathcal{W}$ vu que $i\mathbf{D}j$ et vu la première partie de la **Proposition 1.2.1**

♦ Si $j \in S$, on pose $T = S \setminus \{j\}$.

$$\begin{aligned} S + k \in \mathcal{W} &\Longleftrightarrow S \setminus \{j\} + j + k \in \mathcal{W} \\ &\Longleftrightarrow T + j + k \in \mathcal{W} \quad \text{car } S \setminus \{j\} = T \\ &\Longleftrightarrow T + k + j \in \mathcal{W} \quad \text{car la réunion est commutative} \\ &\Longleftrightarrow (T + k) + j \in \mathcal{W} \quad \text{car la réunion est associative} \end{aligned}$$

En posant $M = T + k$, on a :

$i \notin M$ et $j \notin M$ vu que $i \notin T$ et $j \notin T$. $M + j \in \mathcal{W}$ vu que $(T + k) + j \in \mathcal{W}$.

Ainsi, en appliquant la première partie du **Proposition 1.2.1** vu que $i\mathbf{D}j$, il vient que $M + i \in \mathcal{W}$.

Mais dire que $M + i \in \mathcal{W}$. c'est dire que $T + k + i \in \mathcal{W}$, c'est-à-dire que $T + i + k = (T + i) + k \in \mathcal{W}$.

En posant $L = T + i$, on a :

$k \notin L$ et $j \notin L$ vu que $k \notin T$ et $j \notin T$; $L + k \in \mathcal{W}$ vu que $(T + i) + k \in \mathcal{W}$. Ainsi, en appliquant la première partie du **Proposition 1.2.1** vu que $j\mathbf{D}k$, il vient que $L + j \in \mathcal{W}$.c'est-à-dire $T + i + j = S \setminus \{j\} + i + j = S + i \in \mathcal{W}$.

Ainsi $\forall\ i, j, k \in N$. Tels que $i\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}k$.on a $i\mathbf{D}k$. Donc $\mathbf{D}$ est un pré-ordre sur N. ∎

Proposition 1.2.2 :

*1- **I** est une relation d'équivalence sur N.*

*2- **D** induit un ordre noté $\geq$ sur $N/\boldsymbol{I}$, cet ordre n'est pas toujours total.*

*3- Si $(N, \mathcal{W})$ est complet, alors $\geq$ est un ordre total sur $N/\boldsymbol{I}$, et on dit que les **I**-classes sont linéairement ordonnées.*

Preuve:

1- Montrons que $\mathbf{I}$ est une relation d'équivalence sur N. Soit $i \in N$, comme $\mathbf{D}$ est réflexif d'après la **Proposition 1.2.1**, $i\mathbf{D}i$ et donc $i\mathbf{I}i$ d'après la définition de $\mathbf{I}$. D'où $\mathbf{I}$ est réflexif.

Soient i et j deux éléments de N tels que $i\mathbf{I}j$, alors par définition de $\mathbf{I}$ il suit que $i\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}i$ c'est-à-dire $j\mathbf{D}i$ et $i\mathbf{D}j$ ce qui équivaux à $j\mathbf{I}i$. D'où $\mathbf{I}$ est symétrique.

Soient $i, j, k \in N$ tels que $i\mathbf{I}j$ et $j\mathbf{I}k$ alors il suit que $i\mathbf{D}j$, $j\mathbf{D}i$ et $j\mathbf{D}k$, $k\mathbf{D}j$ et donc $i\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}k$, et $k\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}i$ d'où $i\mathbf{D}k$ et $k\mathbf{D}i$ car $\mathbf{D}$ est transitif. Par suite $i\mathbf{I}k$ donc $\mathbf{I}$ est transitif.

D'où $\mathbf{I}$ est une relation d'équivalence sur N.

2- Montrons que $\mathbf{D}$ induit un ordre $\geq$ sur $N/\mathbf{I}$.

Définissons la relation $\geq$ par :

$$\forall S, T \in N/\mathbf{I}, S \geq T \iff \forall i \in S, \forall j \in T, i\mathbf{D}j$$

Montrons que $\geq$ ainsi défini est un ordre sur $N/\mathbf{I}$.

Comme $\mathbf{D}$ est réflexif, il suit que $\forall S \in N/\mathbf{I}$, $\forall i \in S$, $i\mathbf{D}i$ d'où $S \geq S$. Donc $\geq$ est réflexif.

Soient $S, T \in N/\mathbf{I}$,tels que $S \geq T$ et $T \geq S$.

Comme $S \geq T$ et $T \geq S$ alors $\forall i \in S$, $\forall j \in T$, $i\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}i$, ce qui entraine que $\forall i \in S$, $\forall j \in T$, $i\mathbf{I}j$ d'où $S \cap T \neq \varnothing$ d'où $S = T$ car $N/\mathbf{I}$ est une partition de N. D'où $\geq$ est antisymétrique.

Soient $R, T, S \in N/\mathbf{I}$ tels que $S \geq T$ et $T \geq R$

Soient $i \in S$, $k \in R$ et $j \in T$. Comme $S \geq T$ et $T \geq R$ il suit que $i\mathbf{D}j$ et $j\mathbf{D}k$ d'où $i\mathbf{D}k$ car $\mathbf{D}$ est transitif. Ainsi $\forall i \in S$, $\forall k \in R$, $i\mathbf{D}k$ et donc $S \geq R$, d'où le résultat.

L'ordre $\geq$ n'est pas toujours total, en considérant par exemple le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ où $N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $\mathcal{W}^m = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ On a : $N/\mathbf{I} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ c'est-à-dire $1\mathbf{I}2$, $3\mathbf{I}4$ mais 1 et 3 ne sont pas comparables.

En effet, $\mathcal{W}_2 = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}\} = \tau_{12}(\mathcal{W}_1)$ d'où $1\mathbf{I}2$

$\mathcal{W}_4 = \{\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\} = \tau_{34}(\mathcal{W}_3)$ d'où $3\mathbf{I}4$

et $\tau_{13}(\{3,4\}) = \{1,4\}$ où $\{3,4\} \in \mathcal{W}$ et $\{1,4\} \notin \mathcal{W}$ d'où 1 et 3 ne sont pas comparables.

Ainsi $N/\mathbf{I} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, mais on n'a ni $\{1,2\} \geq \{3,4\}$, ni $\{3,4\} \geq \{1,2\}$ car 1 n'est pas au moins aussi désirable que 3 comme partenaire de coalition et 3 également n'est pas au moins aussi désirable que 1 comme partenaire de coalition. Ce qui montre que la relation $\geq$ n'est pas totale sur $N/\mathbf{I} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

3- Montrons que si le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ est complet au sens de $\mathbf{D}$, alors $\geq$ est totale sur $N/\mathbf{I}$.

Supposons que $(N, \mathcal{W})$ est un jeu simple complet.

Soient $S, T \in N/\mathbf{I}$, soit $i \in S$ et $j \in T$, comme $(N, \mathcal{W})$ est complet, on a $i\mathbf{D}j$ ou $j\mathbf{D}i$.

Si $i\mathbf{D}j$ alors, $\forall s \in S$ et $\forall t \in T$, $s\mathbf{I}i\mathbf{D}j\mathbf{I}t$ donc $\forall s \in S$ et $\forall t \in T$, $s\mathbf{D}t$ d'où $S \geq T$.

Si $j\mathbf{D}i$ alors, $\forall s \in S$ et $\forall t \in T$, $t\mathbf{I}j\mathbf{D}i\mathbf{I}s$ donc $\forall s \in S$ et $\forall t \in T$, $t\mathbf{D}s$ d'où $T \geq S$.

Dans tous les cas S et T sont toujours comparables par $\geq$. D'où $\geq$ est totale. ∎

Proposition 1.2.3 :

Tout jeu simple à quota est complet. La réciproque n'est pas vraie.

Preuve:

Soit $G = [q; \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n]$ un jeu simple à quota.

a) Montrons que si $\omega_i \geq \omega_j$ alors $i\mathbf{D}j$

Soit $S \subseteq N$ tel que $S \cap \{i,j\} = \varnothing$ nous voulons montrer que $S + j \in \mathcal{W} \Longrightarrow S + i$.

Supposons que $S + i\mathcal{W}$ Alors $\sum\limits_{k \in S+j} \omega_k \geq q$ c'est-à-dire $\sum\limits_{k \in S} \omega_k + \omega_j \geq q$. Comme $\omega_j \leq \omega_i$ il suit que $\sum\limits_{k \in S} \omega_k + \omega_j \leq \sum\limits_{k \in S} \omega_k + \omega_i$ et donc $\sum\limits_{k \in S} \omega_k + \omega_i \geq q$ d'où $S + i \in \mathcal{W}$. Ainsi si $\omega_i \geq \omega_j$ alors $i\mathbf{D}j$.

b) Montrons que G est complet

Soient i et j deux joueurs de poids respectifs ω_i et ω_j. Soit $\omega_i \leq \omega_j$ Soit $\omega_i \geq \omega_j$. $\omega_i \leq \omega_j$ entraine que $j\mathbf{D}i$ d'après a), $\omega_i \geq \omega_j$ entraine que $i\mathbf{D}j$ d'après a). Dans tous les cas, i et j sont toujours comparables par rapport à $\mathbf{D}$. Donc tout jeu simple à quota est complet.

c) La réciproque de la proposition précédente est fausse.

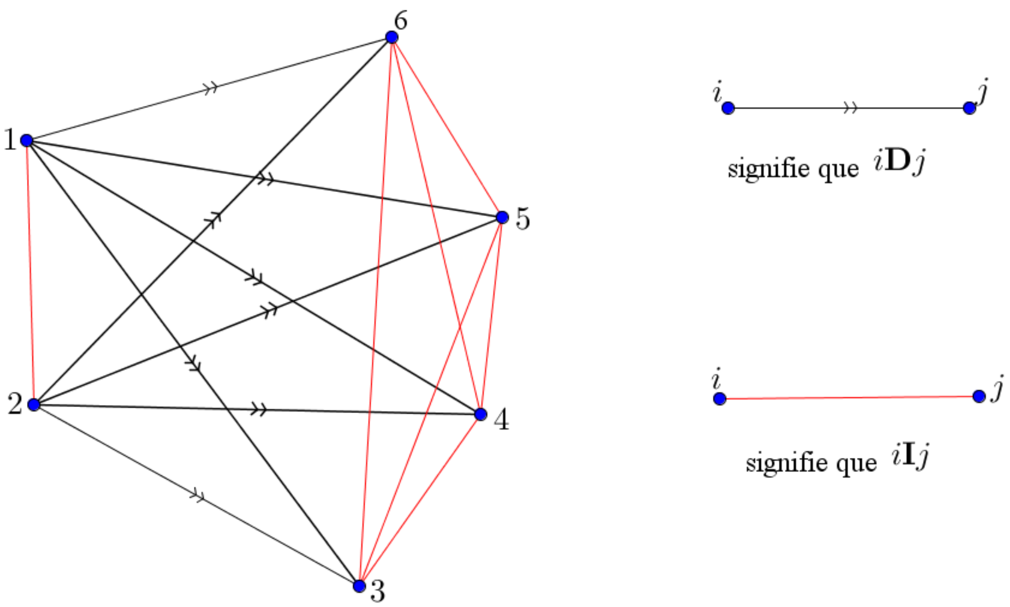
Considérons le jeu simple de l'exemple 1.1.2 $(N, \mathcal{W})$ défini par :

$N = \{1,2,3,4,5,6\}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^m \quad = \quad & \{\{1,2,3\}\{1,2,4\}\{1,2,5\}\{1,2,6\} \\ & \{1,3,4\}\{1,3,5\}\{1,3,6\}\{1,4,5\}\{1,4,6\}\{1,5,6\} \\ & \{2,3,4\}\{2,3,5\}\{2,3,6\}\{2,4,5\}\{2,4,6\}\{2,5,6\}\} \end{aligned}$$

Le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ ainsi défini n'est pas un jeu à quota comme on le montre à l'exemple 1.1.2. Reste à montrer que $(N, \mathcal{W})$ est complet.

Voici le graphe de la relation de désirabilité : $\{(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,3);$ $(2,4);(2,5);(2,6);(3,4);(3,5);(3,6);(4,3);(4,5);(4,6);(5,3);(5,4);(5,6);(6,3);(6,4);(6,5)\}$ ce qui nous donne :



D'où $(N, \mathcal{W})$ est complet. ■

Chapitre II

Treillis associé à un jeu simple complet

Au chapitre 1, nous avons défini la relation de désirabilité qui compare deux joueurs et, dans la section qui suit, nous voulons l'étendre pour pouvoir comparer deux coalitions. Mais avant d'y arriver, rappelons la notion de treillis que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre.

2.1 Treillis

Les définitions de treillis algébrique et Treillis ordonné suivantes sont de S.Burris et H.P. Sankappanavar (1981) [1]

2.1.1 Treillis algébrique

Définition 2.1.1 :

Soit L un ensemble non vide muni des opérations binaires $\wedge$ et $\vee$.

$(L, \vee, \wedge)$ *est appelé treillis algébrique si pour tout $x, y, z \in L$, on a :*

- $x \wedge y = y \wedge x$
- $x \vee y = y \vee x$ *(commutativité)*
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *(associativité)*
- $x \wedge x = x$
- $x \vee x = x$ *(idempotence)*
- $x \wedge (x \vee y) = x$
- $x \vee (x \wedge y) = x$*(absorption)*

Un treillis $(L, \wedge, \vee)$ *est dit distributif si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- $\forall x, y, z \in L, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $\forall x, y, z \in L, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \wedge z)$

On note $\mathcal{T} = (L, \vee, \wedge)$ *un treillis.*

Exemple 2.1.1 :

Soit $L = \{0, 1\}, \vee =$ disjonction $, \wedge =$ conjonction . Alors
$\mathcal{T} = (L, \vee, \wedge)$ un treillis algébrique où $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 0 = 1 \vee 0$, $1 \vee 1 = 1$ et $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 1 = 1 \wedge 0$, $1 \wedge 1 = 1$.

2.1.2 Treillis ordonné

Définition 2.1.2 :

Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ *est un treillis ordonné si,*$\forall a, b \in A, \sup\{a, b\}$ *et* $\inf\{a, b\}$ *existent dans* A.

Exemple 2.1.2 :

Soit E un ensemble non vide,notons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis ordonné. Avec $\sup\{A, B\} = A \cup B$ et $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Dans toute la suite, nous dirons treillis pour signifier treillis ordonné.

2.2 Extension de la relation de désirabilité à l'ensemble des coalitions

La relation d'équivalence **I** associée à la relation de désirabilité **D** sur N conduit à la formation de l'ensemble quotient : $N/I = \{N_1, N_2, \ldots, N_t\}$ où $(\forall i, j \in N_p,\ i\mathbf{I}j)$ et $(\forall i \in N_p,$ $\forall j \in N_q$ *avec* $q > p,\ i\mathbf{D}j)$. F. Carreras et J. Freixas (1996) étendent ces deux relations aux coalitions en utilisant les définitions suivantes.

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ *un jeu simple complet. Soient* S *et* T *deux coalitions.*

1. $S \perp T \Leftrightarrow$ *il existe* $i, j \in N$ *tel que* $\tau_{ij}(S) = T$ *et* iIj.

2. $S\boldsymbol{i}T \Leftrightarrow$ *il existe une suite finie* $(R_1, R_2, \ldots, R_h)$ *de coalitions telle que :* $S \perp R_1 \perp R_2 \perp \ldots \perp R_h = T$.

3. $T \dashv S \Leftrightarrow S = \varnothing$ *ou il existe* $i, j \in N$ *tel que* $\tau_{ij}(S) \subseteq T$ *avec* $j \in S$ *et* iDj.

4. $T\boldsymbol{d}S \Leftrightarrow$ *il existe une suite finie* $(R_1, R_2, \ldots, R_h)$ *de coalitions telle que :* $T \dashv R_1 \dashv R_2 \dashv \cdots \dashv R_h = S$.

Proposition 2.2.1 :

1) La relation $\boldsymbol{d}$ *définie ci-dessus est un préordre.*

2) La relation $\boldsymbol{i}$ *définie par :*

$\forall S, T \in \mathcal{C}(N), \quad S\boldsymbol{i}T \Longleftrightarrow (S\boldsymbol{d}T$ *et* $T\boldsymbol{d}S)$, *est une relation d'équivalence. On note* $\overline{\mathcal{C}(N)}$ *l'ensemble des classes de coalitions sur* N *:* $\overline{\mathcal{C}(N)} = \mathcal{C}(N)/\boldsymbol{i}$.

3) La relation $\geq$ *définie par :*

$\forall \overline{S}, \overline{R} \in \overline{\mathcal{C}(N)}, \ \overline{S} \geq \overline{R} \Leftrightarrow (\forall S \in \overline{S}, \forall R \in \overline{R}, S\boldsymbol{d}R)$. *est une relation d'ordre sur* $\overline{\mathcal{C}(N)}$

Preuve:

1) Montrons que $\boldsymbol{d}$ est un préodre sur $\mathcal{C}(N)$.

Réflexivité

Soit $S \in \mathcal{C}(N)$, $S\boldsymbol{d}S$ car $S \neq \varnothing$, $\exists i \in N$ tel que $i \in S$ et par suite, $S = \tau_{ii}(S)$ et $i\boldsymbol{D}i$. Ainsi $S \dashv S$ d'où $S\boldsymbol{d}S$.

Transitivité

Soient S, T et Q trois éléments de $\mathcal{C}(N)$ tels que $S\boldsymbol{d}T$ et $T\boldsymbol{d}Q$. Nous voulons montrer que $S\boldsymbol{d}Q$, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $(S_1, S_2, \ldots, S_h)$ de coalitions telle que :

$S \dashv S_1 \dashv S_2 \dashv \cdots \dashv S_h = Q$.

Comme $S\boldsymbol{d}T$ et $T\boldsymbol{d}Q$ alors il existe deux suites finies $(T_1, T_2, \ldots, T_t)$ et $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_q)$ de coalitions telles que :

$S \dashv T_1 \dashv T_2 \dashv \cdots \dashv T_t = T$ et

$T \dashv Q_1 \dashv Q_2 \dashv \cdots \dashv Q_q = Q$. Ainsi,

$S \dashv T_1 \dashv T_2 \dashv \cdots \dashv T_t = T \dashv Q_1 \dashv Q_2 \dashv \cdots \dashv Q_q = Q$ c'est-à-dire

$S \dashv T_1 \dashv T_2 \dashv \cdots \dashv T_t \dashv Q_1 \dashv Q_2 \dashv \cdots \dashv Q_q = Q$. Donc il suffit de prendre la suite finie $(T_1, T_2, \ldots, T_t, Q_1, Q_2, \ldots, Q_q)$ pour conclure que $S\boldsymbol{d}Q$. D'où $\boldsymbol{d}$ est transitive.

On conclut donc que $\boldsymbol{d}$ est un préordre sur $\mathcal{C}(N)$.

2) Montrons que la relation $\boldsymbol{i}$ définie par :

$\forall S, T \in \mathcal{C}(N), \quad S\mathrm{i}T \Longleftrightarrow (S\boldsymbol{d}T$ et $T\boldsymbol{d}S)$, est une relation d'équivalence.

Réflexivité

$\boldsymbol{i}$ est réflexif car $\boldsymbol{d}$ est réflexif.

Symétrie

Soient S et T deux éléments de $\mathcal{C}(N)$ tels que $S\boldsymbol{i}T$. Nous voulons montrer que $T\boldsymbol{i}S$. $S\boldsymbol{i}T$ entraine que $S\boldsymbol{d}T$ et $T\boldsymbol{d}S$, c'est-à-dire $T\boldsymbol{d}S$ et $S\boldsymbol{d}T$ c'est-à-dire $T\boldsymbol{i}S$. D'où $\boldsymbol{i}$ est symétrique.

Transitivité

Soient S, T et R trois éléments de $\mathcal{C}(N)$ tels que $S\boldsymbol{i}T$ et $T\boldsymbol{i}R$. Nous voulons montrer que $S\boldsymbol{i}R$.

$S\boldsymbol{i}T$ et $T\boldsymbol{i}R$ entraine que $S\boldsymbol{d}T$, $T\boldsymbol{d}S$ et $T\boldsymbol{d}R$, $R\boldsymbol{d}T$

Ce qui entraine alors que $S\boldsymbol{d}T$,$T\boldsymbol{d}R$ et $R\boldsymbol{d}T$, $T\boldsymbol{d}S$, et par transitivité de $\boldsymbol{d}$ on a $S\boldsymbol{d}R$ et $R\boldsymbol{d}S$ d'où $S\boldsymbol{i}R$. $\boldsymbol{i}$ est donc transitif.

On conclut que $\boldsymbol{i}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(N)$.

$\boldsymbol{i}$ est la relation d'équivalence associée au préordre $\boldsymbol{d}$.

Dans la suite, nous noterons $\overline{\mathcal{C}(N)}$ pour dire $\mathcal{C}(N)/\boldsymbol{i}$: l'ensemble des $\boldsymbol{i}$-classes de coalitions.

3) Montrons que $\geq$ est une relation d'ordre sur $\overline{\mathcal{C}(N)}$

Réflexivité

Soit $\overline{S} \in \mathcal{C}(N)$,nous voulons montrer que $\overline{S} \geq \overline{S}$.

$\forall S \in \overline{S}, \forall T \in \overline{S} \quad S\boldsymbol{d}T$ ce qui entraine que $\forall S \in \overline{S}, \forall T \in \overline{S} \quad S\boldsymbol{d}T$ d'où $\overline{S} \geq \overline{S}$.

Antisymétrie

Soient $\overline{S}$ et $\overline{R}$ deux éléments de $\overline{\mathcal{C}(N)}$ tels que $\overline{S} \geq \overline{R}$ et $\overline{S} \neq \overline{R}$. Nous voulons montrer que $\overline{R} \ngeq \overline{S}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\overline{R} \geq \overline{S}$, alors,

$\forall S \in \overline{S}, \forall R \in \overline{R}, S\boldsymbol{d}R$ et $\forall S \in \overline{S}, \forall R \in \overline{R}, R\boldsymbol{d}S$

Ce qui entraine que $\forall S \in \overline{S}, \forall R \in \overline{R}, S\boldsymbol{i}R)$ et comme $\overline{S}$ et $\overline{R}$ sont des classes d'équivalence suivant $\boldsymbol{i}$ alors $\overline{S} = \overline{R}$ ce qui contredit le fait que $\overline{S} \neq \overline{R}$. Donc $\overline{R} \ngeq \overline{S}$. d'où le résultat.

Transitivité

Elle découle de la transitivité de $\boldsymbol{d}$. ∎

2.2.2 Caractérisation de l'indifférence coalitionnelle

F. Carreras et J. Freixas (1996) [3] Énoncent le théorème suivant qui caractérise la relation d'indifférence coalitionnelle et jette les bases pour la formulation du théorème qui suivra celui-ci.

Théorème 2.2.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet. Soit $N_1, N_2, \ldots, N_t$ les I-classes du jeu de cardinalités $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Alors :

1. $S\boldsymbol{i}T \Leftrightarrow |S \cap N_k| = |T \cap N_k|, \ \forall k = 1, \ldots, t.$
2. $\forall \overline{S} \in \overline{\mathcal{C}(N)}, \ s_k = |S \cap N_k|$ *ne dépend pas de la représentation de* S *et vérifie :* $0 \leq s_k \leq n_k, \ \forall k = 1, \ldots, t.$
3. *Réciproquement, tout vecteur* $\overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ *tel que* $0 \leq s_k \leq n_k \ \forall k$*, définit une unique* $\boldsymbol{i}$*-classe* $\overline{S} \in \overline{\mathcal{C}(N)}$*.*
4. *La cardinalité de la* $\boldsymbol{i}$*-classe définie précédemment est :* $\left|\overline{S}\right| = \prod_{k=1}^{t} C_{n_k}^{s_k}.$

Preuve:

1) .

$\Longrightarrow$) Supposons que S et T soient indifférents comme coalition c'est-à-dire $S\boldsymbol{i}T$ et montrons que $\forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}, |S \cap N_k| = |T \cap N_k|$ Par définition de $\boldsymbol{i}$,

$S\boldsymbol{i}T \Leftrightarrow$ il existe une suite finie $(R_1, R_2, \ldots, R_h)$ de coalitions telle que :

$S \bot R_1 \bot R_2 \bot \ldots \bot R_h = T$. Ainsi par définition de la relation $\bot$,

$S \bot R_1 \Leftrightarrow$ il existe $i, j \in N$ tel que $\tau_{ij}(S) = T$ et $i\mathbf{I}j$

Ce qui implique qu'il existe $f_1 = \tau_{ij}$ une transposition de joueur indifférent tel que $f_1(S) = R_1$. De manière analogue, on montre qu'il existe f_i une transposition de joueur indifférent tel que $f_i(R_{i-1}) = R_i$ car $R_{i-1} \bot R_i$, $\forall i \in \{2, 3, ..., t\}$. Ainsi en posant $f = f_h \circ f_{h-1} \circ ... \circ f_1$, f transpose des joueurs indifférents et $f(S) = T$.

Comme f transpose des joueurs indifférents, on a : $f(N_k) = N_k, \forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}$.

$f(S \cap N_k) = f(S \cap f(N_k) = T \cap N_k$.

Comme f est une bijection $|S \cap N_k| = |f(S \cap N_k)| = |T \cap N_k| \ \forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}$.

$\Longleftarrow$) . Réciproquement, supposons que $\forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}, |S \cap N_k| = |T \cap N_k|$ et montrons que S et T sont indifférents comme coalition.

Comme les N_k forment une partition de N, $S = (S \cap N_1) \cup (S \cap N_2) \cup ... \cup (S \cap N_t)$

et $T = (T \cap N_1) \cup (T \cap N_2) \cup ... \cup (T \cap N_t)$. Ainsi en utilisant l'hypothèse, on a :

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{k=1}^{t} |S \cap N_k| \\ &= \sum_{k=1}^{t} |T \cap N_k| \\ &= |T|. \end{aligned}$$

D'où $|S| = |T|$.

$|(S \cup T) \setminus (S \cap T)| = |S| + |T| - 2|S \cap T| = 2(|S| - |S \cap T|)$ car $|S| = |T|$.

Ainsi $|(S \cup T) \setminus (S \cap T)|$ est pair. Posons $m = \frac{1}{2}|(S \cup T) \setminus (S \cap T)| = |S| - |S \cap T|$.

- Si $m = 0$ alors $|S| = |S \cap T| \Longrightarrow T = S$ et donc $S\boldsymbol{i}T$ car $\mathbf{i}$ est réflexif.
- Si $m > 0$ alors $S \setminus (S \cap T) \neq \varnothing$.

Soit $i \in S \setminus (S \cap T) = S \setminus T \subset N$, alors $\exists k_0 \in \{1, 2, 3, ..., t\}$ tel que $i \in N_{k_0}$. Comme $|S \cap N_{k_0}| = |T \cap N_{k_0}|$ il vient que $|(S \cap N_{k_0}) \setminus (S \cap T)| = |(T \cap N_{k_0}) \setminus (S \cap T)|$ et puisque $i \in (S \cap N_{k_0}) \setminus (S \cap T)$, $|(S \cap N_{k_0}) \setminus (S \cap T)| > 0$ alors $|(T \cap N_{k_0}) \setminus (S \cap T)| > 0$. Ainsi $\exists j \in (T \cap N_{k_0}) \setminus (S \cap T)$. Posons $S_1 = \tau_{ij}(S)$. Comme $i, j \in N_{k_0}$ alors $i\mathbf{I}j$ et il suit que $S \perp S_1$, $|S_1 \cap T| = |S \cap T| + 1$ et $|S_1| = |S| = |T|$. Il résulte de ce qui précède que $m_1 = |S_1| - |S_1 \cap T| = m - 1$.

On applique ce même raisonnement en prenant pour S et m respectivement S_1 et m_1. Ce qui conduit à la construction de S_2 et m_2 tel que $S_1 \perp S_2$ et $m_2 = m_1 - 1 = m - 2$. Ainsi, de proche en proche, nous construisons la suite finie $(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ de coalitions telles que :

$S \perp S_1 \perp S_2 \perp \ldots \perp S_m = T$.

D'où $S\boldsymbol{i}T$

2) Soit $T \in \overline{S}$ alors $S\boldsymbol{i}T \Longleftrightarrow |S \cap N_k| = |T \cap N_k| \quad \forall k \in \{1, ..., t\}$ d'après **1)**. On a donc $s_k = |S \cap N_k| = |T \cap N_k| = t_k \quad \forall k \in \{1, ..., t\}$ d'où s_k ne dépend pas de la représentation de S.

De plus $|S \cap N_k| \geq 0, \quad \forall k \in \{1, ..., t\}$ et $|S \cap N_k| \leq |N_k| = n_k, \quad \forall k \in \{1, ..., t\}$ d'où $0 \leq s_k \leq n_k, \quad \forall k \in \{1, ..., t\}$

3) Soit $\overline{s} = (s_1, ... s_t)$ tel que $0 \leq s_k \leq n_k$ $\forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}$. On peut donc choisir s_k joueurs dans chaque N_k et constituer une coalition S telle que $|S \cap N_k| = s_k, \forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}$, d'après b), on définit ainsi une $\boldsymbol{i}$-classe $\overline{S}$.

4) Avoir un élément de la $\boldsymbol{i}$-classe $\overline{S}$ avec $|S \cap N_k| = s_k, \forall k \in \{1, 2, 3, ..., t\}$ revient à choisir s_k joueurs parmi n_k sans ordre donc $\left|\overline{S}\right| = C_{n_1}^{s_1} C_{n_2}^{s_2} ... C_{n_t}^{s_t}$ ■

L'objectif du paragraphe suivant est de montrer que l'ensemble des classes de coalitions $\overline{\mathcal{C}(N)}$ muni de la relation $\geq$ qui est le préordre induit par $\boldsymbol{d}$ est identifiable à un treillis $(\Lambda(\overline{n});\delta)$ où $\Lambda(\overline{n})$ est l'ensemble des modèles admissibles du jeu et δ la relation d'ordre permettant de les comparer.

2.3 Construction du treillis

F. Carreras et J. Freixas (1996) construisent une bijection qui préserve et réfléchit l'ordre entre un jeu complet et un treillis (ordonné) et montrent que lorsque le jeu n'est pas complet, une identification du jeu non complet à un treillis est impossible. Ainsi, dans cette section, nous distinguons deux cas :

2.3.1 Cas des jeux simples complets

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nul. Si $\overline{n} \in \mathbb{N}^t$ on peut noter :

$\Lambda(\overline{n}) = \left\{\overline{s} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^t \text{ tel que } \overline{n} \geqslant \overline{s}\right\}$ où $\geqslant$ est l'ordre de classement ordinaire sur les vecteur. Rappelons que :

$\overline{s} \geqslant \overline{r} \iff s_k \geq r_k, \forall k \in \{1,2,3,...,t\}$. Donc $\Lambda(\overline{n})$ est l'ensemble des vecteurs $\overline{s}$ tel que $\overline{s} = (s_1, s_2, ..., s_t)$ avec $0 \leq s_k \leq n_k \;\; \forall k \in \{1,2,3,...,t\}$.

La relation binaire définie ci-dessous a été introduite par Freixas et Carreras (1996) [3] dans le soucis de comparer les éléments de $\Lambda(\overline{n})$.

Soit $\overline{s}\delta\overline{r} \iff s_1 + s_2 + ... + s_k \geq r_1 + r_2 + ... + r_k, \forall k \in \{1,2,3,...,t\}$

Nous noterons dans la suite $\sum_k(\overline{s})$ pour dire $s_1 + s_2 + ... + s_k$.

On a donc $\overline{s}\delta\overline{r} \iff \sum_k(\overline{s}) \geq \sum_k(\overline{r}), \forall k \in \{1,2,3,...,t\}$

Proposition 2.3.1 :

δ est un pré-ordre sur $\Lambda(\overline{n})$ plus faible que $\geq$.

Preuve:

Réflexivité

Soit $\overline{s} \in (\Lambda(\overline{n}), \delta)$ alors $\overline{s} \geqslant \overline{s}$ donc $\overline{s}\delta\overline{s}$ d'où δ est réflexif.

Transitivité

Soient $\overline{s}, \overline{v}, \overline{r} \in (\Lambda(\overline{n}), \delta)$ tels que $\overline{s}\delta\overline{v}$ et $\overline{v}\delta\overline{r}$, soit $k \in \{1,2,...,t\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_k (\overline{s}) &\geq \sum_k (\overline{v}) \quad (1) \text{ car } \overline{s}\delta\overline{v} \\
\sum_k (\overline{v}) &\geq \sum_k (\overline{r}) \quad (2) \text{ car } \overline{v}\delta\overline{r} \\
\text{d'où } \sum_k (\overline{s}) &\geq \sum_k (\overline{r}) \quad \text{d'après (1) et (2)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{s}\delta\overline{r}$ et il suit que δ est transitif. Il résulte de ce qui précède que δ est un pré-ordre sur $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ ■

Dans la proposition qui suit, nous montrons que $\Lambda(\overline{n})$ muni de la relation δ forme un treillis (ordonné).

Proposition 2.3.2 :

1- Le couple $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ est un treillis.

2- $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ possède un maximum et un minimum par rapport à δ.

Preuve:

1- Le couple $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ est un treillis. En effet, pour deux éléments quelconques $\overline{s}$ et $\overline{r}$ de $\Lambda(\overline{n})$, la borne supérieure et la borne inférieure par rapport à δ de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ existent et sont dans $\Lambda(\overline{n})$. La borne supérieure par rapport à δ de la paire $\{\overline{s},\overline{r}\}$ qu'on va noter $\overline{s} \vee \overline{r}$ et la borne inférieure par rapport à δ qu'on va noter $\overline{s} \wedge \overline{r}$, sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
\overline{s} \vee \overline{r} &= ((\overline{s} \vee \overline{r})_1, (\overline{s} \vee \overline{r})_2, ..., (\overline{s} \vee \overline{r})_t) \\
\text{avec } (\overline{s} \vee \overline{r})_1 &= \max(s_1, r_1) \\
\text{et } (\overline{s} \vee \overline{r})_k &= \max\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r})\right) - \max\left(\sum_{k-1} (\overline{s}), \sum_{k-1} (\overline{r})\right) \forall k \in \{2, 3, ..., t\} \\
\overline{s} \wedge \overline{r} &= ((\overline{s} \wedge \overline{r})_1, (\overline{s} \wedge \overline{r})_2, ..., (\overline{s} \wedge \overline{r})_t) \\
\text{avec } (\overline{s} \wedge \overline{r})_1 &= \min(s_1, r_1) \\
\text{et } (\overline{s} \vee \overline{r})_k &= \min\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r})\right) - \min\left(\sum_{k-1} (\overline{s}), \sum_{k-1} (\overline{r})\right) \forall k \in \{2, 3, ..., t\}.
\end{aligned}$$

Montrons que $\overline{s} \vee \overline{r}$ ainsi définit est bien la borne supérieure de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ par rapport à δ.

$s_1 \leq \max(s_1, r_1) = (\overline{s} \vee \overline{r})_1$ et de plus $\forall k \in \{2, 3, ..., t\}$

$$\begin{aligned}
\sum_k (\overline{s} \vee \overline{r}) &= \max(s_1, r_1) + \sum_{i=2}^{k} \left(\max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) - \max\left(\sum_{i-1} (\overline{s}), \sum_{i-1} (\overline{r}) \right) \right) \\
&= \max(s_1, r_1) + \sum_{i=2}^{k} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) - \sum_{i=2}^{k} \max\left(\sum_{i-1} (\overline{s}), \sum_{i-1} (\overline{r}) \right) \\
&= \max(s_1, r_1) + \sum_{i=2}^{k} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&= \max(s_1, r_1) + \max\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r}) \right) + \sum_{i=2}^{k-1} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&\quad - \max\left(\sum_1 (\overline{s}), \sum_1 (\overline{r}) \right) - \sum_{i=2}^{k-1} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&= \max(s_1, r_1) + \max\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r}) \right) + \sum_{i=2}^{k-1} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&\quad - \max(s_1, r_1) - \sum_{i=2}^{k-1} \max\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&= \max\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r}) \right) \geq \sum_k (\overline{s})
\end{aligned}$$

D'où $(\overline{s} \vee \overline{r})\ \delta\ \overline{s}$, de façon similaire, on montre que $(\overline{s} \vee \overline{r})\ \delta \overline{r}$ donc $(\overline{s} \vee \overline{r})$ est un majorant de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$. Reste à montrer que $(\overline{s} \vee \overline{r})$ est le plus petit des majorants de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ par rapport à δ.

Montrons que $(\overline{s} \vee \overline{r})$ est le plus petit des majorants de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ par rapport à δ.

Soit $\overline{z} \in (\Lambda(\overline{n}), \delta)$ tel que $\overline{z}\delta\overline{s}$ et $\overline{z}\delta\overline{r}$, alors on a : $z_1 \geq s_1$ et $z_1 \geq r_1$ ce qui entraine que $z_1 \geq max\{s_1, r_1\}$. De plus

$$\forall k \in \{2, 3, ..., t\} \quad \text{on a} \quad \sum_k (\overline{z}) \geq \sum_k (\overline{s}) \quad \text{et} \quad \sum_k (\overline{z}) \geq \sum_k (\overline{r})$$

$$\text{Donc} \quad \sum_k (\overline{z}) \geq \max\{\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r})\} \quad = \quad \sum_k (\overline{s} \vee \overline{r})$$

D'où $\overline{z}\delta\overline{s} \vee \overline{r}$ et il suit que $\overline{s} \vee \overline{r}$ est la borne supérieure de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$.

Montrons que $\overline{s} \wedge \overline{r}$ ainsi définit est bien la borne inférieure de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ par rapport à δ.

$s_1 \geq \min(s_1, r_1) = (\overline{s} \wedge \overline{r})_1$ et de plus $\forall k \in \{2, 3, ..., t\}$

$$\begin{aligned}
\sum_k (\overline{s} \wedge \overline{r}) &= \min(s_1, r_1) + \sum_{i=2}^{k} \left(\min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) - \min\left(\sum_{i-1} (\overline{s}), \sum_{i-1} (\overline{r}) \right) \right) \\
&= \min(s_1, r_1) + \sum_{i=2}^{k} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) - \sum_{i=2}^{k} \min\left(\sum_{i-1} (\overline{s}), \sum_{i-1} (\overline{r}) \right) \\
&= \min(s_1, r_1) + \sum_{i=2}^{k} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) - \sum_{i=1}^{k-1} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&= \min(s_1, r_1) + \min\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r}) \right) + \sum_{i=2}^{k-1} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&\quad - \min\left(\sum_1 (\overline{s}), \sum_1 (\overline{r}) \right) - \sum_{i=2}^{k-1} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&= \min(s_1, r_1) + \min\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r}) \right) + \sum_{i=2}^{k-1} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&\quad - \min(s_1, r_1) - \sum_{i=2}^{k-1} \min\left(\sum_i (\overline{s}), \sum_i (\overline{r}) \right) \\
&= \min\left(\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r}) \right) \leq \sum_k (\overline{s})
\end{aligned}$$

D'où $\overline{s}\ \delta (\overline{s} \wedge \overline{r})$, de façon similaire, on montre que $\overline{r}\delta\ (\overline{s} \wedge \overline{r})$ donc $(\overline{s} \wedge \overline{r})$ est un minorant de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$. Reste à montrer que $(\overline{s} \wedge \overline{r})$ est le plus grand des minorants de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ par rapport à δ.

Montrons que $(\overline{s} \vee \overline{r})$ est le plus grand des minorants de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$ par rapport à δ.

Soit $\overline{z} \in (\Lambda(\overline{n}), \delta)$ tel que $\overline{z}\delta\overline{s}$ et $\overline{z}\delta\overline{r}$, alors on a : $z_1 \geq s_1$ et $z_1 \geq r_1$ ce qui entraine que $z_1 \leq min\{s_1, r_1\}$. De plus

$$\forall k \in \{2, 3, ..., t\} \quad \text{on a} \quad \sum_k (\overline{z}) \leq \sum_k (\overline{s}) \quad \text{et} \quad \sum_k (\overline{z}) \leq \sum_k (\overline{r})$$

$$\text{Donc} \quad \sum_k (\overline{z}) \leq \min\{\sum_k (\overline{s}), \sum_k (\overline{r})\} \quad = \quad \sum_k (\overline{s} \wedge \overline{r})$$

D'où $\overline{z}\delta\overline{s} \wedge \overline{r}$ et il suit que $\overline{s} \wedge \overline{r}$ est la borne inférieure de la paire $\{\overline{s}, \overline{r}\}$.

On conclut que le couple $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ est un treillis.

2- $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ possède un maximum $\overline{n} = (n_1, n_2, ..., n_t)$ et un minimum $\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$.■

Dans le résultat ci-dessous,Freixas et Carreras (1996) [3] montrent que le couple $(\overline{\mathcal{C}(N)}, \geq)$ s'identifie au treillis $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$.

Lemme 2.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet, $N_1 > N_2 > \cdots > N_t$ les I-classes linéairement ordonnées et $\boldsymbol{\overline{n}} = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$ un vecteur défini par leurs cardinalités. Alors l'application :

$$\begin{array}{rlcl} \varphi: & (\overline{\mathcal{C}(N)}, \geq) & \longrightarrow & (\Lambda(\overline{n}), \delta) \\ & \overline{S} & \longmapsto & \overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_t) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Preuve:

φ est bien définie et est bijective car à chaque élément $\overline{S} \in \overline{\mathcal{C}(N)}$ correspond un unique élément $\overline{s} \in \Lambda(\overline{n})$, et à chaque éléments de $\overline{s} \in \Lambda(\overline{n})$ correspond un unique élément $\overline{S} \in \overline{\mathcal{C}(N)}$ d'après le théorème 2.3. ∎

Lemme 2.2 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet, $N_1 > N_2 > \cdots > N_t$ les I-classes linéairement ordonnées et $\overline{\boldsymbol{n}} = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$ un vecteur défini par leurs cardinalités. Alors l'application :

$$\begin{array}{rlcl} \varphi: & (\overline{\mathcal{C}(N)}, \geq) & \longrightarrow & (\Lambda(\overline{n}), \delta) \\ & \overline{S} & \longmapsto & \overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_t) \end{array}$$

est un isomorphisme qui préserve l'ordre.

Preuve:

Montrons que φ préserve l'ordre, c'est-à-dire que $\forall S, R \subseteq N, \overline{S} \geq \overline{R} \Longrightarrow \overline{s}\delta\overline{r}$.

Montrons d'abord que :

(a) Si $R \subseteq S$, alors $\overline{s}\delta\overline{r}$

(b) Si $\tau_{ij}(R) = S$ avec $i\mathbf{D}j$ alors, $\overline{s}\delta\overline{r}$.

– Soient S et R des parties de N telle que $R \subseteq S$, alors $s_k = |S \cap N_k| \geq |R \cap N_k| = r_k \forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ d'où $\overline{s} \geqslant \overline{r}$ et donc $\overline{s}\delta\overline{r}$. ce qui prouve (a).

– Soient S et R des parties de N telle que $\tau_{ij}(R) = S$ avec $i\mathbf{D}j$. Comme $i\mathbf{D}j$, $i \in N_p, j \in N_q$ avec $p \leq q$.

♦ Si $p = q$, alors τ_{ij} transpose deux joueurs identiques (c'est-à-dire $i\mathbf{I}j$) et donc S et R ont le même modèle où sont dans la même $\mathbf{i} - classe$. Ainsi $\overline{s} = \overline{r}$ et il s'en suit que $\overline{s}\delta\overline{r}$.

♦♦ Si $p < q$ alors $\forall k \in \{1, 2, ..., t\} \setminus \{p, q\}$ $r_k = s_k$ et $s_p = r_p + 1$, $s_q = r_q - 1$ car S s'obtient en changeant un joueur de N_q en un joueur de N_p. Ainsi

$\forall k \in \{1, 2, ..., p - 1\}$ on a $\sum_k(\overline{s}) = \sum_k(\overline{r})$,

$\forall k \in \{p, p + 1, ..., q - 1\}$ on a $\sum_k(\overline{s}) = \sum_k(\overline{r}) + 1$ et

$\forall k \in \{q, q+1, ..., t\}$ on a $\sum_k (\overline{s}) = \sum_k (\overline{r})$.

Il suit que $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ $\sum_k (\overline{s}) \geq \sum_k (\overline{r})$

D'où $\overline{s}\delta\overline{r}$, ce qui prouve (b).

Soient S et R des parties de N, telles que $\overline{S} \geq \overline{R}$.

$\overline{S} \geq \overline{R} \iff S\mathbf{d}R$

$\iff \exists h \in \mathbb{N}$, et $\exists (R_k)_{k=0,...,h} \subseteq N$ tel que $R = R_0 \dashv R_1 \dashv ... \dashv R_h \subseteq S$

$\iff \exists h \in \mathbb{N}$, $\exists (R_k)_{k=0,...,h} \subseteq N$, $\exists f_i$ $i = 1, ..., h$.où $f_i (R_{i-1}) = R_i$ et f_i étant Ce une transposition qui remplace un joueur $l \in R_{i-1}$ en un joueur $g \in R_i$ avec $g\mathbf{D}l$ et $R_h \subseteq S$.

qui implique que $\exists h \in \mathbb{N}$, $\exists (R_k)_{k=0,...,h} \subseteq N$, $\overline{r}_i\delta\overline{r}_{i-1}\forall i \in \{1, 2, ..., h\}$

(d'après (b), en prenant $\tau_{ij} = f_i$) et $\overline{s}\delta\overline{r}_h$ (d'après (a), vu que $R_h \subseteq S$)

On a donc $\overline{s}\delta\overline{r}_h\delta\overline{r}_{h-1}\delta...\delta\overline{r}_0 = \overline{r}$

Par conséquent $\overline{s}\delta\overline{r}$ (car δ est transitive comme relation d'ordre)

Il en résulte que $\forall S, R \subseteq N, \overline{S} \geq \overline{R} \Longrightarrow \overline{s}\delta\overline{r}$. ■

Lemme 2.3 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet, $N_1 > N_2 > \cdots > N_t$ les I-classes linéairement ordonnées et $\overline{\boldsymbol{n}} = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$ un vecteur défini par leurs cardinalités. Alors l'application :

$$\begin{array}{llll} \varphi: & (\overline{\mathcal{C}(N)}, \succeq) & \longrightarrow & (\Lambda(\overline{n}), \delta) \\ & \overline{S} & \longmapsto & \overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_t) \end{array}$$

est un isomorphisme qui réfléchi l'ordre.

Preuve:

Montrons que φ réfléchi l'ordre, c'est-à-dire que $\forall S, R \subseteq N$, $\overline{s}\delta\overline{r} \Longrightarrow \overline{S} \geq \overline{R}$.

Soient $S, R \subseteq N$, tels que $\overline{s}\delta\overline{r}$. on utilisera un vecteur intermédiaire $\overline{u}$.

Construction du vecteur $\overline{u}$

Étant donné que $\overline{s}\delta\overline{r}$, on a par définition : $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ $\sum\limits_k (\overline{s}) \geq \sum\limits_k (\overline{r})$. Donc en particulier, pour $k = t$, on a : $\sum\limits_t (\overline{s}) \geq \sum\limits_t (\overline{r})$

Notons h le plus petit indice tel que : $\sum\limits_h (\overline{s}) \geq \sum\limits_t (\overline{r})$ et posons $u_h = \sum\limits_t (\overline{r}) - \sum\limits_{h-1} (\overline{s})$.

Notons $\overline{u} = (s_1, s_2, ..., s_{h-1}, u_h, 0, ..., 0)$.

Le vecteur $\overline{u}$ ainsi défini est un élément de $\Lambda(\overline{n})$ et $\overline{s} \geqslant \overline{u}$, car $\forall k \in \{1, 2, ..., h-1\}$,

$u_k = s_k \leq n_k$, $\forall k \in \{h+1, h+2, ..., t\}$, $u_k = 0 \leq s_k \leq n_k$, et $u_h \leq s_h \leq n_h$. En effet,

$$\begin{aligned} u_h - s_h &= \sum_t (\overline{r}) - \sum_{h-1} (\overline{s}) - s_h \\ &= \sum_t (\overline{r}) - \sum_h (\overline{s}) \leq 0 \end{aligned}$$

Car h est le plus petit indice tel que : $\sum_h (\overline{s}) \geq \sum_t (\overline{r})$

Ce qui implique que : $\sum_h (\overline{s}) - \sum_t (\overline{r}) \geq 0$ et donc : $\sum_t(\overline{r}) - \sum_h(\overline{s}) \leq 0$

Il en résulte donc que $u_h - s_h \leq 0$ d'où $u_h \leq s_h \leq n_h$.

Il s'en suit que $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$, $u_k \leq s_k \leq n_k$, et donc que $\overline{u} \in \Lambda(\overline{n})$, et que $\overline{s} \geqslant \overline{u}$.

Posons $\overline{U} = \varphi^{-1}(\overline{u})$.

Nous avons également le résultat $\overline{u}\delta\overline{r}$. En effet,$\forall k \in \{1, 2, ..., h-1\}$ $u_k = s_k$, donc

$$\sum_k (\overline{u}) = \sum_k (\overline{s}) \geq \sum_k (\overline{r}) , (\sum_k (\overline{s}) \geq \sum_k (\overline{r}) \text{ car } \overline{s}\delta\overline{r} \text{ par hypothèse})$$

De plus $\forall k \in \{h, ..., t\}$,

$$\begin{aligned} \sum_k(\overline{u}) &= \sum_h (\overline{u}) = u_h + \sum_{h-1} (\overline{u}) \text{ car } \forall k \in \{h+1, ..., t\}, u_k = 0 \\ &= \sum_t(\overline{r}) - \sum_{h-1}(\overline{s}) + \sum_{h-1} (\overline{u}) \text{ car } u_h = \sum_t (\overline{r}) - \sum_{h-1} (\overline{s}) \\ &= \sum_t(\overline{r}) - \sum_{h-1}(\overline{s}) + \sum_{h-1}(\overline{s}) \text{ car } \forall k \in \{1, 2, ..., h-1\} u_k = s_k \text{ donc } \sum_{h-1} (\overline{u}) = \sum_{h-1} (\overline{s}) \\ &= \sum_t (\overline{r}) \geq \sum_k (\overline{r}) \end{aligned}$$

Il en résulte que : $\forall k \in \{1, 2, ..., t\} \sum_k (\overline{u}) \geq \sum_k (\overline{r})$, c'est-à-dire que $\overline{u}\delta\overline{r}$.

Posons :

(1) la propriété : $\overline{s} \geqslant \overline{u}$,

(2) la propriété :$\overline{u}\delta\overline{r}$ et

(3) la propriété : $\sum_t (\overline{u}) \geq \sum_t (\overline{r})$ qui découle de la propriété **(2)**.

Démontrons maintenant que $\overline{S} \geq \overline{U} \geq \overline{R}$

Pour démontrer que $\overline{S} \geqslant \overline{U} \geqslant \overline{R}$, il suffit de montrer que $S\mathbf{d}U\mathbf{d}R$, pour $S \in \overline{S}, U \in \overline{U}$ et $R \in \overline{R}$.

$(*)$ montrons que $S\mathbf{d}U$

Comme $U \in \overline{U} = \varphi^{-1}(\overline{u})$ et $\overline{s} \geq \overline{u}$, il suit que $\forall k \in \{1, ..., t\}$, $u_k \leq s_k$ et donc $|S \cap N_k|$ $\geq |U \cap N_k|$ $\forall k \in \{1, ..., t\}$.

Posons $m_0 = |U \setminus S|$

- Si $m_0 = 0$, alors $U \setminus S = \varnothing$ ce qui entraine que $U \subseteq S$ et par suite $S\mathbf{d}U$.
- Si $m_0 > 0$, on utilise le raisonnement suivant :

  $m_0 > 0$ entraine que $|U \setminus S| > 0$ et donc $U \setminus S$ est non vide. Soit donc $i \in U \setminus S$. Comme $U \setminus S \subseteq N$ et $(N_k)_{k=1,...,t}$ forme une partition de N, il existe $k_0 \in \{1, 2, ..., t\}$ tel que $i \in N_{k_o}$. Ainsi $i \in (U \setminus S) \cap N_{k_0}$ ce qui entraine que $|(U \setminus S) \cap N_{k_0}| > 0$, or $|(U \setminus S) \cap N_{k_0}| = u_{k_0} - |U \cap S \cap N_{k_0}| \leq s_{k_0} - |U \cap S \cap N_{k_0}| = |(S \setminus U) \cap N_{k_0}|$ vu que $u_{k_0} \leq s_{k_0}$. Il suit que $|(S \setminus U) \cap N_{k_0}| \geq |(U \setminus S) \cap N_{k_0}| > 0$ ce qui entraine que $(S \setminus U) \cap N_{k_0} \neq \varnothing$ et il suit qu'il existe $j \in (S \setminus U) \cap N_{k_0}$ avec $i\mathbf{I}j$ vu que $i, j \in N_{k_0}$. Ainsi $\tau_{ij}(U)\mathbf{i}U$. On pose $U_1 = \tau_{ij}(U)$, $m_1 = |U_1 - S|$ et on a $U_1\mathbf{i}U$, $m_1 = m_0 - 1$. En effet $m_1 = m_0 - 1$ car :

$$\begin{aligned}
m_1 &= |U_1 \setminus S| \\
&= |(U \setminus \{i\} + \{j\}) \setminus S| \\
&= |U \setminus S \cup \{i\}| \text{ car } i \in U, j \notin U, i \notin V \text{ et } j \in V \\
&= |U \setminus S| - 1 \text{ car } i \in U \text{ et } i \notin V \\
&= m_0 - 1.
\end{aligned}$$

En reprenant ce raisonnement avec m_1 à la place de m_0 et U_1 à la place de U, on construit U_2 et m_2 avec $U_1\mathbf{i}U_2$ et $m_2 = |U_2 \setminus S| = m_1 - 1 = m_0 - 2$. De proche en proche, on reprend le même procédé et on construit les suites finies $(U_1, U_2, ..., U_m)$ et $(m_1, m_2, ..., m_m)$ telles que $U_i\mathbf{i}U_{i+1}$ et $m_i = m_0 - i$ $\forall i \in \{1, 2, ..., m-1\}$ avec $m_m = 0$.
Ainsi, on a $U\mathbf{i}U_1\mathbf{i}U_2\mathbf{i}...\mathbf{i}U_{m-1}\mathbf{i}U_m$ et $U_m \subseteq S$ car $m_m = 0$ c'est-à-dire $|U_m \setminus S| = 0$ d'où $U_m \subseteq S$ et donc $S\mathbf{d}U_m\mathbf{i}U_{m-1}\mathbf{i}U_{m-2}\mathbf{i}...\mathbf{i}U_1\mathbf{i}U$, ce qui entraine que $S\mathbf{d}U$.

(∗∗) montrons que $U\mathbf{d}R$

Posons $m = \sum_{u_k \geq r_k} (u_k - r_k)$. Il est claire que $m \geq 0$ car m est une somme de termes positifs.

- Si $m = 0$ alors par définition de m il suit que $u_k \leq r_k$ $\forall k \in \{1, ..., t\}$ notons (a) ce dernier résultat. D'après (2) $\overline{u}\delta\overline{r}$ c'est-à-dire que $\sum_k (\overline{u}) \geq \sum_k (\overline{r})$ $\forall k \in \{1, ..., t\}$ d'où : $\sum_1 (\overline{u}) \geq \sum_1 (\overline{r})$ c'est-à-dire que $u_1 \geq r_1$. D'après (a) $u_1 \leq r_1$ et il vient que $u_1 = r_1$. $\sum_2 (\overline{u}) \geq \sum_2 (\overline{r})$ ce qui implique que $u_2 \geq r_2$ vu que $\sum_1 (\overline{u}) = \sum_1 (\overline{r})$ et $\sum_1 (\overline{u}) + u_2 = \sum_2 (\overline{u}) \geq \sum_2 (\overline{r}) = r_2 + \sum_1 (\overline{r})$. Or d'après (a) $u_2 \leq r_2$ en prenant $k = 2$. Ainsi il suit que $u_2 = r_2$. De proche en proche, on montre que $u_k = r_k\ \forall k \in \{1, ..., t\}$. et il suit que : Si $m = 0$, alors $\overline{u} = \overline{r}$ et donc $\overline{U} = \overline{R}$ ce implique que $U\mathbf{i}R$ d'où $U\mathbf{d}R$.

– Si $m > 0$, alors il existe $k \in \{1, ..., t\}$ tel que $u_k > r_k$, Soit l le plus petit indice tel que $u_l > r_l$, alors $\forall k \in \{1, ..., l-1\}\ u_k \leq r_k$, et en raisonnant comme dans le cas $m = 0$, on trouve que $\forall k \in \{1, ..., l-1\}\ u_k = r_k$.

Si on suppose que $\forall k \in \{l_0, l_0+1, ..., t\}\ u_k \geq r_k$, alors

$$\sum_t(\overline{u}) = \sum_{l_0-1}(\overline{u}) + u_{l_0} + \sum_{k=l_0+1}^{t} u_k > \sum_{l_0-1}(\overline{r}) + r_{l_0} + \sum_{k=l_0+1}^{t} r_k = \sum_t(\overline{r})$$
$$\text{car } \sum_{l_0-1}(\overline{r}) = \sum_{l_0-1}(\overline{u}), u_{l_0} > r_{l_0} \text{ et } \forall k \in \{l_0+1, l_0+1, ..., t\}\ u_k \geq r_k$$
$$\text{D'où } \sum_t(\overline{u}) > \sum_t(\overline{r}) \text{ ce qui est absurde car } \sum_t(\overline{u}) = \sum_t(\overline{r}).$$

Donc $\exists k \in \{l_0, ..., t\}$ tel que $u_k < r_k$. Soit g_0 le plus petit indice tel que $u_{g_0} < r_{g_0}$. On a évidement $h < g_0$ vu que $\forall k \in \{1, 2, ..., l_0-1\}\ u_k = r_k$ et $u_{l_0} > r_{l_0}$.

Comme $u_{l_0} > r_{l_0}$ alors $|(U \setminus R) \cap N_{l_0}| > 0$. Soit $i \in (U \setminus R) \cap N_{l_0}$

Comme $u_{g_0} < r_{g_0}$ alors $|(R \setminus U) \cap N_{g_0}| > 0$. Soit $j \in (R \setminus U) \cap N_{g_0}$

On prend $U^1 = \tau_{ij}(U)$, comme $l < g$, il suit que iDj et donc $U\mathbf{d}U^1$.

Comme $U^1 = U \setminus \{i\} + j$ il suit que $m^1 = m - 1$.

On reprend le même raisonnement en prenant U^1 à la place de U et m^1 à la place de m, et on construit U^2 et m^2 tels que $U^1\mathbf{d}U^2$ et $m^2 = m^1 - 1 = m - 2$. En suivant le même procédé on construit les suites finies $(U^1, U^2, ..., U^m)$ et $(m^1, m^2, ..., m^m)$ telles que $U^i\mathbf{d}U^{i+1}$ et $m^{i+1} = m^i - 1\ \forall i \in \{1, 2, ..., m-1\}$ et $m^m = 0$. Il suit que $U\mathbf{d}U^1\mathbf{d}U^2\mathbf{d}...\mathbf{d}U^{m-1}\mathbf{d}U^m$ et $U^m\mathbf{i}R$ car $m^m = 0$ donc $U\mathbf{d}U^1\mathbf{d}U^2\mathbf{d}...\mathbf{d}U^{m-1}\mathbf{d}U^m\mathbf{d}R$ d'où $U\mathbf{d}R$ car $\mathbf{d}$ est transitif. ■

Théorème 2.3.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet, $N_1 > N_2 > \cdots > N_t$ les I-classes linéairement ordonnées et $\overline{\boldsymbol{n}} = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$ un vecteur défini par leurs cardinalités. Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (\overline{\mathcal{C}(N)}, \geq) & \longrightarrow & (\Lambda(\overline{n}), \delta) \\ & \overline{S} & \longmapsto & \overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_t) \end{array}$$

est un isomorphisme qui préserve et réfléchi l'ordre.

Preuve:

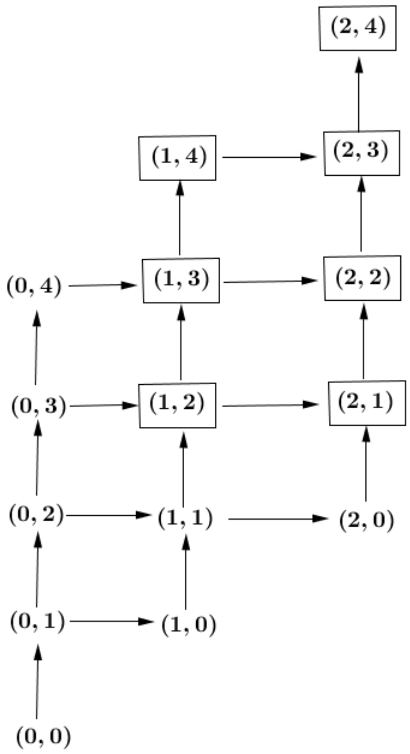
La preuve de ce Théorème découle des Trois lemme précédents. ■

On appelle $(\Lambda(\overline{n}), \delta)$ le treillis associé au jeu simple complet $(N, \mathcal{W})$.

2.3.2 Illustration et jeux simples non complets

A) **Illustration :**

Nous donnons ci-dessous une représentation du treillis associé à l'exemple 1.1.2
Pour construire le graphe suivant donnant tous les modèles admissibles du jeu et la comparaison de ceux-ci, nous mettons sur la même ligne les modèles admissibles nécessitant le même nombre de joueur et pour passer d'une ligne à la ligne directement au dessus on augment le nombre de joueur de 1. Pour aller de gauche à droite sur une ligne, un joueur faiblement influant est remplacé par un joueur plus influant.



B) **Le cas des jeux simples non complets**

Lorsque le jeu simple $(N, \mathcal{W})$ n'est pas complet, il existe des joueurs qui ne sont comparables à aucun autre joueur par rapport à $\mathbf{D}$. $\mathbf{I}$ restant toujours une relation d'équivalence sur N, N/I est l'ensemble des classes d'équivalences suivant $\mathbf{I}$,l'ordre de numérotation des $\mathbf{I}-classes$ telle que $N_1 > N_2 > ... > N_t$ n'est plus possible, vu qu'il existe au moins deux classes N_i et N_j tels que $\forall t \in N_i$ et $\forall l \in N_j$ t n'est pas au moins aussi désirable que l et l n'est pas au moins aussi désirable que t. Ainsi, on peut numéroter les $\mathbf{I}-classes$ plus ou moins arbitrairement.

Supposons que les $\mathbf{I}-classes$ soient numérotées de tel sorte que : Si $p < q$ alors $N_q \not> N_p$, notons (*) cette propriété. Il existe plusieurs numérotations vérifiant la propriété (*). Plus encore, Dans le théorème suivant, F. Carreras et J. Freixas (1996) montrent que le morphisme qui lie un jeu simple à un treillis ordonné réfléchit l'ordre du treillis sur le jeu, alors le jeu est complet.

Proposition 2.3.3 :

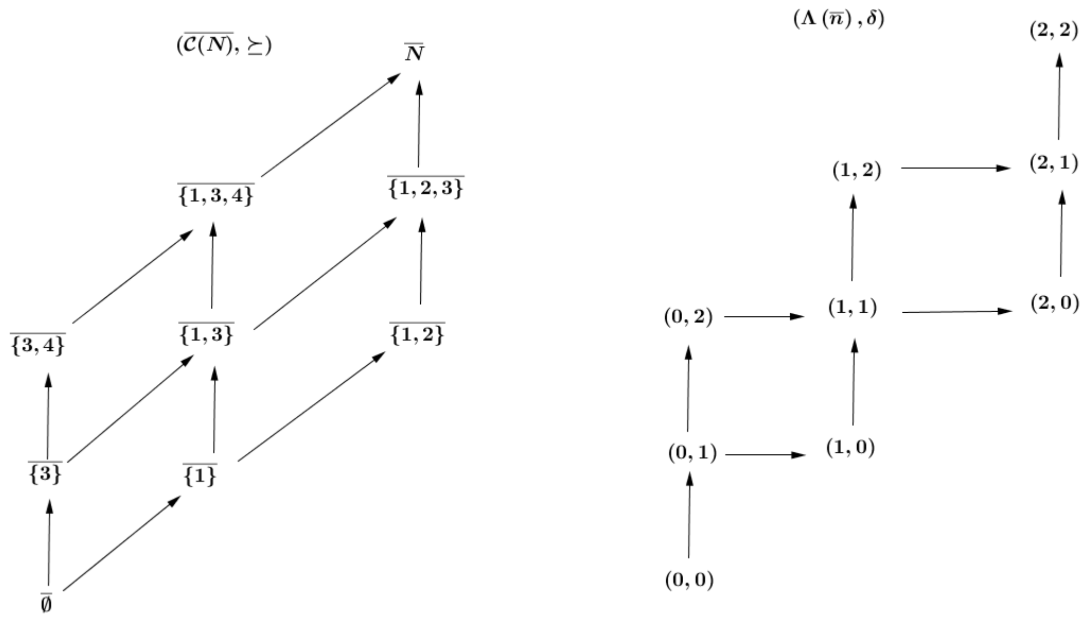
Si φ réfléchi l'ordre alors $(N, \mathcal{W})$ est complet

Preuve:

Soient $i, j \in N$ tel que $i \in N_p$ et $j \in N_q$. Si $p = q$ alors $i\mathbf{I}j$ sinon, supposons que $p < q$. En posant $S = \{i\}$ et $R = \{j\}$, on a $\overline{s}\delta\overline{r}$ d'où $\overline{S} \geq \overline{R}$ car Φ réfléchi l'ordre. Il suit que $S\mathbf{d}R$ d'où $i\mathbf{D}j$. Donc $(N, \mathcal{W})$ est complet. ■

D'après la proposition précédente il suit que si le jeu n'est pas complet alors l'application φ ne réfléchit pas l'ordre et il suit que φ n'est plus un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

La conséquence de cette proposition est que tout jeu simple non complet ne peut s'identifier à un treillis ordonné. Voici une illustration que donnent F. Carreras et J. Freixas (1996) [3].



Chapitre III

Caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet

Dans ce chapitre, nous présentons le résultat de F. Carreras et J. Freixas (1996) donnant les propriétés qu'une matrice et un vecteur doivent vérifier pour être les éléments caractéristiques d'un jeu simplet complet.

3.1 Une représentation simplifiée d'un jeu simple complet

Définition 3.1.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ *un jeu simple complet, soit* $N_1 > N_2 > ... > N_t$ *l'ordre linéaire des* $\boldsymbol{I}-$ *classes, la* ***première caractéristique invariante*** *c'est le vecteur* $\overline{n} = (n_1, n_2, ..., n_t)$ *où* $n_i = |N_i|$ $\forall i \in \{1, 2, ...t\}$.

Dans les sections précédentes, nous avons défini δ, une relation d'ordre partielle plus faible que la relation d'ordre naturelle sur les vecteurs qui compare les modèles des classes de coalitions. δ ainsi construit permet qu'au sein des classes des coalitions gagnantes minimales, qu'il y'ait des classes de coalitions dont les modèles sont minimaux par rapport à δ. De telles coalitions sont dites **δ-minimales** et on a les définitions et propriétés qui suivent.

Définition 3.1.2 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ *un jeu simple complet.*

$\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{S} \in \overline{\mathcal{C}(N)} : S \in \mathcal{W}\}$ *est* ***l'ensemble des classes de coalitions gagnantes***

$\overline{\mathcal{W}^m} = \{\overline{S} \in \overline{\mathcal{C}(N)} : S \in \mathcal{W}^m\}$ *est* ***l'ensemble des classes de coalitions gagnantes minimales***

On définit également ***l'ensemble des classes minimales dans*** $\overline{\mathcal{W}}$ *par rapport à* $\geq$ *qui est noté* $\overline{\mathcal{W}}^m$.

Proposition 3.1.1 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ *un jeu simple complet.*

$\overline{\mathcal{W}}^m \subseteq \overline{\mathcal{W}^m} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$.

Preuve:

Soit $\overline{S} \in \overline{\mathcal{W}}^m$ et soit $R \subsetneqq S$.

$R \subsetneqq S$ entraine que $\overline{S} \geq \overline{R}$ et $\overline{r} \neq \overline{s}$. Il suit que $\overline{R} \notin \overline{\mathcal{W}}$ du fait que $\overline{S}$ soit minimal $\overline{\mathcal{W}}$. D'où $R \notin \mathcal{W}$. Ainsi on a le résultat $\forall R \subsetneqq S, R \notin \mathcal{W}(*)$.

Par ailleurs $\overline{S} \in \overline{\mathcal{W}}^m \subseteq \overline{\mathcal{W}}$ d'où $S \in \mathcal{W}(**)$. $(*)$ et $(**)$ entrainent que $S \in \mathcal{W}^m$ et donc $\overline{S} \in \overline{\mathcal{W}^m}$ d'où $\overline{\mathcal{W}}^m \subseteq \overline{\mathcal{W}^m}$. Par définition des ensembles $\overline{\mathcal{W}}$ et $\overline{\mathcal{W}^m}$ on a $\overline{\mathcal{W}^m} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$. D'où le résultat. ∎

Exemple 3.1.1 :

Reconsidérons le jeu de l'exemple 1.1.2 défini par :

$$N = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ et } \mathcal{W}^m = \{\{1,2,3\}\{1,2,4\}\{1,2,5\}\{1,2,6\}$$
$$\{1,3,4\}\{1,3,5\}\{1,3,6\}\{1,4,5\}\{1,4,6\}\{1,5,6\}$$
$$\{2,3,4\}\{2,3,5\}\{2,3,6\}\{2,4,5\}\{2,4,6\}\{2,5,6\}\}$$

On a : $\varphi(\overline{\mathcal{W}}^m) = \{(1,2)\}$, $\varphi(\overline{\mathcal{W}^m}) = \{(1,2),(2,1)\}$

et $\varphi(\overline{\mathcal{W}}) = \{(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

Remarque 3.1.1 :

En supposant toujours que le jeu est complet, on note $\mathcal{W}^{\delta m} = \{S \subseteq N : \overline{S} \in \overline{\mathcal{W}}^m\}$ et on appelle ses membres **les coalitions gagnantes δ-minimales**

Proposition 3.1.2 :

Soit $(N, \mathcal{W})$ *un jeu simplet complet.*

$$S \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow \exists R \in \mathcal{W}^{\delta m}, \overline{s}\delta\overline{r}.$$

Preuve:

$\Longrightarrow$) Supposons que $S \in \mathcal{W}$ et cherchons $R \in \mathcal{W}^{\delta m}$ tel que $\overline{s}\delta\overline{r}$.

Soit $S \in \mathcal{W}$ alors $\overline{S} \in \overline{\mathcal{W}}$ et il existe $\overline{T} \in \overline{\mathcal{W}}^m$ tel que $\overline{S} \geq \overline{T}$ car $\overline{\mathcal{W}}^m$ est l'ensemble des classes de coalitions gagnantes minimales.

$\overline{S} \geq \overline{T}$ implique $\overline{s}\delta\overline{t}$. De plus $\overline{T} \in \overline{\mathcal{W}}^m$ entraine que $T \in \mathcal{W}^{\delta m}$.Donc il suffit de prendre $R = T$ pour conclure.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\exists R \in \mathcal{W}^{\delta m}, \overline{s}\delta\overline{r}$ et montrons qu'une coalition S de modèle $\overline{s}$ est gagnante.

$$\begin{aligned}\overline{s}\delta\overline{r} &\Longrightarrow \overline{S} \geq \overline{R} \text{ car } \varphi \text{ réfléchi l'ordre}\\ &\Longrightarrow \overline{S} \in \overline{\mathcal{W}} \text{ Car } \overline{R} \in \overline{\mathcal{W}}^m\\ &\Longrightarrow S \in \mathcal{W}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

A partir du modèle des coalitions δ-minimales gagnantes on obtient la seconde caractéristique invariante d'un jeu simple complet défini comme suit.

Définition 3.1.3 :

*Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet, soit $N_1 > N_2 > ... > N_t$ l'ordre linéaire des $\boldsymbol{I}-$classes, la **seconde caractéristique invariante** c'est la matrice* $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1t}\\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2t}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ m_{r1} & m_{r2} & \dots & m_{rt}\end{pmatrix}$

Où les lignes $\overline{m}_p = (m_{p1}, ..., m_{pt})$(p pour p^{ime} ligne) sont les modèles des coalitions δ-minimales gagnantes, c'est-à-dire les vecteurs associés aux éléments de $\overline{\mathcal{W}}^m$. Ces vecteurs sont rangés dans l'ordre lexicographique par sommes partielles c'est-à-dire que si $p < q$ alors $\exists k \in \{1, 2, ..., t\}$ tel que :

$$\sum_h(\overline{m}_p) = \sum_h(\overline{m}_q) \text{ pour } h < k \text{ et } \sum_k(\overline{m}_p) > \sum_k(\overline{m}_q)$$

Intuitivement, un vecteur m_p est au dessus d'un autre vecteur m_q si le vecteur m_p contient plus de joueurs forts que m_q.

Dans le résultat suivant, Freixas et Carreras (1996) donnent une caractérisation des deux caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet.

Théorème 3.1.1 (Freixas et Carreras (1996)) :

Soit $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet, soit $N_1 > N_2 > ... > N_t$ l'ordre linéaire des $\boldsymbol{I}-$classes, soit le vecteur $\overline{\boldsymbol{n}}$ et la matrice $\mathcal{M}$ les caractéristiques invariantes associées à $(N, \mathcal{W})$. Le vecteur $\overline{\boldsymbol{n}}$ et la matrice $\mathcal{M}$ vérifient les propriétés suivantes :

1. *$n_k > 0, \ \forall k = 1, \dots, t$;*
2. *$\overline{0} \leq \overline{m}_p \leq \overline{n}, \forall p = 1, \dots, r$;*

3. $\overline{m}_p$ et $\overline{m}_q$ ne sont pas δ-comparables si $p \neq q$;

4. Si $t = 1$ alors $m_{11} > 0$; si $t > 1$ alors $\forall k < t$ il existe p tel que : $m_{pk} > 0$ et $m_{p(k+1)} < n_{k+1}$.

Preuve:

1. Les $\mathbf{I}-classes$ étant non vides, il suit que $n_k = |N_k| > 0$ $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$.

2. $\forall p \in \{1, 2, ..., r\}$, $\overline{m}_p$ est le modèle d'une classe de coalition et de ce fait $\overline{m}_p \in \Lambda(\overline{n})$. Comme $\overline{0}$ et $\overline{n}$ sont respectivement le minimum et le maximum de $\Lambda(\overline{n})$ pour la relation d'ordre $\geqslant$, il suit que $\overline{0} \leqslant \overline{m}_p \leqslant \overline{n}$.

3. Soient $p, q \in \{1, 2, ..., r\}$ tels que $p \neq q$ (on prend $p < q$).
   Supposons que $\overline{m}_p$ et $\overline{m}_q$ sont δ-comparables.
   $\overline{m}_p$ et $\overline{m}_q$ δ-comparables entraine que $\overline{m}_p \delta \overline{m}_q$ ou $\overline{m}_q \delta \overline{m}_p$. Mais comme $p < q$ et que les vecteurs $\overline{m}_p$ sont rangés de manière lexicographique on ne peut pas avoir $\overline{m}_q \delta \overline{m}_p$. Ainsi $\overline{m}_p$ et $\overline{m}_q$ δ-comparables entraine que $\overline{m}_p \delta \overline{m}_q$. De plus $p \neq q$ entraine que $\overline{m}_p \neq \overline{m}_p$. Par ailleurs, φ étant un isomorphisme d'ensembles ordonnés,$\exists \overline{S}_p$ et $\overline{S}_q$ éléments de $\overline{\mathcal{W}}^m$ tels que $\overline{S}_p \geqslant \overline{S}_q$ et $\overline{S}_p \neq \overline{S}_q$ car $\overline{m}_p \delta \overline{m}_q$ et $\overline{m}_p \neq \overline{m}_p$. Ainsi $\overline{S}_p$ n'est plus minimal d'où la contradiction. Il en résulte que $\overline{m}_p$ et $\overline{m}_q$ ne sont pas δ-comparables lorsque $p \neq q$.

4. – Si $t = 1$ alors $m_{11} > 0$.
   En effet, si on suppose le contraire, c'est-à-dire $m_{11} = 0$ alors 0 est le modèle d'une classe de coalition gagnante. Or $\varnothing$ fait partie de cette classe vu que $|\varnothing| = 0$. Ainsi l'ensemble vide est gagnant, d'où la contradiction.
   – Si $t > 1$ montrons que $\forall k < t$ $\exists p \in \{1, 2, ..., r\}$ tel que $m_{pk} > 0$ et $m_{p(k+1)} < n_{k+1}$.
   On va raisonner par l'absurde en supposant le contraire c'est-à-dire $\exists k < t$, $\forall p \in \{1, 2, ..., r\}$ $m_{pk} = 0$ ou $m_{p(k+1)} = n_{k+1}$ avec $m_{pk} > 0$ ce qui entraine que les vecteurs ligne $\mathcal{M}$ sont sous la forme :
   $\overline{m}_p = (m_{p1}, m_{p2}, ..., m_{p(k-1)}, 0, m_{p(k+1)}, ..., m_{pt})$ (première forme)
   $\overline{m}_p = (m_{p1}, m_{p2}, ..., m_{p(k-1)}, m_{pk}, n_{k+1}, ..., m_{pt})$ avec $m_{pk} > 0$ (deuxième forme).
   On va montrer que dans ces conditions $\forall i \in N_k$ et $\forall j \in N_{k+1}$ $j\mathbf{D}i$ ce qui est bien sure une contradiction.
   Soit $i \in N_k$, $j \in N_{k+1}$ et $S \in \mathcal{W}_i$ tel que $j \notin S$ (si $j \in S$ alors $\tau_{ij}(S) = S \in \mathcal{W}_j$).
   Comme $S \in \mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}$ alors $\overline{S} \in \overline{\mathcal{W}}$ et il suit qu'il existe $p \in \{1, 2, ..., r\}$ tel que $\overline{s} = \varphi(\overline{S}) \delta \overline{m}_p$. posons $\overline{S}_p$ la classe de coalition telle que $\varphi(\overline{S}_p) = \overline{m}_p$. On a $\overline{s} \delta \overline{m}_p$

qui entraine que

$$\forall h \in \{1,2,...,t\} \quad \sum_h(\overline{s}) \geq \sum_h(\overline{m}_p)$$

* Si $\overline{m}_p$ est de la première forme, du fait que $i \in S \cap N_k$ on a le résultat (a) $s_k > 0 = m_{pk}$.

$$\text{Comme} \quad \sum_{k-1}(\overline{s}) \geq \sum_{k-1}(\overline{m}_p)$$
$$(a) \text{ entraine que } \sum_{k}(\overline{s}) > \sum_{k}(\overline{m}_p)$$

$$\text{D'où } \forall h \in \{1,2,...,t\} \quad h \neq k, \sum_h(\overline{s}) \geq \sum_h(\overline{m}_p) \text{ et } \sum_k(\overline{s}) > \sum_k(\overline{m}_p)$$

** Si $\overline{m}_p$ est de la deuxième forme, du fait que $j \notin S \cap N_{k+1}$, $s_{k+1} < n_{k+1} = m_{p(k+1)}$.

$$\text{Or} \quad \sum_{k+1}(\overline{s}) \geq \sum_{k+1}(\overline{m}_p)$$
$$\text{D'où } \sum_{k}(\overline{s}) > \sum_{k}(\overline{m}_p)$$

$$\text{Ainsi } \forall h \in \{1,2,...,t\} \quad h \neq k, \sum_h(\overline{s}) \geq \sum_h(\overline{m}_p) \text{ et } \sum_k(\overline{s}) > \sum_k(\overline{m}_p)$$

Dans tous les cas,

$$\forall h \in \{1,2,...,t\} \quad h \neq k, \sum_h(\overline{s}) \geq \sum_h(\overline{m}_p) \text{ et } \sum_k(\overline{s}) > \sum_k(\overline{m}_p)$$

Posons $R = \tau_{ij}(S)$ et $\overline{r} = \varphi(\overline{R})$. on a $\forall h \in \{1,2,...,k-1\}$

$$\begin{aligned}
\sum_h(\overline{r}) &= \sum_h(\overline{s}) \geq \sum_h(\overline{m}_p) \\
\sum_k(\overline{r}) &= \sum_{k-1}(\overline{r}) + r_k = \sum_{k-1}(\overline{s}) + s_k - 1 = \sum_k(\overline{s}) - 1 \geq \sum_k(\overline{m}_p) \text{ Car } \sum_k(\overline{s}) > \sum_k(\overline{m}_p)
\end{aligned}$$

$\forall h \in \{k+1,...,t\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_h(\overline{r}) &= \sum_{k-1}(\overline{r}) + r_k + r_{k+1} + \sum_{l=k+2}^{t} r_l \\
&= \sum_{k-1}(\overline{s}) + s_k - 1 + s_{k+1} + 1 + \sum_{l=k+2}^{h} r_l \\
&= \sum_h(\overline{s}) \geq \sum_h(\overline{m}_p)
\end{aligned}$$

Il résulte que :

$$\forall h \in \{1,2,...,t\} \quad \sum_h(\overline{r}) \geq \sum_h(\overline{m}_p) \text{ d'où } \overline{r}\delta\overline{m}_p \text{ et donc } \overline{R} \succcurlyeq \overline{S}_p$$

D'où $R \in \mathcal{W}$ et comme $j \in R$ il suit que $R \in \mathcal{W}_j$ par conséquent $\tau_{ij}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}_j$ c'est-à-dire que $\forall i \in N_k$ et $\forall j \in N_{k+1}$ $j\mathbf{D}i$ ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exemple 3.1.2 :

1) Le jeu de **l'exemple 1.1.2** est représenté par : $\overline{n} = (2, 4)$ et $\mathcal{M} = (1 \quad 2)$. Représentation bien plus simple que la donnée de 16 coalitions gagnantes minimales.
2) Le vote au conseil de sécurité des nations unis peut être représenté par $\overline{n} = (5, 10)$ et $\mathcal{M} = (5 \quad 4)$.
3) Considérons le jeu simple complet décrit comme suit :
   – L'ensemble de joueur N est de cardinal $n = 9$.
   – N est divisé en trois chambres.
   $*$ La première chambre est formé par 3 joueurs
   $**$ La deuxième chambre est formé par 4 joueurs.
   $***$ La troisième chambre est formé par 2 joueurs.
   – **Les règles de prise de décision sont les suivantes**
   Une décision est adoptée lorsqu'au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :
   » Au moins 2 membres de la première chambre et au moins 2 membres de la deuxième chambre sont **favorables à la décision** ;
   » Au moins 1 membres de la première chambre, au moins 3 membres de la deuxième chambre et au moins 1 membre de la troisième chambre sont **favorables à la décision** ;
   » tous les 4 membres de la deuxième chambre et tous les 2 membres de la troisième chambre sont **favorables à la décision**.

   . Ce jeu simple complet s'écrit encore comme suit : $\overline{n} = (3, 4, 2)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

   Écriture beaucoup plus simple que la précédente. De plus, si nous voulons définir ce même jeu en donnant N et $\mathcal{W}^m$, nous aurions besoin d'environ 50 coalitions gagnantes minimales, et le traitement serait encore plus fastidieux.

3.2 Unicité de représentation d'un jeu simple complet

Pour parvenir au principal résultat, on a besoin de la définition suivante :

Définition 3.2.1 :
Deux jeux simples $(N, \mathcal{W})$ et $(N', \mathcal{W}')$ sont dits isomorphes si et seulement s'il existe une

application bijective $f : N \to N'$ *telle que* $S \in \mathcal{W} \Leftrightarrow f(S) \in \mathcal{W}'$.

Le résultat que nous énonçons ci-dessous dû à Freixas et Carreras (1996) stipule que deux jeux simples isomorphes ont les mêmes caractéristiques invariantes et que connaissant un vecteur $\overline{n}$ et une matrice $\mathcal{M}$ vérifiant les propriétés du théorème précédent, on définit à un isomorphisme prêt un jeu simple complet.

Théorème 3.2.1 (Freixas et Carreras (1996)) :

1. *Deux jeux simples complets* $(N, \mathcal{W})$ *et* $(N', \mathcal{W}')$ *sont isomorphes si et seulement si* $\overline{\boldsymbol{n}} = \overline{\boldsymbol{n}}'$ *et* $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

2. *Pour un vecteur* $\overline{\boldsymbol{n}}$ *et une matrice* $\mathcal{M}$ *vérifiant les conditions du théorème précédent, il existe un jeu simple* $(N, \mathcal{W})$ *à un isomorphisme prêt dont* $\overline{\boldsymbol{n}}$ *et* $\mathcal{M}$ *sont les éléments caractéristiques.*

Preuve:

1. $\Longrightarrow$) Supposons que les jeux $(N, \mathcal{W})$ et $(N', \mathcal{W}')$ sont isomorphes, alors il existe $f : (N, \mathcal{W}) \longrightarrow (N', \mathcal{W}')$ un isomorphisme de jeux simples.

   f étant un isomorphisme de jeux simples, f^{-1} l'est aussi.

   En effet, f^{-1} est bijective comme la bijection réciproque de f. De plus, comme $S \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow f(S) \in \mathcal{W}'$ du fait que f soit un isomorphisme de jeux, il suit que $\mathcal{W}' = f(\mathcal{W})$. En composant cette dernière égalité par f^{-1} on obtient $\mathcal{W} = f^{-1}(\mathcal{W}')$ c'est-à-dire $S' \in \mathcal{W}' \Longleftrightarrow f^{-1}(S') \in \mathcal{W}$ donc f^{-1} est un isomorphisme de jeux simples.

   Par ailleurs, $\forall i, j \in N, \tau_{f(i)f(j)} = f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}$.

   En effet, $\tau_{f(i)f(j)}$ et $f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}$ sont toutes deux des applications de $\mathcal{P}(N')$ dans $\mathcal{P}(N')$ et de plus $\forall S' \in \mathcal{P}(N')$ on a trois cas possibles :

   $\ast$ $f(i), f(j) \in S'$ alors $\tau_{f(i)f(j)}(S') = S'$ et $i, j \in f^{-1}(S')$ donc $\tau_{ij} \circ f^{-1}(S') = f^{-1}(S')$ d'où $f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S') = f \circ f^{-1}(S') = S'$. Ainsi $\tau_{f(i)f(j)}(S') = f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S')$.

   $\ast\ast$ $f(i), f(j) \notin S'$ alors $\tau_{f(i)f(j)}(S') = S'$ et $i, j \notin f^{-1}(S')$ donc $\tau_{ij} \circ f^{-1}(S') = f^{-1}(S')$ d'où $\tau_{f(i)f(j)}(S') = f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S')$.

   $\ast\ast\ast$ $f(i) \in S'$ et $f(j) \notin S'$ ou $f(j) \in S'$ et $f(i) \notin S'$. Supposons que $f(i) \in S'$ et $f(j) \notin S'$ alors $\tau_{f(i)f(j)}(S') = S' \setminus \{f(i)\} + f(j)$. Comme f est une bijection $f(i) \in S'$ et $f(j) \notin S'$ entraine que $i \in f^{-1}(S')$ et $j \notin f^{-1}(S')$ d'où $\tau_{ij}(f^{-1}(S')) = f^{-1}(S') \setminus \{i\} + j$ et $f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S') = f(f^{-1}(S') \setminus i + j) = S' \setminus f(\{i\}) + f(j) = S' \setminus \{f(i)\} + f(j)$ car f est bijective. Donc $\tau_{f(i)f(j)}(S') = f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S')$

Ainsi $\forall S' \in \mathcal{P}(N')$, $\tau_{f(i)f(j)}(S') = f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S')$ d'où $\tau_{f(i)f(j)} = f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}$.
De cette dernière égalité, il suit que $\forall i, j \in N$**,** $i\mathbf{D}j$ **si et seulement si** $f(i)\mathbf{D'}f(j)$.
En effet, soient $i, j \in N$

- Supposons que $i\mathbf{D}j$. Soit $S' \in \mathcal{W}'_{f(j)}$, on a $S' \in \mathcal{W}'$ et $f(j) \in S'$ ce qui implique que $f^{-1}(S') \in \mathcal{W}_j$ et il suit que $\tau_{ij}(f^{-1}(S')) \in \mathcal{W}_i$ car $i\mathbf{D}j$. Ainsi $f \circ \tau_{ij} \circ f^{-1}(S') \in \mathcal{W}'_{f(i)}$ C'est-à-dire $\tau_{f(i)f(j)}(S') \in \mathcal{W}'_{f(i)}$. Il en résulte que $\tau_{f(i)f(j)}(\mathcal{W}'_{f(j)}) \subseteq \mathcal{W}'_{f(i)}$ donc $f(i)\mathbf{D'}f(j)$.
- Réciproquement, supposons que $f(i)\mathbf{D'}f(j)$.
  Soit $S \in \mathcal{W}$ et $f(i) \in f(S)$ c'est-à-dire $f(S) \in \mathcal{W}'_{f(j)}$ et il suit que $\tau_{f(i)f(j)}(f(S)) \in \mathcal{W}'_{f(i)}$ car $f(i)\mathbf{D'}f(j)$. Ainsi, $f^{-1} \circ \tau_{f(i)f(j)} \circ f(S) \in \mathcal{W}_i$ or $\tau_{ij} = f^{-1} \circ \tau_{f(i)f(j)} \circ f$ donc $\tau_{ij}(S) \in \mathcal{W}_i$ d'où $\tau_{ij}(\mathcal{W}_j) \subseteq \mathcal{W}_i$ c'est-à-dire $i\mathbf{D}j$.

  En somme, f préserve et réfléchi la désirabilité et de ce fait, préserve l'indifférence individuelle et coalitionnelle et la dominance coalitionnelle.
  En effet, soient $i, j \in N$.

$$\begin{aligned} i\mathbf{I}j &\iff i\mathbf{D}j \text{ et } j\mathbf{D}i \\ &\iff f(i)\mathbf{D'}f(j) \text{ et } f(j)\mathbf{D'}f(i) \text{ car } \forall i, j \in N, i\mathbf{D}j \iff f(i)\mathbf{D'}f(j) \\ &\iff f(i)\mathbf{I'}f(j) \end{aligned}$$

D'où f préserve et réfléchi l'indifférence individuelle. Pour montrer que f préserve également l'indifférence et la dominance coalitionnelle, montrons d'abord que f préserve et réfléchi les relations $\perp$ et $\dashv$.
Soient S, R deux coalitions de N'.

$$\begin{aligned} S \perp R &\iff \exists i, j \in N \text{ tels que } \tau_{ij}(S) = R \text{ et } i\mathbf{I}j \\ &\iff \exists i, j \in N \text{ tels que } f^{-1} \circ \tau_{f(i)f(j)} \circ f(S) = R \text{ et } i\mathbf{I}j \text{ car } \tau_{ij} = f^{-1} \circ \tau_{f(i)f(j)} \circ f \\ &\iff \exists i, j \in N \text{ tels que } \tau_{f(i)f(j)} \circ f(S) = f(R) \text{ et } f(i)\mathbf{I'}f(j) \text{ car } i\mathbf{I}j \iff f(i)\mathbf{I'}f(j) \\ &\iff \exists i', j' \in N' \text{ tels que } \tau_{i'j'} \circ f(S) = f(R) \text{ et } i'\mathbf{I'}j' \\ &\iff f(S) \perp f(R). \end{aligned}$$

De même

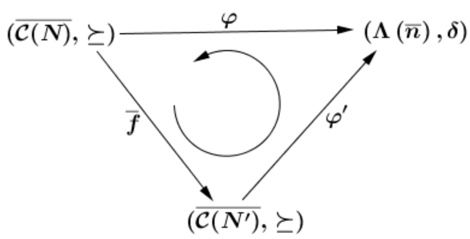
$$
\begin{aligned}
S \dashv R &\iff \exists i,j \in N \text{ tels que } \tau_{ij}(S) \subseteq R \text{ et } i\mathbf{D}j\\
&\iff \exists i,j \in N \text{ tels que } f^{-1} \circ \tau_{f(i)f(j)} \circ f(S) \subseteq R \text{ et } i\mathbf{D}j \text{ car } \tau_{ij} = f^{-1} \circ \tau_{f(i)f(j)} \circ f\\
&\iff \exists i,j \in N \text{ tels que } \tau_{f(i)f(j)} \circ f(S) \subseteq f(R) \text{ et } f(i)\mathbf{D'}f(j) \text{ car } i\mathbf{D}j \iff f(i)\mathbf{D'}f(j)\\
&\iff \exists i',j' \in N' \text{ tels que } \tau_{i'j'} \circ f(S) \subseteq f(R) \text{ et } i'\mathbf{D'}j'\\
&\iff f(S) \dashv f(R).
\end{aligned}
$$

Ainsi, il suit que :

$$
\begin{aligned}
S\mathbf{i}R &\iff \exists(S_1,S_2,...,S_h) \text{ suite finie de coalitions et } S \bot S_1 \bot S_2 \bot ... \bot S_h = R\\
&\iff \exists(S_1,S_2,...,S_h) \text{ suite finie de coalitions et } f(S) \bot f(S_1) \bot ... \bot f(S_h) = f(R)\\
&\iff \exists(S'_1,S'_2,...,S'_h) \text{ suite finie de coalitions et } f(S) \bot S'_1 \bot ... \bot S'_h = f(R)\\
&\iff f(S)\mathbf{i'}f(T)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S\mathbf{d}R &\iff \exists(S_1,S_2,...,S_h) \text{ suite finie de coalitions et } S \dashv S_1 \dashv ... \dashv S_h \subseteq R\\
&\iff \exists(S_1,S_2,...,S_h) \text{ suite finie de coalitions et } f(S) \dashv f(S_1) \dashv ... \dashv f(S_h) \subseteq f(R)\\
&\iff \exists(S'_1,S'_2,...,S'_h) \text{ suite finie de coalitions et } f(S) \dashv S'_1 \dashv ... \dashv S'_h \subseteq f(R)\\
&\iff f(S)\mathbf{d'}f(T)
\end{aligned}
$$

D'où f préserve également l'indifférence et la dominance coalitionnelle. De ce fait, $f(N_k) = N'_k, \forall k \in \{1,2,...,t\}$ et il suit que $|N_k| = |f(N_k)| = |N'_k|$ d'où $\overline{n} = \overline{n'}$.
De plus f induit un isomorphisme d'ensemble ordonnés $\overline{f}$ de $(\overline{\mathcal{C}(N)}, \geq)$ vers $(\overline{\mathcal{C}(N')}, \geq)$ tel que $\overline{f}(\overline{\mathcal{W}}) = \overline{\mathcal{W}'}$, comme $\overline{n} = \overline{n'}$ on a le diagramme suivant :



tel que $\varphi' \circ \overline{f} = \varphi$. Ainsi $(N, \mathcal{W})$ et $(N', \mathcal{W}')$ ont le même ensemble de modèle de classe de coalitions gagnantes car $\varphi'(\overline{\mathcal{W}'}) = \varphi'(\overline{f}(\overline{\mathcal{W}})) = \varphi(\overline{\mathcal{W}})$ puisque $\overline{f}(\overline{\mathcal{W}}) = \overline{\mathcal{W}'}$ et $\varphi' \circ \overline{f} = \varphi$. Il en résulte que $(N, \mathcal{W})$ et $(N', \mathcal{W}')$ ont le même ensemble de modèle de classe de coalitions δ-minimales gagnantes. Comme ces modèles sont rangés dans le même ordre(l'ordre lexicographique défini plus haut), il suit que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, supposons que $\overline{n} = \overline{n'}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ et montrons que $(N, \mathcal{W})$ et $(N', \mathcal{W}')$ sont isomorphes.

Comme $\overline{n} = \overline{n'}$, il suit que $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$, $|N_k| = |N'_k|$ et il existe une bijection entre N_k et N'_k. Notons cette bijection f_k et définissons f tel que $f : N \longmapsto N'$ et $f_{|N_k}$ la restriction de f à N_k $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ soit telle que $f_{|N_k} = f_k$.

a) f est bien définie car les N_k forment une partition de N. f est bijective.

En effet, $\overline{n} = \overline{n'}$ entraine que $n = n_1 + n_2 + ... + n_t = |N| = n'_1 + n'_2 + ... + n'_t = |N'|$ c'est-à-dire que $|N| = |N'|$, de plus

$$N' = \bigcup_{k=1}^{t} N'_k = \bigcup_{k=1}^{t} f(N_k) = f(\bigcup_{k=1}^{t} N_k) = f(N)$$

D'où $f(N) = N'$ c'est-à-dire que f est surjective. Or $|N| = |N'|$ d'où f est bijective.

b) $S \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow f(S) \in \mathcal{W}'$

En effet, soit $S \in \mathcal{W}$. Posons $\overline{s} = \varphi(\overline{S})$ alors $\exists p \in \{1, 2, ..., r\}$ tel que $\overline{s}\delta\overline{m}_p$ car $\overline{S}$ est un modèle gagnant vu que $S \in \mathcal{W}$. Posons $S' = f(S)$ et $\overline{s'} = \varphi'(\overline{S'})$. Du fait que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$, $\overline{m}_p$ est une ligne de la matrice $\mathcal{M}'$. Or $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ $S' \cap N'_k = f(S) \cap f(N_k) = f(S \cap N_k)$ car f est bijective. Ainsi $|S' \cap N'_k| = |f(S \cap N_k) = |S \cap N_k|$ car f est bijective. Il suit donc que $\overline{s} = \overline{s'}$ et donc $\overline{s'}\delta\overline{m}_p$ et $\overline{m}_p \in \overline{\mathcal{W}'}^m$ d'où $S' \in \mathcal{W}'$. Donc $S \in \mathcal{W} \Longrightarrow f(S) \in \mathcal{W}'$ c'est-à-dire $f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}'$ $(+)$.

Comme f est bijective f^{-1} est défini et bijective et on a $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ $f^{-1}(N'_k) = N_k$. on applique le même argument qu'à f et on a : $S' \in \mathcal{W}' \Longrightarrow f^{-1}(S) \in \mathcal{W}$ c'est-à-dire $f(\mathcal{W}) \supseteq \mathcal{W}'$ $(++)$.

$(+)$ et $(++)$ entraine que $f(\mathcal{W}) = \mathcal{W}'$ c'est-à-dire $S \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow f(S) \in \mathcal{W}'$

Il en résulte que f est un isomorphisme de jeux simples.

2. Soit $\overline{n}$ et $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions du **théorème 3.1.1**, montrons qu'il existe un jeu simple complet $(N, \mathcal{W})$ tel que $\overline{n}$ et $\mathcal{M}$ soient ses caractéristiques invariantes.
Posons $n = n_1 + n_2 + ... + n_t$, $N = \{1, 2, ..., n\}$, $N_1 = \{1, 2, ..., n_1\}$, $N_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n_1 + n_2\}$,...,$N_t = \{n_1 + n_2 + ... + n_{t-1} + 1, n_1 + n_2 + ... + n_{t-1} + 2, ..., n\}$ où $|N_i| = n_i$ $\forall i \in \{1, 2, ..., t\}$. D'après la propriété (1) du **théorème 3.1.1** on a $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$,

$n_k > 0$ donc $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$, $N_k \neq \varnothing$.

Soit $S \subseteq N$, on définit $\overline{s} = (s_1, s_2, ..., s_t)$ où $s_k = |S \cap N_k|$ $\forall k \in \{1, 2, ..., t\}$ et on pose $\mathcal{W} = \{S \subseteq N : \exists p \in \{1, 2, ..., r\}, \overline{s}\delta\overline{m}_p\}$.

a) Montrons que $(N, \mathcal{W})$ est un jeu simple complet dont les caractéristiques invariantes sont $\overline{n}$ et $\mathcal{M}$.

$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(N)$ par définition de $\mathcal{W}$. De plus $\varnothing \notin \mathcal{W}$, car si c'était le cas, il existerait $p \in \{1, 2, ..., r\}$, tel que $\overline{0}\delta\overline{m}_p$. et vu que $\overline{m}_p \geqslant \overline{0}$, il suit que $\exists p \in \{1, 2, ..., r\}$ tel que $\overline{m}_p = \overline{0}$.

» **Si** $r = 1$ c'est-à-dire que $\mathcal{M}$ est une matrice ligne. On a :

-Si $t = 1$ Alors $\mathcal{M} = 0$ ce qui contredit la propriété (4) de $\mathcal{M}$ ($m_{11} > 0$)

-Si $t > 1$ Alors $\mathcal{M} = (0 \quad 0 \quad ... \quad 0)$ ce qui entraine que $\forall k < t$ $m_{1k} = 0$ et contredit de ce fait la propriété (4) de $\mathcal{M}$ ($\forall k < t$ $m_{1k} > 0$ et $m_{1(k+1)} < n_{k+1}$).

» **Si** $r > 1$ c'est-à-dire que $\mathcal{M}$ est une matrice a plusieurs lignes.

Comme $\overline{m}_p = (0 \quad 0...0)$, $\forall q \in \{1, 2, ..., r\} \setminus \{p\}$, $\overline{m}_q\delta\overline{m}_p$. Or $p \neq q$ entraine que $\overline{m}_q \neq \overline{m}_p$. Ainsi $\exists p, q \in \{1, 2, ..., r\}$ tel $p \neq q$ et $\overline{m}_q\delta\overline{m}_p$, ce qui contredit la propriété (3) de $\mathcal{M}$ (Si $p \neq q$ $\overline{m}_q$ et $\overline{m}_p$ ne sont pas δ-comparables).

Dans tous les cas, l'hypothèse $\varnothing \in \mathcal{W}$ conduit à une contradiction. D'où $\varnothing \notin \mathcal{W}$.

Reste à montrer la monotonie de $\mathcal{W}$. Soit $S \in \mathcal{W}$ et $V \subseteq N$ tel que $S \subseteq V$

Comme $S \in \mathcal{W}$ alors $\exists p \in \{1, 2, ..., r\}, \overline{s}\delta\overline{m}_p$

Comme $S \subseteq V$ alors $\overline{s} \leqslant \overline{v}$ ce qui implique que $\overline{v}\delta\overline{s}$ et donc $\overline{v}\delta\overline{s}\delta\overline{m}_p$ d'où $\exists p \in \{1, 2, ..., r\}, \overline{v}\delta\overline{m}_p$ et par suite $V \in \mathcal{W}$.

Nous pouvons donc conclure qu'en utilisant le **théorème 1.1.1** que $(N, \mathcal{W})$ est un jeu simple.

b) Montrons à présent que les N_k sont les $\mathbf{I}-classes$ de $(N, \mathcal{W})$ et que $N_1 > N_2 > ... > N_t$

» Soit $k \in \{1, 2, ..., t\}$, soient $i, j \in N_k$ et soit $S \in \mathcal{W}_i$.

- Si $j \in S$ alors $S \in \mathcal{W}_j$ d'où $\tau_{ij}(S) = S \in \mathcal{W}_j$

- Si $j \notin S$ alors en posant $R = S \setminus \{i\} + j$ on a $\tau_{ij}(S) = R$ et du fait que $i, j \in N_k$ il suit que $\overline{s} = \overline{r}$ et donc $\overline{r}$ est un modèle gagnant vu que $\overline{s}$ l'est. Ainsi, $R \in \mathcal{W}$ et $j \in R$, d'où $\tau_{ij}(S) = R \in \mathcal{W}_j$. Il suit que $\tau_{ij}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}_j$. On montre par symétrie que $\tau_{ij}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}_i$. Il en résulte que $i\mathbf{I}j$

» Montrons que pour $i \in N_k$ et $j \in N_{k+1}$ on a $i\mathbf{D}j$ et $non(j\mathbf{D}i)$

»i) Montrons que $i\mathbf{D}j$

Soit $S \in \mathcal{W}_j$.

$\star$ Si $i \notin S$ alors en posant $R = \tau_{ij}(S)$ on a $\overline{r}\delta\overline{s}$

En effet :

$$\left|\begin{array}{lcl} \sum\limits_{k-1}(\overline{r}) & = & \sum\limits_{k-1}(\overline{s}) \\ \sum\limits_{k}(\overline{r}) & = & \sum\limits_{k}(\overline{s}) + 1 \\ \sum\limits_{h}(\overline{r}) & = & \sum\limits_{h}(\overline{s}) \forall h \geq k+1 \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\forall h \in \{1, 2, ..., t\}, \sum_{h}(\overline{r}) \geq \sum_{h}(\overline{s})$$

Ainsi $\overline{r}\delta\overline{s}$ et comme $S \in \mathcal{W}$ alors $R \in \mathcal{W}$ d'où $\tau_{ij}(S) = R \in \mathcal{W}_i$ car $i \in R$.

$\star\star$ Si $i \in S$ alors $S \in \mathcal{W}_i$ et $\tau_{ij}(S) = S \in \mathcal{W}_i$.

Dans tous les cas, $\tau_{ij}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}_i$ et donc $i\mathbf{D}j$.

»ii) Montrons que $non(j\mathbf{D}i)$

– Si $t = 1$ alors $m_{11} > 0$ car $\mathcal{M}$ vérifie la propriété (4) du théorème qui caractérise les caractéristiques invariantes.

– $t > 1$ alors $\forall k < t$ il existe p tel que : $m_{pk} > 0$ et $m_{p(k+1)} < n_{k+1}$.

Soit S une coalition de modèle $\overline{m}_p$ c'est-à-dire $\overline{s} = \overline{m}_p$. Comme $s_k = m_{pk} > 0$ et $s_{k+1} = m_{p(k+1)} < n_{k+1}$, on peut supposer que $i \in S$ et $j \notin S$.

En effet, Si $i \notin S$ alors $s_k = m_{pk} > 0$ entraine qu'il existe $l \in S$ tel que $l\mathbf{I}i$ et en remplaçant l par j on obtient $S' = \tau_{lj}(S)$ et $S'\mathbf{i}S$ et donc $\overline{s'} = \overline{m}_p$. Ainsi, on peut toujours choisir S tel que $\overline{s} = \overline{m}_p$ et $i \in S$. De même, on peut choisir S tel que $j \notin S$. Si $j \in S$ alors comme $s_{k+1} = m_{p(k+1)} < n_{k+1}$ il existe $l \in N_{k+1}$ tel que $l \notin S$ et tel que $l\mathbf{I}j$ et en remplaçant j par l on obtient $S' = \tau_{lj}(S)$ et $S'\mathbf{i}S$ et donc $\overline{s'} = \overline{m}_p$. Ainsi on peut toujours choisir S tel que $\overline{s} = \overline{m}_p$ et $j \notin S$.

Puisque $\overline{s} = \overline{m}_p$, alors $S \in \mathcal{W}$ et puisque $i \in S$ alors $S \in \mathcal{W}_i$. Posons $\tau_{ij}(S) = R$ on a

$\overline{s} = \overline{m}_p \delta \overline{r}$ et $\overline{r} \neq \overline{m}_p = \overline{s}$ En effet,

$$\sum_{k-1}(\overline{r}) = \sum_{k-1}(\overline{s}), \sum_{k}(\overline{r}) = \sum_{k}(\overline{s}) - 1$$
$$\sum_{h}(\overline{r}) = \sum_{h}(\overline{s}) \forall h \in \{k+1, k+2, ..., t\}$$
$$\text{il suit que } \forall h \in \{1,2,...,t\} \sum_{h}(\overline{s}) \geq \sum_{h}(\overline{r})$$

Ainsi, $\overline{s}\delta\overline{r}$ et $\overline{r} \neq \overline{s}$. Il suit que $\overline{m}_p\delta\overline{r}$ et $\overline{r} \neq \overline{m}_p$ donc $R \notin \mathcal{W}$. Ainsi, $\tau_{ij}(\mathcal{W}_i) \notin \mathcal{W}_j$ d'où j ne domine pas i.

Finalement, les N_k $k \in \{1,2,...,t\}$ sont les $\mathbf{I}-classes$ de $(N, \mathcal{W})$ et $N_1 > N_2 > ... > N_t$ d'où $(N, \mathcal{W})$ est complet et $\overline{n}$ est bien la première caractéristique invariante de $(N, \mathcal{W})$. Par ailleurs, par définition de $\mathcal{W}$, $\{\overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_r\} = \overline{\mathcal{W}}^m$ car les $\overline{m}_p$ sont les seuls modèles $\delta-$minimaux des classes de coalitions gagnantes. D'où $\mathcal{M}$ est la seconde caractéristique invariante de $(N, \mathcal{W})$. ce qui achève la démonstration.

Exemple 3.2.1 :

Considérons le jeu simple complet défini par : $\overline{n} = (3,4,2)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ($\overline{n}$ et $\mathcal{M}$ vérifient les conditions du **Théorème caractérisant les caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet**). Décrivons ce jeu :

- L'ensemble de joueur N est de cardinal $n = 9$.
- N est divisé en trois chambres ; dans une chambre donnée, tous les joueurs sont « équivalents » en terme d'influence.

$*$ La première chambre est formée par les joueurs les plus influents et est de cardinal 3

$**$ La deuxième chambre est formée par des joueurs moins influents que ceux de la première chambre, il est de cardinal 4.

$***$ La troisième chambre est formée par les joueurs ayant la plus faible influence, sont cardinal est 2.

- **les règles de prise de décision sont les suivantes**

  Une décision est adoptée lorsqu'au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

» Au moins 2 membres de la première chambre et au moins 2 membres de la deuxième chambre sont **favorables à la décision** ;

» Au moins 1 membres de la première chambre, au moins 3 membres de la deuxième chambre et au moins 1 membre de la troisième chambre sont **favorables à la décision** ;

» Tous les 4 membres de la deuxième chambre et tous les 2 membres de la troisième chambre sont **favorables à la décision** ;

» Tous les 3 membres de la première chambre et au moins 1 membre de la troisième chambre sont **favorables à la décision** ;

» Au moins 1 membre de la première chambre et tous les 4 membres de la deuxième chambre sont **favorables à la décision**

C'est à partir de $\mathcal{M}$ qu'on retrouve la constitution en procédant comme suit :

» chaque ligne de la matrice $\mathcal{M}$((2 2 0),(1 3 1),(0 4 2)) nous donne modèle de coalition gagnante minimale ;

» On complète s'il y a lieu, par les modèles qui n'y figurent pas (les modèle minimaux mais non δ−minimaux)((3 1 0), (1 4 0)).

L'un des avantages d'utiliser la caractérisation du jeu simple complet est que pour le jeu précédent par exemple, en donnant N et $\mathcal{W}^m$, nous aurions eu besoin d'environ 50 coalitions gagnantes minimales, ce qui serait très pénible à manipuler.

Le second avantage qu'apporte l'utilisation des caractéristiques invariantes d'un jeu simple complet pour le représenter fait l'objet du chapitre qui suit.

Chapitre IV

Autre caractérisation des jeux simples à quota

Tester si un jeu simple est à quota est généralement très fastidieux dès que le nombre de joueur est grand. Bien que Taylor et W. Zwicker [8] donne une caractérisation des jeux simples à quota, cette caractérisation reste difficile à tester. Pour contourner le problème, Nous utiliserons les résultats de F. Carreras et J. Freixas établis au chapitre ci-dessus pour indiquer une méthode alternative.

4.1 Le théorème de caractérisation

Proposition 4.1.1 :

Soit $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet. Soit $N_1 > N_2 > ... > N_t$ l'ordre linéaire entre les les $\boldsymbol{I}$–classes.

1) *Tout jeu à quota admet une représentation normalisée ou $i\boldsymbol{I}j \Longleftrightarrow \omega_i = \omega_j$*
2) *Un jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ est un jeu à quota si et seulement si $\exists \omega = (\omega_i)_{i\in\{1,...,t\}} \subseteq \mathbb{N}^t$ tel que $\omega_1 > \omega_2 > ... > \omega_t > 0$ et les inégalités suivantes sont satisfaites : $(\overline{m}_p - \overline{\alpha}_q).\omega > 0$ $\forall p = 1, ..., r$ $\forall q = 1, ..., s$. Où $\overline{m}_i$ est un modèle de coalition δ−minimal gagnant et $\overline{\alpha}_j$ est un modèle de coalition δ−maximal perdant.*

La méthode naïve consiste à se donner un système de $|\mathcal{W}^m| \times |\mathcal{L}^M|$ inéquation avec n inconnues : les poids de chaque joueur. Avec la proposition précédente, on réduit le nombre d'inconnues de n à t.

La théorème de Carreras et Freixas (1996) qui suit montre qu'avec leur représentation $(\overline{n}, \mathcal{M})$ d'un jeu simple complet, il est encore plus facile de tester si un jeu simple complet est pondéré.

Théorème 4.1.1 (Carreras et Freixas (1996)) :
Soit $n > 2$ et $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet tel que $\overline{n} = (1, 1, ..., 1)$ Alors les égalités : $\mathcal{W}^{\delta m} = \mathcal{W}^m$ et $\mathcal{L}^{\delta M} = \mathcal{L}^m$ sont incompatibles.

Preuve:

Soit $n > 2$ et $(N, \mathcal{W})$ un jeu simple complet tel que $\overline{n} = (1, 1, ..., 1)$. Pour montrer que $\mathcal{W}^{\delta m} = \mathcal{W}^m$ et $\mathcal{L}^{\delta M} = \mathcal{L}^m$ sont incompatibles nous allons montrer que :
$\mathcal{W}^{\delta m} = \mathcal{W}^m \Longrightarrow \mathcal{L}^{\delta M} \neq \mathcal{L}^m$.
On a $\overline{n} = (1, 1, ..., 1) \in \mathcal{N}^n$ avec $n > 2$. D'après le théorème 3.1.1 donnant les propriétés que $\mathcal{M}$ vérifie, on a la propriété (4) qui stipule que :
$\forall k < n$ il existe $p \in \{1, 2, ..., r\}$ tel que $m_{pk} > 0$ et $m_{p(k+1)} < n_{k+1}$.($\bigstar$)
La propriété ($\bigstar$) impose à $\mathcal{M}$ d'avoir au moins deux lignes c'est-à-dire $r \geq 2$
En effet, Si $\mathcal{M}$ n'a qu'une ligne alors $\mathcal{M} = (m_1, m_2, ..., m_n)$ avec $m_i \in \{0, 1\}$.
Avec ($\bigstar$), pour $k = n-1$ on a $m_{n-1} > 0$ et $m_n < 1$ c'est-à-dire $n_{n-1} = 1$ et $m_n = 0$
Avec ($\bigstar$), pour $k = n-2$ on a $m_{n-2} > 0$ et $m_{n-1} < 1$ c'est-à-dire $n_{n-2} = 1$ et $m_{n-1} = 0$
ainsi $n_{n-1} = 1$ et $n_{n-1} = 0$ contradiction ! Donc $\mathcal{M}$ a plus d'une ligne.

Soient m_r et m_{r-1} les deux dernières lignes de la matrice $\mathcal{M}$.

Montrons que : $\exists k \in \{1, 2, ..., t\}$ **tel que** $m_{(r-1)k} = 1$ **et** $m_{rk} = 0$

Comme les vecteurs de $\mathcal{M}$ sont rangés dans l'ordre lexicographique, $\exists l \in \{1, 2, ..., t\}$ tel que : $\sum_h (m_{r-1}) = \sum_h (m_r) \quad \forall h < l$ et $\sum_l (m_{r-1}) > \sum_l (m_r)$
Ce qui implique que $m_{(r-1)l} = 1$ et $m_{rl} = 0$. Il suffit de prendre $k = l$ pour conclure.
Ainsi, l'ensemble $B = \{k \in \{1, 2, ..., t\} : m_{(r-1)k} = 1$ et $m_{rk} = 0 \}$ est non vide. Posons k_0 le plus petit élément de B.

Montrons que : $\exists k, l \in \{k_0 + 1, k_0 + 2, ..., t\}$ **tels que** $m_{rk} = 1$ **et** $m_{rl} = 1$

Comme les vecteurs de $\mathcal{M}$ ne sont pas δ-comparables, $\exists k' \in \{1, 2, ..., t\}$ tel que :
$\sum_{k'} (m_{r-1}) < \sum_{k'} (m_r)$ ($\blacktriangledown$) . Puis que $k_0 = \min(k : k \in B)$ et $l \in B$ il suit que $k_0 \leq l$. Ainsi, vu que $\sum_h (m_{r-1}) = \sum_h (m_r) \quad \forall h < l$ et $\sum_l (m_{r-1}) > \sum_l (m_r)$
On a : $\forall h \leq l$, $\sum_h (m_{r-1}) \geq \sum_h (m_r)$. Il suit que $k' > l \geq k_0$ donc $k' > k_0$.
Posons k_1 le plus petit entier vérifiant ($\blacktriangledown$). D'après ce qui précède, $k_1 > k_0$, de plus on a :
$\sum_{k_1} (m_{r-1}) < \sum_{k_1} (m_r)$ et $\sum_{k_1 - 1} (m_{r-1}) = \sum_{k_1 - 1} (m_r)$ car k_1 est le plus petit entier vérifiant ($\blacktriangledown$) et $m_{(r-1)k}, m_{rk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in \{1, 2, ..., t\}$. De ce fait, $m_{rk_1} = 1$ et $m_{(r-1)k_1} = 0$.
Plus encore, comme $\sum_{k_0} (m_{r-1}) > \sum_{k_0} (m_r)$ et $\sum_{k_1 - 1} (m_{r-1}) = \sum_{k_1 - 1} (m_r)$ Alors, il existe k_2

tel que $k_0 < k_2 \leq k_1 - 1$ et $m_{rk_2} = 1$. Il suffit de prendre $k = k_1$ et $l = k_2$ pour conclure.

Montrons que : $m_{r(k_0+1)} = 1$ **et** $m_{r(k_0+2)} = 1$

Supposons que $m_{r(k_0+1)} = 0$ ou $m_{r(k_0+2)} = 0$.

Le cas $m_{r(k_0+1)} = 0$: Supposons que $m_{r(k_0+1)} = 0$ alors le modèle m'_r défini par : $m'_{r(k_0+1)} = 1$, $m'_{rk_2} = 0$ et $m'_{rk} = m_{rk}$ $\forall k \in \{1, 2, ..., t\} \setminus \{k_0 + 1, k_2\}$, on a $m'_r \delta m_r$. Donc m'_r n'est pas δ-minimal gagnant.

Montrons que m'_r est un modèle minimal gagnant

Par construction de m'_r on a : $\sum\limits_t (m'_r) = \sum\limits_t (m_r)$ et $m'_r \delta m_r$. Ainsi en enlevant le joueur ayant la plus faible influence à une coalition de modèle m'_r, cette coalition perds car si on note m''_r le modèle d'une telle coalition, alors $\sum\limits_t (m''_r) < \sum\limits_t (m_r)$ et $\sum\limits_{k_2} (m''_r) > \sum\limits_{k_2} (m_r)$ ce qui montre que m'_r et m''_r ne sont pas δ comparables. Également, m''_r ne δ-domine pas les autres ligne de $\mathcal{M}$ car :
$\sum\limits_{k_0} (m''_r) < \sum\limits_{k_0} (m_{r-1})$ et $\sum\limits_{k_0} (m_{r-1}) \leq \sum\limits_{k_0} (m_{r-i})$ $\forall i \in \{2, ..., r-1\}$ par convention du rangement des vecteurs de $\mathcal{M}$ et du faite que $m''_{rk} = m'_{rk} = m_{rk}$ $\forall k \in \{1, 2, ..., k_0\}$. Il suit que m''_r est un modèle perdent. nous concluons que m'_r est un modèle minimal gagnant.

En résumé, on a $m'_r \in \mathcal{W}$ et $m'_r \notin \mathcal{W}^\delta$ ce qui contredit l'hypothèse $\mathcal{W} = \mathcal{W}^\delta$. D'où $m_{r(k_0+1)} = 1$.

Le cas $m_{r(k_0+2)} = 0$: En supposant $m_{r(k_0+2)} = 0$ on aboutit à une contradiction en raisonnant comme dans le cas précédent.

Nous aboutissons donc au résultat $m_{r(k_0+1)} = 1$ et $m_{r(k_0+2)} = 1$.

Construction d'un modèle maximale perdant non δ-maximale perdant

Considérons le modèle m défini comme suit : $m_{k_0+1} = 0$, $m_k = 1$ $k \in \{k_0 + 2, ..., t\}$ et $m_k = m_{rk}$ $\forall k \in \{1, 2, ..., k_0\}$.

Montrons que m est un modèle maximale perdant

En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on montre que m est un modèle perdant. Si S est une coalition de modèle m, le joueur de plus petite influence n'étant pas dans S est l'unique joueur de la classe N_{k_0+1} en l'ajoutant à S on obtient une nouvelle coalition S' de modèle m' défini par : $m_k = 1$ $k \in \{k_0+1, ..., t\}$ et $m_k = m_{rk}$ $\forall k \in \{1, 2, ..., k_0\}$. On a $m'\delta m_r$, donc m' est un modèle gagnant et S' est gagnante. D'où m est un modèle maximale perdant.

Montrons que m est un modèle non δ-maximale perdant

Considérons le modèle m'' défini comme suit : $m_{k_0+2} = 0$, $m_k = 1$ $k \in \{k_0+3, ..., t\}$ et $m_k = m_{rk}$ $\forall k \in \{1, 2, ..., k_0+1\}$.

En raisonnant comme dans le paragraphe précédent, on montre que m'' est un modèle perdant. De plus $m''\delta m$ Donc m n'est pas δ-maximale perdant.

Pour achever la preuve il suffit donc de prendre S une coalition de modèle m pour avoir $S \in \mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ et $S \notin \mathcal{L}^{\delta\mathcal{M}}$. ∎

4.2 Exemples

Exemple 4.2.1 :

Considérons le jeu simple complet défini par : $\overline{n} = (3, 4, 2)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ déjà utilisé plus haut. Nous allons tester s'il est à Quota ou pas.

Déterminons $\mathcal{W}^{\delta m}$ l'ensemble des modèles δ-minimaux gagnants

Nous avons déjà $\overline{m}_1 = (2 \quad 2 \quad 0)$, $\overline{m}_2 = (1 \quad 3 \quad 1)$ et $\overline{m}_3 = (0 \quad 4 \quad 2)$ les modèles δ-minimaux gagnants qui sont les lignes de la matrice $\mathcal{M}$.

Déterminons $\mathcal{L}^{\delta M}$ l'ensemble des modèles δ-maximaux perdants

– Nous retrouvons d'abord tous les modèles maximaux perdants :

Nous avons ici ceux qui découlent directement des modèles δ-minimaux gagnants : $\overline{\alpha}_1 = (2 \quad 1 \quad 1)$, $\overline{\alpha}_2 = (1 \quad 3 \quad 0)$ et $\overline{\alpha}_3 = (0 \quad 4 \quad 1)$

–Ensuite, nous avons celle que nous construisons nous même, avec les maximum de joueur de grande influence :

$\overline{\alpha}_4 = (3 \quad 0 \quad 2)$ ici nous mettons le maximum possible de joueur les plus influents, et le maximum possible d'autres joueurs de telle sorte que $\overline{\alpha}_4$ ne dépasse aucun $\overline{m}_i$ au sens de δ.

Ainsi $\mathcal{L}^{\delta M} = \{\overline{\alpha}_4 = (3 \quad 0 \quad 2); \overline{\alpha}_2 = (1 \quad 3 \quad 0); \overline{\alpha}_3 = (0 \quad 4 \quad 1)\}$.

Testons si le jeu simple défini plus haut est à quota

Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ un vecteur poids tel que $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 \geq 0$ $(\diamond)$. En traduisant les inéquations $(\overline{m}_i - \overline{\alpha}_j).\omega > 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{2, 3, 4\}$, on obtient le système d'inéquation suivant :

$$\begin{cases}(\overline{m}_1-\overline{\alpha}_2).\omega>0\\(\overline{m}_1-\overline{\alpha}_3).\omega>0\\(\overline{m}_1-\overline{\alpha}_4).\omega>0\\(\overline{m}_2-\overline{\alpha}_2).\omega>0\\(\overline{m}_2-\overline{\alpha}_3).\omega>0\\(\overline{m}_2-\overline{\alpha}_4).\omega>0\\(\overline{m}_3-\overline{\alpha}_2).\omega>0\\(\overline{m}_3-\overline{\alpha}_3).\omega>0\\(\overline{m}_3-\overline{\alpha}_4).\omega>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}(1\quad -1\quad 0).\omega>0\\(2\quad -2\quad -1).\omega>0\\(-1\quad 2\quad -2).\omega>0\\(0\quad 0\quad 1).\omega>0\\(1\quad -1\quad 0).\omega>0\\(-2\quad 3\quad -1).\omega>0\\(-1\quad 1\quad 2).\omega>0\\(0\quad 0\quad 1).\omega>0\\(-3\quad 4\quad 0).\omega>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}(1\quad -1\quad 0).\omega>0\\(2\quad -2\quad -1).\omega>0\\(-1\quad 2\quad -2).\omega>0\\(-2\quad 3\quad -1).\omega>0\\(-1\quad 1\quad 2).\omega>0\\(0\quad 0\quad 1).\omega>0\\(-3\quad 4\quad 0).\omega>0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\omega_1-\omega_2>0\\2\omega_1-2\omega_2-\omega_3>0\\-\omega_1+2\omega_2-2\omega_3>0\\-2\omega_1+3\omega_2-\omega_3>0\\-\omega_1+\omega_2+2\omega_3>0\\\omega_3>0\\-3\omega_1+4\omega_2>0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}2\omega_1-2\omega_2-\omega_3>0\\-\omega_1+2\omega_2-2\omega_3>0\\-2\omega_1+3\omega_2-\omega_3>0\\-\omega_1+\omega_2+2\omega_3>0\\-3\omega_1+4\omega_2>0\\\omega_1>\omega_2>\omega_3>0\end{cases}\quad\text{(avec la relation }(\diamond))$$

En supposant que $\omega_3=1$, le système précédent nous donne :

$$\begin{cases}2\omega_1-2\omega_2-1>0\\-\omega_1+2\omega_2-2>0\\-2\omega_1+3\omega_2-1>0\\-\omega_1+\omega_2+2>0\\-3\omega_1+4\omega_2>0\\\omega_1>\omega_2>1\end{cases}\Longleftarrow\begin{cases}\omega_1=5\\\omega_2=4\end{cases}$$

Donc $\begin{cases}\omega_1=5\\\omega_2=4\\\omega_3=1\end{cases}$ est une solution au problème. Ainsi le jeu simple complet défini par :

$\overline{n} = (3,4,2)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est un jeu à quota qui peut encore être représenté par : $[18; 5,5,5,4,4,4,4,1,1]$. Le quota ici est le poids d'un coalition ayant pour modèle un modèle δ-minimal gagnante.

Exemple 4.2.2 :

1) Considérons le jeu simple complet définit par : $\overline{n} = (2,4)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons $\mathcal{W}^{\delta m}$ l'ensemble des modèles δ-minimaux gagnants

$\mathcal{W}^{\delta m} = \{\overline{m}_1 = (1 \quad 2)\}$

Déterminons $\mathcal{L}^{\delta M}$ l'ensemble des modèles δ-maximaux perdants

$\mathcal{L}^{\delta M} = \{\overline{\alpha}_1 = (2 \quad 0); \overline{\alpha}_2 = (1 \quad 1); \overline{\alpha}_3 = (0 \quad 4)\}$.

Testons si le jeu simple définit plus haut est à quota

Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un vecteur poids tel que $\omega_1 > \omega_2 \geq 0$ $(\diamond)$. En traduisant les inéquations $(\overline{m}_1 - \overline{\alpha}_j).\omega > 0$ pour $j \in \{1,2,3\}$, on obtient le système d'inéquation suivant :

$$\begin{cases} (\overline{m}_1 - \overline{\alpha}_1).\omega > 0 \\ (\overline{m}_1 - \overline{\alpha}_2).\omega > 0 \\ (\overline{m}_1 - \overline{\alpha}_3).\omega > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\omega_1 + 2\omega_2 > 0 \quad (1) \\ \omega_2 > 0 \quad (2) \\ \omega_1 - 2\omega_2 > 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) et (3) entrainent que le système d'inéquations n'admet pas de solution. Ainsi on conclut que le jeu simple complet définit par : $\overline{n} = (2,4)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. n'est pas à quota.

2) Considérons le jeu simple complet définit par : $\overline{n} = (5,10)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Déterminons $\mathcal{W}^{\delta m}$ l'ensemble des modèles δ-minimaux gagnants

$\mathcal{W}^{\delta m} = \{\overline{m}_1 = (3 \quad 5); \quad \overline{m}_1 = (2 \quad 8)\}$

Déterminons $\mathcal{L}^{\delta M}$ l'ensemble des modèles δ-maximaux perdants

$\mathcal{L}^{\delta M} = \{\overline{\alpha}_1 = (5 \quad 2); \overline{\alpha}_2 = (2 \quad 7)\}$.

Testons si le jeu simple définit plus haut est à quota

Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ un vecteur poids tel que $\omega_1 > \omega_2 \geq 0$. En traduisant les inéquations $(\overline{m}_i - \overline{\alpha}_j).\omega > 0$ pour $i,j \in \{1,2\}$, on obtient le système d'inéquation suivant :

$$\begin{cases} (\overline{m}_1 - \overline{\alpha}_1).\omega > 0 \\ (\overline{m}_1 - \overline{\alpha}_2).\omega > 0 \\ (\overline{m}_2 - \overline{\alpha}_1).\omega > 0 \\ (\overline{m}_2 - \overline{\alpha}_2).\omega > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\omega_2 - 2\omega_1 > 0 \\ \omega_1 - 2\omega_2 > 0 \\ -3\omega_1 + 6\omega_2 > 0 \\ \omega_2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3\omega_2 > 2\omega_1 \quad (1) \\ \omega_1 > 2\omega_2 \quad (2) \\ \omega_2 > 0 \quad (3) \end{cases}$$

(2) entraine que $2\omega_1 > 4\omega_2 \quad (*)$, $(*)$ et (1) donnent $3\omega_2 > 2\omega_1 > 4\omega_2$ c'est-à-dire $3\omega_2 > 4\omega_2 (**)$.

Comme il n'existe pas de réel ω_2 vérifiant $(**)$ et (3), il suit que le système d'inéquation de départ n'admet pas de solution. Nous concluons que le jeu simple complet de départ n'est pas à quota.

Conclusion et perspectives

Au terme de ce travail où il était question pour nous de faire un compte rendu claire et explicite de la classification des jeux simples complets due à F. Carreras et J. Freixas (1996), nous dégageons des grandes articulations. La première étant l'introduction de la relation de désirabilité permettant la comparaison de deux joueurs en terme d'influence dans le jeu. La seconde étant l'extension de cette relation aux coalitions, permettant ainsi à F. Carreras and J. Freixas d'introduire la notion de modèle de coalition. La troisième étant l'énoncé du théorème de F. Carreras and J. Freixas mettant en isomorphisme un treillis et le jeu. La dernière étant la donnée des invariants d'un jeu simple complet et la nouvelle caractérisation d'un jeu à quota. Il apparait donc clairement qu'avec la nouvelle façon proposée par F. Carreras and J. Freixas de donner un jeu simple complet, il est vraiment plus facile de manipuler le jeu et même de tester s'il est à quota. En guise de perspectives, nous pouvons nous demander ce que devient cette représentation lorsque nous envisageons que l'abstention est possible c'est-à-dire en cas de $(3,2)$- jeu simple. Dans cette perspective, des outils nécessaires comme par exemple la relation d'influence ont été définis dans Tchantcho et Al (2008) [9].

Implication pédagogique

L'implication pédagogique ou le lien que nous pouvons faire entre ce mémoire et le métier d'enseignant du secondaire pour lequel nous recevons notre formation réside à six niveaux principalement :

★ Il participe à notre culture dans le domaine des mathématiques et de ce fait nous donne une vision plus large des mathématiques en générale et donc des mathématiques que nous enseignerons au lycée en particulier.

★ Il aiguise notre habilité à modéliser mathématiquement des situations de la vie courante et de ce fait notre habileté à créer des situations de la vie courante dont la résolution poussera l'élève à utiliser des outils mathématiques précis. Ainsi, il accrois notre habileté à appliquer l'APC au lycée.

★ Il nous donne une culture sur les applications que l'on peut faire des mathématiques, et de ce fait, nous aidera à souvent sortir des mathématiques théoriques qu'on enseigne au lycée pour donné des utilités concrètes que l'on peut faire des mathématiques.

★ Il nous aide également à nous familiariser avec les changements de structures ce qui est très courant en mathématiques en générale. Ainsi donc dans les cours de mathématiques que nous donnerons au lycée, nous ne manquerons pas de faire remarquer tous les changement de structures lors de la résolution de certains problème.

★ Il nous donne de l'expérience dans l'utilisation des logicielles de saisis mathématiques comme Latex et l'utilisation de l'ordinateur. Ainsi nous pourrons saisir pour facilement nos épreuves et nos cours aux lycée.

★ Il nous donne de l'expérience dans la préparation de nos cours, car la mémoire n'est rien d'autre qu'un cours.

Bibliographie

[1] S. Burris and H. P. Sankappanavar (1985) *A course in Universal Algebra.* Springer-verlag.

[2] F. Carreras and G. Owen (1993) *Automorphisms and weighted values.* Game Theory in press.

[3] F. Carreras and J. Freixas (1996) *Complete simple games.* Mathematical Social Sciences 32 139-155.

[4] E. Einy (1985) *The desirability relation of simple games.* Mathematical Social Sciences 10 155-168.

[5] J. R. Issbell (1956) *A class of majority games.* Quart J. Mathematical Oxford Ser. 7 183-187.

[6] A.D Taylor, A. Pacelli(2008) *Mathematics and politics, 2nd ed* Springer Verlag, New York, USA.

[7] A.D Taylor, W. Zwicker (1999) *desirability relations, trading, and pseudoweighting* Princeton University Press, New Jersey, USA.

[8] A.D Taylor and W. Zwicker (1992) *A characterization of weighted voting.* Proc. Am. Mathematical Social Sciences 115 1089-1094.

[9] B. Tchantcho, L. Diffo Lambo, R. Pongou, B. Mbama Engoulou (2008) *Voters' power in voting games with abstention : influence relation and ordinal equivalence of power theories* Games and Economic Behavior 64 335-350.