REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHERS TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

EQUIVALENCE ORDINALE DES INDICES DE SHAPLEY-SHUBIK, BANZHAF ET JOHNSTON

Mémoire de DI.P.E.S. II de Mathématiques

De

NGUETIO DJONGA Viviane Béatrice

***Matricule :* 03y478**

Licenciée en Mathématiques

Sous la direction de :

Pr Bertrand TCHANTCHO

Maître de conférences

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique: 2015-2016

♣ Dédicace ♣

je dédie ce mémoire à mes parents Monsieur et Madame DJONGA.

♣ Remerciements ♣

Nous ouvrons cette page de remerciements en adressant un merci particulier à notre encadreur le **Pr. Bertrand TCHANTCHO** qui, pendant toute la période accordée pour la production de ce mémoire nous a guidé et donné toutes les orientations nécessaires.

Ensuite nos remerciements vont à l'endroit de tous les enseignants du département de mathématiques de la faculté des sciences et de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé I pour leur contribution à notre formation d'enseignant de mathématiques.

Par la présente occasion, nous voulons également adresser nos remerciements à toute notre famille particulièrement, **M. Pierre NANA, Mme Clarisse KOUATCHIE, Mme Valentine NJIOTIE, Mme Suzanne KOUAGUE, M. Gilbert NJINOU, M. Joseph KEPWA,** sans oublier **Paul, Dorine, Martial, Narcisse, Sandrine, Christelle, Christian, Alexiane, Perfide**.

Nous exprimons par la même lancée, notre gratitude à tous nos amis et collègues **Mme Bibiane FODJO, Mme Gaelle OUANDJI, M. Christian NGAKO, M. Frereck TEVOU, M. Jean NOUMECHI, Mme Edwige MELINGUI, M. HAITO ABBO**.

Je ne saurais refermer cette page sans remercier mes camarades du département de mathématiques et ceux du Renouveau d'Obili particulièrement **Victor, Aurelien, Nathalie, Michelle, Farelle et Josephine.**

Que toutes ces personnes trouvent en ces quelques mots l'expression de ma profonde gratitude pour leur soutien dans la réalisation de cet ouvrage.

♣ Déclaration sur l'honneur : ♣

Le présent travail est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

NGUETIO DJONGA Viviane Beatrice

♣ Résumé ♣

Dans ce mémoire, nous présentons quelques indices de pouvoir, puis les théories qualitatives introduites par Freixas. Nous définissons et caractérisons les différentes classes qui contiennent la classe des jeux simples complets. Le résultat le plus marquant qu'il faut relever et dont nous rendons compte est que l'équivalence ordinale est produite dans une classe suffisamment large de jeux simples appelée classe des jeux simples semi complets. Ce résultat est une extension du résultat de Diffo Lambo et Moulen sur l'équivalence ordinale valable dans la classe des jeux simples $\pi-$robustes.

Mots clés : jeu simple, indice de pouvoir, relation de désirabilité, équivalence ordinale.

♣ Abstract ♣

In this work, we present some power indices, and we also present qualitative theories introduced by Freixas. We define and caracterise different classes including the class of complete simple games. The most significant result and that we return account is that the ordinal equivalence is obtained in a larger class of simple games called the class of semi complete simple games. This result is an extension of the Diffo Lambo and Moulen result on the ordinal equivalence in the swap-robust simple games.

Key words : simple game, power indices, desirability relation, ordinal equivalence.

♣ Table des matières ♣

♣ Introduction ♣

La théorie des jeux est un ensemble d'outils pour analyser des situations dans lesquelles l'action optimale d'un agent dépend des anticipations qu'il forme sur la décision d'un autre agent. Cette théorie classifie les jeux en fonction de leurs approches et résolutions. Les approches les plus ordinaires sont : les jeux coopératifs et non coopératifs, les jeux simultanés et jeux séquentiels, les jeux finis, les jeux à somme nulle et jeux à somme non nulle, les jeux repétés, les jeux d'information, les jeux de mémoire et les jeux déterminés. Les jeux coopératifs qui constituent notre centre d'intérêt sont des jeux qui se caractérisent par la poursuite du même objectif par tous les joueurs. Pour rendre compte de manière numérique du rapport de force qui existe entre les différents participants d'un processus de vote, on a eu recours aux indices de pouvoir. Le tout premier indice introduit fut celui de Shapley-Shubik en 1954. Quelques années plus tard apparait son concurent intime, celui de Banzhaf (1965). Au fil des années, le nombre des indices s'est considérablement accru. C'est ainsi qu'on distingue l'indice de Shapley-Shubik (1954), de Dahl (1957), l'indice de Banzhaf (1965), l'indice de Johnston (1978), de Deegan-Packel (1978), d'Andjiga (1996)-Berg (1999), de Holler-Packel (1983), de Curiel (1987), de Colomer-Martinez (1995), de Chakravarty (2000) et bien d'autres. A cause de la multiplicité de ces indices, il se pose un problème de comparaison de certains d'entre-eux.

La question est celle de savoir si, étant donnés deux indices I_1 et I_2, deux joueurs j_1 et j_2, les valeurs attribuées aux joueurs j_1 et j_2 par l'indice I_1 sont rangées dans le même ordre que les valeurs données à ces mêmes joueurs par l'indice I_2. Si tel est le cas, est-il possible de caractériser les classes de jeux simples dans lesquelles ces rangements sont maintenus ? C'est le problème de l'équivalence ordinale. I_1 et I_2 ci-dessus peuvent être des théories quantitatives ou des théories qualitatives du pouvoir. Plusieurs chercheurs se sont interessés à ce problème.

Allingham (1975) note que pour les jeux pondérés, l'indice de Shapley (1954) et l'indice de Dahl (1957)(un indice équivalent à l'indice de Banzhaf) sont faiblement équivalents. Il ressort quelques exemples de jeux simples dans lesquels les préordres induits diffèrent. Diffo Lambo et Moulen (2002) prouvent l'équivalence ordinale entre les indices de Shapley-Shubik (1954) et Banzhaf (1965) dans les jeux simples complets mais ils laissent le problème de caractérisation de la classe des jeux simples dans lesquelles ces indices coincident. Carreras et Freixas (2008) étendent le résultat de Diffo Lambo et Moulen (2002) à tout jeu simple faiblement complet. Freixas (2010) étend le résultat de Carreras et Freixas (2008) sur les jeux simples semi cohérents et partant des travaux précédent, il rappelle l'indice de pouvoir de Johnston (1978) et étudie l'équivalence ordinale de ces trois théories du pouvoir. Cette équivalence ordinale des indices de Shapley-Shubik (1954), Banzhaf (1965) et Johnston (1978) qui est un travail récent de Josep Freixas (2012) est principalement l'objet de notre étude.

Le présent mémoire est un compte rendu détaillé du travail de Josep Freixas (2012). Il s'agit de définir et caractériser les différentes classes de jeux et étudier l'équivalence ordinale des trois indices suscités dans une classe plus large qu'on appelle classe des jeux semi complets. Cette classe contient d'autres classes de jeux comme la classe des jeux simples complets, celle des jeux simples faiblement complets, celle des jeux légèrement complets et celle des jeux simples modèrement complets. Nous prouvons que le classement induit par ces trois indices de pouvoir coincide dans cette classe. Cette dernière est plus large que la classe des jeux simples $\pi-$robustes qu'on appelle encore les jeux linéaires. Dans ce mémoire, nous nous interessons particulièrement au travail de Freixas (2012) sur l'équivalence ordinale des indices de Shapley (1954), Banzhaf (1965) et Johnston (1978). La classe des jeux simples dans laquelle les trois indices coincident est ainsi obtenue. Nous revenons en détail sur ce résultat et nous comparons différentes classes de jeux simples introduites par Freixas (2012).

Ce mémoire est structuré autour de quatre chapitres. Le premier chapitre consiste à rappeler les notions fondamentales sur les jeux simples, définir ces notions et présenter des jeux simples, des jeux simples particuliers, les relations binaires, les notions de préordres, de sous préordres. Le deuxième chapitre qui comporte deux parties est consacré à la mesure du pouvoir dans les jeux simples. Ici nous présentons des théories qualitatives comme la relation de désirabilité, la relation de faible désirabilité, de légère désirabilité, de désirabilité modérée et de semi désirabilité ; ensuite nous parlons dans la deuxième partie les indices du pouvoir particulièrement l'indice de Shapley-Shubik (1954), de Banzhaf (1965), de Johnston (1978), d'Andjiga (1996)-Berg (1999) et de Deegan-Packel (1978). Le troisième chapitre quant à lui consiste à comparer les différentes théories qualitatives et dans la seconde partie l'équivalence ordinale entre les indices de Shapley-Shubik (1954), Banzhaf (1965) et Johnston (1978). Le quatrième chapitre consiste à donner l'implication didactique de ce mémoire. Ce travail s'achève par une brève conclusion.

Chapitre 1

Notion de jeu simple

Dans ce chapitre, nous définissons et présentons certaines notions comme les relations binaires sur les ensembles. Plus précisement, les relations d'équivalence, les relations d'ordre, les préordres, les sous préordres, les relations similaires, les préordres induits. Nous allons également définir les notions comme les jeux simples, ensuite présenter des jeux simples particuliers et enfin l'extension de véto d'un jeu simple.

1.1 Relations binaires

De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble E est une proposition qui lie entre eux certains éléments de cet ensemble. Plus clairement, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $E \times E$. Si $(i, j) \in \mathcal{G}$, on dit que i est en relation avec j et on note $i\mathcal{R}j$. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble est dite :

- reflexive si : $\forall\ i \in E, (i\mathcal{R}i)$.
- transitive si : $\forall i, j, k \in E, (i\mathcal{R}j)$ et $(j\mathcal{R}k) \Longrightarrow (i\mathcal{R}k)$.
- symétrique si : $\forall i, j \in E$,$(i\mathcal{R}j) \Longrightarrow (j\mathcal{R}i)$.
- antisymétrique si : $\forall i, j \in E, ((i\mathcal{R}j)\ et\ (j\mathcal{R}i)) \Longrightarrow i = j$.
- totale ou complète si : $\forall i, j \in E$, on a soit $(i\mathcal{R}j)$, soit $(j\mathcal{R}i)$.

Une relation binaire est appelée :

- préordre si elle est reflexive et transitive.
- relation d'équivalence si elle est reflexive, symétrique et transitive.
- préordre strict si elle est asymétrique $(i\ \mathcal{R}\ j) \Longrightarrow \rceil(j\mathcal{R}i\ )$ et transitive.

Il s'en suit qu'un préordre strict est irreflexif (c'est-à-dire$\rceil(i\mathcal{R}\ i)$ pour tout i).

Relation entre les préordres :

Proposition 1.1. (a) Tout préordre $\geq$ induit une relation d'équivalence $\approx$ et un préordre strict $>$ définis respectivement de la manière suivante :

$i \approx j$ si et seulement si $i \geq j$ et $j \geq i$

$i > j$ si et seulement si $i \geq j$ et tel que :

(1) ($i \approx j$ et $j > k$) $\Rightarrow i > k$.

(2) ($i > j$ et $j \approx k$) $\Longrightarrow i > k$.

(3) $i \approx j$ et $i > j$ sont incompatibles.

(b) Réciproquement, une relation d'équivalence $\approx$ et un préordre strict $>$ satisfaisant(1) et (2) induisent un préordre $\geq$ défini par : $i \geq j$ si et seulement si $i \approx j$ ou $i > j$.

Définition 1.1. Etant donnés deux préordres $\geq_1$ et $\geq_2$ sur N, on dit que :

- $\geq_1$ est un sous préordre de $\geq_2$ si et seulement si :

$$\forall i, j \in N, (\ i >_1 j \Longrightarrow i >_2 j) \text{ et } (i \approx_1 j \Longrightarrow i \approx_2 j).$$

- $\geq_1$ est un presque sous préordre de $\geq_2$ si et seulement si :

$$\forall i, j \in N, i \geq_1 j \Longrightarrow i \geq_2 j.$$

- Tout sous préordre est un presque sous préordre mais la réciproque n'est pas toujours vraie car il peut arriver que l'on ait : $i >_1 j$ et $i \approx_2 j$.
- $\geq_{1\cap 2}$ est le préordre défini par :

$$i >_{1\cap 2} j \Longleftrightarrow i >_1 j \ et \ i >_2 j$$

$$i \approx_{1\cap 2} j \Longleftrightarrow i \approx_1 j \ et \ i \approx_2 j$$

- $\geq_{1\cap 2}$ est un sous préordre de chacun des deux préordres $\geq_1$ et $\geq_2$.
- $\geq_1$ et $\geq_2$ sont dits similaires si et seulement si :

$$\forall i, j \in N, i \geq_1 j \Leftrightarrow i \geq_2 j.$$

1) Considèrons les préordres $\geq_1$ et $\geq_2$ et supposons que $\geq_1$ est sous préordre de $\geq_2$.
Si $\geq_1$ est totale, il en est de même pour $\geq_2$ et les 2 préordres coincident.

2) Deux relations similaires peuvent ne pas coincider mais aucune d'entre elles ne modifie l'ordre établi par l'autre. Ceci signifie qu'on peut avoir deux préordres $\geq_1$ et $\geq_2$ similaires, qui ne coincident pas ; mais dès lors que ces relations sont similaires, pour tous électeurs i et j, on n'a jamais $i \geq_1 j$ et $j \geq_2 i$.

Préordre induit

Etant donnés un jeu simple (N, v) et une fonction $\psi(v)$ qui à chaque $i \in N$ associe $\psi_i(v)$, on définit le préordre $\geq_{\psi(v)}$ sur N par : $i \geq_{\psi(v)} j \Longleftrightarrow \psi_i(v) \geq \psi_j(v)$

Ce préordre est total et est appelé préordre induit par la fonction $\psi(v)$. On notera s'il n'y a pas d'ambiguité $\geq_\psi$ au lieu de $\geq_{\psi(v)}$.

1.2 Jeux simples

Un jeu est une situation conflictuelle entre des individus en interaction ; ces individus peuvent être des personnes physiques, des entreprises, des pays, des continents...

Dans le cadre de notre travail, nous nous interesserons aux jeux simples qu'on appelle encore jeu de contrôle ou votes " pour ou contre".

Généralités

Dans la suite, N désigne un ensemble fini non vide, 2^N l'ensemble des parties non vides de N.

Définition **1.2.** Un jeu simple est un couple $G = (N, W)$ où $W \subset 2^N, W \neq \emptyset$ et vérifie :

1) $\forall S \in 2^N, S \in W \Longrightarrow N \backslash S \notin W$.

2) $\forall S, T \in 2^N$ $(S \in W$ et $S \subset T) \Rightarrow T \in W$.

Interprétation

-Tout élément de N est appelé joueur, électeur, votant ou agent.

Un joueur peut être un individu, un groupe d'individus, une association, une entreprise, un parti politique, un pays, un continent...

-Toute partie S non vide de N est appelée coalition.

Un élément de W est appelé coalition majoritaire ou gagnante ou tout simplement majorité.

-La condition (1) est appelée condition de propreté et la condition (2) est appelée condition de monotonie.

-Un jeu simple est une traduction mathématique des situations de vote "pour ou contre". Ce sont des situations de vote dans lesquelles on dispose d'une assemblée N et chaque fois qu'une motion ou un projet est soumis à cette assemblée pour adoption, chaque membre a alors le choix entre voter "pour" et voter "contre" l'adoption dudit projet. La décision collective dépend de la configuration de vote obtenue. Si l'ensemble de tous ceux qui ont voté pour l'adoption du projet est une coalition gagnante (c'est-à-dire $S \in W$), alors la décision collective est l'adoption du projet. Sinon, (si $S \notin W$), la décision collective est le rejet du projet. De ce fait, un jeu simple est aussi une règle de vote.

Définition 1.3. Une coalition est appelée coalition gagnante minimale si elle ne contient aucune coalition gagnante comme sous ensemble propre.

Un joueur décisif ou critique dans une coalition est un joueur qui appartient à cette coalition et dont le retrait de cette coalition rend cette dernière perdante.

Notation 1.2.1. Un jeu simple peut également se noter par une paire ordonnée (N, v) où, N est un ensemble fini non vide et v une fonction définie de 2^N à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que $v(S)$ soit égale à 1 si et seulement si S est une coalition gagnante.

Jeux simples particuliers

On suppose que N est un ensemble de cardinal n. On distingue :

L'unanimité

C'est la règle définie par : $W^N = \{N\}$; c'est-à-dire qu'une décision n'est adoptée que si tous les électeurs votent "pour".

La dictature

Un jeu simple (N, W) est dit dictatorial s'il existe $i \in N$ tel que :

$$\forall S \in 2^N, S \in W \Leftrightarrow i \in S.$$

Ici, il existe un individu tel qu'une décision n'est adoptée que si elle est supportée par ce dernier.

L'oligarchie

Un jeu simple (N, W) est dit oligarchique s'il existe $T \subset N$ tel que :

$$\forall S \in 2^N, S \in W \Leftrightarrow T \subset S.$$

C'est-à-dire qu'il existe une groupe d'individus dont l'adoption d'un projet de loi nécéssite le soutien.

Vote à la majorité absolue ou majorité simple

$W^{sm} = \{S \in 2^N : |S| > n/2\}$.

De façon générale, la règle q-majoritaire, $q > 1/2$ est définie comme suit :

$$W^{qM} = \{S \in 2^N : |S|/n > q\}.$$

L'adoption d'un projet de loi nécessite le soutien d'au moins la moitié de ses membres.

Les jeux simples pondérés

Un jeu simple est qualifié de pondéré lorsqu'il existe un quota q et un poids ω_i positif pour chaque joueur i tel que : $v(S) = \begin{cases} 1 \ si \ \sum\limits_{i \in S} \omega_i \geq q \\ 0 \text{ si } \sum\limits_{i \in S} \omega_i < q \end{cases}$.

Le nombre ω_i est interprété comme étant le poids ou dans certains cas, le nombre d'actions ou de voix que possède le joueur i et le nombre q est le total minimum de voix qu'une coalition doit avoir pour faire passer une décision.

Les jeux simples pondérés sont encore appelés jeux simples à quota et constituent une classe particulière de jeux de vote.

Un jeu simple pondéré sera noté : $G = [q; \omega_1 \ , \ ..., \ \omega_n]$ ou $G = ((\omega_i), q)$.

Si pour tout $i \in N, \omega_i = \omega$ on note : $G = (\omega, q)$.

Illustration

Votes au conseil d'administration dans diverses structures par des individus (actionnaires) dans une entreprise, vote par des partis politiques représentés à une assemblée nationale...

Les jeux simples $\pi-$robustes ou linéaires

Soit $G = (N, v)$ un jeu simple.

On dit que G est $\pi-$robuste si : pour toutes coalitions S et T, tous joueurs i et j tels que $i \in S$ et $i \notin T, j \in T$ et $j \notin S$,

on a :

$$(S \backslash \{i\}) \cup \{j\} \in W \text{ ou } (T \backslash \{j\}) \cup \{i\} \in W.$$

Dire qu'un jeu simple est $\pi-$robuste revient encore à dire que l'opération de permutation de deux joueurs i et j entre deux coalitions gagnantes S et T $(i \in S \backslash T, j \in T \backslash S)$ conduit à deux nouvelles coalitions dont l'une au moins est gagnante.

La classe des jeux simples $\pi-$robustes est une classe assez large qui contient en particulier celle des jeux pondérés ainsi que le prouve le résultat suivant.

Proposition 1.2. Tout jeu simple pondéré est $\pi-$robuste.

Preuve

Soit v un jeu simple pondéré.

Considérons deux coalitions gagnantes S et T; deux joueurs i et j tels que : $i \in S, i \notin T; j \in T, j \notin S$.

Posons : $S' = (S\backslash\{i\}) \cup \{j\}, T' = (T\backslash\{j\}) \cup \{i\}$.

On veut montrer que parmi les coalitions S' et T', l'une au moins est gagnante.

v étant un jeu simple pondéré, il existe un nombre strictement positif q et des nombres positifs $\omega_1, ..., \omega_n$ tels que : $v = [q; \omega_1, ..., \omega_n]$.

Désignons par ω_i et ω_j les poids attribués aux joueurs respectifs i et j et supposons que : $\omega_i \geq \omega_j$.

Puisque $S \in W$, on a : $\sum\limits_{k\in S} \omega_k \geq q$.

De même, $T \in W$ entraine $\sum\limits_{k\in T} \omega_k \geq q$.

Comme $\omega_i \geq \omega_j$, on aura : $\sum\limits_{k\in T'} \omega_k = (\sum\limits_{k\in T} \omega_k) - \omega_j + \omega_i \geq \sum\limits_{k\in T} \omega_k$.

Or $\sum\limits_{k\in T} \omega_k \geq q$ par hypothèse ; d'où $T' \in W$.

D'où le résultat. ■

La réciproque de cette proposition est fausse. Taylor et Zwicker(1999) ont prouvé qu'il existe des jeux simples $\pi - robustes$ qui ne sont pas des jeux simples à quota. Par conséquent, l'ensemble des jeux simples à quota est strictement contenu dans l'ensemble des jeux simples $\pi-$robustes.

Extension de véto d'un jeu simple

Etant donné un jeu simple (N, v), j_1 un joueur tel que $j_1 \notin N$, on définit l'extension de véto de (N, v) avec j_1 comme joueur à véto ou joueur pivot, comme étant le jeu simple noté $(\overline{N}, \overline{v})$ et défini par : $\overline{N} = N \cup \{j_1\}$ et $\forall\ T \subset N, T$ est une coalition gagnante de $(\overline{N}, \overline{v})$ si et seulement si $j_1 \in T$ et $v(T\backslash\{j_1\}) = 1$. Ceci revient à dire que : $\forall S \subset N$, $\bar{v}(S \cup \{j_1\}) = v(S)$ et $\bar{v}(S) = 0$.

Si j_2 est un joueur qui n'appartient pas à $\bar{N}$, on peut définir de la même manière la seconde extension de véto de G avec j_1 et j_2 comme joueurs à véto respectifs de sorte que j_2 soit le joueur à véto de $(\bar{N}, \bar{v})$.

Chapitre 2

Mesure du pouvoir dans les jeux simples

Le pouvoir est un concept important dans l'étude des jeux simples. Pour un participant à un processus de vote, le pouvoir peut se définir comme sa capacité à faire basculer le résultat du vote ; c'est-à-dire sa capacité à changer une coalition gagnante en coalition perdante et vice versa. On distingue les théories quantitatives qui permettent de rendre compte, numériquement, de la réalité des rapports de force dans un processus de décision collective et les théories qualitatives qui permettent de ranger les participants en fonction de leur influence dans le jeu. Dans la première partie de ce chapitre intitulée approche cardinale, nous étudierons des théories quantitatives du pouvoir et dans la seconde intitulée approche ordinale nous présentons des théories qualitatives.

2.1 Approche cardinale

Les indices de pouvoir représentent des mesures quantitatives du pouvoir.

Dans cette section, nous présentons quelques uns de ces indices. Nous nous limitons aux cinq indices suivants : l'indice de Shapley-Shubik, l'indice de Banzhaf, celui de Johnston, celui d'Andjiga-Berg et celui de Deegan-Packel.

L'indice de Shapley-Shubik

Formulé par Lioyd Shapley et Martin Shubik en 1954, l'indice de Shapley-Shubik est le tout premier indice de pouvoir. A l'origine, il s'agissait de la "valeur de Shapley", un concept de théorie de jeu construit pour être appliqué aux jeux sous forme de fonctions caractérisant la classe des jeux simples. Shapley et Shubik l'ont proposé comme une mesure du pouvoir a priori dans un processus de vote.

L'indice de Shapley-Shubik d'un électeur donne la probabilité pour que celui-ci soit décisif ; c'est-à-dire qu'il ait la capacité de transformer une coalition gagnante en coalition perdante.

Etant données deux coalitions S et T, la probabilité qu'un joueur i appartienne à la coalition S est égale à la probabilité qu'il appartienne à la coalition T.

Notons π_N, l'ensemble des permutations des joueurs d'un ensemble N ($card(\pi_N) = n!$). Pour chaque permutation π, la coalition $S^{\pi,i} \in P(N)$ est formée de l'ensemble des joueurs de N positionnés avant le joueur i dans π y compris i, c'est-à-dire : $S^{\pi,i} = \{j \in N, \pi^{-1}(j) \leq \pi^{-1}(i)\}$.

Une permutation peut s'interpréter comme un processus de formation séquentielle de la grande coalition.

Le processus de formation de cette coalition est le suivant :

– le joueur $\pi(1)$ en première position forme la coalition $\{\pi(1)\}$

– le joueur $\pi(2)$ en deuxième position forme la coalition $\{\pi(1), \pi(2)\}$.

Le processus se repète jusqu'à l'étape n où le joueur $\pi(n)$ vote en dernier lieu et rejoint l'ensemble des autres joueurs pour former la grande coalition N.

Pour tout jeu (N, v), la valeur de Shapley de l'électeur i est donnée par la relation :

$SS_i(v) = \sum\limits_{S \subset N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \backslash \{i\})]$ (1).

Dans l'expression (1), le nombre :

$*(s-1)!$ compte le nombre de permutations possibles π des $(s-1)$ joueurs ayant pris part au vote avant l'électeur i ;

$*(n-s)!$ représente le nombre de permutations des $(n-s)$ joueurs prennant part au vote après le joueur i.

$* \sum\limits_{S \in 2^N, i \in S} [v(S) - v(S \backslash \{i\})]$ nous donne le nombre de coalitions pour lesquelles le joueur i est décisif.

Cette expression revient à diviser le nombre de permutations pour lesquelles le joueur i est décisif par le nombre total de permutations possibles. La valeur de Shapley attribue donc à chaque joueur la moyenne de ses contributions marginales aux coalitions auxquelles il appartient.

Exemple

On suppose que les décisions sont prises par la règle de la majorité dans un organe composé des joueurs A, B, C et D, qui ont respectivement 3, 2, 1 et 1 voix. Le seuil de vote de majorité est 4. Il y a 24 ordres possibles pour ces membres de vote :

$$\begin{array}{cccccc}
A\mathbf{B}CD & A\mathbf{B}DC & A\mathbf{C}BD & A\mathbf{C}DB & A\mathbf{D}BC & A\mathbf{D}CB \\
B\mathbf{A}CD & B\mathbf{A}DC & BC\mathbf{A}D & BC\mathbf{D}A & BD\mathbf{A}C & BD\mathbf{C}A \\
C\mathbf{A}BD & C\mathbf{A}DB & CB\mathbf{A}D & CB\mathbf{D}A & CD\mathbf{A}B & CD\mathbf{B}A \\
D\mathbf{A}BC & D\mathbf{A}CB & D\mathbf{B}AC & DB\mathbf{C}A & DC\mathbf{A}B & DC\mathbf{B}A
\end{array}$$

Pour chaque séquence de vote, le joueur pivot (l'électeur qui atteint le premier la somme cumulée de 4 ou plus) est en gras. Ici, l'électeur A est le joueur à véto dans 12 des 24 séquences).

Par conséquent, l'électeur A a l'indice de puissance 1/2.

Les autres électeurs ont un indice de puissance 1/6.

Curieusement, B n'a pas plus de pouvoir que C et D.

L'indice de Banzhaf

Connu aujourd'hui comme l'indice de pouvoir de Banzhaf, cet indice a initialement été présenté par Penrose et fut en grande partie oublié par la suite. Il a été réinventé en 1965 par Banzhaf et réinventé une fois de plus par Coleman en 1971 avant d'être incorporé dans la littérature traditionnelle.

C'est un indice de pouvoir défini par la probabilité du changement des résultats d'un scrutin où les droits de vote ne sont pas nécessairement partagés de façon égale entre les électeurs. Pour déterminer le pouvoir d'un électeur en utilisant cet indice, on commence par recenser toutes les coalitions gagnantes puis, on compte tous les électeurs critiques.

Selon Banzhaf (1965), la mesure du pouvoir d'un joueur dépend du nombre de fois où celui-ci est décisif. Le pouvoir d'un électeur est défini comme la fraction de tous les votes critiques qu'il pourrait exprimer.

Contrairement à celui de Shapley (1954), dans le processus de décision de Banzhaf (1965), le vote n'est pas séquentiel et les coalitions votent en bloc. L'indice normalisé de Banzhaf (1965) du joueur i est donné par la relation :

$$\tilde{B}_i(v) = \frac{d_i(v)}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_j(v)};\ \text{avec } d_i(v) = \sum_{S\subset N, i\in S} [v(S) - v(S\backslash\{i\})];$$

L'indice non normalisé de Banzhaf du joueur i est défini par :

$$B_i(v) = \frac{\sum\limits_{S\subset N, i\in S} [v(S) - v(S\backslash\{i\})]}{2^{n-1}}.$$

Dans cette expression, le numérateur représente le nombre de coalitions pour lesquelles le joueur i est décisif, tandis que le dénominateur représente le nombre de coalitions dont i fait partie. C'est donc le nombre de coalitions dans lesquelles le joueur i est décisif divisé par le nombre total de coalitions contenant le joueur i.

Illustration

Un jeu de vote simple, tiré de "Game theory and strategy" par Phillip D Straffin : [6 ;4,3,2,1]

Ces chiffres entre parenthèses signifient qu'un projet nécessite 6 voix pour être adopté, que l'électeur A dispose de quatre voix, l'électeur B de trois voix, l'électeur C de deux voix, l'électeur D d'une voix. Les groupes gagnants, où ont été surlignés en gras les électeurs décisifs sont les suivants : **AB, AC**, **A**BC, **AB**D, **A**CD, **BCD**, ABCD.

Il y a au total 12 votes décisifs si bien qu'avec l'indice de Banzhaf, le pouvoir est réparti de la manière suivante :

$$B_A = \frac{5}{12}, B_B = \frac{3}{12}, B_C = \frac{3}{12}, B_D = \frac{1}{12}.$$

L'indice normalisé de Banzhaf est souvent associé au nom de Coleman et l'indice non normalisé trouve son origine dans les travaux de Penrose (1946).

L'indice de Johnston

Johnston propose une modification de la pondération de l'indice de Banzhaf ; il considère que l'indice du pouvoir devrait dépendre du nombre de joueurs décisifs dans une coalition donnée. Partant du fait que le pouvoir d'un joueur dans une coalition est d'autant plus faible que le nombre de joueurs décisifs dans cette coalition est élevé, Johnston suggère que le pouvoir attribuable à une coalition gagnante soit divisé égalitairement entre les différents votants décisifs de cette coalition.

Dans un jeu simple (N, v), le score de Johnston du joueur i est donné par la relation :

$$J_i(v) = \sum_{S \in D_i(v)} \frac{1}{d(S)} [v(S) - v(S \backslash \{i\})].$$

Dans cette expression, $d(S)$ représente le nombre de joueurs décisifs dans la coalition S, $D_i(S)$ est l'ensemble des coalitions pour lesquelles le joueur i est décisif.

L'indice de Johnston du joueur i est alors défini par :

$$\widetilde{J}_i(v) = \frac{J_i(v)}{\sum\limits_{j \in N} J_j(v)}.$$

C'est le quotient du score de Johnston du joueur i par la somme des scores de tous les autres joueurs de l'ensemble N. **L'indice de Deegan-Packel**

Deegan et Packel (1978) ont proposé un indice de pouvoir basé sur le principe de taille de Ricker (1962). Ce principe revient à considérer que seules les coalitions minimales gagnantes se forment.

Cet indice est obtenu en supposant que toutes les coalitions minimales gagnantes se forment de manière équiprobable et que chaque joueur d'une coalition minimale gagnante reçoit un "montant de pouvoir" inversement proportionnel à la taille de cette coalition.

Pour un jeu simple (N, v), l'indice de Deegan-Packel (1978) du joueur i est donné par la relation :

$$\begin{aligned} DP_i(v) &= \frac{1}{m(v)} \sum_{S \in M(v), i \in S} \frac{1}{s}[v(S) - v(S \backslash \{i\}] \\ &= \frac{1}{m(v)} \sum_{S \in M(v)} \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

où, $M(v)$ désigne l'ensemble des coalitions minimales gagnantes et $m(v)$ est le cardinal de $M(v)$.
Illustration

En reprenant l'exemple 2 et à partir du tableau 2, (puisqu'on se sert des coalitions minimales gagnantes) on a :

$$\begin{aligned} DP_a(v) &= \frac{1}{4} * \frac{3}{2} = \frac{3}{8} \\ DP_i(v) &= \frac{1}{4} * (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{24}, \forall i = b, c, d. \end{aligned}$$

L'indice d'Andjiga-Berg

Deux chercheurs Andjiga (1996) et Berg (1999), ont indépendamment l'un et l'autre proposé un indice fondé sur les deux principes suivants :

(p_1) Seules les coalitions gagnantes se forment et elles se forment de manière équiprobable.

(p_2) Un joueur i d'une coalition S reçoit une fraction de pouvoir inversement proportionnelle à la taille s de cette coalition tant que le joueur i est décisif dans S.

Pour un jeu simple (N, v), le score d'Andiga-Berg du joueur i est donné par :

$$AB_i(v) = \frac{1}{g(v)} \sum_{S \in G_i(v)} \frac{1}{s}[v(S) - v(S \backslash \{i\})](*);$$

Dans l'expression $(*)$,

- $g(v)$ désigne le nombre de coalitions gagnantes.
- $G_i(v)$ représente le nombre de coalitions gagnantes contenant le joueur i.
- $\sum\limits_{S \in G_i(v)} \frac{1}{s}[v(S) - v(S \backslash \{i\})]$ nous donne la somme des proportions de joueurs décisifs dans chaque coalition.

L'indice d'Andjiga-Berg du joueur i est donné par la relation :

$$\widetilde{AB}_i(v) = \frac{AB_i(v)}{\sum\limits_{j=1}^{n} AB_j(v)}.$$

C'est le score d'Andjiga-Berg du joueur i divisé par la somme des scores de tous les autres joueurs de la coalition.

Illustration

En reprenant l'exemple 2 ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} AB_a(v) &= \frac{1}{2} \\ AB_i(v) &= \frac{1}{6}, \forall i = b, c, d. \end{aligned}$$

S'il est vrai que les théories quantitatives permettent de mesurer et d'attribuer des "valeur du pouvoir" à un joueur donné, il existe aussi des théories qualitatives qui permettent de comparer des individus sur la base de leur pouvoir ou influence dans le jeu. C'est l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

2.2 Approche ordinale

Contrairement aux théories quantitatives qui mesurent le pouvoir d'un électeur par un indice, les théories qualitatives produisent un classement des électeurs en fonction de leur influence dans le jeu.

Dans cette section, (N, v) désigne un jeu simple, i et j deux joueurs.

Définissons les ensembles suivants :

$$C_i = \{S \subset N \ / \ v(S) - v(S \backslash \{i\}) = 1\},$$

l'ensemble des coalitions gagnantes pour lesquelles le joueur i est décisif.

$C_i(m) = \{S \in C_i \ / \ |S| = m\}$, ensemble des coalitions de cardinal m pour lesquelles le joueur i est décisif.

De la même manière, pour toute coalition gagnante $S \in W$, on rappelle que $d(S)$ est le nombre de joueurs qui sont décisifs pour S.

Pour chaque élément $i \in N$ et chaque h tel que : $1 \leq h \leq n$, C_i^h est l'ensemble des coalitions gagnantes ayant exactement h joueurs décisifs, le joueur i et $h-1$ autres éléments :

$$C_i^h = \{S \in C_i : d(S) = h\}.$$

La relation de désirabilité

Encore appelée relation d'influence, cette relation a été introduite par Allingham (1975) et se définit de la manière suivante :

Définition 2.1. Soient (N, W) un jeu simple, i et j deux joueurs.

1) i et j sont dits équidésirables (ou bien d'égale influence) noté $i \approx_D j$ si pour toute coalition S telle que $i \notin S, j \notin S$, on a :

$$S \cup \{i\} \in W \Longleftrightarrow S \cup \{j\} \in W.$$

2) i est dit strictement plus désirable (ou strictement plus influent) que j noté $i >_D j$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Pour toute coalition S telle que $i \notin S$ et $j \notin S$,

$$S \cup \{j\} \in W \Longrightarrow S \cup \{i\} \in W.$$

b) Il existe une coalition T telle que $i \notin T$ et $j \notin T$,

$$T \cup \{i\} \in W \ et \ T \cup \{j\} \notin W.$$

La relation induite de (1) et (2) et définie par :

$$i \geq_D j \Longleftrightarrow (S \cup \{j\} \in W \Longrightarrow S \cup \{i\} \in W) \ \forall S \subset N \backslash \{i, j\}$$

est appelée relation de désirabilité et est notée $\geq_D$.

Proposition 2.1. La relation de désirabilité ($\geq_D$) est un préordre sur N.

Preuve :

Soit v un jeu un simple et $\geq_D$ la relation d'influence définie sur N.

Si i, j et k sont des joueurs tels que $i \geq_D j$ et $j \geq_D k$, montrons que $i \geq_D k$.

Soit $S \subset N\backslash\{i,k\}$ tel que $v(S \cup \{k\}) = 1$. On veut montrer que $v(S \cup \{i\}) = 1$.

a) Si $j \notin S$, alors on a : $\begin{cases} S \subset N\backslash\{j,k\} \\ v(S \cup \{k\}) = 1 \\ j \geq_D k \end{cases} \Rightarrow v(S \cup \{j\}) = 1.$

Mais $\begin{cases} S \subset N\backslash\{i,j\} \\ v(S \cup \{j\}) = 1 \\ i \geq_D j \end{cases}$, donc $v(S \cup \{i\}) = 1$.

b) Supposons que $j \in S$ et posons $T = S\backslash\{j\}$. Alors $S = T \cup \{j\}$.

D'où $S \cup \{k\} = T \cup \{k\} \cup \{j\}$ et donc $v(T \cup \{k\} \cup \{j\}) = 1$.

Or, $\begin{cases} T \cup \{k\} \subset N\backslash\{i,j\} \\ v(T \cup \{k\} \cup \{j\}) = 1 \\ i \geq_D j \end{cases}$ donc $v(T \cup \{k\} \cup \{i\}) = 1$.

Ou encore $v(T \cup \{i\} \cup \{k\}) = 1$.

Mais, $\begin{cases} T \cup \{i\} \subset N\backslash\{j,k\} \\ v(T \cup \{i\} \cup \{k\}) = 1 \\ j \geq_D k \end{cases} \Rightarrow v(T \cup \{i\} \cup \{j\}) = 1.$

D'où, $v(S \cup \{i\}) = 1$.

Dans tous les cas, $v(S \cup \{i\}) = 1$.

Il s'en suit que $i \geq_D k$, de sorte que $\geq_D$ est transitive.

La reflexivité est immédiate.

En effet, pour tout joueur i, on a toujours $S \cup \{i\} \in W$ entraine $S \cup \{i\} \in W$.

D'où $\geq_D$ est un préordre sur N. ■

Soient (N, v) un jeu simple, i et j deux joueurs.

1) Si i est au moins aussi influent que j, alors pour tout entier $m \in \{1, .., n\}$, on a :

$$|C_i(m)| \geq |C_j(m)|.$$

2) Si i est strictement plus influent que j, alors l'inégalité ci-dessus est stricte pour au moins une valeur de m c'est-à- dire :

$$\exists m \in \{1, ..., n\}, |C_i(m)| > |C_j(m)|.$$

Preuve

Soient i et j deux joueurs.

Supposons $i \geq_D j$, soit $m \in \{1, ..., n\}$, montrons que : $|C_i(m)| \geq |C_j(m)|$. (1)

Pour cela, nous allons construire une application injective $\phi : C_j(m) \longrightarrow C_i(m)$.

Soit $S \in C_j(m)$.

Dans le but d'associer S à une coalition $T \in C_i(m)$, nous allons d'abord prouver que :

(a) si $i \in S$ alors, $S \in C_i(m)$ et

(b) si $i \notin S$ alors $[S\backslash\{j\}] \cup \{i\} \in C_i(m)$

(a) Supposons donc que $i \in S$,

$i \in S$ entraine $S \in C_i(m)$.

En effet, $S \in C_j(m)$ entraine $|S| = m$ et $S \in W$.

Ceci entraine $S \in C_i(m)$.

Il reste à montrer que $S\backslash\{i\} \notin W$.

Si $S\backslash\{i\} \in W$, en posant $L = S\backslash\{i, j\}$, on a :

$L \cap \{i, j\} = \emptyset$ et $L \cup \{j\} \in W$ car, $L \cup \{j\} = S\backslash\{i\}$.

Mais $L \cup \{j\} \in W$ entraîne $L \cup \{i\} \in W$, (car par hypothèse, i est au moins aussi influent que j).

De plus, $L \cup \{i\} \in W$ signifie que : $S\backslash\{j\} \in W$.

Ce qui contredit le fait que $S \in C_j(m)$ et par conséquent, $S\backslash\{i\} \notin W$.

(b) Si $i \notin S$, alors $[(S\backslash\{j\}) \cup \{i\}] \in C_i(m)$.

En effet, d'après l'hypothèse, on a : $|(S\backslash\{j\}) \cup \{i\}| = m$.

Il reste à prouver que $(S\backslash\{j\}) \cup \{i\} \in W$.

Pour prouver (1), nous construisons l'application

$\phi : C_j(m) \longrightarrow C_i(m)$

$$S \longmapsto \begin{cases} S \; si \; S \in C_i(m) \\ (S\backslash\{j\}) \cup \{i\} \; si \; S \notin C_i(m) \end{cases}.$$

L'application ϕ est bien définie c'est-à-dire : $\phi(S) \in C_i(m) \; \forall S \in C_j(m)$.

(i) Si $i \in S$, $S \in C_i(m)$.

En effet, $S \in C_j(m) \Longrightarrow \begin{cases} |S| = m \\ S \in W \end{cases}$

Donc, si de plus $i \in S$, on aura : $\begin{cases} i \in S \\ |S| = m \quad (*) \\ S \in W \end{cases}$

Il reste à prouver la décisivité de i dans la coalition S.

Si de plus $S\backslash\{i\} \in W$, posons $L = S\backslash\{i,j\}$ alors on a : $L \cap \{i,j\} = \emptyset$ et $L \cup \{j\} \in W$ (car $L \cup \{j\} = S\backslash\{i\}$).

Mais comme i est plus influent que j, on a : $L \cup \{i\} \in W$.

Mais $L \cup \{i\} = S\backslash\{j\}$. Ceci contredit le fait que $S \in C_j(m)$.

D'où $S\backslash\{i\} \notin W$.

D'où, avec $(*)$, on conclut que : $S \in C_i(m)$.

(ii) Si $i \notin S$,

Par hypothèse, on a : $|[S\backslash\{j\}] \cup \{i\}| = m$.

Montrons à présent que $[(S\backslash\{j\}) \cup \{i\}]\backslash\{i\} \notin W$ et $[S\backslash\{j\}] \cup \{i\} \in W$.

Mais $[(S\backslash\{j\}) \cup \{i\}]\backslash\{i\} = S\backslash\{i;j\}$ et $S\backslash\{i,j\} \notin W$;

Car si $S\backslash\{i,j\} \in W$, on aura, compte tenu de la monotonie, $S\backslash\{j\} \in W$.

Ce qui contredit le fait que $S \in C_j(m)$.

D'où $[(S\backslash\{j\}) \cup \{i\}]\backslash\{i\} \notin W$.

Il reste à montrer que $[S\backslash\{j\}] \cup \{i\} \in W$.

Si $[(S\backslash\{j\}) \cup \{i\}] \notin W$, alors $[S\backslash\{j\}] \cup \{j\} \notin W$ car $i \geq_D j$

$[S\backslash\{j\}] \cup \{j\} \notin W$ signifie que $S \notin W$; ce qui est une contradiction.

Dans tous les cas, on a : $\phi(S) \in C_i(m)$.

Il en résulte que l'application ϕ est bien définie.

c) D'après (i) et (ii), on peut dire que l'application :

$$\phi : C_j(m) \longrightarrow C_i(m)$$
$$S \longmapsto \begin{cases} S \text{ si } i \in S \\ S\backslash\{j\} \cup \{i\} \text{ si } i \notin S \end{cases}$$

est telle que $\phi(S) \in C_i(m), \forall S \in C_i(m)$.

Ce qui signifie que ϕ est bien définie.

Pour prouver l'injection, nous considérons $S, T \in C_j(m)$ tel que l'on ait : $\phi(S) = \phi(T)$.

On ne peut avoir $i \notin S$ et $i \in T$ car si tel est le cas,

$\phi(S) = \phi(T)$ entrainerait $[S\backslash\{j\}] \cup \{i\} = T$;

ce qui serait une contradiction car $j \in T$.

De la même manière il est impossible d'avoir $i \in S$ et $i \notin T$.

En effet, si tel est le cas $\phi(S) = \phi(T)$ entrainerait comme ci-dessus $S = [T\backslash\{j\}] \cup \{i\}$.

Ce qui est impossible car $j \in S$.

Ainsi, pour prouver que $S = T$, on a seulement 2 cas à considérer :

le cas $i \in S$ et $i \in T$, puis le cas $i \notin S$ et $i \notin T$

Si $i \in S$ et $i \in T$, on a : $\phi(S) = S$ et $\phi(T) = T$.

D'où, $\phi(S) = \phi(T)$ entraine $S = T$.

Si $i \notin S$ et $i \notin T$, on a : $\phi(S) = [S \backslash \{j\}] \cup \{i\}$ et $\phi(T) = [T \backslash \{j\}] \cup \{i\}$.

Ainsi, $\phi(S) = \phi(T)$ entraine $[S \backslash \{j\}] \cup \{i\} = [T \backslash \{j\}] \cup \{i\}$.

Ce qui équivaut à $S = T$.

D'où l'application ϕ est injective.

2) Supposons que i est strictement plus influent que j

alors on a : $i \geq_D j$ et $\rceil(j \geq_D i)$.

$\rceil(j \geq_D i) \implies \exists\ S \subset N$ tel que $S \cap \{i, j\} = \emptyset$; $S \cup \{i\} \in W$ et $S \cup \{j\} \notin W$.

Prenons $s = |S|$ et montrons d'abord que $S \cup \{i\} \in C_i(s+1)$.

Par définition de S, on a $S \cup \{i\} \in W$.

Nous devons à présent montrer que $S \notin W$.

Si $S \in W$, on aura compte tenu de la monotonie $S \cup \{j\} \in W$. Mais, par définition de S, $S \cup \{j\} \notin W$.

Donc $S \notin W$.

Pour montrer qu'il existe m tel que $|C_i(m)| > |C_j(m)|$, nous prenons $m = s + 1$.

Puisque $i \geq_D j$, l'application ϕ construite ci-dessus définie de $C_j(s+1)$ vers $C_i(s+1)$ est injective.

La preuve de l'inégalité stricte est obtenue en prouvant que ϕ n'est pas surjective.

Nous avons montré ci-dessus que $S \cup \{i\} \in C_i(s+1)$.

Si l'application ϕ est surjective, il existe $T \in C_j(s+1)$ tel que $\phi(T) = S \cup \{i\}$.

Si T est tel que $i \in T$ on a : $\phi(T) = T$ or, $\phi(T) = S \cup \{i\}$.

Ceci entraine $S \cup \{i\} = T$.

Mais comme par définition de S, on a : $j \notin S \cup \{i\}$ tandis que $j \in T$, on a une contradiction.

Il en résulte que T n'existe pas et l'application ϕ n'est pas surjective.

D'où, pour $m = s + 1$, on a : $|C_i(m)| > |C_j(m)|$. ■

Proposition 2.2. La relation d'influence est totale si et seulement si le jeu simple est $\pi -$ *robuste*.

Preuve :

Soit (N, v) un jeu simple.

Supposons que v n'est pas π-robuste.

Ceci signifie qu'il existe deux coalitions $S, T \in W$; et il existe i et j deux joueurs tels que l'on ait :

$i \in S, i \notin T, j \notin S, j \in T$ et

$$\begin{cases} (S\backslash\{i\}) \cup \{j\} \notin W \\ (T\backslash\{j\}) \cup \{i\} \notin W \end{cases}$$

Or $\geq_D$ est totale sur N.et $i, j \in N$; d'où, on a soit $i \geq_D j$, soit $j >_D i$.

Supposons $i \geq_D j$.

Si on pose $L = T\backslash\{j\}$, on obtient :

$$L \cup \{j\} = T \in W \ et \ L \cup \{i\} = (T\backslash\{j\}) \cup \{i\} \notin W.$$

Ce qui contredit le fait que $i \geq_D j$.

D'où la relation d'influence ($\geq_D$) n'est pas totale sur N.

Ainsi, si la relation d'influence est totale le jeu simple considéré est $\pi-$robuste.

Réciproquement, supposons que la relation d'influence ne soit pas totale.

Si $\geq_D$ n'est pas totale, il existe $i, j \in N$ tel que l'on ait : $\rceil(i \geq_D j)$ et $\rceil(j \geq_D i)$.

D'où, il existe $S \subset N, S \cap \{i, j\} = \emptyset, S \cup \{i\} \in W$ et $S \cup \{j\} \notin W$ et

il existe $T \subset N, T \cap \{i, j\} = \emptyset, T \cup \{j\} \in W$ et $T \cup \{i\} \notin W$.

En posant $U = S \cup \{i\}, V = T \cup \{j\}$,

on a : $U \in W, i \in U, j \notin U \ et \ V \in W, j \in V, i \notin V$.

Mais $L_1 = (U\backslash\{i\}) \cup \{j\} = S \cup \{j\} \notin W$,

$L_2 = (V\backslash\{j\}) \cup \{i\} = T \cup \{i\} \notin W$,

Ce qui implique que v n'est pas π-robuste.

On vient de montrer que si v est $\pi-$robuste, la relation d'influence est totale.

D'où l'équivalence. ■

Nous revisitons dans ce qui suit des résultats dûs à Diffo-Moulen (2002) sur la relation d'influence et l'extension de véto d'un jeu simple.

Proposition 2.3. La relation d'influence est maintenue dans l'extension de véto de tout jeu simple.

Preuve

Soient $G = (N, W)$ un jeu simple $G_1 = (\overline{N}, \overline{W})$ son extension de véto avec j_1 comme joueur à véto.

Notons $\geq_D$ la relation d'influence sur G et $\geq_{D_1}$ la relation d'influence sur G_1.

Pour démonter cette proposition, il suffit de prouver que $\geq_D$ est maintenue sur G_1; c'est-à-dire :

$\forall i, j \in N, i \geq_D j \Longleftrightarrow i \geq_{D_1} j.$

Supposons $i \geq_D j$ et prenons $T \subset N \cup \{j_1\}$ tel que $T \cap \{i, j\} = \emptyset$ et $T \cup \{j\} \in \overline{W}$.

$T \cup \{j\} \in \overline{W} \Longrightarrow j_1 \in T \cup \{j\}.$

Ceci entraine $j_1 \in T$ car $j \in N$.

De plus $T \cup \{j\} \in \overline{W}$ implique que $(T \cup \{j\}) \backslash \{j_1\} \in W$ (par définition de $\overline{W}$) ; et puisque $i \geq_D j, (T \backslash \{j_1\}) \cup \{i\} \in W$. C'est-à-dire $T \cup \{i\} \in \overline{W}$

D'où, $i \geq_{D_1} j$.

Réciproquement, supposons que $i \geq_{D_1} j$ et considérons $T \subset N$ tel que $T \cap \{i, j\} = \emptyset$ et $T \cup \{j\} \in W$.

Par définition de $\overline{W}; T \cup \{j\} \cup \{j_1\} \in \overline{W}$.

Mais puisque $i \geq_{D_1} j$, on déduit que $T \cup \{j_1\} \cup \{i\} \in \overline{W}$.

De plus, par définition de $\overline{W}$, $T \cup \{j_1\} \cup \{i\} \in \overline{W}$ entraine $T \cup \{i\} \in W$.

Ce qui conduit à $i \geq_D j$. ■

Enonçons à présent le résultat suivant sur l'extension de véto d'un jeu simple $\pi-$robuste.

Proposition 2.4. Soit G un jeu simple, G_1 son extension de véto.

$$G \text{ est } \pi\text{-robuste si et seulement si } G_1 \text{ est } \pi\text{-robuste.}$$

Preuve

Supposons que G soit $\pi-$robuste.

Le jeu simple G est $\pi-$robuste entraine que la relation d'influence est totale sur N.

Mais, puisque la relation d'influence est maintenue sur toute extension de véto de G, il suffit de prouver que $j_1 \geq_{D_1} i$ pour conclure que $\geq_D$ est complète sur N.

Le fait que $j_1 \geq_{D_1} i$ est immédiat puisque, j_1 est un joueur à véto, il est plus influent que tous les joueurs de l'ensemble N.

Ainsi la relation $(\geq_{D_1})$ est totale sur $\overline{N}$ et G_1 est $\pi-$robuste.

Réciproquement, supposons que G_1 est $\pi-$robuste.

G_1 est $\pi-$robuste équivaut à $\geq_{D_1}$ est totale sur $\overline{N}$ (d'après la proposition 2.2).

D'où, $\geq_D$ est totale sur N (car $N \subset \overline{N}$).

Mais, puisque la relation ($\geq_{D_1}$) est maintenue et $\geq_D$ coincide avec $\geq_{D_1}$ sur N, il s'en suit que la relation de désirabilité $\geq_D$ est totale. Par conséquent G est $\pi-$robuste. ■

Définition 2.2. Un jeu simple v sur N est dit complet lorsque $\geq_D$, la relation de désirabilité est totale.

On note COM la classe des jeux simples complets sur N.

En plus de la relation de désirabilité, on a la relation de faible désirabilité.

La relation de faible désirabilité

La relation de faible désirabilité ou de faible influence a été considérée par Diffo-Moulen (2002) et formalisée par Freixas(2012).

Définition 2.3. i et j étant deux éléments de l'ensemble N des électeurs, le joueur i est dit faiblement plus désirable que j noté $i \geq_d j$ si et seulement si :

$$|C_i(k)| \geq |C_j(k)| \ \forall k \in \{1, ..., n\}$$

où $C_i(k) = \{S \in C_i : |S| = k\}$.

Proposition 2.5. La relation de faible désirabilité $\geq_d$ (respectivement de faible désirabilité stricte $>_d$) est un préordre sur N.

Preuve

Soient i, j et t trois joueurs tels que $i \geq_d j$ et $j \geq_d t$.

Par définition de la faible désirabilité, $i \geq_d j \Rightarrow |C_i(k)| \geq |C_j(k)| \ \forall k \in \{1, ..., n\}$ et $j \geq_d t \Rightarrow |C_j(k)| \geq |C_t(k)| \ \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Soit $k \in \{1, ..n\}$ quelconque.

On a : $|C_i(k)| \geq |C_j(k)|$ et $|C_j(k)| \geq |C_t(k)|$.

D'où, par transitivité de $\geq$, on peut écrire $|C_i(k)| \geq |C_t(k)|$;c'est-à-dire $i \geq_d t$.

Ainsi, $\geq_d$ est transitive.

La reflexivité étant immédiate, nous pouvons conclure que $\geq_d$ est un préordre sur N.

On démontre exactement de la même manière que $>_d$ est un préordre sur N.■

Définition 2.4. Un jeu simple v sur N est faiblement complet lorsque $\geq_d$, la relation de faible désirabilité est totale.

On note $WEAKC$ la classe des jeux simples faiblement complets sur N.

Rappelons la définition de trois autres théories ordinales de pouvoir introduites par Freixas (2012) : la relation de légère désirabilité, la relation de désirabilité modérée, la relation de semi désirabilité.

La relation de légère désirabilité

Nous rappelons que :

Etant donné un jeu simple (N, v), pour tout $i \in N$ et tout $h \in \{1, ..., n\}$, C_i^h désigne l'ensemble formé de toutes les coalitions de C_i ayant exactement h joueurs décisifs dont le joueur i et exactement $h-1$ autres joueurs décisifs.

Définition 2.5. La relation de légère désirabilité notée $\geq_{d'}$ est définie par :

$i \geq_{d'} j$ si et seulement si $\sum_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_j^h|$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

Proposition 2.6. La relation de légère désirabilité ($\geq_{d'}$) est un préordre sur N.

Preuve Soient i, j et t trois électeurs tels que $i \geq_{d'} j$ et $j \geq_{d'} t$.

On a : $i \geq_{d'} j$ signifie que $\sum_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_j^h|$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$ et $j \geq_{d'} t$ signifie $\sum_{h=1}^{k} |C_j^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_t^h|$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

On veut prouver que : $\sum_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_t^h|$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on a : $\sum_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_j^h|$ et $\sum_{h=1}^{k} |C_j^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_t^h|$. D'où, $\sum_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_t^h|$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$ et $\geq_{d'}$ est transitive.

La reflexivité est immédiate.

En effet, pour tout $i \in N$, on a toujours : $\sum_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum_{h=1}^{k} |C_i^h|, \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Il en résulte que la relation de légère désirabilité est un préordre sur N. ■

Définition 2.6. Un jeu simple v sur N est dit légèrement complet lorsque $\geq_{d'}$, la relation de légère désirabilité est totale sur N.

On note $FEEBC$ la classe des jeux légèrement complets.

Il n'y a pas de relation entre $\geq_d$ et $\geq_{d'}$ en ce sens que ni $\geq_d$ n'est un sous préordre de $\geq_{d'}$, ni $\geq_{d'}$ n'est un sous préordre de $\geq_d$.

En plus de ce préordre, on a la relation de désirabilité modérée.

La relation de désirabilité modérée

Considérons le jeu simple (N, W), deux joueurs i, $j \in N$.

Définition 2.7. $i >_{d^*} j$ si et seulement si $i \geq_{d'} j$ *et* $|C_i| > |C_j|$.

$i \approx_{d^*} j$ si et seulement si $i \approx_{d'} j$.

La relation $\geq_{d^*}$, déduite des deux relations ci-dessus est appelée relation de désirabilité modérée.

Proposition 2.7. La relation de désirabilité modérée est un préordre sur N.

Preuve Soient i, j et t trois joueurs tels que : $i \geq_{d^*} j$ et $j \geq_{d^*} t$.

On a :

$$\begin{cases} i \geq_{d'} j \text{ et } |C_i| > |C_j| \text{ ou } i \approx_{d'} j \\ j \geq_{d'} t \text{ et } |C_j| > |C_t| \text{ ou } j \approx_{d'} t \end{cases}$$

Si $i \geq_{d'} j$, $|C_i| > |C_j|$ et $i \geq_{d'} t$, $|C_j| > |C_t|$, on a : $i \geq_{d'} t$, car $\geq_{d'}$ est transitive.On a aussi $|C_i| > |C_t|$ car $>$, définie sur l'ensemble des entiers est transitive.

Tout ceci entraine $i \geq_{d^*} t$.

Si $i \geq_{d'} j$, $|C_i| > |C_j|$ et $j \approx_{d'} t$, on a :

$$j \approx_{d'} t \Rightarrow \sum_{h=1}^{k} |C_j^h| = \sum_{h=1}^{k} |C_t^h|, \forall k \in \{1, ..., n\}(*).$$

En appliquant la relation ci-dessus au cas $k = n$, on obtient : $|C_j| = |C_t|$.

D'où, avec $|C_i| > |C_j|$, on peut écrire : $|C_i| > |C_t|$ (1).

De plus, $j \approx_{d'} t$ entraine $j \geq_{d'} t$. D'où, avec $i \geq_{d'} j$ et compte tenu de la transitivité de $\geq_{d'}$, on peut écrire : $i \geq_{d'} t$ (2).

Il résulte des relations (1) et (2) que : $i \geq_{d^*} t$.

Si $i \approx_{d'} j$ et $j \approx_{d'} t$ alors $i \approx_{d'} t$. Ce qui entraine $i \geq_{d^*} t$.

La relation de désirabilité modérée est transitive.

La reflexivité étant immédiate, il résulte de tout ce qui précède que la relation de désirabilité modérée est un préordre sur N. ■

Définition 2.8. Un jeu simple v sur N est dit modèrement complet lorsque la relation de désirabilité modérée $\geq_{d^*}$,est totale sur N.

On note MODC la classe de jeux simples modèrement complets.

De la définition 2.7 et considérant le fait que : $|C_i| = \sum_{h=1}^{n} |C_i^h|$, il vient que la relation de désirabilité modérée ($\geq_{d^*}$) est un sous préordre de la relation de légère désirabilité ($\geq_{d'}$).

La réciproque est fausse. L'exemple ci-dessous nous donne le cas d'un jeu modèrement complet qui n'est pas légèrement complet.

Exemple Définissons le jeu (N, W) de la manière suivante :

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'ensemble des électeurs, $W^m = \{\{1, 3, 6\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ est l'ensemble des coalitions minimales gagnantes. On a le tableau suivant :

	$\lvert C_j^1\rvert$	$\lvert C_j^2\rvert$	$\lvert C_j^3\rvert$	$\lvert C_j^4\rvert$	$\lvert C_j^5\rvert$	$\lvert C_j^6\rvert$
j=1,3	0	0	4	0	0	0
j=2,4	0	4	0	0	0	0
j=5	8	14	0	0	0	0
j=6	0	4	4	0	0	0

A partir de ce tableau, on peut observer que ce jeu n'est pas modèrement complet puisqu'on a : $\rceil(1 \geq_{d^*} 2)$ et $\rceil(2 \geq_{d^*} 1)$. Par contre, $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\sum\limits_{h=1}^{k} |C_5^h| > \sum\limits_{h=1}^{k} |C_6^h| > \sum\limits_{h=1}^{k} |C_2^h| = \sum\limits_{h=1}^{k} |C_4^h| = \sum\limits_{h=1}^{k} |C_1^h| = \sum\limits_{h=1}^{k} |C_3^h|$.

D'où, on a : $5 >_{d'} 6 >_{d'} 2 \approx_{d'} 4 \approx_{d'} 1 \approx_{d'} 3$; ce qui prouve que ce jeu est légèrement complet.

A partir des préordres $\geq_d$, $\geq_{d'}$ et $\geq_{d^*}$, nous construisons dans le paragraphe ci-dessous un nouveau préordre .

La relation de semi désirabilité

Commençons par énoncer le résultat suivant qui stipule que les préordres $\geq_{d\cap d^*}$ et $\geq_{d\cap d'}$ coincident.

Proposition 2.8. Soient (N,v) un jeu simple, i et j deux joueurs.

On a les équivalences suivantes :

$$i >_{d\cap d'} j \Longleftrightarrow i >_{d\cap d^*} j$$

$$i \approx_{d\cap d'} j \Longleftrightarrow i \approx_{d\cap d^*} j$$

Preuve

Soit $i, j \in N$.

Si $i >_{d^*} j$ alors $i >_{d'} j$.

D'où, $i >_{d\cap d^*} j \Longrightarrow i >_{d\cap d'} j$.

Réciproquement, si $i >_{d\cap d'} j$ alors $i >_d j$ et $i >_{d'} j$. Mais $i >_d j$ entraine $i >_\beta j$ c'est-à-dire $|C_i| > |C_j|$, d'où $i \geq_{d^*} j$.

La seconde partie de la démonstration est une conséquence immédiate du fait que

$i \approx_{d^*} j \Longleftrightarrow i \approx_{d'} j$. ■

Cette proposition nous permet de définir la relation de semi désirabilité.

Définition 2.9. Soit v un jeu simple sur N.

Le préordre $\geq_{d\cap d'}$ coincide avec le préordre $\geq_{d\cap d^*}$ et est appelé relation de semi désirabilité. Il se note $\succeq$.

De cette définition, il vient que la semi désirabilité est un sous préordre de la relation de faible désirabilité ($\geq_d$) et de la relation de légère désirabilité ($\geq_{d'}$).

Définition 2.10. Le jeu simple v sur N est dit semi complet lorsque la relation de semi désirabilité est totale sur N.

On note $SEMC$ la classe des jeux simples semi complets.

En somme, dans ce chapitre, on a présenté quelques indices du pouvoir et recensé les théories qualitatives introduites par Freixas. On se pose la question de savoir s'il est possible de faire une comparaison entre ces différentes théories.

Chapitre 3

Equivalence ordinale de quelques théories de pouvoir

Au regard de la multiplicité des indices de pouvoir dans les jeux simples, on peut effectuer une comparaison entre ces différentes mesures. Les valeurs attribuées à chacun des joueurs par chaque indice pendant un processus de vote étant extrêmement dispersées, pour suggérer un classement ou une comparaison plus fructueuse, il est nécessaire d'évaluer et de produire un classement de ces indices de pouvoir. Dans ce chapitre, après avoir établi les relations qui existent entre les théories qualitatives du pouvoir dans la première partie, nous présentons dans la seconde partie les relations qui existent entre théories qualitatives et théories quantitatives d'une part puis, entre les théories quantitatives d'autre part. Les théories quantitatives auxquelles nous nous interessons spécialement sont les indices de Shapley-Shubik (1954), de Banzhaf (1965) et de Johnston (1978).

3.1 Relation entre les théories qualitatives de pouvoir

Les relations de désirabilité, de faible désirabilité, de légère désirabilité, de désirabilité modérée et de semi désirabilité sont les théories qualitatives du pouvoir que nous avons définies dans le chapitre précédent. Dans cette partie, il est question de voir et d'établir les relations qui existent entre ces différentes théories.

Commençons par énoncer le résultat suivant sur les relations de désirabilité et de faible désirabilité.

Proposition 3.1. La relation de désirabilité ($\geq_D$) est un sous préordre de la relation de faible désirabilité ($\geq_d$).

Preuve

Soient (N, v) un jeu simple ; $i, j \in N$. On pose $N = \{1, ..., n\}$.

Supposons $i >_D j$. Soit $m \in \{1, ..., n\}$.

D'après la deuxième partie du lemme 2.1, on a : $|C_i(m)| > |C_j(m)|$.

Mais, $|C_i(m)| > |C_j(m)|$ $\forall m \in \{1, ..., n\}$ signifie $i >_d j$.

Si $i \approx_D j$, alors $\forall S \subset N, S \cup \{i\} \in W \Leftrightarrow S \cup \{j\} \in W$.

D'où, $|C_i(m)| = |C_j(m)|$ $\forall m \in \{1, ..., n\}$, C'est-à-dire $i \approx_d j$.

D'où le résultat. ■

Enonçons le lemme suivant :

Soient (N, v) un jeu simple, i et j deux joueurs. $S \subset N$ une coalition telle que $|S| = s$.

S'il existe h tel que $1 \leq h \leq s$ tel que l'on ait $S \in C_j^h$, alors il existe $r \leq h$ tel que $S \in C_i^r$ ou $(S \backslash \{j\}) \cup \{i\} \in C_i^r$.

Preuve

Pour prouver ce lemme nous allons supposer que $i \notin S$ et $S \in C_j^h$; car sinon on aurait $S \in C_i^h$ et par conséquent $r = h$.

Supposons dans un premier temps que l'on ait $i \notin S$ et que $l \neq i$ est aussi décisif pour $t_{ij}(S)$ où $t_{ij}(S)$ est l'application injective définie par :

$$t_{ij}(S) = \begin{cases} S \text{ si } i \in S \\ (S \backslash \{j\}) \cup \{i\} \text{ si } i \notin S \end{cases}$$

Ceci conduit à $l \in t_{ij}(S) \in C_i^r$, pour $r \geq 2$.

Montrons à présent que $h \geq r$.

Pour cela, nous allons montrer que si l est décisif pour $t_{ij}(S)$, il l'est aussi pour S.

Mais l décisif pour $t_{ij}(S)$ signifie que $t_{ij}(S) \in W$ tandis que $t_{ij}(S) \backslash \{l\} \notin W$.

D'où $S \backslash \{l\} \notin W$ puisque $i \geq_D j$ et comme nous avons supposé que $S \in C_j^h$, S est une coalition gagnante et par conséquent, l est décisif dans S et $h \geq r$. ■

Proposition 3.2. La relation de désirabilité est un sous préordre de la relation de désirabilité modérée et de la relation de légère désirabilité.

Preuve

Soit $i, j \in N$ tel que $i \geq_D j$.

On veut montrer que $i \geq_{d'} j$ et $i \geq_{d^*} j$.

Nous commençons par montrer que : pour tous i, j éléments de N, $i \geq_D j$ entraine $i \geq_{d'} j$.

Ceci prouve en particulier que $i \approx_D j$ entraine $\begin{cases} i \approx_{d'} j \\ i \approx_{d^*} j \end{cases}$.

Supposons $i \geq_D j$.

Ceci signifie que $t_{ij}(C_j) \subset C_i$ où t_{ij} est l'application injective définie par :

$$t_{ij}(S) = \begin{cases} S \text{ si } i \in S \\ (S \backslash \{j\}) \cup \{i\} \text{ si } i \notin S \end{cases}$$

.

Pour $q \in \{1, ..., n\}$, posons $\zeta_i^q = \{S \subset N, S \in C_j^r, r \leq q\}$, l'ensemble des coalitions ayant au plus q joueurs décisifs parmi lesquels j.

On a : $\zeta_i^q = \cup_{t=1}^q C_i^t$.

Cette réunion étant disjointe, on a : $|\zeta_i^q| = \sum\limits_{t=1}^{q} |C_i^t|$.

On sait que pour $i, j \in N$, $i \geq_{d'} j$ signifie que : $\sum\limits_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum\limits_{h=1}^{k} |C_j^h| \; \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Ce qui revient à dire que : $\forall k \in \{1, ..., n\}$, on a : $|\zeta_i^k| \geq |\zeta_j^k|$,

Pour $k \in \{1, ..., n\}$ fixé, on définit $f_{ij} : \zeta_j^k \longrightarrow \zeta_i^k$ par : $\begin{cases} f_{ij}(S) = S \; si \; i \in S \\ f_{ij}(S) = [S \backslash \{j\}] \cup \{i\} \text{ si } i \notin S \end{cases}$

Pour montrer que $i \geq_{d'} j$, prenons $S \in \zeta_j^k$, alors il existe $h \leq k$, $S \in C_j^h$.

Mais d'après le lemme 3.1, il existe $r \leq h$ tel que $t_{ij}(S) = f_{ij}(S) \in C_i^r$.

Ceci entraine $f_{ij}(S) \in \zeta_i^k$.

D'où $|\zeta_i^k| \geq |\zeta_j^k|$; c'est-à-dire $\sum\limits_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum\limits_{h=1}^{k} |C_j^h|$.

D'où $i \geq_{d'} j$.

(ii) Pour montrer que $\geq_D$ est un sous préordre de $\geq_d$ et $\geq_{d'}$, il reste à montrer que : $i >_D j$ entraine $i >_{d'} j$ et $i >_{d^*} j$.

Mais si $i >_D j$, compte tenu des propositions précédentes, on aura $i >_\beta j$, c'est-à- dire $|C_i| > |C_j|$.

Ceci montre que $i >_{d^*} j$ et par conséquent $i >_{d'} j$ (puisque la relation de désirabilité modérée est un sous préordre de la relation de légère désirabilité). ■

Dans la proposition suivante, on compare la relation de semi désirabilité avec les autres théories qualitatives définies au chapitre deux.

Proposition 3.3. Soit v un jeu simple sur N, alors :

(i) La relation de désirabilité $\geq_D$ est un sous préordre de la relation de semi désirabilité.

(ii) La relation de semi désirabilité $\succeq$ est un sous préordre de la faible désirabilité ($\geq_d$), de la relation de désirabilité modérée ($\geq_{d^*}$) et de la légère désirabilité ($\geq_{d'}$).

Preuve

(i) Soit $i, j \in N$ tel que : $i \geq_D j$.

Comme la relation de désirabilité est un sous préordre de la relation de faible désirabilité et de la relation de désirabilité modérée, on a :

$i \geq_d j$ et $i \geq_{d^*} j$ donc $i \geq_{d \cap d^*} j$ c'est-à-dire $i \succeq j$.

(ii) Découle immédiatement de la relation de semi désirabilité.

En effet, si on a deux électeurs i et j tels que $i \succeq j$, alors comme $i \succeq j$ signifie $i \geq_{d \cap d'} j$ ou encore $i \geq_{d \cap d^*} j$, nous avons alors $i \geq_d j$, $i \geq_{d'} j$, $i \geq_{d^*} j$.

D'où le résultat. ■

3.2 Equivalence ordinale entre quelques théories de pouvoir

Etant donnés un jeu simple (N, v), deux indices de pouvoir ψ et ψ' sont dits ordinalement équivalents si et seulement si les préordres qu'ils induisent coincident. Ceci revient à dire que pour tous $i, j \in N$, on a les équivalences suivantes :

$$\psi_i > \psi_j \Longleftrightarrow \psi'_i > \psi'_j$$

$$\psi_i = \psi_j \Longleftrightarrow \psi'_i = \psi'_j.$$

Deux indices de pouvoir ordinalement équivalents rangent les joueurs exactement de la même manière. On dit qu'ils induisent la même hiérarchie sur N.

Commençons cette partie en énonçant la proposition suivante :

Proposition 3.4. Soit (N, W) un jeu simple $\pi-$robuste, i et j deux électeurs.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) i est au moins aussi influent que j.

(ii) Pour tout entier m, $1 \leq m \leq n$, on a : $|C_i(m)| > |C_j(m)|$.

Preuve

(i)$\Longrightarrow$(ii) a été prouvé au lemme 2.1.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Supposons que (i) soit fausse.

Le jeu que nous avons considéré étant $\pi-$robuste, on obtient de la proposition 2.1 que la relation d'influence est totale sur N.

Ainsi (i) fausse conduit à j plus influent que i.

En appliquant ceci à la deuxième partie du lemme 2.1, nous concluons qu'il existe m, $1 \leq m \leq n$, tel que $|C_j(m)| > |C_i(m)|$ c'est-à-dire que (ii) est fausse.

On vient de démontrer que (ii)$\Longrightarrow$(i).

D'où l'équivalence est montrée. ■

En combinant la proposition 3.4 et le lemme 2.1, on obtient le résultat suivant qui se démontre de la même manière que la proposition 2.2.

Proposition 3.5. Soit v un jeu simple π-robuste, i et j deux joueurs.

Les assertations suivantes sont équivalentes :

(i) i est (strictement) plus influent que j.

(ii) Pour tout entier m , tel que $1 \leq m \leq n$, $|C_i(m)| \geq |C_j(m)|$.

Cette dernière inégalité est stricte pour au moins une valeur de m.

Le résultat ci-dessous est dû à Diffo Lambo et Moulen (2002).

Proposition 3.6. Pour tout jeu simple, la relation d'influence est un sous préordre des préordres induits par les indices de Shaley-Shubik ($\geq_\phi$) et de Banzhaf ($\geq_\beta$).

Preuve

Cherchons d'abord une expression plus favorable de $B_i(v)$ et de $SS_i(v)$.

On a :

$$SS_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subset N} (s-1)!(n-s)![v(S) - v(S \backslash \{i\})].$$

Le terme $\sum\limits_{S \subset N} [v(S) - v(S \backslash \{i\})]$ représente le nombre de coalitions dans lesquelles le joueur i est décisif.

On a donc : $SS_i(v) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_{S \in C_i(m)} (n-m)!(s-1)!$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} |C_i(m)|(n-m)!(m-1)!$$

$B_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{S \subset N} [v(S) - v(S \backslash \{i\})]$

$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} \sum_{S \in C_i(m)} 1$

$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} |C_i(m)|.$

Si $i \geq_D j$, on a toujours $|C_i(m)| \geq |C_j(m)$. Par conséquent,

$$SS_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} |C_i(m)|(n-m)!(m-1)! \geq \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} |C_j(m)|(n-m)!(m-1)! = SS_j(v)(*).$$

Ce qui prouve que :

$$SS_i(v) \geq SS_j(v).$$

Si $i > j$, l'inégalité $(*)$ est encore vraie mais, il existe au moins une valeur de m pour laquelle, on a : $|C_i(m)| > |C_j(m)|$ et par conséquent l'inégalité $(*)$ devient stricte ; c'est-à-dire : $SS_i(v) > SS_j(v)$.

De même, si $i \geq_D j$ on a :

$$|C_i(m)| \geq |C_j(m)|$$

et alors,

$$B_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} |C_i(m)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} |C_j(m)| = B_j(v)(**).$$

Ceci prouve que :

$$B_i(v) \geq B_j(v).$$

Lorsque $i >_D j$, il existe au moins une valeur de m pour laquelle on a : $|C_i(m)| > |C_j(m)|$ et la relation $(**)$ devient stricte. ■

Proposition 3.7. Le préordre induit par l'indice de Shapley $(\geq_\phi)$ est maintenu dans l'extension de véto de tout jeu simple c'est-à-dire : $\forall i, j \in \bar{N}$, si $i \geq_\phi j$ dans N, alors $i \geq_\phi j$ dans $\bar{N}$.

Preuve

Puisque la relation de Shapley $(\geq_\phi)$ est un sous préordre de la reation de désirabilité et que la relation de désirabilité est maintenue dans l'extension de tout jeu simple, on conclut que la relation de Shapley y est également maintenue. ■

La proposition suivante nous donne la condition nécessaire et suffisante pour que les préordres $\geq_D$, $\geq_\phi$ et $\geq_\beta$ coincident.

Proposition 3.8. Les préordres $\geq_D$, $\geq_\phi$ et $\geq_\beta$ coincident dans un jeu simple si et seulement si ce dernier est π-robuste.

Preuve

Soit (N, v) un jeu simple.

Supposons que les trois préordres $\geq_D$, $\geq_\phi$ et $\geq_\beta$ coincident sur N.

Puisque $\geq_\phi$ est totale sur N, $\geq_D$ y est aussi totale.

$\geq_D$ totale signifie (d'après la proposition 2.2) que v est $\pi-$robuste.

Réciproquement si v est $\pi-$robuste, d'après la proposition(2.2), $\geq_D$ est totale.

Mais comme $\geq_D$ est un sous préordre de $\geq_\phi$ et $\geq_\beta$ (d'après la proposition 3.6), ces derniers sont aussi des préordres totaux.

D'où, $\geq_D$, $\geq_\phi$ et $\geq_\beta$ coincident sur N. ■

Carreras et Freixas (2008) montrent le résultat ci-dessous qui stipule que la relation de faible désirabilité est un sous préordre des préordres induits par les indices de Banzhaf et de Shapley.

Proposition 3.9. La relation de faible désirabilité $\geq_d$ est un sous préordre des préordres induits par les indices de Banzhaf ($\geq_\beta$) et de Shapley ($\geq_\phi$).

Proposition 3.10. La relation de légère désirabilité ($\geq_{d'}$) est un presque sous préordre du préordre induit par l'indice de Banzhaf ($\geq_\beta$) et un sous préordre du préordre induit par l'indice de Johnston ($\geq_\gamma$).

Preuve

Soit $i, j \in N$.

Si $i \geq_{d'} j$ alors $\sum\limits_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum\limits_{h=1}^{k} |C_j^h|$ $\forall k$, $1 \leq k \leq n$.

En particulier, pour $k = n$, on a : $\sum\limits_{h=1}^{n} |C_i^h| \geq \sum\limits_{h=1}^{n} |C_j^h|$; c'est-à-dire : $|C_i| \geq |C_j|$.

D'où, on a : $i \geq_\beta j$.

$\geq_{d'}$ est donc un sous préordre du préordre induit par l'indice de Banzhaf.

Montrons à présent que $\geq_{d'}$ est un sous préordre de ($\geq_\gamma$) préordre induit par l'indice de Johnston. On a : $\gamma_i(v) = \sum\limits_{h=1}^{n} |C_i^h|$.

Ainsi, si $i \geq_{d'} j$, alors $\sum\limits_{h=1}^{k} |C_i^h| \geq \sum\limits_{h=1}^{k} |C_j^h|$ $\forall k, 1 \leq k \leq n$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\gamma_i(v)-\gamma_j(v) &= (1-1/2)(\sum_{h=1}^{1}|C_i^h|-\sum_{h=1}^{1}|C_j^h|)+(1/2-1/3)(\sum_{h=1}^{2}|C_i^h|-\sum_{h=1}^{2}|C_j^h|)+...\\ &+(1/(n-1)-1/n)(\sum_{h=1}^{n-1}|C_i^h|-\sum_{h=1}^{n-1}|C_j^h|)+1/n(\sum_{h=1}^{n}|C_i^h|-\sum_{h=1}^{n}|C_j^h|)\ (*).\end{aligned}$$

Puisque tous les termes de l'expression $(*)$ sont positifs on a : $\gamma_i(v)-\gamma_j(v)\geq 0$, de sorte que $\gamma_i(v)\geq\gamma_j(v)$.

D'où $i\geq_\gamma j$.

Si $i\geq_{d'} j$ alors,

$$\sum_{h=1}^{k}|C_i^h|\geq\sum_{h=1}^{k}|C_j^h|\ \forall k, 1\leq k\leq n.$$

Mais pour un certain k, on a :

$$\sum_{h=1}^{k}|C_i^h|>\sum_{h=1}^{k}|C_j^h|$$

Ainsi, au moins un terme de la somme $(*)$ est positif ; de sorte que $\gamma_i(v)>\gamma_j(v)$, c'est-à-dire $i>_\gamma j$.

D'où, $\geq_{d'}$ est un sous préordre du préordre induit par l'indice de Johnston. ■

Dans la proposition ci-dessous, on compare la relation de désirabilité modérée avec les préordres induits par les indices de Banzhaf et de Johnston.

Proposition 3.11. La relation de désirabilité modérée est un sous préordre des préordres induits par les indices de Banzhaf ($\geq_\beta$) et de Johnston ($\geq_\gamma$).

Preuve

Puisque la relation de désirabilité modérée est un sous préordre de la légère désirabilité, et que la légère désirabilité est un sous préordre du préordre induit par l'indice de Johnston ($\geq_\gamma$) (voir proposition 3.10), nous concluons que la désirabilité modérée est un sous préordre du préordre induit par l'indice de Johnston.

Par ailleurs, de la proposition ci-dessus, nous déduisons que la relation de désirabilité modérée est un presque sous préordre du préordre induit par l'indice de Banzhaf.

D'où, il nous reste à montrer que : $\forall i,j\in N, i\geq_{d^*} j$ entraine $i\geq_\beta j$.

Mais ceci est une conséquence immédiate de la définition (car $i\geq_{d^*} j\implies i\geq_{d'} j$ et $|C_i|>|C_j|$). ■

Proposition 3.12. La relation de semi désirabilité $\succeq$ est un sous préordre des préordres induits par les indices de Banzhaf ($\geq_\beta$), de Shapley ($\geq_\phi$) et de Johnston ($\geq_\gamma$).

Preuve

Pour montrer que la relation de semi désirabilité est un sous préordre des préordres induits par les indices de Banzhaf, de Shapley et de Johnston, nous considèrons le jeu (N, v) et nous prenons deux joueurs i et j de N tels que : $i \geq_{d\cap d'} j$.

D'après la définition de la semi désirabilité, on a :

$$i \geq_d j, i \geq_{d'} j, i \geq_{d^*} j.$$

Mais d'après la Proposition 3.11, on a : $i \geq_{d^*} j \Longrightarrow i \geq_\beta j$ et $i \geq_\gamma j$.

D'où,

$$i \geq_{d\cap d^*} j \Longrightarrow i \geq_\beta j \; et \; i \geq_\gamma j.$$

Ceci prouve que la relation de semi désirabilité est un sous préordre de $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$.

En ce qui concerne le préordre induit par l'indice de Shapley, nous prenons i , $j \in N$ tels que $i \geq_{d\cap d'} j$;

on sait que :

$$i \geq_{d\cap d'} j \Rightarrow i \geq_d j \; et \; i \geq_{d'} j.$$

Mais d'après la Proposition 3.9, $i \geq_d j$ entraine $i \geq_\beta j$ et $i \geq_\phi j$.

D'où, on a : $i \geq_\phi j$.

D'où le résultat. ■

Enonçons à présent le résultat principal obtenu de la comparaison de $\geq_D$, $\geq_\phi$ et $\geq_\beta$.

Proposition 3.13. Soit v un jeu simple tel que $v \in FEEBC$ alors,

$v \in MODC$ si et seulement si $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ coincident.

Preuve

Soit $v \in FEEBC$.

Si $v \in MODC$, les préordres induits par les indices de Banzhaf($\geq_\beta$) et de Johnston($\geq_\gamma$) coincident.

En effet, on a démontré que les relations $\geq_\gamma$ et $\geq_{d'}$ coincident et que $\geq_\beta$ et $\geq_{d'}$ sont similaires.

Ces deux résultats entrainent que $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ coincident.

Réciproquement, on suppose que les préordres $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ induits respectivement par les indices de Banzhaf et de Johnston coincident et on veut montrer que $v \in MODC$.

Si on a deux joueurs i et j satisfaisant $i \approx_{d'} j$, alors $i \approx_{d^*} j$.

Si les deux joueurs i et j vérifient $i \geq_{d'} j$, la proposition 3.10 nous permet d'écrire $i \geq_\beta j$ et $i >_\gamma j$.

Mais, puisque $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ coincident, on a bien $i \geq_\beta j$ et ceci implique bien $i >_{d^*} j$.

D'où, $v \in MODC$. ■

On rappelle que $SEMC, WEAKC$ et $MODC$ désignent respectivement les classes des jeux simples semi complets, faiblement complets et modèrement complets.

(i) $SEMC = WEAKC \cap MODC$.

(ii) Dans la classe $SEMC$ des jeux semi complets,

les relations $\geq_\phi$, $\geq_\beta$, $\geq_\gamma$, $\geq_d$, $\geq_{d'}$, $\geq_{d^*}$ *et* $\geq_{d\cap d'}$ coincident.

Preuve

(i) D'après la proposition 3.3 la relation de semi désirabilité est un sous préordre des relations de faible désirabilité, et de désirabilité modérée. D'où,

$SEMC \subset WEAKC$, $SEMC \subset MODC$.

Ceci entraine $SEMC \subset WEAKC \cap MODC$.

Réciproquement, soit $v \in WEAKC \cap MODC$,

$v \in WEAKC \cap MODC$ entraine $\geq_d$ *et* $\geq_{d^*}$ sont totales.

Si de plus, $v \notin SEMC$, $\geq_{d\cap d^*}$ n'est pas totale et alors, il existe au moins deux joueurs i et j tels que l'on ait :

soit $\begin{cases} i \geq_d j \\ j >_{d^*} i \end{cases}$ (1) ou bien $\begin{cases} i \geq_{d^*} j \\ j >_d i \end{cases}$ (2).

Supposons (1).

Puisque la relation de faible désirabilité est un sous préordre du préordre induit par l'indice de Banzhaf (d'après la Proposition 3.9), $i \geq_d j$ entraine $i \geq_\beta j$.

De plus, comme la désirabilité modérée est un sous-préordre du préordre induit par l'indice de Banzhaf (d'après la Proposition 3.11), on a : $j >_{d^*} i$ entraine $j >_\beta i$.

D'où, le système (1) nous conduit à $i \geq_\beta j$ et $j >_\beta i$.

De la même manière, le système (2) conduit à $i \geq_\beta j$ et $j >_\beta i$.

Ainsi, chacun de ces systèmes conduit à une contradiction.

D'où, $v \in SEMC$ et on a l'égalité.

(ii) Nous voulons à présent démontrer que dans $SEMC$, classe des jeux semi complets, les relations $\geq_\phi$, $\geq_\beta$, $\geq_\gamma$, $\geq_d$, $\geq_{d'}$, $\geq_{d^*}$ et $\geq_{d\cap d'}$ coincident.

Soient $i, j \in N$.

Commençons par prouver que $\geq_{d\cap d'}$ et $\geq_d$ coincident.

Si $i \geq_{d\cap d'} j$, alors $i \geq_d j$.

Montrons la réciproque par contraposée.

Si $\rceil(i \geq_{d\cap d'} j)$ alors $(j >_{d\cap d'} i)$, car le jeu simple est semi complet.

D'où, $j >_d i$ et par conséquent $\rceil(i \geq_d j)$.

Ainsi, $i \geq_d j$ entraine $i \geq_{d\cap d'} j$.

On vient de prouver que les relations $\geq_d$ et $\geq_{d\cap d'}$ coincident.

S'agissant de la coincidence entre $\geq_{d\cap d'}$, $\geq_{d'}$ et $\geq_{d^*}$, la démonstration se fait exactement de la même manière que pour le cas de $\geq_{d\cap d'}$ et $\geq_d$. ■

Dans la classe :

(i) COM, les relations $\geq_\phi$, $\geq_\beta$, $\geq_\gamma$, $\geq_D$, $\geq_{d'}$ et $\geq_{d^*}$ coincident.

(ii) $WEAKC$, les relations $\geq_\phi$, $\geq_\beta$ et $\geq_d$ coincident.

(iii) $MODC$, les reations $\geq_\beta$, $\geq_\gamma$ et $\geq_{d^*}$ coincident.

(iv) $FEEBC$, les relations $\geq_\gamma$ et $\geq_{d'}$ coincident et les relations $\geq_\beta$ et $\geq_{d'}$ sont similaires.

Soit v un jeu simple tel que : $v \in FEEBC \cap WEAKC$.

Si $\geq_\gamma$ et $\geq_\phi$ coincident, alors, $\begin{cases} v \in MODC \text{ et} \\ \geq_\phi,\ \ \geq_\beta \ \text{ et } \ \geq_\gamma \ \text{ coincident.} \end{cases}$

Il existe un jeu simple $v \in FEEBC \cap WEAKC$ tel que : $v \in MODC$.

Proposition 3.14. Soit v un jeu simple tel que $v \in FEEBC \cap WEAKC$ on a :

$v \in SEMC$ si et seulement si les préordres $\geq_\phi$, $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ induits respectivement par les indices de Shapley, de Banzhaf et de Johnston coincident.

Preuve

Considérons un jeu simple v tel que $v \in FEEBC \cap WEAKC$.

Si $v \in SEMC$ alors, d'après le théorème les trois préordres $\geq_\phi$, $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ coincident.

Réciproquement si $\geq_\phi$, $\geq_\beta$ et $\geq_\gamma$ coincident, comme par définition, $v \in FEEBC \cap WEAKC$ on a :

$v \in FEEBC$ et les préordres $\geq_\beta$, $\geq_\gamma$ induits par les indices de Banzhaf et de Johnston coincident.

Ceci entraine $v \in MODC$.

D'où, $v \in WEAKC \cap MODC = SEMC$. ■

⋆ ⋆ Chapitre 4 ⋆ ⋆

Implications didactiques

Toute situation d'enseignement se noue autour d'un projet à réaliser, d'un but à atteindre. L'enseignement-apprentissage des mathématiques n'échappe pas à cette règle. Puisque cette activité est un processus complexe dans lequel chacune des parties en interaction a un gain à la fin (succès ou échec chez l'apprenant, atteinte ou non des objectifs par l'enseignant, pourcentage de réussite élevé ou non dans l'établissement), ce processus peut de ce fait être regardé comme un jeu. Raison pour laquelle on peut avoir recours à la théorie des jeux, pour la prise des décisions dans des situations complexes de classe. Au regard de la diversité des acteurs qui interviennent dans la communauté éducative, on peut se donner d'évaluer et de faire une comparaison entre les pouvoirs de chacun des intervenants de la chaîne (chef d'établissement- censeurs et surveillants généraux-personnel enseignant- élèves-parents d'élèves-pairs). Les indices de pouvoir peuvent nous permettre de produire en tenant compte de l'influence de chaque participant un classement du pouvoir de ces derniers. Par ailleurs les travaux effectués pendant la rédaction de ce mémoire nous ont permis de nous familiariser avec l'outil informatique. Nous pourrons désormais utiliser les TICE pour enseigner les mathématiques : - faire des recherches sur internet pour mieux structurer nos leçons, - produire des sujets d'évaluation de meilleure qualité. En somme, les actions menées lors de la production cet ouvrage nous auront permis de mieux apprécier le pouvoir de chaque intervenant de la chaîne éducative et d'améliorer nos prestations scolaires tant dans la transmission des savoirs qu'au moment des évaluations.

♣ Conclusion ♣

En définitive, dans ce mémoire, il a été question de donner un compte rendu du travail de Josep Freixas (2012) sur l'équivalence ordinale des indices de Shapley-Shubik (1954), Banzhaf (1965) et Johnston (1978) ; travail dans lequel on a rappelé les théories qualitatives du pouvoir déjà connues comme la relation de désirabilité et présenté de nouvelles théories comme la relation de faible désirabilité, la légère désirabilité, la relation de désirabilité modérée et la relation de semi désirabilité. Nous avons également démontré que la relation de désirabilité modérée est un sous préordre des préordres induits par les indices de Banzhaf (1965) et de Shapley (1954). Les résultats les plus marquant de ce travail consistaient à prouver que dans la classe des jeux simples semi complets, les préordres induits par les indices de Shapley-Shubik (1954), de Banzhaf (1965) et de Johnston (1978), la relation de faible désirabilité, de légère désirabilité, de désirabilité modérée, et de semi désirabilité coincident et pour tout jeu simple v tel que $v \in FEEBC \cap WEAKC$, pour que v appartienne à la classe des jeux semi complets, il faut et il suffit que les préordres induits par les indices de Shapley-Shubik (1954), de Banzhaf (1965) et de Johnston (1978) coincident. La question de savoir si on peut étendre ce résultat à des jeux ternaires reste un problème ouvert.

♣ Bibliographie ♣

[1]

[2] Allingham, M.G., 1975. Economic power and values of games. Zeitschrift für Nationalökonomie 35, 293-299.

[3] Andjiga, N.G., 1996. Bargaining Models of Values for TU-games, document de travail.

[4] Andjiga,N.G., Chantreuil,F., Lepelley,D., 2003. La mesure du pouvoir de vote. 111-145.

[5] Banzhaf, J.F., 1965. Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis. Rutgers Law Review 19, 317-343.

[6] Berg,S., 1999., "On Voting Power Indice and a Class of Probability Distributions with Application to EU Data", Group Decision and Negociation 8, 17-31.

[7] Berg,S.et J.E.Lane. 1997. Measurements of Voting Power : Individual and Systemic properties, mimeo.

[8] Berg, S.et D.Lepelley,1993. "Note sur le cacul de la probabilité des paradoxes du vote", Mathématiques, Informatique et sciences humaines.120, 33-48.

[9] Carreras, F., Freixas. J., 1996. Complete simple games.Mathematical social sciences 32, 139-155.

[10] Carreras, F., Freixas, J., 2008. On ordinal equivalence of power measures given by regular semivalues. Mathematical Social Sciences55, 221-234.

[11] Chakravarty S.R., 2000. Measurement of Power in Weighted Majority Games, mimeo.

[12] Coleman, J.F., 1971. Control of collectivities and the power of a collectivity to act. In : Liberman,B.(Ed.), Social Choice, Gordon and Breach, New York, USA. 269-300.

[13] Colomer, J.M., "Measuring paliamentary Deviation",1996,European Journal of Political Research. 87-101.

[14] Colomer, J.M.et F. Martinez, 1995."The Paradox of Coalition Trading", Journal of Theoretical Politics"7, 41-63.

[15] Dahl, R.A., 1957, the concept of power, behavioral Science 1, 10-20.

[16] Deegan, J. et E.W.Packel,1978, "A New Index of Power for Simple n-Person Games", Internional journal of Game Theory7, 113-123.

[17] Diffo Lambo, L., and J., Moulen, J.,2001. Quel pouvoir mesure-t-on dans un jeu de vote ?Mathématiques et sciences humaines. 152, 27-47.

[18] Diffo Lambo, L., Moulen, J., 2002. Ordinal equivalence of power notions in voting games. Theory and Decision 53, 313-325.

[19] Freixas, J., Marcinak, D., Pons, Monteserrat, 2012. On the ordinal equivalence of the Johnston, Banzhaf and Shapley power indices. European Journal of Operational Research 216, 367-375.

[20] Freixas, J., 2010. On the ordinal equivalence of the Shapley and Banzhaf values. International Journal of Game Theory 39, 513-527.

[21] Freixas, J., Pons, M.10. Hierachies achievable in simple games. Theory and decision 68, 393-404.

[22] Johnston, R.J., 1978. On the measurement of power : some reaction to laver Environment and Planning A 10, 907-914.

[23] Penrose, I.S., 1946. The elementary statistics of majority voting. Journal of the Royal Statistical Society 109, 53-57.

[24] Ricker,W., H., 1962. The Theory of Political Coalitions, New Haven and London, Yale University Press.

[25] Shapley,L.S., 1953. A value for n-person games. In : Tucker, A.W.(Eds), Contributions for the Theory of Game II. Princeton University Press, Princeton USA. 307-317.

[26] Shapley, L.S., Shubik M., 1954. A method for evaluating the distribution of power in a committee system, American Political Sciences Review 48, 787-792.

[27] Taylor, A.D., 1995. Mathematics and Politics Springer-Verlag, New York, USA.

[28] Taylor, A.D., Zwicker, W.S., 1999., Simple Game, Desirability Relations. Trading Pseudo-weightings, Princeton University Press, New Jersey, USA.

[29] Tomiyama, Y., 1987. Simple Game, Voting game, Voting representation and ordinal power equivalence, International Journal on Policy and information 11, 67-75.