RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1
****
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

ÉQUILIBRE DE NASH ET OLIGOPOLE DE COURNOT

Mémoire de D.I.P.E.S II de Mathématiques

Présenté par :

OMBOUDOU TSALA Eugène Thierry

Matricule : 14Y459

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Pr MOYOUWOU Issofa

Maître de conférences

École Normale Supérieure, Université de Yaoundé 1

Année Académique 2018-2019

Université de Yaoundé 1

École Normale Supérieure de Yaoundé

Département de Mathématiques

Mémoire de DIPES 2

ÉQUILIBRE DE NASH

ET

OLIGOPOLE DE COURNOT

Présenté par :

OMBOUDOU TSALA Eugène Thierry

Matricule : **14Y459**

Licence en Mathématiques

Sous la direction de :

Pr. MOYOUWOU ISSOFA

Maître de conférences

École Normale Supérieure, Université de Yaoundé 1

Année Académique :**2018-2019**

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce mémoire à ma maman NGAH MENOUNGA VICTORINE veuve TSALA DIEUDONNÉ

✠ Remerciements ✠

J'adresse ici mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont porté jusqu'à présent par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements, leurs aides et leurs reproches. Ma profonde reconnaissance va tout d'abord :

- ♣ À Dieu, Seigneur de l'univers, pour son amour, sa miséricorde, sa bonté et pour la protection qu'il m'a accordée particulièrement durant tout mon cursus scolaire et durant ces cinq années passées à l' École Normale Supérieure de Yaoundé.
- ♣ À mon encadreur, **Professeur MOYOUWOU Issofa** qui a de bon gré accepté de diriger ce travail. Vous vous êtes révélé réellement présent surtout ouvert et n'avez ménagé aucun effort pour l'aboutissement de ce travail.
- ♣ À tous les enseignants de l' École Normale Supérieure, pour les enseignements et le suivi qu'ils m'ont apportés durant ces cinq années passées dans cette prestigieuse école.
- ♣ À toute la grande famille **Tsala Dieudonné**, plus particulièrement **Menounga Vincent de Paul** qui a toujours été comme un père pour moi, **Essama Tsala Ruphine, Mvondo Tsala Daniel, Adzoa Tsala Séverin**, j'en oublie, pour votre présence et votre soutien. Sans vous ce travail ne saura exister, je vous remercie sincèrement.
- ♣ À ma maman pour tout son amour, sa protection et son soutien sans faille qu'elle m'accorde. Que Dieu te bénisse.
- ♣ À tous mes camarades de promotion, pour l'esprit d'équipe qui n'a cessé de régner au cours de nos années passées à l'École Normale Supérieure, plus particulièrement à **Ayiagnigni Mohamed Elkatib** pour ses conseils, sa vision qui ont permis d'améliorer ce travail.
- ♣ À tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail et dont les noms ne figurent pas.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en référence et en bibliographie.

Signature du candidat

OMBOUDOU TSALA EUGÈNE THIERRY

✠ Résumé ✠

L'un des oligopoles les plus souvent modélisés en théorie des jeux est certainement celui de Cournot. Les jeux obtenus mettent en interaction des firmes qui se font une concurrence sur les quantités d'un bien donné à produire sur un marché. Nous étudions dans ce mémoire, en compte rendu de lecture, l'existence et la détermination des équilibres de Nash dans les jeux stratégiques obtenus. Pour y arriver, nous présentons un aperçu des jeux non coopératifs mis sous une forme dite normale. Notre travail s'intéresse non seulement aux cas des demandes linéaires ; mais aussi aux cas des demandes non linéaires.

Mots clés : Oligopole de Cournot, Équilibre de Nash, Firmes, Meilleure réponse, Demande.

✠ Abstract ✠

One of the most often modeled oligopolies in game theory is certainly that of Cournot. The games obtained consist in some interaction between some firms that compete on the quantities of a given good to be produced on a market. The present work is a readings report in which we study the existence and the determination of Nash equilibria in strategic games associated with Cournot oligopolies. To achieve this, we present an overview of non-cooperative games put into the so-called normal form. Our work deals with both linear and non linear demand functions.

Keys words : Cournot Oligopoly, Nash Equilibrium, Firms, Best response, Demand.

✠ Table des matières ✠

✠ Liste des figures ✠

✠ Liste des tableaux ✠

✠ Introduction ✠

La **théorie des jeux** est la discipline mathématique qui étudie les situations d'interaction (ou jeux) où le sort de chaque participant dépend non seulement des décisions qu'il prend mais également des décisions prises par les autres participants. Les participants à un jeu sont appelés **joueurs** ; chaque joueur agit pour son propre compte selon le principe de rationalité économique c'est-à-dire chaque participant cherche à prendre les meilleures décisions pour lui-même. Fondée par Von Neumann et Morgenstern en 1944 à la parution de leur célèbre ouvrage « *Theory of Games and Economic Behavior* » , la théorie des jeux a de nombreuses applications dans la vie courante, notamment dans l'analyse des situations économiques dont les oligopoles de Cournot qui nous intéressent.

Dans son célèbre ouvrage de 1838, « *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* », Augustin Antoine Cournot (1801-1877) propose une approche formalisée de divers problèmes économiques. Après avoir insisté sur l'importance de la décroissance de la demande, Cournot expose d'abord la théorie du monopole et les problèmes de fiscalités qui y sont associés ; puis aborde le problème de duopole qui porte son nom : concurrence de deux firmes sur leurs volumes de production. On parle d'oligopole de Cournot en présence de plus de deux firmes. La mise sous forme normale de ces interactions permet de rechercher les équilibres de Nash : combinaison de choix de production individuelle telle qu'aucune firme n'ait plus intérêt à dévier de façon unilatérale. Notre travail consiste à rappeler les généralités sur les jeux sous forme normale ; puis en guise d'application, à étudier l'existence et la détermination des équilibres de Nash dans un oligopole de Cournot . Nous avons fait l'effort d'aller au delà des cas classiques où les fonctions de demande sont linéaires pour nous intéresser aussi aux cas des fonctions de demande non linéaires.

Notre travail est organisé en deux chapitres et chaque chapitre est subdivisé en partie. Au premier chapitre, nous présentons les généralités sur les jeux sous forme normale à la première partie qui permettent de définir et de caractériser les équilibres de Nash développés à la deuxième partie. Au deuxième chapitre, nous présentons d'abord les notions de marché, d'oligopole, de demande et de prix ; ensuite nous rappelons certaines notions d'analyse qui nous sont utiles. Après avoir décrit l'oligopole de Cournot, nous nous attelons à caractériser et à déterminer les équilibres de Nash correspondants.

★ ★ Chapitre Un ★ ★

JEUX SOUS FORME NORMALE

1.1 Généralités

La théorie des jeux met en interaction (jeu) des agents appelés joueurs, chaque joueur dispose d'un ensemble d'actions ou stratégies. Ce qu'un joueur reçoit dépend non seulement de ses actions, mais aussi de celles des autres joueurs . Le jeu est dit coopératif si les joueurs peuvent se passer des accords de coopérations. Dans le cas contraire, on parle de jeu non coopératif. Nous nous limitons aux jeux non coopératifs.

1.1.1. Notion de jeu sous forme normale

Définition 1.1.1 (Jeu sous forme normale)

.

Un jeu sous forme normale est la donnée d'un triplet $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ où

- N est un ensemble fini et non vide dont les éléments sont appelés joueurs ; par défaut $N = \{1, 2, ..., n\}$;
- $\forall i \in N$, A_i représente l'ensemble des stratégies pures du joueur i ;
- $\forall i \in N$, u_i : $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application appelée fonction d'utilités (de gains ou de paiements) du joueur i ;

  Tout $a = (a_i)_{i\in N} \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ est appelé profil de stratégies pures.

Le jeu G est dit fini si A_i est fini pour tout $i \in N$.

Notation 1.1.1. On pose $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ et pour tout $a = (a_i)_{i\in N} \in A$,

- a_i est la stratégie du joueur i ;
- $a_{-i} = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$ le profil stratégique de tous les joueurs à l'exception du joueur i ;
- $A_{-i} = A_1 \times A_2 \times ... \times A_{(i-1)} \times A_{i+1} \times ... \times A_n$ l'ensemble de tous les profils stratégiques des joueurs à l'exception de i.

Exemple 1.1.1. On considère deux acheteurs 1 et 2 pour un lot aux enchères, comprenant deux biens identiques. La valeur de ce lot pour un joueur i est v_i. Le joueur ayant la plus grosse enchère sous pli fermé gagne le lot et paye sur la base de la seconde plus grosse enchère. En cas d'enchères égales, chacun obtient un bien du lot et à la moitié de la valeur proposée.

Formalisation du jeu

- $N = \{1, 2\}$
- $A_1 = A_2 = \mathbb{R}_+$
- Les fonctions de gains de chaque joueur :

$$\begin{array}{rccl} u_1 : & A_1 \times A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a_1, a_2) & \longrightarrow & u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} v_1 - a_2 & \text{si } a_1 > a_2 \\ \dfrac{v_1 - a_1}{2} & \text{si } a_1 = a_2 \\ 0 & \text{si } a_1 < a_2 \end{cases} . \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} u_2 : & A_1 \times A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a_1, a_2) & \longrightarrow & u_2(a_1, a_2) = \begin{cases} v_2 - a_1 & \text{si } a_1 < a_2 \\ \dfrac{v_2 - a_1}{2} & \text{si } a_1 = a_2 \\ 0 & \text{si } a_1 > a_2 \end{cases} . \end{array}$$

La situation des enchères ci-dessus décrite peut être vue comme le jeu sous forme normale $G = (N, (A_i)_{i=1,2}, (u_i)_{i=1,2})$.

Exemple 1.1.2. Représentation d'un jeu sous forme normale à deux joueurs

– Il y a deux joueurs : $N = \{1, 2\}$;

– Le joueur 1 a pour stratégies Haut (ligne H) ou Bas (ligne B) ; ce qui est noté :$A_1 = \{H, B\}$;

– Le joueur 2 a pour stratégies Gauche (colonne G) ou Droite (colonne D), on note alors : $A_2 = \{G, D\}$;

– Les paiements, c'est-à-dire u_1 et u_2, sont donnés dans le tableau suivant :

Table 1.1 – Jeu 1

1/2	G	D
H	(1,1)	(3,0)
B	(0,3)	(0,0)

Dans chaque cellule correspondant à un profil, on trouve un couple de réels : la première composante donne le paiement du joueur 1 et la seconde celui du joueur 2. Par exemple, dans la case (H ; D), se trouve le couple (3 ; 0) : cela signifie que $u_1(H; D) = 3$ et que $u_2(H; D) = 0$.

En théorie des jeux on suppose que chaque joueur est rationnel : il agit pour ne pas détruire ses intérêts ; mais les maximiser si possible. On suppose aussi que la rationalité et la connaissance des règles du jeu sont des connaissances communes aux joueurs. Dans un tel contexte peut-on prévoir l'issue du jeu ?

1.1.2. Stratégies dominantes et équilibres

Définition 1.1.2

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale. Soient $i \in N$ et $\gamma_i, \delta_i \in A_i$.

– δ_i domine (faiblement) γ_i si :
$$\forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\gamma_i, a_{-i}) \leq u_i(\delta_i, a_{-i})\ et\ \exists l_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\delta_i, a_{-i}) > u_i(\gamma_i, l_{-i})$$

– La stratégie δ_i est dominée s'il existe une autre stratégie $t_i \in A_i$ qui la domine ;

– δ_i domine strictement γ_i si : $\forall a_{-i} \in A_{-i}, \quad u_i(\gamma_i, a_{-i}) < u_i(\delta_i, a_{-i})$;

– δ_i est dominante si $\forall a_i \in A_i$, $\forall a_{-i} \in A_{-i}, \quad u_i(a_i, a_{-i}) \leq u_i(\delta_i, a_{-i})$;

– δ_i est strictement dominante si $\forall a_i \in A_i$, $\forall a_{-i} \in A_{-i}, \ \ u_i(a_i, a_{-i}) < u_i(\delta_i, a_{-i})$.

Lorsqu'un joueur dispose d'une stratégie dominante, on peut anticiper par rationalité qu'il choisira cette stratégie ou une autre stratégie dominante. En faite, une stratégie dominante garantit en toute circonstance un gain maximal. C'est cette idée qui est à l'origine de la notion d'équilibre définie ci-dessous.

Définition 1.1.3

Un profil $\delta = (\delta_i)_{i\in N}$ est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout $i \in N$, δ_i est une stratégie dominante du joueur i.

Notation 1.1.2. On note $D_i(G)$ l'ensemble des stratégies dominantes du joueur i et $\overline{D}_i(G)$ l'ensemble des stratégies non dominées du joueur i.

Remarque 1.1.1. Il est clair que lorsqu'il existe une stratégie dominante, un joueur a toujours intérêt à la jouer, puisqu'elle maximise son gain indépendamment de ce que font les autres.

Exemple 1.1.3. On considère le jeu sous forme normale suivant :

TABLE 1.2 – jeu 2

1/2	A	B
C	(3,1)	(1,1)
D	(1,3)	(0,2)

La stratégie D du joueur 1 est strictement dominée par la stratégie C. En ce qui concerne le joueur 2, la stratégie A domine la stratégie B. On a $D_1(G) = \{C\}$ et $D_2(G) = \{A\}$. Ce jeu admet alors un unique équilibre en stratégies dominantes donné par (C, A).

Notation 1.1.3. Dans un jeu sous forme normale $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$, on note : $D(G) = \prod_{i\in N} D_i(G)$ l'ensemble des équilibres en stratégies dominantes du jeu G.

1.1.3. Stratégies prudentes et stratégies fortement prudentes

Stratégies Prudentes

Définition 1.1.4 (Stratégie prudente)

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale.

On dit qu'une stratégie $a_i^* \in A_i$ est prudente pour le joueur i, si

$$\min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i^*, a_{-i}) = \max_{a_i\in A_i}\left(\min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\right).$$

Une stratégie du joueur i est prudente lorsqu'elle garantit à i, le moindre mal (parmi les pires gains que le joueur i peut avoir).

Notation 1.1.4. On notera par $P_i(G)$ l'ensemble des stratégies prudentes du joueur i.

$$a_i^* \in P_i(G) \Longleftrightarrow a_i^* \in Arg\left[\max_{a_i\in A_i}\left(\min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i})\right)\right].$$

Exemple 1.1.4. Soit le jeu sous forme normale suivant :

TABLE 1.3 – Jeu 3

1/2	b_1	b_2
a_1	$(5,0)$	$(-2,3)$
a_2	$(1,5)$	$(0,6)$
a_3	$(-3,1)$	$(7,3)$

On a :

$$\min\{u_1(a_1,b_1),u_1(a_1,b_2)\} = \min\{5,-2\} = -2$$

$$\min\{u_1(a_2,b_1),u_1(a_2,b_2)\} = \min\{1,0\} = 0$$

$$\min\{u_1(a_3,b_1),u_1(a_3,b_2)\} = \min\{-3,7\} = -3.$$

Ainsi, $\max_{a_i\in A_i}(\min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_1(a_i,a_{-i})) = \max\{-2,0,-3\} = 0$; donc $P_1(G) = \{a_2\}$. De même on trouve $P_2(G) = \{b_2\}$

Remarque 1.1.2. Une stratégie prudente peut être dominée, et dans certains jeux, un joueur peut posséder plusieurs stratégies prudentes. Suite au fait qu'une stratégie prudente peut être dominée, la notion suivante nous permet de corriger cette insuffisance.

Ordre lexicographique et stratégies fortement prudentes

Définition 1.1.5 (Ordre lexicographique)

Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit la relation $\leq_l$ par :

$$x \leq_l y \text{ si } \left[x = y \text{ ou } \exists k \in \{1,2,...,n\} \mid (x_k < y_k \text{ et } x_i = y_i,\ \forall i < k)\right].$$

Proposition 1.1.1

$\leq_l$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}^n$ (appelée ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$).

Preuve. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

- On a $x \leq_l x$ par définition, donc $\leq_l$ est réflexive.
- Supposons que $x \leq_l y$ et $y \leq_l x$. Montrons que $x = y$

  Si $x \neq y$, comme $x \leq_l y$ et $y \leq_l x$, alors il existe $k, l \in \{1,2,...,n\}$ tels que $(x_k < y_k$ et $x_i = y_i,\ \forall i < k)$ et $(y_l < x_l$ et $y_i = x_i,\ \forall i < l)$

* $*$ Si $l < k$, alors $y_l = x_l$. Ce qui est contradictoire.
* $*$ Si $k < l$, alors $x_k = y_k$. Ce qui est contradictoire.
* $*$ Si $k = l$, alors $x_k < y_k < x_k$. Ce qui est contradictoire.

Dans tous les cas nous avons une contradiction, donc $x = y$.

– Transitivité : soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ tels que : $x \leq_l y$ et $y \leq_l z$

$*$ Si $x = y$ alors $x \leq_l z$ car $y \leq_l z$

$*$ Si $y = z$, alors $x \leq_l z$ car $x \leq_l y$

$*$ Supposons que $x \neq y$ et $y \neq z$. Alors $x \leq_l y$ et $y \leq_l z$ impliquent qu'il existe $k, l \in \{1, 2, ..., n\}$ tels que ($x_k < y_k$ et $x_i = y_i,\ \forall i < k$) et ($y_l < z_l$ et $y_i = z_i,\ \forall i < l$)

•Si $k \leq l$, alors $\forall i < k,\ x_i = y_i = z_i$. En plus $x_k < y_k \leq z_k$, donc $x \leq_l z$.

•Si $k > l$, alors $\forall i < l,\ x_i = y_i = z_i$ et $x_l = y_l < z_l$. Ce qui implique que $x \leq_l z$.

Dans les deux cas, on a $x \leq_l z$. Donc $\leq_l$ transitive.

D'où $\leq_l$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$.

– Montrons que $\leq_l$ est totale. Pour cela, soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Prouvons que $x \leq_l y$ ou $y \leq_l x$.

Si $x = y$,alors $x \leq_l y$. Supposons que $x \neq y$, alors il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $x_i \neq y_i$.

Posons $t = \min\{k \in \{1, 2, ..., n\} \,/\, x_k \neq y_k\}$.

Si $x_t < y_t$, alors $x \leq_l y$. Si par contre $y_t < x_t$ alors $y \leq_l x$. Donc $\leq_l$ est totale.

En conclusion, $\leq_l$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}^n$.

■

Dans la suite, soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^+ \in \mathbb{R}^n$ le vecteur obtenu de x en rangeant ses composantes dans ordre croissant.

Exemple 1.1.5. On donne les vecteurs $x = (-1, -1, 0, 5)$, $y = (7, 0, 3, 8)$.
On a :$x^+ = x$ et $y^+ = (0, 3, 7, 8)$.

Définition 1.1.6 (Stratégie fortement prudente)

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale fini.

– On appelle vecteur paiement associé à la stratégie x_i du joueur i le vecteur $[x_i] = (u_i(x_i, a_{-i}))_{a_{-i}\in A_{-i}} \in \mathbb{R}^{|A_{-i}|}$;

– x_i^* est une stratégie fortement prudente du joueur i si, $\left[x_i^*\right]^+ = \max\limits_{\leq_l}\left\{[y_i]^+, y_i \in A_i\right\}$.

Où $[y_i]^+$ est le vecteur paiement de y_i en rangeant ses coordonnées par ordre croissant.

Notation 1.1.5. L'ensemble des stratégies fortement prudentes de i est noté $FP_i(G)$.

$|A_i|$ est le cardinal de A_i.

Remarque 1.1.3. La notion de stratégie fortement prudente renforce celle de stratégie prudente en comparant les vecteurs paiements des stratégies prudentes multiples par l'ordre lexicographique.

Exemple 1.1.6. Soit le jeu sous forme normale suivant :

Table 1.4 – Jeu 4

1/2	a	b	c	d
e	$(0,-1)$	(1,2)	(2,3)	(0,4)
f	(1,2)	(0,2)	$(1,-1)$	(4,5)
g	(2,0)	(3,2)	(2,3)	(0,6)

On a : $[a]^+ = (-1,0,2)$, $[b]^+ = (2,2,2)$, $[c]^+ = (-1,3,3)$ *et* $[d]^+ = (4,5,6)$. De plus, $[a]^+ \leq_l [c]^+ \leq_l [b]^+ \leq_l [d]^+$. Donc $FP_2(G) = \{d\}$.

De même on a : $[e]^+ = (0,0,1,2)$, $[f]^+ = (0,1,1,4)$ *et* $[g]^+ = (0,2,2,3)$ *et* $[e]^+ \leq_l [f]^+ \leq_l [g]^+$. Donc $FP_1 = \{g\}$.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.2

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale fini,

1 $\forall i \in N$, $FP_i(G) \subseteq P_i(G)$ (toute stratégie fortement prudente est prudente).

2 $\forall i \in N$, $FP_i(G) \subseteq \overline{D}_i(G)$ (toute stratégie fortement prudente est non dominée).

3 $\forall i \in N$, $FP_i(G) \neq \emptyset$ (tout joueur a au moins une stratégie fortement prudente).

Preuve. 1. Soit $i \in N$,

$$\begin{aligned} a_i^* \in FP_i(G) &\Longrightarrow [a_i^*]^+ = \max_{\leq_l} \{[a_i]^+ , \ a_i \in A_i\} \\ &\Longrightarrow [a_i]^+ \leq_l [a_i^*]^+ , \ \forall a_i \in A_i \\ &\Longrightarrow \min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \leq \min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i^*, a_{-i}), \ \ \forall a_i \in A_i \\ &\Longrightarrow \min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i^*, a_{-i}) = \max_{a_i\in A_i} \min_{a_{-i}\in A_{-i}} u_i(a_i, a_{-i}) \\ &\Longrightarrow a_i^* \in P_i(G). \end{aligned}$$

2. Soit $i \in N$

$$\begin{aligned} a_i^* \notin \overline{D} &\Longrightarrow \exists a_i \in A_i / u_i(a_i^*, a_{-i}) \leq u_i(a_i, a_{-i}) \;\; \forall a_{-i} \in A_{-i} \text{ et } \exists l_{-i} \in A_{-i},\; u_i(a_i^*, l_{-i}) < u_i(a_i, l_{-i}) \\ &\Longrightarrow [a_i^*]^+ \leq_l [a_i]^+ \\ &\Longrightarrow a_i^* \notin FP_i(G). \end{aligned}$$

3. Découle du fait que $\leq_l$ est une relation d'ordre totale et A_i fini, $\forall i \in N$.

■

1.1.4. Stratégies mixtes et extension mixte

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale. On supposera que $N = \{1, ..., n\}$ où n désigne le nombre de joueurs.

Nous allons définir un jeu G', obtenu de G en autorisant les joueurs à choisir leur action aléatoirement, et en considérant les espérances de paiement.

Définition 1.1.7

Une distribution de probabilité sur un ensemble fini S est la donnée d'une collection $x = (x(s))_{s\in S}$ de nombres réels tels que :

– $\forall s \in S,\, x(s) \geq 0$;

– $\sum\limits_{s\in S} x(s) = 1$.

<u>**Notation**</u> **1.1.6.** Soit S un ensemble fini. On note $\Delta(S)$ l'ensemble des distributions de probabilité sur S.

En supposant que chaque joueur choisit ses stratégies au hasard et suivant une distribution de probabilité. On définit le jeu suivant :

Définition 1.1.8 (Extension mixte [13])

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale fini. On définit l'extension mixte de G comme le jeu sous forme normale $G' = (N, (A'_i)_{i\in N}, (u'_i)_{i\in N})$ où pour tout joueur $i \in N$:

1. $A'_i = \Delta(A_i)$. L'action du joueur i est une distribution de probabilité sur son ensemble de stratégies pures A_i ;
2. la fonction de paiement u'_i est définie par : $\forall (x_1, ..., x_n) \in \prod\limits_{j\in N} \Delta(A_j)$,
$u'_i(x_1, ..., x_n) = \mathbb{E}_{x_1\otimes...\otimes x_n}(u_i) = \sum\limits_{(a_1,...,a_n)\in A} x_1(a_1)...x_n(a_n)u_i(a_1...a_n)$.

On dit alors que toute distribution de probabilité sur A_i est une stratégie mixte de i.

Remarque 1.1.4. Une stratégie pure a_i du joueur i est assimilée à la stratégie mixte x telle que $x(a_i) = 1$; et $x(\alpha) = 0$, pour tout $\alpha \in A_i$ et $\alpha \neq a_i$.

Dans l'extension mixte G' de G, chaque joueur peut jouer une distribution de probabilité sur ses stratégies pures. Si chaque joueur i joue la stratégie mixte x_i sur A_i, cela définit une probabilité $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ sur A ; $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ s'appelle le produit (direct) de distributions des probabilités $(x_i)_{i\in N}$, cela signifie que les tirages aléatoires effectués par les joueurs sont indépendants. Les joueurs veulent maximiser leur espérance de paiement.

Exemple 1.1.7. Soit le jeu sous forme normale suivant, connu sous le nom de Macthing Pennies

TABLE 1.5 – Matching Pennies

1/2	(pile) G	(face) D
(pile) H	(1,-1)	(-1,1)
(face) B	(-1,1)	(1,-1)

Supposons que le joueur 1 joue la stratégie mixte $(x_1(H), x_1(B)) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et que le joueur 2 joue la stratégie mixte $(x_2(G), x_2(D)) = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$. Ceci induit la probabilité produit $x_1 \otimes x_2$ sur les cases de la matrice : (H, G) a pour probabilité $(\frac{2}{3})(\frac{2}{5}) = \frac{4}{15}$, (H, D) a probabilité $(\frac{2}{3})(\frac{3}{5}) = \frac{6}{15}$, (B, G) a probabilité $(\frac{1}{3})(\frac{2}{5}) = \frac{2}{15}$, et (B, D) a probabilité $(\frac{1}{3})(\frac{3}{5}) = \frac{3}{15}$. Le paiement espéré du joueur 1 est donc

$$u'_1(x_1, x_2) = (\frac{4}{15})1 + \frac{6}{15}(-1) + (\frac{2}{15})(-1) + (\frac{3}{15}) \times 1 = -\frac{1}{5}$$

De façon semblable,

$$u'_2(x_1, x_2) = +\frac{1}{5}$$

1.2 Équilibre de NASH

Définition 1.2.1 (Meilleure réponse)

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale. Soient $i \in N$ et $a_{-i} \in A_{-i}$.

On dit que $a_i \in A_i$ est meilleure réponse du joueur i contre a_{-i} si :

$$\forall b_i \in A_i, \quad u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i})$$

Autrement dit, a_i est meilleure réponse contre a_{-i} si le joueur i a intérêt à jouer a_i lorsque les autres joueurs jouent selon a_{-i}, c'est-à-dire :

$$u_i(a_i, a_{-i}) = \max_{b_i \in A_i}(b_i, a_{-i})$$

L'équilibre de Nash d'un jeu sous forme normale est lié à la notion de meilleure réponse définit ci-dessus.

Définition 1.2.2

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale.

Un profil $a^* \in A$ est un équilibre de Nash en stratégies pures si :

$$\forall i \in N, \quad \forall \delta_i \in A_i, \quad u_i(a^*) = u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(\delta_i, a_{-i}^*)$$

C'est équivalent à : pour tout i de N, a_i^* est meilleure réponse contre a_{-i}^*.

Interprétation

Le profil a^* est un équilibre de Nash en stratégies pures signifie que, pour tout joueur i, si les autres joueurs jouent selon a_{-i}^*, alors celui-ci a intérêt à jouer a_i^* plutôt qu'une autre stratégie b_i. On dit aussi qu'un équilibre de Nash est un profil d'actions tel qu'il n'y ait pas de déviation unilatérale (de la part d'un seul joueur), qui soit strictement profitable.

Notation 1.2.1. *$EN(G)$ représente l'ensemble des équilibres de nash en stratégies pures du jeu G.*

Exemple 1.2.1. Soit le jeu sous forme normale suivant, connu sous le nom de " la bataille des sexes".

Table 1.6 – La bataille des sexes

J_1 / J_2	D	C
D	(2,1)	(0,0)
C	(0,0)	(1,2)

On peut penser à un couple J_1 et J_2, qui veut avant tout passer la soirée ensemble, mais est en désaccord sur le thème de la soirée. Chaque joueur doit choisir entre aller Danser (D) et aller au cinéma (C), et on suppose ces choix simultanés. Les profils (D ;D) et (C ; C) sont ici tous deux les équilibres de Nash du jeu. Pour les obtenir, nous avons marqué les meilleures réponses de chaque joueur.

Par rapport à l'équilibre en stratégies dominantes, la notion d'équilibre de Nash est moins forte, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.2.1

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale. Si un profil a^* est un équilibre en stratégie dominante alors a^* est un équilibre de Nash.

$$D(G) \subseteq EN(G)$$

Preuve. Soit $a = (a_i)_{i\in N}$ un équilibre en stratégies dominantes de G. Fixons un joueur i dans N. Comme a_i est une stratégie dominante du joueur i, on a par définition :

$$\forall b_{-i} \in A_{-i} \quad \forall b_i \in A_i,\, u_i(a_i, b_{-i}) \geq u_i(b_i, b_{-i})$$

Donc en particulier pour $b_{-i} = a_{-i}$, on obtient : $\forall b_i \in A_i,\, u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i})$. Donc a_i est une meilleure réponse de i contre a_{-i}. Il en résulte que a est donc un équilibre de Nash de G. ■

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie. Par exemple, (D, D) est un équilibre de Nash de "la bataille des sexes" mais n'est pas un équilibre en stratégies dominantes.

On a le résultat suivant :

Proposition 1.2.2

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale. Si a^* est un équilibre de Nash, alors pour tout $i \in N$, la stratégie a_i^* n'est pas strictement dominée.

Preuve. Soient $a = (a_i)_{i\in N}$ un équilibre de Nash de G, $i \in N$ et $b_i \in A_i$. La stratégie a_i est meilleure réponse contre a_{-i}, donc $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i})$; donc a_i n'est pas strictement dominée par b_i. ■

Remarque 1.2.1. Les exemples suivant montrent qu'un équilibre de Nash en stratégies pures peut contenir des stratégies faiblement dominées et qu'il existe des jeux où il y'a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

Exemple 1.2.2. Soit le jeu sous forme normale suivant :

Table 1.7 – Jeu 5

1/2	G	D
H	(1,1)	(0,0)
B	(0,0)	(0,0)

(B, D) (ainsi que (H, G)) est un équilibre de Nash . Et pourtant B est faiblement dominée par H, et D est faiblement dominée par G.

Exemple **1.2.3.** On considère le jeu sous forme normale : "Matching Pennies".

Ce jeu n'a pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. En effet, H est une meilleure réponse contre G ; cependant, G ne l'est pas à H, mais plutôt à B. De même quand le joueur 2 joue la stratégie D, le joueur 1 a intérêt à jouer la stratégie B, car en jouant G, il gagne moins que ce qu'il aurait obtenu en jouant B.

La proposition suivante permet de caractériser les équilibres de Nash en stratégies mixtes.

Proposition 1.2.3

Soient $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale fini et $G' = (N; (A'_i)_{i\in N}; (u'_i)_{i\in N})$ son extension mixte. Soit $s \in A' = \Delta(A)$ un profil de stratégies mixtes, on a l'équivalence suivante :

$$s \in EN(G') \Leftrightarrow \forall i \in N, \forall a_i \in A_i \text{ tel que } s_i(a_i) > 0, u'_i(a_i, s_{-i}) = \max_{b_i\in A_i} u'_i(b_i, s_{-i})$$

Autrement dit, $s \in EN(G')$ si et seulement si les stratégies pures jouées avec une probabilité strictement positive par un joueur sont toutes des meilleures réponses contre les stratégies des autres joueurs.

<u>Preuve</u>. Soient $x \in A'$ et $i \in N$, supposons que les autres joueurs jouent selon $x_{-i} \in A'_{-i}$, et étudions les meilleures réponses du joueur i contre x_{-i}.

Posons $h(y_i) = u'_i(y_i, x_{-i}) = \sum_{a_i\in A_i} y_i(a_i)u'_i(a_i, x_i)$, $\forall y_i \in A'_i$,. h est une application affine, et $A'_i = \Delta(A_i)$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Montrons que le maximum de h est atteint en un point de A_i. Posons $\alpha = \max_{a_i\in A_i} u'_i(a_i, x_{-i})$, on a :

$$\forall y_i \in A'_i, \quad h(y_i) = \sum_{a\in A_i} y_i(a_i)u'_i(a_i, x_{-i}) \leq \sum_{a\in A_i} y_i(a_i)\alpha = \alpha.$$

Donc contre x_{-i}, le joueur i ne peut obtenir un paiement strictement plus grand que α, même s'il utilise les stratégies mixtes. Donc $\alpha = \max_{y_i\in A'_i} h(y_i)$.

Contre la stratégie x_{-i} le joueur i a toujours une meilleure réponse en stratégies pures. Soit $y_i \in A'_i$, on a :

$$y_i \in MR^i(x_i) \iff u'_i(y_i, x_{-i}) = \alpha$$

$$\begin{aligned}
&\iff \sum_{a_i \in A_i} y_i(a_i) u_i'(a_i, x_{-i}) = \alpha \\
&\iff \sum_{a_i \in A_i} y_i(a_i) \left(u_i'(a_i, x_{-i}) - \alpha\right) = 0, \text{ car } \sum_{a_i \in A_i} y_i(a_i) = 1 \\
&\iff \forall a_i \in A_i,\ y_i(a_i) \left(u_i'(a_i, x_{-i}) - \alpha\right) = 0 \text{ car } y_i(a_i) \geq 0 \ \ et \ \ u_i'(a_i, x_{-i}) - \alpha \leq 0 \\
&\iff \forall a_i \in A_i, \text{tel que } y_i(a_i) > 0,\ u_i'(a_i, x_{-i}) = \alpha
\end{aligned}$$

On obtient finalement $y_i \in MR^i(x_i)$ si et seulement si y_i est combinaison convexe des stratégies pures qui sont meilleures réponses contre x_{-i}.

Comme $x \in EN(G') \iff \forall i \in N,\ x_i \in MR^i(x_{-i})$, la proposition est démontrée. ■

Proposition 1.2.4

Soient $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale et $G' = (N; (A_i')_{i\in N}; (u_i')_{i\in N})$ son extension mixte. On a :

$$EN(G) \subset EN(G')$$

Autrement dit, si $a \in A$ est un équilibre de Nash de G, alors l'élément a vu comme un profil de stratégies mixtes, est un équilibre de Nash de G'.

Preuve. Soient $a = (a_i)_{i\in N} \in EN(G)$, $i \in N$ et $x_i = (x_i(b_i))_{b_i \in A_i} \in A_i'$. On a :

$$\begin{aligned}
u_i'(x_i, a_{-i}) &= \sum_{b_i \in A_i} x_i(b_i) u_i(b_i, a_{-i}) \\
&\leq \sum_{b_i \in A_i} x_i(b_i) u_i(a_i, a_{-i}) \\
&= 1 \times u_i(a_i, a_{-i}) = u_i'(a_i, a_{-i}) = u_i'(a)
\end{aligned}$$

Donc $u_i'(a) = \max\limits_{b_i \in A_i} u_i'(b_i, s_{-i})$ pour tout i, en appliquant la Proposition 1.2.3 on obtient le résultat. ■

1.2.1. Correspondance et théorèmes de point fixe

Nous rappelons ici des notions d'analyse qui nous sont utiles. Pour plus de détails, bien vouloir se référer à [2], à [12] ou à [13].

Définition 1.2.3 (Ensemble convexe)

Soit X un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel.

X est dit convexe si : $\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in X$

Cette notion nous permet de définir les notions ci-dessous. Ces notions seront d'une grande importance dans l'existence des équilibres.

Définition 1.2.4 ([2])

Soient X un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel réel, et f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dit que :

– f est quasi-concave si $\forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

– f est concave si et seulement si $\forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

– f est convexe si $\forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Remarque 1.2.2. Rappelons que :

– f quasi-concave si et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \{x \in X / f(x) \geq \alpha\}$ est convexe.

– Si f concave alors f quasi-concave.

Les notions de correspondance et de point fixe que nous présentons à présent vont nous aider à étudier l'existence des équilibres de Nash à partir de l'ensemble des meilleures réponses d'un joueur.

Définition 1.2.5 (Correspondance)

Soient X et Y deux ensembles. Une correspondance de X dans Y est une application de X dans l'ensemble $\mathscr{P}(Y)$ des parties de Y.

Notation 1.2.2.

$$\begin{array}{rccc} F: & X & \rightrightarrows & Y \\ & x & \longmapsto & F(x) \subseteq Y \end{array}$$

Le graphe de la correspondance F est alors défini par : $\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\}$.

Définition 1.2.6 (Point fixe)

Soit F une correspondance de X dans X. On dit que x est un point fixe de F si $x \in F(x)$.

Ces notions nous permettent d'énoncer le théorème suivant. Pour plus de détails, voir [12].

Théorème 1.2.7 (de KAKUTANI)

Soient X un convexe compact non vide d'un espace vectoriel euclidien, et $F : X \rightrightarrows X$ une correspondance de graphe compact telle que pour tout $x \in X$, l'ensemble $F(x)$ soit compact, convexe non vide.

Alors F admet au moins un point fixe.

1.2.2. Existence de l'équilibre de Nash

<u>**Notation**</u> **1.2.3.** Soient $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale, et $i \in N$. Pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, on note $MR^i(a_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses du joueur i contre a_{-i}. On a :

$$MR^i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i,\ u_i(a_i, a_{-i}) = \max_{b_i \in A_i} u_i(b_i, a_{-i})\}$$

Avec la convention $MR^i(a_{-i}) = \emptyset$ si $\max_{b_i\in A_i} u_i(b_i, a_{-i})$ n'existe pas.

Définition 1.2.8 (Correspondance de meilleures réponses)

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale. Étant donné un joueur i, nous définissons les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{rccc} MR^i : & A_{-i} & \rightrightarrows & A_i \\ & (a_{-i}) & \longmapsto & MR^i(a_{-i}) \end{array}$$

MR^i est la correspondance de meilleures réponses du joueur i contre a_{-i}.

$$\begin{array}{rcl} MR : \quad A & \rightrightarrows & A \\ a = (a_i)_{i\in N} & \mapsto & MR(a) = \prod_{i\in N} MR^i(a_{-i}) = \left\{b \in A, \forall i \in N\ \ b_i \in MR^i(a_{-i})\right\} \end{array}.$$

MR est la correspondance de meilleures réponses du jeu G.

Par définition, un équilibre de Nash est un profil d'actions $a = (a_i)_{i\in N}$ tel que pour tout $i \in N$, a_i est meilleure réponse contre a_{-i}. On a le résultat suivant.

Proposition 1.2.5

Soit $a \in A$. a est un équilibre de Nash de G si et seulement si a est un point fixe de la correspondance de meilleure réponse de G.

$$a \in EN(G) \iff a \in MR(a).$$

Preuve. Soit $a^* \in A$.

$$\begin{aligned} a^* \in EN(G) &\iff \forall i \in N,\ \forall a_i \in A_i,\ u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \\ &\iff \forall i \in N,\ \ a_i^* \in MR^i(a_{-i}^*) \\ &\iff a^* \in MR(a^*) \end{aligned}$$

■

Exemple 1.2.4. Soit le jeu sous forme normale suivant :

Table 1.8 – Jeu 6

1/2	G	D
H	(3,4)	(1,1)
B	(0,2)	(2,0)

$MR^1(G) = \{H\}$, $MR^1(D) = \{B\}$, $MR^2(H) = G$ et $MR^2(B) = \{G\}$. Donc : $MR(H, G) = \{(H, G)\}$ c'est-à-dire, $(H, G) \in MR(H, G)$. D'où $(H, G) \in EN(G)$.

Nous présentons maintenant quelques grands théorèmes donnant l'existence de l'équilibre de Nash. Pour plus de détails, bien vouloir consulter [13].

Théorème 1.2.9 (Glicksberg-1952)

Soit $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ un jeu sous forme normale avec $N = \{1, ..., n\}$. On suppose que :

1. Pour tout $i \in N$, A_i est un ensemble convexe compact non vide d'un espace vectoriel euclidien ;
2. Pour tout $i \in N$, u_i continue ;
3. Pour tout $i \in N$, pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, l'application $\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a_i & \longmapsto & u_i(a_i, a_{-i}) \end{array}$ est quasi-concave.

   Alors, G admet au moins un équilibre de Nash .

   De plus, l'ensemble des équilibres de Nash de G est un fermé de A. L'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de G est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Notons $A = \prod_{i\in N} A_i$ l'ensemble des profils d'actions. Comme $\forall i \in N$, A_i est un sous-ensemble d'un espace vectoriel euclidien que nous nommons E_i. Alors A est aussi un sous-ensemble d'un espace vectoriel euclidien E produit des E_i. De plus chaque A_i est convexe compact et non vide. Donc A est convexe compact non vide, comme produit des convexes compacts non vide.

Soient $i \in N$ et $a_{-i} \in A_{-i}$. L'ensemble des meilleures réponses du joueur i contre a_{-i} est :

$$MR^i(a_{-i}) = \left\{a_i \in A_i, u_i(a_i, a_{-i}) = \max_{b_i\in A_i} u_i(b_i, a_{-i})\right\}$$

Comme $\forall i \in N$, u_i est continue et A_i compact alors $MR^i(a_{-i})$ est un fermé non vide de A_i, donc compact car A_i compact. Remarquons que $MR_i(a_{-i}) = \left\{a_i \in A_i, u_i(a_i, a_{-i}) \geq \max_{b_i\in A_i} u_i(b_i, a_{-i})\right\}$, donc $MR^i(a_{-i})$ est convexe, d'après l'hypothèse 3). D'où $MR^i(a_{-i})$ est un convexe compact non vide. Pour $a \in A$, $MR(a) = \prod_{i\in N} MR_i(a_{-i})$ est donc convexe compact non vide comme produit de convexe compact non vide.

Il reste à montrer que le graphe de MR est un fermé de $A \times A$. Considérons une suite $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans le graphe de MR et qui converge vers $(a, b) \in A \times A$. Montrons que (a,b) est un élément du graphe de MR.
Pour tout $n \geq 0$, notons $a_n = (a_n^i)_{i\in N}$ et $b_n = (b_n^i)_{i\in N}$. On a par définition de (a_n, b_n) est un élément du graphe de MR, donc $b_n \in MR(a_n)$. D'où $\forall i \in N$, $b_n^i \in MR^i(a_n^{-i})$. Ainsi,

$$\forall i \in N, \forall c_i \in A_i, u_i(b_n^i, a_n^{-i}) \geq u_i(c_i, a_n^{-i}).$$

L'application u_i étant continue, on a par passage à la limite quand n tend vers l'infini :

$$\forall i \in N, \forall c_i \in A_i, u_i(b_i, a_{-i}) \geq u_i(c_i, a_{-i}).$$

Ce qui signifie que pour tout joueur i, b_i est meilleure réponse contre a_{-i}. Donc $b \in MR(a)$, et finalement le graphe de MR est fermé. Comme $A \times A$ est compact, le graphe de MR est compact. On peut donc appliquer le théorème de `Kakutani` à MR. On obtient l'existence d'un élément $a^* \in A$ tel que $a^* \in MR(a^*)$. Par la proposition 1.2.5, a^* est un équilibre de Nash de G.
On a :

$$EN(G) = \{a \in A, a \in MR(a)\} = \{a \in A, (a, a) \in \text{graphe de MR}\}$$

Comme le graphe de MR est fermé dans $A \times A$, et que l'application : $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \times A \\ a & \longmapsto & (a, a) \end{array}$ est continue, on obtient que $EN(G)$ est fermé dans A, donc $EN(G)$ est compact.

Notons $u = (u_i)_{i\in N}$, $\forall i \in N, u_i$ continue donc u continue. L'ensemble des paiements d'équilibres de `Nash` de G est $\{u(a), a \in EN(G)\} = u(EN(G))$. Comme $EN(G)$ est compact, $u(EN(G))$

l'est également comme image d'un compact par une application continue. L'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de G est donc compact. ∎

Théorème 1.2.10 (Nash-1950)

Tout jeu sous forme normale fini admet au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes. De plus, l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes, ainsi que l'ensemble des paiements de ces équilibres, sont des ensembles compacts.

Preuve. Considérons $G = (N; (A_i)_{i\in N}; (u_i)_{i\in N})$ et $G' = (N; (\Delta(A_i))_{i\in N}; (u'_i)_{i\in N})$ son extension mixte. Supposons que $\forall i \in N, \ \ A_i$ fini. On a :

$$\Delta(A_i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{|A_i|}, \forall a \in A_i, x(a_i) \geq 0 \ \ et \ \ \sum_{a\in A_i} x(a) = 1 \right\}.$$

Comme A_i fini, alors $\mathbb{R}^{|A_i|}$ est un espace vectoriel euclidien.

On a $\forall a \in A_i$, $\forall x \in \Delta(A_i)$ $x(a) \in [0, 1]$. Donc $\Delta(A_i)$ borné. De plus $\Delta(A_i)$ est un fermé de $\mathbb{R}^{|A_i|}$.

D'où $\Delta(A_i)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^{|A_i|}$.

Soient $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in \Delta(A_i)$. Posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. $\forall a \in A_i$ On a : $z(a) = \lambda x(a) + (1 - \lambda)y(a) \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in A_i} z(a) &= \sum_{a\in A_i} (\lambda x(a) + (1-\lambda)y(a)) \\
&= \lambda \sum_{a\in A_i} x(a) + (1-\lambda) \sum_{a\in A_i} y(a) \\
&= \lambda + (1-\lambda), \ \ car \ \ x, y \in \Delta(A_i) \\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $z \in \Delta(A_i)$ et donc $\Delta(A_i)$ est convexe. Il en résulte que $\Delta(A_i)$ est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^{|A_i|}$.

On a $\forall i \in N$, u'_i est une forme multilinéaire donc u'_i continue.

Soient $x_{-i} \in \Delta(A_{-i})$ et h l'application définie de $\Delta(A_i)$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\forall x_i \in \Delta(A_i)$

$$\begin{aligned}
h(x_i) &= u'_i(x_i, x_{-i}) \\
&= \sum_{a_i\in A_i} x_i(a_i)h(a_i)
\end{aligned}$$

est affine, donc concave, donc quasi-concave.

Par application du Théorème de Glicksberg à G', on obtient les résultats voulus. ∎

Exemple 1.2.5. Reprenons le jeu sous forme normale : "Matching Pennies."

On a $A_1 = \{H, B\}$ et $A_2 = \{G, D\}$. Soient $s = (\alpha, 1-\alpha) \in \Delta(A_1)$ et $t = (\beta, 1-\beta) \in \Delta(A_2)$. Nous identifions s à α et t à β. On a :

$$\begin{aligned} u_1'(s,t) &= \alpha\beta - \alpha(1-\beta) - (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta) \\ &= 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = 2(2\beta-1)\alpha - (2\beta-1) \\ &\text{et} \\ u_2'(s,t) &= -\alpha\beta + \alpha(1-\beta) + (1-\alpha)\beta - (1-\alpha)(1-\beta) \\ &= -4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta - 1 = 2(1-2\alpha)\beta - (1-2\alpha) \end{aligned}$$

Nous allons déterminer les équilibres de `Nash` en utilisant deux méthodes :

Méthode 1

On remarque que le paiement espéré du joueur 1 étant donné que le joueur 2 joue la stratégie mixte associée à β (c'est-à-dire$(\beta, 1-\beta)$) est croissant par rapport à α si $(2\beta-1) > 0$, décroissant par rapport à α si $(2\beta - 1) < 0$ et nul si $2\beta - 1 = 0$. Ainsi nous définissons MR^1 par :

$$MR^1(t) = \begin{cases} \{0\} & si \quad 2\beta - 1 < 0 \\ [0,1] & si \quad 2\beta - 1 = 0 \\ \{1\} & si \quad 2\beta - 1 > 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de MR^1 est :

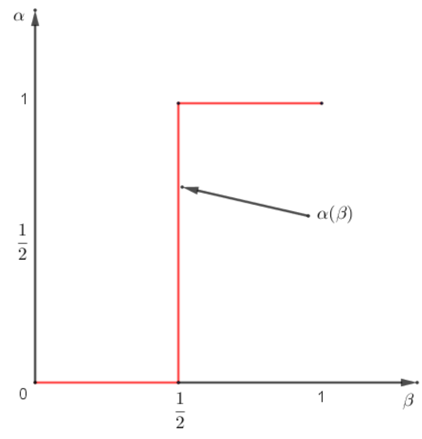

FIGURE 1.1 – Graphique MR^1

D'une façon analogue, on définit MR^2 par :

$$MR^2(s) = \begin{cases} \{0\} & si \quad 1 - 2\alpha < 0 \\ [0,1] & si \quad 1 - 2\alpha = 0 \\ \{0\} & si \quad 1 - 2\alpha > 0 \end{cases}$$

La figure ci-dessous donne le graphique de MR^2 obtenu par la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale.

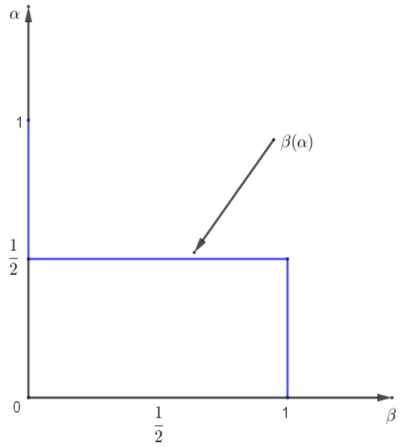

FIGURE 1.2 – Graphique MR^2

En combinant les deux figures, on obtient l'équilibre de Nash au point d'intersection des deux graphes.

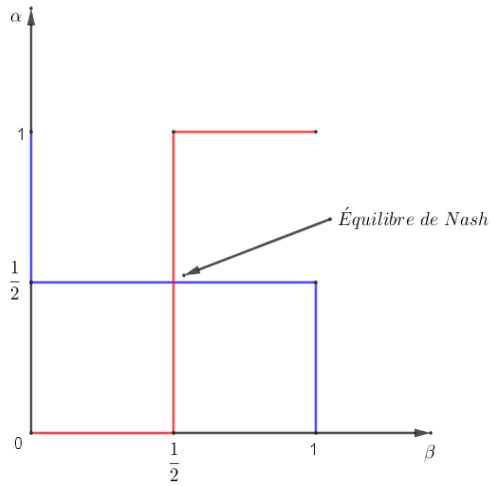

FIGURE 1.3 – Équilibre de Nash en stratégies mixtes

Ainsi $EN(G') = \left\{\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right\}$

Méthode 2

Pour trouver l'équilibre de Nash en stratégies mixtes de ce jeu, on doit avoir pour chaque joueur l'égalité des paiements espérés des stratégies pures entrant avec probabilité strictement positive dans sa stratégie mixte étant donnée la stratégie mixte des autres joueurs. Pour le joueur 1, cette propriété implique pour $t = (\beta, 1 - \beta)$ une stratégie mixte du joueur 2 que :

$$u_1(H, t) = u_1(B, t) \iff (1)\beta + (-1)(1 - \beta) = (-1)\beta + (1)(1 - \beta)$$

C'est-à-dire : $2\beta - 1 = 1 - 2\beta$, donc $\beta = \dfrac{1}{2}$.

De même, pour une stratégie mixte $s = (\alpha, 1-\alpha)$ du joueur 1, on a :

$$u_2(s, G) = u_2(s, D) \iff \alpha(-1) + (1-\alpha)(1) = \alpha(1) + (1-\alpha)(-1)$$

C'est-à-dire : $-2\alpha + 1 = -1 + 2\alpha$, donc $\alpha = \dfrac{1}{2}$

D'où nous retrouvons l'équilibre de Nash en stratégies mixtes obtenu par la méthode 1.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

OLIGOPOLE DE COURNOT

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un type de jeux connus sous le nom d'oligopole de Cournot. Pour y arriver, nous donnons un bref aperçu des concepts économiques qui sous-tendent les oligopoles de Cournot. Après avoir formalisé un oligopole de Cournot sous forme d'un jeu sous forme normale, nous donnons des conditions suffisantes d'existence des équilibres de Nash. Pour illustration, nous considérons deux cas particuliers.

2.1 Marché et oligopoles

2.1.1. Notion de marché

Définition 2.1.1 (Marché)

Un **marché** désigne un lieu de confrontation entre **l'offre** des vendeurs et la **demande** des acheteurs d'un bien ou d'un service qui permet de déterminer le **prix** d'échange de ce bien ou de ce service et les quantités qui seront échangées.

Le marché peut exister physiquement (le marché du poisson, le marché des actions - la Bourse) ou avoir une existence virtuelle (e-commerce).

Pour certains produits, le marché est dominé par une place dans laquelle le volume de transactions est particulièrement important.

Quelques caractéristiques des marchés

Un marché met en présence des vendeurs et des acheteurs. Il porte sur des produits parfaitement identifiés par leurs caractéristiques, qualités, calibres, origines ... Le marché dépend en plus des quantités échangées (marché de gros, de demi-gros, de détails) et des circuits de distribution (circuits courts ou longs).

La description d'un marché à un moment donné comporte plusieurs facteurs :

- La liste des produits concernés et leur degré d'homogénéité. Lorsque les produits sont hétérogènes, un produit particulier servira souvent de référence, les autres seront alors jugés par rapport à cette référence ;
- La liste des vendeurs : vendeurs locaux ou éloignés, nombreux ou rares, vendeurs actuels et vendeurs potentiels ;

– La liste des acheteurs, actuels et potentiels, leur nombre ;
– Les délais de livraison des biens : marché au comptant (physique) ou marché à terme ;

Le fonctionnement d'un marché dépend principalement du nombre d'acheteurs et de vendeurs présents sur ce marché.

TABLE 2.1 – Typologie des marchés

Vendeur / Acheteur	**Un grand nombre**	**Quelques-uns**	**Un seul**
Un grand nombre	Concurrence	Oligopole	Monopole
Quelques-uns	Oligopsone	oligopole bilatéral	Monopole contrarié
Un seul	Monopsone	Monopsone contrarié	Monopole bilatéral

Source : voir [17]

En science économique, il existe deux structures de marché : les marchés concurrentiels basés sur la concurrence pure et parfaite et les marchés de concurrence imparfaite basés sur la concurrence oligopolistique.

Exemple 2.1.1. On peut citer le marché de communication électronique, le marché des cahiers ; le marché des vivres...

2.1.2. Notion d'oligopole

Ici, nous nous référons à [19] ; pour donner une définition de la notion d'oligopole.

Définition 2.1.2 (Oligopole)

Selon le Larousse en ligne, un marché en oligopole est un marché où opère un petit nombre de firmes face à une grande demande.

Exemple 2.1.2. [Oligopole au Cameroun] De façon empirique, certains oligopoles sont apparents au Cameroun :

– Le marché des cahiers est dominé par : SAFCA, Entre Nous Jeunes et Le vaillant ; on dit que ce marché constitue un tripole ;
– Le marché de communication électronique,Orange, MTN, Nexttel et CAMTEL sont en situation quadripolistique.

En situation d'oligopole, les vendeurs peuvent chercher à intervenir sur le marché en construisant une stratégie qui tient compte des réactions possibles des concurrents. Pour prendre des parts de marché, par exemple, une entreprise cherchera à déterminer les réactions possibles de ses concurrents, avant d'engager une action (baisse de prix, promotions...). Chaque firme détient un pouvoir du marché, mais doit tenir compte de celui de ses concurrents. Elles doivent adopter un comportement de type stratégique. On distingue deux types d'oligopoles : les oligopoles coopératifs et les oligopoles non coopératifs.

Dans la suite de notre travail, nous allons nous limiter à l'étude des oligopoles non coopératifs, plus précisément l'oligopole de `Cournot`.

2.2 Demande et prix

Nous donnons dans cette section à partir de [6] et de [16], quelques concepts économiques qui peuvent influencer les échanges dans un oligopole.

2.2.1. Demande sur le marché

La demande se ramène souvent à la volonté d'acheter un produit. Ainsi, la demande totale du marché correspond au total de ce que les gens qui composent ce marché souhaitent acquérir.

Définition 2.2.1 (Demande)

La demande est un principe économique qui exprime l'envie du consommateur et sa disposition à payer un certain prix pour un bien ou un service.

Selon la loi de la demande, la demande des consommateurs (ou des acheteurs), soit la quantité totale de produits qu'ils sont prêts à acheter, est une fonction décroissante du prix car elle augmente lorsque le prix diminue et elle diminue lorsque le prix augmente. Pour plus de détails, bien vouloir consulter [16].

Fonction de demande

Nous considérons les préférences associées aux fonctions d'utilité ayant la forme :

$$U(M, q_1, ..., q_n) = M + \alpha(q_1, ..., q_n) \tag{2.1}$$

où :

– M représente l'utilité indirecte associée aux quantités consommées des autres biens 1,2,..., $n-1$ et n. M est assimilable au numéraire ;

– $q_1, ..., q_n$ sont les quantités des biens consommés sur le marché ;

– La fonction $\alpha(.)$ représente l'utilité de la consommation des différents biens.

Les quantités $q_1, ..., q_n$ que peut acquérir un consommateur dépendent de son budget. La contrainte budgétaire d'un consommateur de revenu R est :

$$R = p_M M + \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \tag{2.2}$$

où p_i est le prix du bien i et $p_M = 1$ le prix du numéraire.

En reportant cette expression dans la fonction d'utilité (2.1) , on obtient :

$$U(M, q_1, ..., q_n) = R - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i + \alpha(q_1, ..., q_n) \tag{2.3}$$

En maximisant son utilité par rapport aux quantités à consommer, et en supposant que l'optimum est atteint lorsque :

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n) = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

On a, sous réserve de la régularité de $\alpha(.)$:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n) = -p_i + \frac{\partial \alpha}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n) = 0$$

Ce qui donne :

$$p_i = \frac{\partial \alpha}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n)$$

Le prix du bien apparaît donc comme son utilité marginale. Voir [6]

Un lien est ainsi établi entre ce qui est consommé avec le prix. Pour obtenir les fonctions de demande, il faut inverser les relations précédentes. C'est-à-dire exprimer les quantités q_i en fonction des prix :

$$q_i = D_i(p_1, ..., p_n), \ \forall i = 1, ..., n \tag{2.4}$$

où D_i est la fonction qui donne la quantité consommée en fonction des prix.

2.2.2. Coûts fixes et coûts marginaux

On distingue plusieurs coûts dans la production d'un bien. Pour les définitions ci-dessous, nous nous référons à [20].

Définition 2.2.2 (Coût fixe- Coût variable)

– Un coût fixe est un coût qui ne varie pas proportionnellement au volume d'activité.
– Les Coûts Variables sont les coûts des facteurs variables, c'est-à-dire des facteurs de production dont les quantités varient avec la quantité produite.

Notation 2.2.1. Nous notons CF pour abréger le coût fixe d'une production de biens et CV les coûts variables correspondants.

Il s'agit par exemple des coûts des facteurs fixes à court terme tels que les loyers, les charges locatives, les assurances, les frais liés aux remboursements d'emprunts, certains salaires... Les coûts fixes ne dépendent pas des quantités produites. Par contre les coûts variables sont donc fonction des quantités produites.

Exemple 2.2.1. Un exemple de coût variable de production d'une firme de quantité q est :

$$CV(q) = (15q)^{\frac{1}{6}} + q^{1,5}.$$

Définition 2.2.3 (Coût total)

Le coût total (CT) est la somme des coûts de tous les facteurs de productions utilisés. On a :

$$CT(q) = CF + CV(q)$$

Les coûts marginaux

Le coût marginal est défini différemment selon la nature de la production (discrète ou continue). Voir [20], pour plus de détails.

Définition 2.2.4 (Coût marginal)

– Pour une production discrète, le coût marginal d'une unité est le taux d'accroissement de la fonction coût CT entre cette unité et la précédente.

$$C_m(q) = CT(q) - CT(q-1)$$

– Pour une production continue, si la production est dérivable, le coût marginal en est le nombre dérivé :

$$C_m(x) = CT'(x)$$

Exemple 2.2.2. Soit la fonction de coût total suivant : $CT(q) = 10 + (15q)^{\frac{1}{6}} + q^{1,5}$ d'une production discrète.
La fonction de coût marginal est donnée par :

$$\begin{aligned} Cm(q) &= 10 + (15q)^{\frac{1}{6}} + q^{1,5} - 10 - (15(q-1))^{\frac{1}{6}} - (q-1)^{1,5} \\ &= (15q)^{\frac{1}{6}} + q^{1,5} - (15(q-1))^{\frac{1}{6}} - (q-1)^{1,5} \end{aligned}$$

Dans le but de caractériser l'équilibre de Cournot-Nash, nous rappelons certaines notions utiles d'analyse.

2.3 Maximum, minimum : Conditions d'existence

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et théorèmes relatifs aux extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, qu'on peut trouver dans [2].

Définition 2.3.1

Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{D},\ |f(x)| \leq M$;
- f admet un maximum (resp. minimum) global en $x_0 \in \mathcal{D}$ si :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq f(x_0)\ (resp.\ f(x) \geq f(x_0))$$

- f admet un maximum (resp. minimumm) local en $x_0 \in \mathcal{D}$, s'il existe une boule de rayon $r \neq 0$, $B(x_0, r)$ telle que : $\forall x \in B(x_0, r) \bigcap \mathcal{D},\ f(x) \leq f(x_0)\ (resp.\ f(x) \geq f(x_0))$
- x_0 est un extrémum si f admet un maximum ou un minimum en x_0.

Étant donné un problème d'optimisation, deux questions se posent : existe-t-il des solutions ? Comment déterminer les solutions éventuelles ? Il existe des résultats qui permettent de répondre à la première question.

Théorème 2.3.2 (de WEIRSTRASS)

Soit $\mathcal{D}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f admet un maximum global et un minimum global atteints au moins une fois, autrement dit il existe $x_m \in \mathcal{D}$ et $x_M \in \mathcal{D}$ tels que :

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Définition 2.3.3

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ une matrice réelle à n lignes et à p colonnes. On appelle transposée de A et l'on note ${}^tA$ la matrice réelle à p lignes et n colonnes de terme général $b_{k,l}$ défini par :

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq p,\ \forall l,\ 1 \leq l \leq n,\ b_{k,l} = a_{l,k}$$

La matrice A est dite symétrique si, ${}^tA = A$.

Définition 2.3.4

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs scalaires dont les dérivées partielles existes en tout point de U, le gradient de f noté ∇f est défini par :

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & U \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & (\nabla f)(x) = {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right). \end{array}$$

Exemple 2.3.1. On considère

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2xy + x^2 - y^3 \end{array}$$

On a : $\nabla(f)(x,y) = (2y + 2x; 2x - 3y^2)$

Définition 2.3.5

Soient $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est deux fois différentiables sur U. Alors la matrice hessienne de f au point x_0 notée $\mathcal{H}f(x_0)$ est définie par :

$$\mathcal{H}f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors $\mathcal{H}f(x_0)$ est une matrice symétrique.

Cette définition tirée de [2], nous permettra de donner les conditions d'existence d'un extremum.

Définition 2.3.6

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. A est dite positive (resp. négative) si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXAX > 0,\ (\text{resp. } {}^tXAX < 0)$$

Remarque 2.3.1. Déterminer si $\mathcal{H}f(x_0)$ est définie négative ou positive revient à déterminer les valeurs propres de $\mathcal{H}f(x_0)$.

1. Si toutes les valeurs propres de $\mathcal{H}f(x_0)$ sont positives, alors $\mathcal{H}f(x_0)$ est définie positive.

2. Si toutes les valeurs propres de $\mathcal{H}f(x_0)$ sont négatives, alors $\mathcal{H}f(x_0)$ est définie négative.
3. Si toues les valeurs propres de $\mathcal{H}f(x_0)$ sont non nulles mais de signes différents, on dit que x_o est un point col (ou selle).

Dans le cadre d'optimisation nous rappelons certains théorèmes qui nous seront utiles.

Définition 2.3.7

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de U et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point.
On dit que x_0 est un point critique de f si $\nabla(f)(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Les théorèmes ci-dessous, présentés dans [2], donnent les conditions d'existence d'un extremum.

Théorème 2.3.8 (de Fermat : Condition nécessaire du premier ordre)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, x_0 un point de U et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point.
Si f présente un extremum local alors : $\nabla f(x_0) = 0$.

Théorème 2.3.9 (Condition du second ordre)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et x_0 un point critique de f. Alors si :

- $\mathcal{H}f(x_0)$ est définie positive (resp. négative), alors f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 ;
- f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0, alors $\mathcal{H}f(x_0)$ est définie positive (resp. négative).

2.4 Oligopole de Cournot

2.4.1. Présentation générale

L'oligopole de Cournot est un modèle économique utilisé pour décrire un marché sur lequel les entreprises sont en concurrence par rapport à leurs volumes de production. Elles décident de ces volumes indépendamment les unes des autres, et ce au même moment. Aucune firme n'a les moyens d'apprendre à l'avance la production de son concurrent. Ce concept de marché vient du mathématicien Antoine-Augustin Cournot (1801-1877), qui le théorisa en observant le comportement d'entreprises au sein d'un duopole vendant de l'eau de source, voir [4] pour plus de détails.

Cette théorie est conditionnée aux hypothèses suivantes :

- Il y'a plus d'une firme et toutes les firmes produisent un produit homogène ;
- Les firmes ne coopèrent pas ;
- Le nombre de firmes est fixe ;
- Les firmes sont en concurrence sur les quantités et non sur les prix, et choisissent leurs quantités simultanément ;
- Les entreprises sont rationnelles, et recherchent la maximisation du profit.

2.4.2. Description de l'oligopole de Cournot

Soit un marché constitué de n firmes sur lequel ces dernières se font concurrence pour offrir un bien homogène.

La fonction de demande inverse (prix sur le marché) est donnée par $p(Q)$ où $Q = \sum_{i \in N} q_i$ est la quantité totale des biens fournis sur le marché et q_i la quantité produite par la firme i.

La fonction $c_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de coût de production de q_i unités de biens par la firme i, où $A_i \subset \mathbb{R}_+$.

Définition 2.4.1 (Oligopole de Cournot)

Un oligopole de Cournot est un jeu sous forme normale $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ où :

* $N = \{1, 2, ..., n\}$ l'ensemble des firmes qui constituent l'oligopole de Cournot ;
* $A_i \subset \mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des stratégies de la firme $i \in N$. Il caractérise les valeurs de quantités admissibles que la firme i est prête à offrir sur le marché ;
* La fonction de gain ou le profit de chaque firme i est définie par :

$$\begin{aligned} u_i : \quad A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q = (q_j)_{j\in N} &\longmapsto u_i(q) = p(Q)q_i - c_i(q_i) \end{aligned}$$

où $Q = \sum_{i\in N} q_i$.

L'objectif de chaque firme i est de maximiser son profit étant donnée la production des autres firmes concurrentes.

Notation 2.4.1. On rappelle que $A = \prod_{i\in N} A_i$, $A_{-i} = \prod_{j\in N-\{i\}} A_j$ et q_{-i} est le profil stratégique des autres firmes excepté de i.

Il s'agit donc d'un modèle statique dans le sens où les firmes fixent les quantités simultanément et de manière non coopérative ; Simultanément signifie que chaque firme n'a pas encore observé les productions des autres firmes au moment de choisir la sienne ; mais qu'elle l'anticipe. Les anticipations s'effectuent sur la base de rationalité : même si une firme découvre la production des autres, elle ne changera pas la sienne.

2.5 Recherche des équilibres de Cournot-Nash

Dans la suite, pour parler d'oligopole de Cournot, nous nous référons à la Définition 2.4.1. De plus, sauf mention contraire, on suppose que p est au moins deux différentiable et c_i est au moins deux fois dérivable.

Définition 2.5.1

L'équilibre oligopolistique de Cournot-Nash est un vecteur de quantités $q^* \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u_i(q^*) = u_i(q_i^*, q_{-i}^*) = \max_{q_i\in A_i} u_i(q_i, q_{-i}^*), \quad \forall i \in N \tag{2.5}$$

Notation 2.5.1. Nous notons par la suite $ECN(G)$ l'ensemble des équilibres de Cournot-Nash du jeu G.

L'équilibre de Cournot-Nash décrit la production optimale q_i, qui maximise le profit de la firme i étant données les quantités q_{-i} produites par les autres firmes.

Définition 2.5.2 (Meilleure réponse)

Soient $i \in N$ et $q_{-i} \in A_{-i}$, on définit la meilleure réponse de la firme i notée MR^i contre q_{-i} par :

$$MR^i(q_{-i}) = \left\{ q_i^* \in A_i / u_i(q_i^*, q_{-i}) = \max_{q_i \in A_i} u_i(q_i, q_{-i}) \right\} \tag{2.6}$$

La meilleure réponse d'une firme est donc sa meilleure réponse dans un oligopole de Cournot. La condition du premier ordre est donnée par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i}(q_i, q_{-i}) = p(Q) + \frac{\partial p}{\partial q_i}(Q)q_i - c_i'(q_i) = 0, \quad \forall i \in N \tag{2.7}$$

Définition 2.5.3 (Fonction de réaction)

Soient $i \in N$ et $q_{-i} \in A_{-i}$. On appelle fonction de réaction de la firme i la fonction

$$\begin{array}{rccl} R_i: & A_{-i} & \longrightarrow & A_i \\ & q_{-i} & \longmapsto & R_i(q_{-i}) = q_i^* \end{array}$$

telle que $\dfrac{\partial u_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_{-i}) = p(Q) + \dfrac{\partial p}{\partial q_i}(Q)q_i^* - c_i'(q_i^*) = 0$ et $q_i^* \in MR^i(q_{-i})$

La fonction de réaction de la firme i est donc sa fonction de meilleure réponse dans un oligopole de Cournot.

Remarque 2.5.1. On remarque que dans certains cas R_i est une fonction implicite de q_{-i}.

Remarque 2.5.2. On suppose dans la suite que p et c_i sont continues et deux fois différentiables et que chaque firme i a un seuil limite de production, c'est-à-dire qu'il existe L_i tel que $q_i \leq L_i$, pour tout $q_i \in A_i$.

Proposition 2.5.1

Soit G un oligopole de Cournot. Si pour toute firme i, u_i est strictement concave par rapport à la variable q_i c'est-à-dire $\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2}(q_i, q_{-i}) < 0, \quad \forall q_i \in A_i$, alors $ECN(G) \neq \emptyset$

Preuve. Chaque firme i a une limite de production L_i, c'est-à-dire : $0 \leq q_i \leq L_i$ donc on peut restreindre l'ensemble A_i des stratégies du joueur i. C'est-à-dire $\forall i \in N$, $A_i = [0, L_i]$

Ainsi, on obtient A_i compact pour tout i, par application du Théorème 1.2.9, nous obtenons le résultat. ■

Szidarovszky dans [3], nous donne les conditions d'existence et d'unicité d'un équilibre de Cournot-Nash. Nous avons :

Proposition 2.5.2

Soit G un oligopole de Cournot vérifiant :

(A) : $p'(Q) < 0, \forall Q$

(B) : $p'(Q) + q_i p''(Q) \leq 0, \forall Q$ et $\forall i \in N$

(C) : $p'(Q) - c_i''(q_i) < 0, \forall Q$ et $\forall i \in N$.

Alors G admet un unique équilibre de Cournot-Nash.

Preuve. Posons $Q_{-i} = \sum_{j \in N-\{i\}} q_j$. On remarque que $p' + q_i p'' = (q_i p')'$, donc (B) signifie que p et $q_i p'(q_i + Q_{-i})$ sont tous deux strictement décroissantes en Q et en q_i respectivement.

La condition du premier ordre donne :

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i}(q) = p(q_i + Q_{-i}) + q_i p'(q_i + Q_{-i}) - c_i'(q_i) = 0 \tag{2.8}$$

De plus,

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2}(q) = 2p'(q_i + Q_{-i}) + q_i p''(q_i + Q_{-i}) - c_i''(q_i) < 0 \tag{2.9}$$

d'après (B) et (C).

D'où u_i est strictement concave par rapport à q_i. Afin de prouver l'existence d'un unique équilibre dans les conditions (A)-(C), nous devons d'abord déterminer les fonctions de meilleures réponses de chaque firme. Pour la firme i, la concavité de la fonction de gain implique que, la fonction de réactions peut être obtenue sous la forme :

$$R_i(Q_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p(Q_{-i}) - c_i'(0) \leq 0 \\ L_i & \text{si} \quad p(L_i + Q_{-i}) + L_i p'(L_i + Q_{-i}) - c_i'(L_i) \geq 0 \\ q_i^* & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.10}$$

où q_i^* est l'unique solution de l'équation (2.8) : dans l'intervalle $[0, L_i]$.

On a : $q_i^* = R_i$ est une fonction implicite de Q_{-i} et $0 < q_i^* < L_i$. En dérivant implicitement (2.8) par rapport à Q_{-i}, nous obtenons :

$$(1 + R_i')p'(R_i + Q_{-i}) + R_i' p'(R_i + Q_{-i}) + (1 + R_i')R_i p''(R_i + Q_{-i}) - R_i' c_i''(R_i) = 0 \tag{2.11}$$

Par conséquent :

$$R_i' = -\frac{p'(R_i + Q_{-i}) + R_i p''(R_i + Q_{-i})}{2p'(R_i + Q_{-i}) + R_i p''(R_i + Q_{-i}) - c_i''(R_i)} \tag{2.12}$$

D'où :

$$-1 < R_i'(Q_{-i}) \leq 0, \ \forall Q_{-i}, \ \forall i \in N \tag{2.13}$$

D'après (B) et (C). Notons que, dans les premiers cas de (2.10), la dérivée de R_i est nulle, sauf à deux points de rupture possibles, donc (2.13) est toujours satisfaite.

(2.13) implique que R_i est décroissante par rapport à Q_{-i}. C'est-à-dire qu'une production totale plus importante du reste des firmes nécessite des réponses de production plus faibles de la part de la firme i. Puisque $R_i'(Q_{-i})$ est supérieur à -1, les meilleures réponses ne peuvent pas diminuer très rapidement.

Nous pouvons également réécrire la fonction de réactions de la firme i en termes de production totale du secteur. Cette idée sera très utile pour prouver l'existence et l'unicité de l'équilibre. Elle peut également être utilisée pour dériver une méthode de calcul simple permettant de trouver l'équilibre. Nous soulignons que dans le cas où nous considérons la fonction de réactions en fonction de Q, nous la désignons par $\widetilde{R}_i$. On a :

$$\widetilde{R}_i(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p(Q) - c_i'(0) \leq 0 \\ L_i & \text{si} \quad p(Q) + L_i p'(Q) - c_i'(L_i) \geq 0 \\ q_i^* & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.14}$$

où q^* est l'unique solution de

$$p(Q) + q_i p'(Q) - c_i(q_i) = 0 \tag{2.15}$$

dans l'intervalle $[0, L_i]$.

En dérivant maintenant (2.15) par rapport à Q, on a :

$$p'(Q) + \widetilde{R}_i' p'(Q) + \widetilde{R}_i' p''(Q) - \widetilde{R}_i' c_i''(\widetilde{R}_i') = 0 \tag{2.16}$$

Donc

$$\widetilde{R}_i' = -\frac{p'(Q) + \widetilde{R}_i p''(Q)}{p'(Q) - c_i''(\widetilde{R}_i)} \leq 0$$

D'après (B) et (C). Donc $\widetilde{R}_i$ est continue et strictement décroissante dans l'intervalle $\left[0, \sum\limits_{i \in N} L_i\right]$.

Enfin, considérons l'équation :

$$\sum_{i \in N} \widetilde{R}_i(Q) - Q = 0 \tag{2.17}$$

On a $Q \longmapsto \sum\limits_{i \in N} \widetilde{R}_i(Q) - Q$ est continue et strictement décroissante.

De plus, pour $Q = 0$, $\sum\limits_{i \in N} \widetilde{R}_i - Q > 0$ et pour $Q = \sum\limits_{i \in N} L_i$, $\sum\limits_{i \in N} \widetilde{R}_i - Q < 0$. D'où il existe un unique $Q^* \in \left[0, \sum\limits_{i \in N} L_i\right]$ tel que $\sum_{i \in N} \widetilde{R}_i(Q^*) - Q^* = 0$. Ce qui implique que $\widetilde{R}_i(Q^*) = q^*$ pour tout $i \in N$.

Ce qui prouve l'existence et l'unicité de l'équilibre de Cournot-Nash. ■

Remarque 2.5.3. Si on suppose que p est concave et strictement décroissante ; et c_i convexe. Alors, on obtient les conditions (A), (B) et (C).

Suivant les hypothèses ci-dessous, *Friedman* [9], a donné quelques théorèmes concernant l'existence et l'unicité de l'équilibre de Cournot-Nash.

- **Hypothèse 1 : La fonction de demande**
  - p est définie et continue en Q ;
  - $\exists \overline{Q} > 0$, tel que $p(Q) > 0$ pour tout $Q \in \left[0, \overline{Q}\right[$ et $p(Q) = 0$ pour tout $Q \in \left[\overline{Q}, +\infty\right[$. De plus, $p(0) < \infty$;
  - Pour $Q \in \left[0, \overline{Q}\right[$, $p'(Q) < 0$ et p'' existe et est continue pour tout Q.
- **Hypothèse 2 : La fonction de coût**
  - c_i est définie et continue sur tout A_i et $c_i(0) \geq 0$;
  - c_i strictement croissante ;
  - c_i'' existe et continue.
- **Hypothèse 3**

  Pour tout $q_i \in A_i$ et $Q < \overline{Q}$, $p'(Q) + q_i p''(Q) < 0$ et $p'(Q) - c_i''(q_i) < 0$ pour tout $i \in N$.

Théorème 2.5.4

Soit G un oligopole de cournot vérifiant les hypothèses 1-3. Alors G admet au moins un équilibre de Cournot-Nash.

Preuve.

Les hypothèses 1 et 2 montrent que pour toute firme i, u_i est de classe C^2. De plus $u_i(q) = p(Q)q_i \mathbb{1}_B + p(Q)q_i \mathbb{1}_{B^c} - c_i(q_i)$ avec $B = \left\{Q/Q < \overline{Q}\right\}$.

Soit $i \in N$ et

- Supposons que $Q \geq \overline{Q}$, $u_i(q) = -c_i(q_i)$. Il est préférable pour chaque firme de ne pas produire. Donc $(0, 0, ..., 0)$ est l'unique équilibre de Cournot-Nash.
- Supposons que $Q \leq \overline{Q}$. On a $u_i(q_i, q_{-i}) = p(Q)q_i - c_i(q_i)$. On a :
  - $p'(Q) < 0$, $\forall Q \leq \overline{Q}$ d'après l'hypothèse 1.
  - $p'(Q) + q_i p'(Q)$, $\forall Q \leq \overline{Q}$, $\forall i$ d'après l'hypothèse 3
  - $p'(Q) - c''_{q_i} < 0$, $\forall Q \leq \overline{Q}$, $\forall i \in N$ d'après l'hypothèse 3

  D'où par application de la Proposition 2.5.2, on a le résultat.

Dans tous les cas, on a l'existence et l'unicité de l'équilibre de Cournot-Nash.

■

2.5.1. Cas de l'oligopole de Cournot classique

a) **Présentation du modèle classique**

Dans un oligopole de Cournot classique, nous avons :

- Le prix p est donné par : $p(Q) = \max(0, a - bQ)$ avec $a > 0, b > 0$;
- La fonction de coût de la firme i est : $c_i(q_i) = \alpha_i q_i - \beta_i$ avec $\alpha_i < a$ et β_i un réel ;

  Soit G un oligopole de Cournot. Rappelons que $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ où :
- N est l'ensemble des firmes qui constituent l'oligopole de Cournot.
- $A_i \subset \mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des stratégies de la firme i ;
- La fonction de gain de chaque firme i est :

  $u_i(q) = p(Q)q_i - c_i(q_i) = \max\left\{-\alpha_i q_i + \beta_i\ ;\ (a - bQ)\, q_i - \alpha_i q_i + \beta_i\right\}$

b) **Existence des équilibres. Quel est l'ensemble des équilibres de Nash d'un oligopole classique ?**

Soient $i \in N$, et $q_{-i} \in A_{-i}$. Déterminons $MR^i(q_{-i}) = \arg\max\limits_{a_i \in A_i} u_i(q_i, q_{-i})$

- Si $p = 0$, on a pour tout $q_i \in A_i$, $u_i(q_i, q_{-i}) = -c_i(q_i)$. Ainsi $MR^i(q_{-i}) = \{0\}$. Donc $ECN(G) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
- Supposons que $p \neq 0$

La Condition du premier ordre donne :

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i}(q) = a - bQ - \alpha_i - bq_i = 0 \tag{2.18}$$

La Condition du second ordre est vérifiée car :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2}(q) = -b - b = -2b < 0 \tag{2.19}$$

Donc u_i est strictement concave par rapport à q_i.

Ainsi,

$$MR^i(q_{-i}) = \{q_i^*\}$$

où q_i^* est solution de l'équation (2.18).

– Recherche des équilibres de Cournot-Nash

$$\begin{aligned} q^* = (q_1^*, ..., q_1^*) \in EN(G) &\iff q_i^* \in MR^i(q_{-i}^*), \quad \forall i \in N \\ &\iff a - bQ^* - \alpha_i - bq_i^* = 0, \quad \forall i \in N \\ &\iff q_i^* = \frac{a - \alpha_i}{b} - Q^*, \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

En additionnant les q_i^*, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} q_i^* &= \sum_{i \in N} \left(\frac{a - \alpha_i}{b} - Q \right) \\ Q^* &= \frac{na - \sum_{i \in N} \alpha_i}{b} - nQ^* \\ Q^* &= \frac{na - \sum_{i \in N} \alpha_i}{(n+1)b} \end{aligned}$$

D'où,

$$q_i^* = \frac{a - \alpha_i}{b} - Q^* = \frac{a - (n+1)\alpha_i + \sum_{j \in N} \alpha_j}{(n+1)b} \tag{2.20}$$

Le prix à l'équilibre est :

$$p^*(Q^*) = a - bQ^* = \frac{a + \sum_{i \in N} \alpha_i}{n+1} \tag{2.21}$$

Nous pouvons donc dire que : dans un oligopole de Cournot classique à prix non nul, il existe un seul équilibre de Nash q^* donné par :

$$q_i^* = \frac{a - \alpha_i}{b} - Q^* = \frac{a - (n+1)\alpha_i + \sum_{j \in N} \alpha_j}{(n+1)b}, \ \forall i \in N.$$

Remarque 2.5.4. Si les coûts marginaux α_i sont tous égaux à une constante c ($0 < c < a$), toutes les firmes produisent la même quantité $q^* = \dfrac{a - c}{(n+1)b}$ à l'équilibre.

2.5.2. Oligopole de Cournot avec fonction de demande non linéaire

a) **Présentation de l'oligopole.**

Soit G un oligopole de Cournot tel que :

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ est l'ensemble des firmes qui constituent l'oligopole de Cournot ;
- $A_i \subset \mathbb{R}_+$, pour tout $i \in N$;
- La fonction de demande inverse p est donnée par $p(Q) = \dfrac{A}{1+Q}$, où $Q = \sum_{i\in N} q_i$ et $A > 0$;
- La fonction de coût de la firme i est : $c_i(q_i) = \alpha_i q_i - \beta_i$ avec $0 < \alpha_i < A$ et β_i un réel ;
- La fonction de gain de chaque firme i est :
  $u_i(q) = p(Q)q_i - c_i(q_i) = \dfrac{A}{1+Q}q_i - \alpha_i q_i + \beta_i$

b) **Existence des équilibres**

Conditon du premier ordre

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i}(q) = \frac{A(1+Q) - Aq_i}{(1+Q)^2} - \alpha_i = \frac{A(1+Q_{-i})}{(1+Q)^2} - \alpha_i = 0,\ \forall i \in N \tag{2.22}$$

La condition du second ordre est vérifiée car :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial q_i^2}(q) = \frac{-2A(1+Q_{-i})}{(1+Q)^3} < 0,\ \forall i \in N$$

Recherche des équilibres de Cournot-Nash

On a : $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*\right) \in ECN(G) \iff q_i^* \in MR^i(q_{-i}^*),\ \forall i \in N$, où q_i^* est solution de l'équation (2.22)

On a pour tout $i \in N$:

$$\begin{aligned}\frac{A(1+Q^*) - Aq_i^*}{(1+Q^*)^2} - \alpha_i = 0 &\iff A(1+Q^*) - Aq_i^* = (1+Q^*)^2\alpha_i \\ &\iff q_i^* = -\frac{(1+Q^*)^2}{A}\alpha_i + 1 + Q^*\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i\in N} q_i^* = Q^* = \sum_{i\in N}\left[-\frac{(1+Q^*)^2}{A}\alpha_i + 1 + Q^*\right]$$

C'est-à-dire :

$$Q^* = -\frac{(1+Q^*)^2}{A}\sum_{i\in N}\alpha_i + n + nQ^*$$

D'où

$$\left(\sum_{i\in N}\alpha_i\right)Q^{*2} + \left(2\sum_{i\in N}\alpha_i + A(1-n)\right)Q^* + \sum_{i\in N}\alpha_i - nA = 0 \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(2\sum_{i\in N}\alpha_i + A(1-n)\right)^2 - 4\left(\sum_{i\in N}\alpha_i\right)\left(\sum_{i\in N}\alpha_i - nA\right)\\ &= (n-1)^2A^2 + 4A\sum_{i\in N}\alpha_i\\ &> 0\end{aligned}$$

Donc l'équation (2.23) admet deux solutions.

$$Q_1^* = \frac{-\left(2\sum_{i\in N}\alpha_i + A(1-n)\right) - \sqrt{\Delta}}{2\sum_{i\in N}\alpha_i} \quad \text{et} \quad Q_2^* = \frac{-\left(2\sum_{i\in N}\alpha_i + A(1-n)\right) + \sqrt{\Delta}}{2\sum_{i\in N}\alpha_i}$$

vérifiant :

$$\begin{cases} Q_1^* \times Q_2^* &= \frac{\sum_{i\in N}\alpha_i - nA}{\sum_{i\in N}\alpha_i} < 0\\ Q_1^* - Q_2^* &= -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sum_{i\in N}\alpha_i} < 0\end{cases} \tag{2.24}$$

Car pour tout $i \in N$:

$$\alpha_i < A \implies \sum_{i\in N}\alpha_i < nA$$

D'où :

$$\begin{aligned}Q^* &= \frac{-\left(2\sum_{i\in N}\alpha_i + A(1-n)\right) + \sqrt{\Delta}}{2\sum_{i\in N}\alpha_i}, \text{ d'après } (2.24)\\ &= \frac{-\left(2\sum_{i\in N}\alpha_i + A(1-n)\right) + \sqrt{(n-1)^2A^2 + 4A\sum_{i\in N}\alpha_i}}{2\sum_{i\in N}\alpha_i}\\ &= \frac{(n-1)A - 2\sum_{i\in N}\alpha_i + \sqrt{(n-1)^2A^2 + 4A\sum_{i\in N}\alpha_i}}{2\sum_{i\in N}\alpha_i}\end{aligned}$$

Alors :

$$1 + Q^* = \frac{(n-1)A + \sqrt{(n-1)^2A^2 + 4A\sum_{i\in N}\alpha_i}}{2\sum_{i\in N}\alpha_i}$$

Conclusion : Dans cet oligopole de Cournot non classique, il existe un unique équilibre de Nash q^* donné par :

$$\begin{aligned}q_i^* &= -\frac{(1+Q^*)^2}{A}\alpha_i + 1 + Q^*, \ \forall i \in N\\ &= (1+Q^*)\left(\frac{\alpha_i(1+Q^*)}{A} + 1\right), \ \forall i \in N\end{aligned}$$

Le prix à l'équilibre est :

$$p(Q^*) = \frac{A}{1+Q^*}$$

$$= \frac{2A \sum_{i \in N} \alpha_i}{(n-1)A + \sqrt{(n-1)^2 A^2 + 4A \sum_{i \in N} \alpha_i}}$$

✠ Implication pédagogique ✠

Le présent travail nous a permis de faire nos premiers pas dans la recherche scientifique, la construction d'un raisonnement logique et l'utilisation des outils technologiques nécessaires dans tout enseignement à cette ère du numérique.

L'implication pédagogique de ce travail réside à plusieurs niveaux :

- ♣ Il contribue à notre culture dans le domaine des mathématiques ; de ce fait, il nous donne une vision plus large des mathématiques que nous enseignerons au lycée.
- ♣ Il accroît notre aptitude à rédiger un compte rendu d'un travail.
- ♣ Il favorise l'utilisation des outils et logiciels mathématiques : LaTeX, GeoGebra, Ordinateur, Projecteur ce qui nous aidera à saisir et à présenter nos épreuves, des fiches de travaux dirigés et certains cours à support numérique avec une bonne clarté.
- ♣ Il nous donne une vision plus claire des différentes applications des mathématiques dans la vie courante et surtout en économie.
- ♣ Il augmente notre aptitude à construire une problématique.
- ♣ Il accroît notre aptitude de mener un travail à la lumière des savoirs construites.
- ♣ Il augmente notre aptitude à mener une bonne transposition didactique pour simplifier le savoir pour nos futurs élèves sans toute fois modifier le fonctionnement de ce savoir.

✠ Conclusion et perspective ✠

L'objectif de notre travail était d'étudier le marché oligopolistique défini par Cournot, à partir des éléments de la théorie des jeux.

En effet, nous avons d'abord présenté et illustré les généralités en théorie de jeux non coopératif dont principalement les notions nous permettant de définir la notion d'équilibre de `Nash.` Après avoir évoqué la notion d'oligopole sur un marché et rappelé certaines notions d'optimisation des fonctions à plusieurs variables, nous avons par la suite présenté un oligopole de Cournot en un jeu sous forme normale. Enfin, nous avons montré l'existence et l'unicité d'un équilibre de `Nash` dans les oligopoles de `Cournot` lorsque les fonctions de demande sont linéaires, puis dans certains cas particuliers où les fonctions de demande ne sont pas linéaires.

Nous convenons qu'arrêter notre étude à ce niveau n'est pas synonyme d'avoir tout dit, car nous pensons juste avoir atteint les objectifs que nous nous sommes fixé dès le début de ce travail. Nous pensons qu'il est possible de regarder les structures de coalition entre certaines firmes dans un oligopole de `Cournot` et de résoudre les éventuels problèmes de partage associés.

✠ Bibliographie ✠

[1] Abdelkader, G.L.I.Z. (2010) *Théorie des jeux et économie de l'information.* Note de cours. École Supérieure de Commerce 1, Alger.

[2] Benzoni, G.S. (2014). *Calcul différentiel et équations différentielles*- 2e éd. : Cours et exercices corrigés. Dunod.

[3] Bischi, G.I., Chiarella C., & Kopel, M. es and F. Szidarovsky (2010) : *Nonlinear oligopolies. Stability and bifurcations.* Springer.

[4] Cournot, A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Hachette.

[5] Cramers, M. (2015) *Théorème de point fixe et leurs applications en Sciences Economiques*. Université Catholique de Louvain. Faculté des sciences. Écoles des Mathématiques.

[6] Duguet, E. (2010) *Marchés et Concurrence Imparfaite*. Notes de cours. Université Paris Est Créteil.

[7] Etner, J. & Jevela, M. (2018). *Microéconomie*. DUNOD.

[8] Frank, C.R. & Quandt, R.E. (1963). *On the existence of Cournot equilibrium. International Economic Review*, 4(1), 92-96.

[9] Friedman J.W. (1977) *Oligopoly and the Theory of Games.* Camridge University Press, New-York.

[10] Kolstad, C.D., & Mathieson, L. (1987). *Necessary and sufficient conditions for uniqueness of Cournot equilibrium.* Review of Economic Studies, 54(4), 681-690.

[11] Laraki, R., Renault J. & Sorin, S. (2013) . *Bases Mathématiques de la Théorie des Jeux.* CNRS. Editions de l'Ecole Polytechnique.

[12] Lepetit, G. (2008). *Existence des équilibres dans un jeu fini sous forme normale*. Note de cours.

[13] Renault, J. *Initiation à la théorie des jeux, Notes de cours.* Université de Toulouse 1.

[14] Romp, G. (1997). *Game Theory : introduction and applications.* Oxford University Press.

[15] Shapiro, C. (1989). *heories of Oligopoly Behavior. Handbook of Industrial Organization, 1,*. Elsevier Science.

Quelques sites visités

[16] *istaofpptcours-blogspot.com* ; 11 octobre 2018, 13h40min

[17] *Ressources.aunege.fr* ; 10 octobre 2018, 13h22min.

[18] *www.lafinancepourtous.com* ; 11 octobre 2018, 15h17min.

[19] *www.larousse.fr* ; 10 octobre 2018, 10h35min

[20] *www.wikipedia.org* ; 28 octobre 2018, 13h34min.