ÉQUATIONS D'EINSTEIN FLUIDE PARFAIT ET CONSTANTE COSMOLOGIQUE EN SYMÉTRIE CYLINDRIQUE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de
l'obtention du diplôme de D.I.P.E.S. II
de Mathématiques

par

NGOKO DTCHOPDJIE Boris Clebert

Matricule : 14M2686

Sous la direction du

Pr. TEGANKONG David

Maître de conférences, Ecole Normale Supérieure de Yaoundé

Yaoundé, Juin 2019

♣ Dédicace ♣

Ce mémoire est dédié à ma mère :

NZEGOUO Paulette

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle par ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

NGOKO DTCHOPDJIE Boris Clebert

♣ Remerciements ♣

Aucun mot ne me semble approprié pour exprimer toute ma reconnaissance au Seigneur pour sa misécorde et pour toutes ses grâces, lui qui à su placer sur mon chemin des personnes exceptionnelles qui m'ont tenu la main durant toute la phase de rédaction de ce travail.

Je remercie du fond de mon coeur mon encadreur le Pr Tegankong David pour m'avoir proposé ce sujet, pour sa disponibilité, ses multiples remarques, suggestions et conseils.

Je remercie les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

Je n'en serait pas là aujourd'hui si je n'éprouvais pas un certain plaisir à faire les mathématiques, j'aimerais donc remercier ici tous ceux qui de près ou de loin sont à l'origine de ma passion pour les mathématiques à l'instar de mon père, de ma mère, de MOUNDE Aristide, de KEPSEU Romaric, de mes professeurs de mathématiques du Lycée Bilingue de Mendong : M.NDAFEU, M.NDIFON et feu M.TOBOU.

Je tiens ausssi à remercier mes enseignants de l'E.N.S pour leurs enseignements de qualité ainsi que pour leur sollicitude à l'égard des étudiants.

Je remercie tout mes camarades de promotion et plus particulièrement YOMENI Flavien et NANKEP Stéphane pour leur soutien et pour tout les bons moments passés ensemble.
Merci à vous M et Mme DJOMGUEM pour vos conseils, vos encouragements, votre soutien inconditionnel.

Merci à toi maman et à toi aussi Jean Richard pour vos conseils et vos encouragements.

Merci à toi Papa SIMOU pour le soutien que tu nous apporte à moi et à mon frère depuis toutes ces années.

Merci à vous M et Mme NZETIEP pour la sérénité que vous m'offrez dans votre foyer.

Merci à toi grand-mère Tabithta pour tout ton soutien.

Merci à toute la famille YOUMBI et à la grande famille SEUMOU ZACHARIE.

Merci à vous :Franklin, Géraud, Céran,Ulrich, Brice, Duclair, Stéphane, Glenn, Ornella, Caline, Audrey pour toutes ces belles années passées ensemble.

♣ Table des matières ♣

♣ Résumé ♣

Les équations d'Einstein constituent le fondement mathématique de la théorie de la relativité générale. Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre qui décrivent la manière dont la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Dans le présent mémoire, nous écrivons les équations d'Einstein fluide parfait avec constante cosmologique en symétrie cylindrique. Nous obtenons ainsi un système de huit équations à sept inconnues.

Mots clés : *Relativité générale, équations d'Einstein, fluide parfait, symétrie cylindrique, constante cosmologique.*

♣ Abstract ♣

Einstein's equations form the mathematical foundation of the theory of general relativity. They are first and second order nonlinear partial differential equations that describe how matter and energy modify the geometry of space-time. In this long essay, we write perfect Einstein Fluid equations with cosmological constant in cylindrical symmetry. Thus, we obtain a system of eight equations to seven unknown.

Keys words : *General Relativity, Einstein equations, Perfect fluid, cylindrical symmetry, cosmological constant.*

♣ Introduction ♣

Le 25 novembre 1915, Albert Einstein soumet pour la première fois ses travaux sur la relativité générale à l'Académie Royale des sciences de Prusse [8]. Parmi les travaux en question figuraient pour la toute première fois ses célèbres équations. Encore appelées équations du champ d'Einstein([8]), les équations d'Einstein sont des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre qui décrivent la manière dont la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Dès lors, ces équations rompent avec la définition traditionnelle de la gravitation selon Newton. En effet, avec ces équations la gravité n'est plus une force qui s'exerce entre deux corps mais elle se manifeste à travers la courbure de l'espace-temps et cette courbure s'interprète comme le champ gravitationnel de la source qui en est à l'origine. Les équations d'Einstein prennent en général la forme :[1]

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \text{ avec } \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}. \tag{1}$$

À gauche de (1), se trouvent les termes relatifs à la géométrie de l'espace-temps ce sont : le tenseur de Ricci $(R_{\alpha\beta})$, la courbure scalaire R, le tenseur métrique $(g_{\alpha\beta})$ et la constante cosmologique Λ. À droite de (1), se trouvent les termes relatifs au contenu énergie-matière de l'espace-temps, ce sont : la constante gravitationnelle G, la célérité de la lumière dans le vide c et le tenseur énergie-impulsion $(T_{\alpha\beta})$ (dont l'expression dépend du choix de la matière). Lorsque la matière considérée est un fluide parfait [1], le tenseur énergie-impulsion prend une forme particulière caractéristique d'un tel milieu, les équations d'Einstein sont alors couplées aux équations d'Euler et le système **Einstein-Euler** est ainsi obtenu.

La constante cosmologique est un paramètre rajouté par Einstein dans ses équations dans le but de caractériser un univers statique [2], mais cette dernière fût finalement abandonnée et ce pour deux raisons : tout d'abord parceque l'univers statique décrit par cette théorie était instable et ensuite parceque les observations des galaxies distantes par **Hubble** [3] des années plus tard confirmèrent que notre univers n'est pas statique mais plutôt en expansion[8]. Bien que la motivation d'Einstein pour l'introduction

1. En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait lorsqu'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de conductivité thermique.[9]
2. Univers qui n'est ni en expansion ni en contraction[8]
3. C'est un télescope spatial qui tient son nom de l'astronome américain Edwin Hubble.[8]

de cette constante ait été érronée, sa présence dans les équations n'est pas inconsistante, en effet les progrès réalisés en cosmologie [4] ont montrés que l'expansion de l'univers interprêté en termes de masse et d'énergie pouvait être attribué à 68% à une «énergie sombre [5]» dont l'effet est celui de la constante cosmologique[8].

Le présent mémoire est subdivisé en trois chapitres. Dans le chapitre un, nous donnons quelques notions préliminaires de topologie, de géométrie différentielle et lorentzienne qui nous seront utiles. Dans le chapitre deux, nous effectuons divers calculs tensoriels qui aboutiront à l'obtention des membres de gauche des équations d'Einstein, afin de réduire la complexité de ces calculs, nous les effectuons dans le système de coordonnées cylindrique. Dans le troisième et dernier chapitre, nous établissons le système complet d'Einstein-Euler en symétrie cylindrique, nous posons le problème de Cauchy correspondant, et nous terminons par l'étude des équations d'Euler dans le cas homogène.

4. Science des lois physiques de l'univers, de sa formation[8]

5. c'est une forme d'énergie hypothétique emplissant uniformément tout l'univers et dotée d'une pression négative qui la fait se comporter comme une force gravitationnelle répulsive.[8]

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous faisons des rappels de topologie et de calcul différentiel puis, nous présentons quelques notions sur la géométrie différentielle et sur la géométrie lorentzienne indispensables à notre projet.

1.1 Rappels de topologie générale et calcul différentiel

Définition 1.1.1. *(Topologie sur un ensemble)*

Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Une topologie sur E, est une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$i)$ $\emptyset \in \mathcal{O},\ E \in \mathcal{O}$.

$ii)$ $\forall A, B \in \mathcal{O},\ A \cap B \in \mathcal{O}$.

$iii)$ *Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$, alors* $\bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Définition 1.1.2. *(Espace topologique)*

Un espace topologique est un couple $(E, \mathcal{O})$, où E est un ensemble et $\mathcal{O}$ une topologie sur E.

- Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les ouverts de E pour la topologie $\mathcal{O}$.

- Les éléments de E sont des points.

- Un fermé de E est le complémentaire (dans E) d'un ouvert de E.

Notation 1.1.1.

S'il n'y a pas de risque de confusion, on notera E pour désigner l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$.

Définition 1.1.3. *(Voisinage d'un point)*

Un voisinage d'un point x de E, est un sous-ensemble de E qui contient un ouvert contenant x.

Définition 1.1.4. *(Espace topologique séparé)*

Un espace topolgique E est dit séparé (au sens de Hausdorff), lorsque deux points distincts de E admettent des voisinages disjoints.

Soient X et Y deux espaces topologiques.

Définition 1.1.5. *(Continuité)*

Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en un point x de X, si pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$.

L'application est dite continue sur X si elle est continue en tout point de X.

Définition 1.1.6. *(Homéomorphisme)*

Une application $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme lorsque :
- f est bijective.
- f et f^{-1} sont continues.

Définition 1.1.7. *(Espace normé)*

On appelle espace normé, la donnée d'un couple $(E, ||.||)$, où E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $||.||$ une application de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

i) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E,\ ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

iii) $\forall x, y \in E,\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Remarque 1.1.1.

- Lorsque qu'une application de E dans $\mathbb{R}_+$ satisfait les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition précédente, on dit qu'elle est une norme sur E.
- Un espace vectoriel normé est un espace topologique pour la topologie induite par la norme associée.

Définition 1.1.8. *(Application différentiable)*

Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E , V un ouvert de F. Soit $a \in U$.
Une application $f : U \longrightarrow V$ est dite différentiable en a, s'il existe une application linéaire L de E dans F telle que :

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + ||h||_E\, \varepsilon(h), \quad \textit{avec } \varepsilon(h) \underset{h \longrightarrow 0_E}{\longrightarrow} 0$$

- On note $L = df(a)$, la différentielle de f en a.
- f est dite différentiable sur U, si f est différentiable en tout point de U.
- On note df la différentielle de f sur U.
- Si df est continue sur U, on dit que f est une-fois continûment différentiable ou de classe C^1.
- De manière récurrente, on a : $\forall k \geq 1, \quad d^k f = d(d^{k-1} f)$
- Et on dira que f est de classe C^k, si $d^k f$ existe et est continue.

Définition 1.1.9. *(C^k-difféomorphisme)*

Soient $k \in \mathbb{N}$, E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Une application $f : U \longrightarrow V$ est un C^k-difféomorphisme lorsque :

$i)$ *f est bijective.*

$ii)$ *f est de classe C^k*

$iii)$ *f^{-1} est de classe C^k*

1.2 Quelques notions de géométrie différentielle

Définition 1.2.1. *(Cartes locales)[7]*

Soit E un espace topologique.
On appelle carte locale de dimension n sur E, la donnée d'un couple (U, ϕ) tel que :

$i)$ *U est un ouvert de E.*

$ii)$ *L'application $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.*

Deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ) sur un espace topologique E telles que $U \cap V \neq \emptyset$, sont dites C^k-compatibles $(k \in \mathbb{Z})$, lorsque l'application (de transition) :

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

est un C^k-difféomorphisme.

Définition 1.2.2. *(Atlas)[7]*

Soit E un espace topologique séparé.
Un atlas de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, de classe C^k $(k \in \mathbb{N})$ sur E est la donnée d'une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ vérifiant :

$i)$ *$\forall i \in I$, (U_i, ϕ_i) est une carte de dimension n sur E.*

$ii)$ *$\forall i, j \in I$ tels que : $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) sont C^k-compatibles.*

$iii)$ $E = \bigcup_{i \in I} U_i$

Définition 1.2.3. *(Carte compatible avec un atlas)[7]*

Une carte (U, ϕ) est compatible avec l'atlas $((U_i, \phi_i))_{i \in I}$ si la réunion $((U, \phi) \cup ((U_i, \phi_i))_{i \in I})$ est encore un atlas (autrement dit si elle est une carte de l'atlas).

Définition 1.2.4. *(Atlas maximal)[7]*

L'atlas maximal $\bar{A}$ associé à un atlas A, est un atlas se composant de toutes les cartes compatibles avec A.

Définition 1.2.5. *(Variété différentiable) [7]*

Une variété différentiable de classe C^q et de dimension n, est un couple formé d'un espace topologique séparé et d'un atlas maximal de classe C^q, dans lequel toutes les cartes sont de dimension n.

Définition 1.2.6. *(Arc de courbe)[7]*

Soit V un variété différentiable, x un point de V et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

Un arc de courbe (différentiable) passant par x dans V, est une application différentiable :

$$\begin{array}{rccc} C: & I & \longrightarrow & V \\ & t & \longmapsto & C(t) \end{array}$$

telle que $C(0) = x$.

$\Gamma = C(I) \subset V$ est un arc paramétré de V, et le couple (I, C) est la paramétrisation de la courbe Γ.

Définition 1.2.7. *(Courbes tangentes)[7]*

Deux arcs de courbes C_1 et C_2 passant par un point x dans une variété différentiable V sont dites tangentes, si pour toute carte (U, ϕ) de V, on a :

$$\begin{cases} C_1(0) = C_2(0) = x \\ \frac{d(\phi \circ C_1)}{dt}(t)|_{t=0} = \frac{d(\phi \circ C_2)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases}$$

Par la suite, l'on définit la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des courbes passant par x par :

$$C_1 \mathcal{R} C_2 \Leftrightarrow C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont tangents en } x$$

Proposition 1.2.1. *[7]*

La relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus, est une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs de courbes passant par x.

Preuve .

Soient C_1, C_2 et C_3 des arcs de courbes passants par x, dans V.

$i)$ *On a : $C_1 \mathcal{R} C_1$, donc $\mathcal{R}$ est reflexive.*

$ii)$

$$C_1 \mathcal{R} C_2 \Rightarrow \begin{cases} C_1(0) = C_2(0) = x \\ \frac{d(\phi \circ C_1)}{dt}(t)|_{t=0} = \frac{d(\phi \circ C_2)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(0) = C_2(0) = x \\ \frac{d(\phi \circ C_1)}{dt}(t)|_{t=0} = \frac{d(\phi \circ C_2)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2 \mathcal{R} C_1.$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

$iii)$

$$C_1\mathcal{R}C_2 \ \ et \ \ C_1\mathcal{R}C_2 \ \ \Rightarrow \ \ \begin{cases} C_1(0)=C_2(0)=x \\ \frac{d(\phi\circ C_1)}{dt}(t)|_{t=0}=\frac{d(\phi\circ C_2)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases} \ \ et \ \ \begin{cases} C_2(0)=C_3(0)=x \\ \frac{d(\phi\circ C_2)}{dt}(t)|_{t=0}=\frac{d(\phi\circ C_3)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \ \begin{cases} C_1(0)=C_2(0)=C_3(0)=x \\ \frac{d(\phi\circ C_1)}{dt}(t)|_{t=0}=\frac{d(\phi\circ C_2)}{dt}(t)|_{t=0}=\frac{d(\phi\circ C_3)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \ \begin{cases} C_1(0)=C_3(0)=x \\ \frac{d(\phi\circ C_1)}{dt}(t)|_{t=0}=\frac{d(\phi\circ C_3)}{dt}(t)|_{t=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \ C_1\mathcal{R}C_3.$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Une classe d'équivalence suivant la relation $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\begin{array}{rccl} [C]_x : & C^\infty(V) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & [C]_x(g)=\frac{d}{dt}(g\circ C)(t)|_{t=0} \end{array}$$

Définition 1.2.8. *(Vecteur tangent, Espace tangent)[7]*

Soit V une variété différentiable de dimension n, et $x\in V$.

Un vecteur tangent à V en x, est une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus.

L'espace tangent à V en x, est l'ensemble des vecteurs tangents à V en x.

On le note T_xV (c'est un espace vectoriel de dimension n).

Définition 1.2.9. *(Fibré tangent)*

Soit V une variété différentiable de dimension n.

$TV=\bigcup\limits_{x\in V} T_xV$ est une variété différentiable de dimension $2n$ appelée fibré tangent à V.

Définition 1.2.10. *(Champ de vecteurs)[7]*

Soit V une variété différentiable.

Un champ de vecteurs sur V est une application

$$\begin{array}{rccl} X : & V & \longrightarrow & TV \\ & x & \longmapsto & X(x)=X_x\in T_xV \end{array}$$

telle que : $\Pi \circ X : V \longrightarrow V$ *soit l'application identité (* Π *étant la projection canonique).*
Un champ de vecteurs est dit différentiable si l'application qui le définit est une application C^∞.

Notation 1.2.1.

On désigne par $\mathcal{X}(V)$ *l'ensemble des champs de vecteurs sur* V.

Définition 1.2.11. *(Dérivation)[7]*

Soit V *une variété différentiable. Un champ de vecteurs* X *de* V *définit une dérivation sur* $C^\infty(V)$ *par :*

$$\begin{array}{rccc} X: & C^\infty(V) & \longrightarrow & C^\infty(V) \\ & g & \longmapsto & X(g) = X_g \end{array}$$

où $X_g(x) = X(g)(x) = X_x(g)$, *vérifiant :*

$i)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in C^\infty(V),\ X(ag + bh) = aX_g + bX_h$.

$ii)$ $\forall g, h \in C^\infty(V),\ X(gh) = gX_h + hX_g$.

Définition 1.2.12. *(Produit de deux champs de vecteurs)[7]*

Soit V *une variété différentiable.*
Le produit de deux champs de vecteurs X *et* Y *est défini par :*

$$XY(g) = X(Y_g), \forall g \in C^\infty(V)$$

Proposition 1.2.2.

Le produit de deux champs de vecteurs ne définit pas une dérivation.

Preuve .

Soient X *et* Y *deux champs de vecteurs. Pour tout* $g, h \in C^\infty$, *on a :*

$$\begin{aligned} XY(gh) &= X(Y(gh)) \\ &= X(gY_h + hY_g) \\ &= gX(Y_h) + Y_hX_g + hX(Y_g) + Y_gX_h \end{aligned}$$

Mais, $g(XY)_h + h(XY)_g = gX(Y_h) + hX(Y_g)$
Il vient que : $XY(gh) \neq g(XY)_h + h(XY)_g$

Définition 1.2.13. *(Crochet de Lie)[7]*

Soit V *une variété différentiable. On appelle crochet de Lie de deux champs de vecteurs* X *et* Y, *le champ de vecteurs noté* $[X, Y]$ *et donné par :*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Définition 1.2.14. *(Dérivée de Lie)[7]*

La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs Y par rapport à un autre champ de vecteurs X, est le champ de vecteurs noté $L_X(Y)$ donné par :

$$L_X(Y) = [X, Y]$$

Définition 1.2.15. *(Applications n-linéaires)*

Soient n un entier naturel non nul, $E_1, ..., E_n$ et F des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application $f : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ est dite n-linéaire, si elle est linéaire par rapport à chacune de ses n-variables.

- Lorsque $F = \mathbb{K}$, l'on dit que f est une forme linéaire sur $E_1 \times .. \times E_n$.

- Lorsque $E_1 = E_2 = ... = E_n = E$ et $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire sur E.

Définition 1.2.16. *(Tenseur élémentaire)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $x \in E$ et $y \in F$. On appelle tenseur élémentaire, l'application :

$$\begin{array}{cccc} x \otimes y : & E^* \times F^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha(x).\beta(y) \end{array}$$

où "." désigne le produit scalaire, et, E^* (respectivement F^*) le dual algébrique de l'espace E (respectivement F).

Définition 1.2.17. *(Produit tensoriel)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle produit tensoriel de E par F noté $E \otimes F$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies de tenseurs élémentaires.

Dans ce qui suit, V désigne une variété différentiable de dimension n.

Définition 1.2.18. *(Tenseur covariant)*

Un tenseur de type $(p, 0)$ ou p-fois covariant au point $x \in V$, est une forme p-linéaire définie sur $(T_xV)^p$.

On désigne par : $\bigotimes^p T_x^*V \equiv T^0_{x,p}$ l'espace des formes p-linéaires sur T_xV.

Définition 1.2.19. *(Tenseur contravariant)*

Un tenseur de type $(0, q)$ ou q-fois contravariant au point $x \in V$, est une forme q-linéaire définie sur $(T_x^*V)^q$.

On désigne par : $\bigotimes^q T_xV \equiv T^q_{x,0}$ l'espace des formes q-linéaires sur T_x^*V.

Définition 1.2.20. *(Tenseur mixte)*

Un tenseur mixte de type (p, q) est un tenseur $p-$fois covariant et $q-$fois contravariant au point $x \in V$ est une forme $(p+q)-$linéaire définie sur $(T_xV)^p \times (T_x^*V)^q$.
On désigne par $T_{x,p}^q$ l'ensemble des tenseurs de type (p, q) au point x.

Définition 1.2.21. *(Fibré tensoriel)*

On appelle fibré tensoriel, la variété différentiable T_p^qV définie par :

$$T_p^qV = \bigcup_{x \in V} (\{x\} \times T_{x,p}^q)$$

Définition 1.2.22. *(Champ de tenseurs)*

Un champ de tenseurs de type (p, q) sur V, est une appplication :

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \longrightarrow & T_p^qV \\ & x & \longmapsto & T(x) = (x, t_x) \end{array}$$

avec $t_x \in T_{x,p}^q$.

1.3 Quelques notions de géométrie lorentzienne

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $B = \{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\ ;\ x_i \in \mathbb{K}$.
Un indice tel que i sur lequel on effectue la somme est appelé indice muet. **La convention de sommation d'Einstein** consiste à supprimer le symbole $\sum$ et d'indiquer l'indice muet en haut et en bas. Ainsi
$x = x^i e_i \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$

Dans toute la suite, V_4 désigne une variété différentiable de dimension 4, le corps de base considéré est $\mathbb{R}$ et l'on adopte la convention de sommation d'Einstein où les indices grecs $\alpha,\ \beta,\ \gamma, ...$ vont de 0 à 3.

1.3.1 Variété lorentzienne

Définition 1.3.1. *(Variété lorentzienne)[7]*

Une variété lorentzienne ou hyperbolique est la donnée d'un couple (V_4, g) où g un champ de tenseur $2-$fois covariant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V_4 tel que $\forall x \in V_4$, g induit sur T_xV_4 une forme bilinéaire non dégénérée $g_x : T_xV_4 \times T_xV_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ de signature $(+, -, -, -)$ ou $(-, +, +, +)$. g est appelé tenseur métrique.

Remarque 1.3.1. 1. *Dans la définition précédente, le dernier point signifie que la forme quadratique associée à g admet une décomposition en un carré positif et trois carrés négatifs (ou en un carré négatif et trois carrés positifs).*

2. *Dans le système de coordonnées naturel e_α de V_4, g s'écrit en coordonnées locales par $g = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ où $g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta)$. g est alors vue comme une matrice carrée symétrique d'ordre 4 dont les composantes sont les $g_{\alpha\beta}$. On note alors $g = (g_{\alpha\beta})$. La matrice g est inversible et son inverse est noté $(g^{\alpha\beta})$. On a : $g^{\alpha\lambda}g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta$ (tenseur de Kronecker).*

Définition 1.3.2. *(Repère orthonormé)*

Le repère (e_α) est dit orthonormé dans (V_4, g) si g s'écrit : $g = ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ en signature $(+,-,-,-)$ ou $ds^2 = g = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ en signature $(-,+,+,+)$.

Un élement $x \in V_4$ est représenté par $x = (x^0, x^i)$ avec $x^0 = t$ appelée coordonnée temporelle et x^i coordonnée d'espace. Ainsi, pour tout système de coordonnées locales (x^α) dans V_4, x^0 représente le temps t et x^i l'espace. Cette représentation est dûe à Minkowski dans les années 1908. Cf [**?**].

Définition 1.3.3. *(Espace-temps) [7]*

Un espace-temps est la donnée d'un couple (V_4, g) avec (V_4, g) variété lorentzienne.

Exemple 1.3.1. 1. *$(\mathbb{R}^4, \eta)$ est l'espace-temps de Minkowski où la métrique η dite métrique de Minkowski est définie par : $\eta = -(dt)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ avec $\eta_{00} = -1$,*

$$\eta_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \;\; i = j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{cases} \quad \text{ou } \eta = (dt)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 \text{ (suivant la signature de } \eta).$$

2. *$(\mathbb{R} \times S^3, g)$ est l'espace-temps de Sitter. S^3 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^4$, la métrique g s'écrit :*
$g = dt^2 - a^2ch^2(\frac{t}{a})[d\alpha^2 + sin^2\alpha(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)]$.
$t \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
g est de signature $(+,-,-,-)$ avec $g_{00} = 1$, $g_{11} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})$, $g_{22} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})sin^2\alpha$, $g_{33} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})sin^2\alpha sin^2\theta$ et les autres coefficients sont nuls.

Un élément u de T_xV_4 est encore appelé vecteur contravariant et ses composantes dans une base (e_α) de T_xV_4 sont notées (u^α), c'est-à-dire $u = u^\alpha e_\alpha$. Un élément u^* de $T^*_xV_4$ est encore appelé vecteur covariant et ses composantes dans la base duale (θ^α) de (e_α) sont notées (u^*_α), c'est-à-dire $u^* = u^*_\alpha\theta^\alpha$. On sait que $g \equiv g_x : T_xV_4 \times T_xV_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, donc $\forall u \in T_xV_4$, u fixé, l'application $v \longmapsto g(u, v)$ est une forme linéaire sur T_xV_4, donc $u^* = g(u, .) \in T^*_xV_4$.

On a : $u^* = u^*_\alpha \theta^\alpha$ où $u^*_\alpha = u^*(e_\alpha)$. D'où

$$u^*_\alpha = u^*(e_\alpha) = g(u, e_\alpha) = g(u^\beta e_\beta, e_\alpha) = u^\beta g(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta} u^\beta.$$

Par analogie, avec l'inverse $g^{\alpha\beta}$ qui est une forme bilinéaire symétrique sur $T^*_x V_4$, on associe à tout vecteur covariant $u^* \in T^*_x V_4$ un vecteur contravariant par $u^\beta = g^{\alpha\beta} u^*_\alpha$. Ainsi g permet d'associer canoniquement à tout vecteur contravariant u un vecteur covariant u^* et réciproquement. Par la suite, u sera identifié à u^* et on parlera de u tout simplement et de ses composantes covariantes u_α et contravariantes u^β liées par les relations :
$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta$ et $u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta$.
La généralisation de ce résultat aux tenseurs d'ordre p quelconques est immédiate car un tenseur est une combinaison de tenseurs élémentaires de la forme $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p$. Ainsi, on a : $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\mu} T^{\gamma\mu}$, $T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu} T_{\gamma\mu}$, $T^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} T_{\mu\beta}$, $T^\alpha_\beta = g_{\beta\mu} T^{\mu\alpha}$.

1.3.2 Connexion linéaire

Définition 1.3.4. *(Connexion linéaire)[2]*

Une connexion linéaire sur V_4 est une application $\nabla : \mathcal{X}(V_4) \times \mathcal{X}(V_4) \longrightarrow \mathcal{X}(V_4)$ telle que pour tous $X, X', Y, Y' \in \mathcal{X}(V_4)$ et $f, g \in C^\infty(V_4)$ on ait :

1) $\nabla_{fX+gX'}(Y) = f\nabla_X(Y) + g\nabla_{X'}(Y)$
2) $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X(Y) + g\nabla_X(Y')$
3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$

*on dit que $\nabla_X Y$ est la **dérivée covariante de Y en direction de X**.*

Définition 1.3.5. *[2] Soit (U, ϕ) une carte sur V_4 et $\{x^\alpha\}$ les coordonnées associées pour lesquelles on note : $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Les **symboles de Christoffel** d'une connexion ∇ relativement aux coordonnées $\{x^\alpha\}$ sont les 64 fonctions $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \in C^\infty(V_4)$ définies par :*

$$\nabla_{\partial_\beta} \partial_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{3} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \partial_\lambda$$

Lemme 1.3.1. *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entièrement la connexion ∇. Plus précisément , pour $X = X^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} = X^\alpha \partial_\alpha$ et $Y = Y^\beta \dfrac{\partial}{\partial x^\beta} = Y^\beta \partial_\beta$ on a :*

$$\nabla_X Y = (XY^\lambda + X^\alpha Y^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta})\partial_\lambda$$

Preuve . *On developpe l'expression ,*

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^\beta \partial_\beta) \\ &= Y^\beta \nabla_X \partial_\beta + X(Y^\beta)\partial_\beta \\ &= Y^\beta X^\alpha \nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta + X(Y^\beta)\partial_\beta \\ &= Y^\beta X^\alpha \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\partial_\lambda + X(Y^\lambda)\partial_\lambda \\ &= (Y^\beta X^\alpha \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + X(Y^\lambda))\partial_\lambda\end{aligned}$$

■

Définition **1.3.6.** *[2]*

La torsion d'une connexion *est le tenseur de type* $(2,1)$ *défini par :*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \;\; \forall X,Y \in \mathcal{X}(V_4)$$

Remarque **1.3.2.**
– $T(X,Y)$ *est un champ de vecteurs*
– *De la définition, il ressort que* $T(X,Y) = -T(Y,X)$

Lemme **1.3.2.** *(Expression locale de la torsion d'une connexion)*

Si T *est la torsion d'une connexion* ∇ *, alors pour* $X = X^\alpha\partial_\alpha$ *,* $Y = Y^\beta\partial_\beta \in \mathcal{X}(V_4)$ *on a :*

$$T(X,Y) = X^\alpha Y^\beta(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\partial_\lambda$$

Preuve . *On a :*

$$\begin{aligned}T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= X^\alpha\partial_\alpha(Y^\beta)\partial_\beta + X^\alpha Y^\beta \nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta - Y^\beta\partial_\beta(x^\alpha)\partial_\alpha - Y^\beta X^\alpha \nabla_{\partial_\beta}\partial_\alpha - X^\alpha\partial_\alpha(Y^\beta)\partial_\beta + Y^\beta\partial_\beta(x^\alpha)\partial_\alpha \\ &= X^\alpha Y^\beta(\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta - \nabla_{\partial_\beta}\partial_\alpha) \\ &= X^\alpha Y^\beta(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\partial_\lambda\end{aligned}$$

■

Définition **1.3.7.** *[2] Soit* T *un tenseur de type* $(0,r)$ *sur* V_4 *.* ***La dérivée covariante*** ∇T *de* T *est le tenseur de type* $(0, r+1)$ *défini par :*

$$\nabla_X T(Y_1,\ldots,Y_r) = X(T(Y_1,\ldots,Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1,\ldots,\nabla_X Y_i,\ldots,Y_r) \;\; \forall X \in \mathcal{X}(V_4)$$

pour un tenseur de type (p,q) *on a :*

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{i_1 i_2\ldots i_q}_{j_1 j_2\ldots j_p} &= \partial_\alpha T^{i_1 i_2\ldots i_q}_{j_1 j_2\ldots j_p} + \Gamma^{i_1}_{\alpha\lambda} T^{\lambda i_2\ldots i_q}_{j_1 j_2\ldots j_p} + \Gamma^{i_2}_{\alpha\lambda} T^{i_1\lambda\ldots i_q}_{j_1 j_2\ldots j_p} + \cdots + \Gamma^{i_q}_{\alpha\lambda} T^{i_1 i_2\ldots\lambda}_{j_1 j_2\ldots j_p} - \Gamma^\lambda_{\alpha j_1} T^{i_1 i_2\ldots i_q}_{\lambda j_2\ldots j_p} - \Gamma^\lambda_{\alpha j_2} T^{i_1 i_2\ldots i_q}_{j_1\lambda\ldots j_p} \\ &\quad - \cdots - \Gamma^\lambda_{\alpha j_p} T^{i_1 i_2\ldots i_q}_{j_1 j_2\ldots\lambda}\end{aligned}$$

Exemple 1.3.2. • *Pour un tenseur de type* $(1,1)$,

$$\nabla_\alpha T^\lambda_\mu = \partial_\alpha T^\lambda_\mu + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} T^\gamma_\mu - \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} T^\lambda_\gamma .$$

- *Pour un tenseur de type* $(2,2)$,

$$\nabla_\nu T^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = \partial_\nu T^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} T^{\sigma\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\sigma} T^{\alpha\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^{\alpha\beta}_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} T^{\alpha\beta}_{\lambda\sigma} .$$

- *Pour un tenseur de type* $(0,2)$,

$$\nabla_\alpha T^{\gamma\beta} = \partial_\alpha T^{\gamma\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} T^{\lambda\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} T^{\gamma\lambda} .$$

Théorème et définition 1.3.1. *(Connexion de Levi-Civita)[2]*

Il existe sur V_4 une connexion linéaire et une seule ∇ telle que :

1. *∇ est sans torsion, c'est-à-dire $T = 0$,*
2. *$\nabla g = 0$.*

Une telle connexion est appelée connexion riemannienne ou connexion de Levi-Civita.

Proposition 1.3.1. *Les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices covariantes c'est-à-dire :*

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}$$

Preuve . *Considérons la torsion T de la connexion de Levi-Civita, alors d'après le lemme* (1.3.2) *et compte tenu du fait que $T = 0$ on a :* $X^\alpha Y^\beta (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\partial_\lambda = 0 \ \ \forall X, Y \in \mathcal{X}(V_4)$ *d'où* $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}$

■

1.3.3 Tenseur de Ricci

Propriété 1.3.1. *(Identités de Ricci)[3]*

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} . \tag{1.1}$$

la relation (*1.1*) *est appelée identités de Ricci.*

Proposition 1.3.2. *Les symboles de Christoffel en coordonnées locales s'obtiennent du tenseur métrique par :*

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) . \tag{1.2}$$

Preuve . *D'après les identités de Ricci, on a :*

$$\begin{aligned}\partial_\alpha g_{\mu\beta} &= g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\\ \partial_\beta g_{\alpha\mu} &= g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\\ \partial_\mu g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}g^{\lambda\mu}\partial_\alpha g_{\mu\beta} &= \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + g^{\lambda\mu}g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\\ &= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{\lambda\mu}\partial_\beta g_{\alpha\mu} &= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu}\\ &= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{\lambda\mu}\partial_\mu g_{\alpha\beta} &= g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g^{\lambda\mu}g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\\ &= \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) &= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} + \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\\ &= 2\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Ce qui donne alors le résultat (1.2).

■

Définition 1.3.8. *(Tenseur de courbure)[3]*

Le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann $R^\lambda_{\mu\alpha\beta}$ *associé à la connexion linéaire* ∇ *est un tenseur mixte de type* $(3,1)$ *sur* V_4 *défini par :*

$$R^\lambda_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\mu\alpha}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.3.3. *Le tenseur de courbure* $R^\lambda_{\mu\alpha\beta}$ *est antisymétrique par rapport aux deux dernières indices covariantes (* α *et* β*), c'est-à-dire*

$$R^\lambda_{\mu\alpha\beta} = -R^\lambda_{\mu\beta\alpha}.$$

Preuve . *D'après* (1.3)*, on a :*

$$R^\lambda_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\mu},$$

et

$$R^\lambda_{\mu\beta\alpha} = \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\mu}.$$

En utilisant la proposition (1.3.1)*, on a :*

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\mu\beta\alpha} &= -(\partial_\alpha \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}) \\ &= -R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}. \end{aligned}$$

■

Définition 1.3.9. *(Tenseur de Ricci) [1]*

Le tenseur de Ricci est le tenseur symétrique de composantes $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$ *obtenu par contraction de l'indice supérieur et du deuxième indice inférieur du tenseur de courbure.*
Son expression en fonction des coefficients de Christoffel est :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} + \Gamma^{r}_{\beta\alpha}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta r}. \tag{1.4}$$

Définition 1.3.10. *(courbure riemannienne)[1]*

La courbure riemannienne R *de* (V_4, g) *est le scalaire obtenu par contraction des deux indices du tenseur de Ricci :*

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{1.5}$$

CHAPITRE DEUX

TENSEUR D'EINSTEIN AVEC CONSTANTE COSMOLOGIQUE EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

La forme générale des équations d'Einstein est [1] :

$$R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta} + \Lambda g_{\lambda\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\lambda\beta} \tag{2.1}$$

où $(R_{\lambda\beta})$ est le tenseur de Ricci, $(g_{\lambda\beta})$ le tenseur métrique, R la courbure scalaire, Λ la constante cosmologique, G la constante gravitationnelle, c la célérité de la lumière dans le vide et $(T_{\lambda\beta})$ le tenseur impulsion-énergie. On pose

$$S_{\lambda\beta} = R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta} + \Lambda g_{\lambda\beta}$$

l'équation précédente devient alors :

$$S_{\lambda\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\lambda\beta} \tag{2.2}$$

$(S_{\lambda\beta})$ est le tenseur d'Einstein avec constante cosmologique, le but de ce chapitre est de déterminer les composantes de ce tenseur. Pour celà, nous calculons de façon explicite les coefficients de la métrique, les symboles de christoffel, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. Nous le faisons en coordonnées cylindriques pour lesquelles la métrique prend la forme :

$$ds^2 = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}dt^2 + e^{2(\eta-\gamma)}dr^2 + e^{2\gamma}(dz + Ad\theta)^2 + r^2e^{-2\gamma}d\theta^2$$

où α, η, γ et A sont des fonctions réelles qui dépendent de t et de r et qui sont périodiques par rapport à r.(cf[3])

2.1 Identification des coefficients de la métrique

Le tenseur métrique g est un tenseur d'ordre 2 déterminant le produit scalaire de 2 vecteurs dans l'espace , il permet alors de décrire la géométrie de l'espace-temps. Compte tenu du fait qu'en symétrie cylindrique l'espace-temps considéré est (t, r, z, θ) et que la forme quadratique associée à la métrique g est $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ avec $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ nous aurons :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}dt^2 + g_{01}dtdr + g_{02}dtdz + g_{03}dtd\theta + g_{10}drdt + g_{11}dr^2 + g_{12}drdz + g_{13}drd\theta + g_{20}dzdt \\ &\quad + g_{21}dzdr + g_{22}dz^2 + g_{23}dzd\theta + g_{30}d\theta dt + g_{31}d\theta dr + g_{32}d\theta dz + g_{33}d\theta^2 \\ &= -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}dt^2 + e^{2(\eta-\gamma)}dr^2 + e^{2\gamma}dz^2 + Ae^{2\gamma}dzd\theta + Ae^{2\gamma}d\theta dz + (A^2e^{2\gamma} + r^2e^{-2\gamma})d\theta^2 \end{aligned}$$

Par identification on obtient alors :

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}, \\ g_{11} &= e^{2(\eta-\gamma)}, \\ g_{22} &= e^{2\gamma}, \\ g_{23} &= Ae^{2\gamma}, \\ g_{33} &= A^2e^{2\gamma} + r^2e^{-2\gamma} \\ g_{01} &= g_{02} = g_{03} = g_{10} = g_{12} = g_{13} \\ &= g_{20} = g_{21} = g_{30} = g_{31} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

La forme matricielle de la métrique g est alors :

$$g = (g_{\lambda\beta}) = \begin{pmatrix} -\alpha e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\gamma} & Ae^{2\gamma} \\ 0 & 0 & Ae^{2\gamma} & r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $detg = -\alpha r^2 e^{4(\eta-\gamma)} \neq 0$ ([3]), donc la matrice g est inversible ; son inverse g^{-1} est alors donné par :[3]

$$g^{-1} = (g^{\lambda\beta}) = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} & -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2} & \frac{e^{2\gamma}}{r^2} \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que : les composantes non nulles de g^{-1} sont :

$$\begin{aligned}
g^{00} &= -\frac{e^{2(\eta-\gamma)}}{\alpha},\\
g^{11} &= e^{-2(\eta-\gamma)},\\
g^{22} &= e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2},\\
g^{23} &= -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2},\\
g^{33} &= \frac{e^{2\gamma}}{r^2}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel s'obtiennent à partir du tenseur métrique g grâce à l'expression (1.2). On dénombre 64 symboles de Christoffel et pour des raisons de symétrie et de la forme de la métrique, plusieurs d'entre eux sont nuls.

Proposition 2.2.1. *Les symboles de Christoffel sont :*

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha+\partial_t\eta-\partial_t\gamma,\\
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha+\partial_r\eta-\partial_r\gamma=\Gamma^0_{10},\\
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta-\partial_t\gamma),\\
\Gamma^0_{22} &= \frac{\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma},\\
\Gamma^0_{23} &= \frac{\partial_tA+2A\partial_t\gamma}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}=\Gamma^0_{32},\\
\Gamma^0_{33} &= -\frac{r^2\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta}+\frac{A\partial_tA+A^2\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma},\\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}\partial_r\alpha+\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma),\\
\Gamma^1_{01} &= \partial_t\eta-\partial_t\gamma=\Gamma^1_{10},\\
\Gamma^1_{11} &= \partial_r\eta-\partial_r\gamma,\\
\Gamma^1_{22} &= -\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= -\frac{\partial_r A + 2A\partial_r\gamma}{2}e^{-2\eta+4\gamma} = \Gamma^1_{32},\\
\Gamma^1_{33} &= (r^2\partial_r\gamma - r)e^{-2\eta} - (A\partial_r A + A^2\partial_r\gamma)e^{-2\eta+4\gamma},\\
\Gamma^2_{02} &= \partial_t\gamma - \frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{20},\\
\Gamma^2_{03} &= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{30},\\
\Gamma^2_{12} &= \partial_r\gamma - \frac{A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{21},\\
\Gamma^2_{13} &= \frac{\partial_r A}{2} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A}{r} - \frac{A^2\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{31},\\
\Gamma^3_{02} &= \frac{\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{20},\\
\Gamma^3_{03} &= -\partial_t\gamma + \frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{30},\\
\Gamma^3_{12} &= \frac{\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{21},\\
\Gamma^3_{13} &= -\partial_r\gamma + \frac{1}{r} + \frac{A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{31}.\\
\Gamma^0_{02} &= \Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{30} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21}\\
&= \Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{31} = \Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{30}\\
&= \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{01}\\
&= \Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22}\\
&= \Gamma^3_{00} = \Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{10} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23}\\
&= \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{33}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilisera les résultats de (2.3) et (2.4) et aussi le fait que* $\partial_2 g_{\mu\lambda} = \partial_3 g_{\mu\lambda} = 0$, $\forall \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3$ *car les fonctions* A, η, γ, α *ne dépendent pas de* z *et de* θ.

On a :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00})\\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{00}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)})\\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_r \alpha + \partial_r \eta - \partial_r \gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{02} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_2 g_{00} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{03} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_3 g_{00} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r \alpha + \alpha(\partial_r \eta - \partial_r \gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{01} - \partial_1 g_{01}) \\
&= \partial_t \eta - \partial_t \gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{21} + \partial_2 g_{01} - \partial_1 g_{02}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{31} + \partial_3 g_{01} - \partial_1 g_{03}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\
&= \partial_r \eta - \partial_r \gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{11}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{31} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}e^{-2(\eta-\gamma)} \times -2\partial_r e^{2\gamma} \\
&= -\partial_r \gamma e^{-2\eta+4\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{31} + \partial_3 g_{21} - \partial_1 g_{23}) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_r A + 2\partial_r \gamma A)e^{-2\eta+4\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\
&= (\partial_r \gamma r^2 - r)e^{-2\eta} - (A\partial_r A + A^2\partial_r \gamma)e^{-2\eta+4\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) \\
&= \frac{1}{\alpha}(\partial_t - \partial_t \gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{20} + \partial_2 g_{10} - \partial_0 g_{12}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{30} + \partial_3 g_{10} - \partial_0 g_{13}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{23} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{30} + \partial_3 g_{20} - \partial_0 g_{23}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}(\partial_t A + 2\partial_t \gamma A)e^{-2\eta+4\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3 g_{30} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}) \\
&= \frac{1}{\alpha}((A\partial_t A + A^2\partial_t \gamma)e^{-2\eta+4\gamma} - r^2\partial_t \gamma e^{-2\eta})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{02} - \partial_2 g_{01}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{03} - \partial_3 g_{01}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02} - \partial_2 g_{02}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{03} - \partial_3 g_{02}) \\
&= \partial_t\gamma - \frac{A\partial_t A e^{4\gamma}}{2r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}\partial_0 g_{23} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_0 g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2\partial_t A e^{4\gamma}}{2r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_1 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r e^{2\gamma} + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) \\
&= \partial_r\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_1 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{23} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{13}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_{frm[o]--} g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r A + 2A\partial_r\gamma - \frac{A^2 e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A - \frac{A}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_0 g_{23} + \frac{1}{2}g^{32}\partial_0 g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t e^{2\gamma} \\
&= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_0 g_{33} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_0 g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_0(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_0(Ae^{2\gamma}) \\
&= -\partial_t\gamma + \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{23} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_1 g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r e^{2\gamma} \\
&= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{23} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_r A}{2} - \frac{A}{r} - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A + 2A\partial_r\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{22} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\partial_t e^{2\gamma} \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{31} + \partial_\theta g_{13} - \partial_3 g_{11}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_2 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{23} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{10} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{10}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{30} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{10}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{10}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_2 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_2 g_{23} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2.3 Le tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci est un tenseur d'ordre 2 décrivant la déformation de l'espace-temps. Ses composantes sont obtenues à partir des symboles de Christoffel par la formule (1.4)

Proposition 2.3.1. *Les composantes du tenseur de Ricci sont :*

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\
&\quad - \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_t\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2r},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$R_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\
&\quad - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2 - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} R_{23} &= \frac{\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_t\alpha\partial_tA}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{2\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{A(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}-2\partial_rA\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_rA\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{\partial_rA}{2r}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{A(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}-\frac{A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad +\frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{r^2(\alpha\partial_{rr}\gamma-\partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta}-\frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad +\frac{r^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta}-\frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta}+\frac{A\partial_rA}{r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad +\frac{A^2(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}-4A\partial_rA\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta}-\frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+r\partial_r\gamma e^{-2\eta}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} R_{02} &= R_{03}=R_{20}=R_{30}=0, \\ R_{12} &= R_{13}=R_{21}=R_{31}=0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Preuve .

Dans cette preuve, on utilisera les symboles de Christoffel donnés par la proposition $(2.2.1)$ *et aussi le fait que* $\partial_2\Gamma^\lambda_{\nu\mu}=\partial_3\Gamma^\lambda_{\nu\mu}=0$, $\forall\nu,\mu,\lambda=0,1,2,3$.

On a :

$$R_{00}=(\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00}-\partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0})+(\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{00}-\Gamma^\lambda_{0\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0}).$$

Mais,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00}-\partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} &= \partial_0\Gamma^0_{00}+\partial_1\Gamma^1_{00}-\partial_0(\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{10}+\Gamma^2_{20}+\Gamma^3_{30}) \\ &= \partial_1\Gamma^1_{00}-\partial_0(\Gamma^1_{10}+\Gamma^2_{20}+\Gamma^3_{30}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{00}-\Gamma^{\lambda}_{0\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00}-\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00}-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01}+\Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00}-\Gamma^2_{00}\Gamma^0_{20}+\Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00}-\Gamma^3_{00}\Gamma^0_{30}\\
&\quad+\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00}-\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00}-\Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10}+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00}-\Gamma^2_{01}\Gamma^1_{20}+\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00}-\Gamma^3_{01}\Gamma^1_{30}+\Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00}\\
&\quad-\Gamma^0_{02}\Gamma^2_{00}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{00}-\Gamma^1_{02}\Gamma^2_{10}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{00}-\Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20}+\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{00}-\Gamma^3_{02}\Gamma^2_{30}+\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00}-\Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00}\\
&\quad+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{00}-\Gamma^1_{03}\Gamma^3_{10}+\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{00}-\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20}+\Gamma^3_{33}\Gamma^3_{00}-\Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30}\\
&= \Gamma^0_{00}(\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}+\Gamma^3_{03})+\Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13}-\Gamma^0_{10})-2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20}-(\Gamma^1_{01})^2-(\Gamma^2_{02})^2\\
&\quad-(\Gamma^3_{03})^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_1\Gamma^1_{00}-\partial_0(\Gamma^1_{10}+\Gamma^2_{20}+\Gamma^3_{30})+\Gamma^0_{00}(\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}+\Gamma^3_{03})\\
&\quad+\Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}+\Gamma^3_{13}-\Gamma^0_{10})-2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20}-(\Gamma^1_{01})^2-(\Gamma^2_{02})^2-(\Gamma^3_{03})^2.
\end{aligned}$$

On obtient finalement après calculs :

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2}+\alpha(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)-(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)+\frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)+\frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)\\
&\quad-\frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma}-2(\partial_t\gamma)^2-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha}+\frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)+\frac{\partial_r\alpha}{2r}.
\end{aligned}$$

$$R_{01}=(\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{01}-\partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 0})+(\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{01}-\Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0})$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{01}-\partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 0} &= \partial_0\Gamma^0_{01}-\partial_1\Gamma^0_{00}+\partial_1\Gamma^1_{10}-\partial_1\Gamma^1_{10}\\
&= \partial_0\Gamma^0_{01}-\partial_1\Gamma^0_{00}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{01}-\Gamma^{\lambda}_{1\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{00}-\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{10}+\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{10}-\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{10}+\Gamma^0_{10}\Gamma^2_{20}-\Gamma^0_{20}\Gamma^2_{10}+\Gamma^0_{10}\Gamma^3_{30}-\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{10}\\
&\quad+\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{01}-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11}+\Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11}-\Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11}+\Gamma^1_{10}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{20}\Gamma^2_{11}+\Gamma^1_{10}\Gamma^3_{31}-\Gamma^1_{30}\Gamma^3_{11}+\Gamma^2_{10}\Gamma^0_{02}\\
&\quad-\Gamma^2_{00}\Gamma^0_{12}+\Gamma^2_{10}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{10}\Gamma^1_{12}+\Gamma^2_{10}\Gamma^2_{22}-\Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{10}\Gamma^3_{32}-\Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12}+\Gamma^2_{10}\Gamma^0_{03}\\
&\quad-\Gamma^3_{00}\Gamma^0_{13}+\Gamma^3_{10}\Gamma^1_{13}-\Gamma^3_{10}\Gamma^1_{13}+\Gamma^3_{10}\Gamma^2_{23}-\Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13}+\Gamma^3_{10}\Gamma^3_{33}-\Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13}\\
&= \Gamma^0_{10}(\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}+\Gamma^3_{03})+\Gamma^1_{10}(\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{31})-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11}-\Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13}\\
&\quad-\Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \partial_0\Gamma^0_{01}-\partial_1\Gamma^0_{00}+\Gamma^0_{10}(\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}+\Gamma^3_{03})+\Gamma^1_{10}(\Gamma^1_{21}+\Gamma^3_{31})-\Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11}\\
&\quad-\Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12}-\Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13}-\Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13}.
\end{aligned}$$

D'où après calculs, on a

$$R_{01} = \frac{\partial_t \eta}{r} - 2\partial_t \gamma \partial_r \gamma + \frac{\partial_t A \partial_r A}{2r^2} e^{4\gamma}.$$

$$R_{11} = (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{11} - \partial_1 \Gamma^\lambda_{\lambda 1}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1}).$$

Or,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{11} - \partial_1 \Gamma^\lambda_{\lambda 1} &= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 \Gamma^0_{01} + \partial_1 \Gamma^1_{11} - \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_2 \Gamma^2_{11} - \partial_1 \Gamma^2_{21} + \partial_3 \Gamma^3_{11} - \partial_1 \Gamma^3_{31} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 (\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{21} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{11} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{31} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} \\
&\quad -\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{31} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{11} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{01} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{11} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31} \\
&\quad +\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{11} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{01} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{21} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\
&= \Gamma^0_{11}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{11}(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}) - (\Gamma^0_{10})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 \\
&\quad -2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_0 \Gamma^0_{11} - \partial_1 (\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^0_{11}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}) \\
&\quad +\Gamma^1_{11}(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}) - (\Gamma^0_{10})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 - 2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31}.
\end{aligned}$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t \alpha}{2\alpha^2}(\partial_t \eta - \partial_t \gamma) + \frac{1}{r}(\partial_r \eta - \partial_r \gamma) \\
&\quad - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2} e^{4\gamma} - 2(\partial_r \gamma)^2 - \frac{\partial_r \alpha}{2\alpha}(\partial_r \eta - \partial_r \gamma) + \frac{(\partial_r \alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{2\partial_r \gamma}{r}.
\end{aligned}$$

$$R_{22} = (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{22} - \partial_2 \Gamma^\lambda_{\lambda 2}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{22} - \partial_2 \Gamma^\lambda_{\lambda 2} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{22} = \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22} \\
&= \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{22}-\Gamma^{\lambda}_{2\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda 2} &= \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{22}-\Gamma^{0}_{20}\Gamma^{0}_{02}+\Gamma^{1}_{01}\Gamma^{0}_{22}-\Gamma^{1}_{20}\Gamma^{0}_{12}+\Gamma^{3}_{03}\Gamma^{0}_{22}-\Gamma^{3}_{20}\Gamma^{0}_{32}+\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{1}_{22}-\Gamma^{0}_{21}\Gamma^{1}_{02}+\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{22}\\
&\quad -\Gamma^{1}_{21}\Gamma^{1}_{12}+\Gamma^{3}_{13}\Gamma^{1}_{22}-\Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{32}+\Gamma^{0}_{20}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{0}_{22}\Gamma^{2}_{02}+\Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{12}+\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{2}_{22}-\Gamma^{3}_{22}\Gamma^{2}_{32}\\
&\quad +\Gamma^{0}_{30}\Gamma^{3}_{22}-\Gamma^{0}_{23}\Gamma^{3}_{02}+\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{22}-\Gamma^{1}_{23}\Gamma^{3}_{12}+\Gamma^{3}_{33}\Gamma^{3}_{22}-\Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{32}\\
&= \Gamma^{0}_{22}(\Gamma^{0}_{00}+\Gamma^{1}_{01}+\Gamma^{3}_{03}-\Gamma^{2}_{02})+\Gamma^{1}_{22}(\Gamma^{0}_{10}+\Gamma^{1}_{11}+\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{2}_{12})-2\Gamma^{3}_{20}\Gamma^{0}_{32}-2\Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{32}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_0\Gamma^{0}_{22}+\partial_1\Gamma^{1}_{22}+\Gamma^{0}_{22}(\Gamma^{0}_{00}+\Gamma^{1}_{01}+\Gamma^{3}_{03}-\Gamma^{2}_{02})+\Gamma^{1}_{22}(\Gamma^{0}_{10}+\Gamma^{1}_{11}+\Gamma^{3}_{13}-\Gamma^{2}_{12})\\
&\quad -2\Gamma^{3}_{20}\Gamma^{0}_{32}-2\Gamma^{3}_{21}\Gamma^{1}_{32}.
\end{aligned}$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&\quad -\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}.
\end{aligned}$$

$$R_{23}=(\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{32}-\partial_3\Gamma^{\lambda}_{\lambda 2})+(\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{32}-\Gamma^{\lambda}_{3\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda 2}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{32}-\partial_3\Gamma^{\lambda}_{\lambda 2} &= \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{32}=\partial_0\Gamma^{0}_{32}+\partial_1\Gamma^{1}_{32}+\partial_2\Gamma^{2}_{32}+\partial_3\Gamma^{3}_{32}\\
&= \partial_0\Gamma^{0}_{32}+\partial_1\Gamma^{1}_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{32}-\Gamma^{\lambda}_{3\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda 2} &= \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{32}-\Gamma^{0}_{30}\Gamma^{0}_{02}+\Gamma^{1}_{01}\Gamma^{0}_{32}-\Gamma^{1}_{30}\Gamma^{0}_{12}+\Gamma^{2}_{02}\Gamma^{0}_{32}-\Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{22}+\Gamma^{0}_{10}\Gamma^{1}_{32}-\Gamma^{0}_{31}\Gamma^{1}_{02}+\Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{32}\\
&\quad -\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{1}_{12}+\Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{32}-\Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{22}+\Gamma^{0}_{20}\Gamma^{2}_{32}-\Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{02}+\Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{32}-\Gamma^{1}_{32}\Gamma^{2}_{12}+\Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{32}-\Gamma^{2}_{32}\Gamma^{2}_{22}\\
&\quad +\Gamma^{0}_{30}\Gamma^{3}_{32}-\Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{02}+\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{32}-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{12}+\Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{32}-\Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{22}\\
&= \Gamma^{0}_{32}(\Gamma^{0}_{00}+\Gamma^{1}_{01})+\Gamma^{1}_{32}(\Gamma^{0}_{10}+\Gamma^{1}_{11})-\Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{22}-\Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{02}-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{12}-\Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{22}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$R_{23} = \partial_0\Gamma^{0}_{32}+\partial_1\Gamma^{1}_{32}+\Gamma^{0}_{32}(\Gamma^{0}_{00}+\Gamma^{1}_{01})+\Gamma^{1}_{32}(\Gamma^{0}_{10}+\Gamma^{1}_{11})-\Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{22}-\Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{02}-\Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{12}-\Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{22}.$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{23} &= \frac{\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{A(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&\quad -\frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}-2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&\quad -\frac{A(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{A(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}-\frac{A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma},
\end{aligned}$$

$$R_{33}=(\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33}-\partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 3})+(\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{33}-\Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 3}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33}-\partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 3} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33}=\partial_0\Gamma^0_{33}+\partial_1\Gamma^1_{33}+\partial_2\Gamma^2_{33}+\partial_3\Gamma^3_{33}\\ &= \partial_0\Gamma^0_{33}+\partial_1\Gamma^1_{33},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{33}-\Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 3} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{33}-\Gamma^0_{30}\Gamma^0_{03}+\Gamma^1_{01}\Gamma^0_{33}-\Gamma^1_{30}\Gamma^0_{13}+\Gamma^2_{02}\Gamma^0_{33}-\Gamma^2_{30}\Gamma^0_{23}+\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{33}-\Gamma^0_{31}\Gamma^1_{03}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33}\\ &\quad-\Gamma^1_{31}\Gamma^1_{13}+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{33}-\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23}+\Gamma^0_{20}\Gamma^2_{33}-\Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03}+\Gamma^1_{21}\Gamma^2_{33}-\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{33}\\ &\quad-\Gamma^2_{32}\Gamma^2_{23}+\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{33}-\Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03}+\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{33}-\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13}+\Gamma^2_{32}\Gamma^3_{33}-\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}\\ &= \Gamma^0_{33}(\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}-\Gamma^3_{03})+\Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}-\Gamma^3_{13})-2\Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03}-2\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23}.\end{aligned}$$

Donc,

$$R_{33} = \partial_0\Gamma^0_{33}+\partial_1\Gamma^1_{33}+\Gamma^0_{33}(\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}-\Gamma^3_{03})+\Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}-\Gamma^3_{13})-2\Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03}-2\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23}.$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}R_{33} &= \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}\\ &\quad+\frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{r^2(\alpha\partial_{rr}\gamma-\partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta}-\frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}\\ &\quad+\frac{r^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta}-\frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta}+\frac{A\partial_r A}{r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{(\partial_r A)^2}{2}e^{-2\eta+4\gamma}\\ &\quad+\frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}-4A\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta}-\frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\ &\quad-\frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+r\partial_r\gamma e^{-2\eta}.\end{aligned}$$

■

2.4 La courbure Riemannienne

Encore appelée constante de Ricci, la courbure Riemannienne notée R est un outil renseignant sur la courbure de l'espace-temps en assignant à chaque point de l'espace un nombre réel caractérisant la courbure en ce point. Elle est obtenue par contraction du tenseur de Ricci. Son expression est donnée par (1.5).

Proposition 2.4.1.

La courbure Riemannienne en symétrie cylindrique est donnée par :

$$\begin{aligned}R &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}\\ &\quad -\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma}\\ &\quad +\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Preuve .

$$\begin{aligned}R &= g^{\mu\beta}R_{\mu\beta}\\ &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + 2g^{23}R_{23} + g^{33}R_{33} \quad Car \quad g^{01}=g^{02}=g^{03}=g^{12}=g^{13}=0\end{aligned}$$

Mais,en utilisant la proposition 2.3.1 et aussi le résultat de (2.4), on a :

$$\begin{aligned}g^{00}R_{00} &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - (\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}\\ &\quad -\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\eta-\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}\\ &\quad +\frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{11}R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{\partial_r\eta-\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}\\ &\quad -\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} - (\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma}\\ &\quad -\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{22}R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\ &\quad +\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\ &\quad -\frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{(A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma} + \frac{(A^2(\partial_rA)^2}{2r^4}e^{-2\eta+10\gamma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2g^{23}R_{23} &= -\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\ &\quad +\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{4A\partial_rA\partial_r\gamma}{r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\ &\quad +\frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{2A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{A\partial_rA}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A^2(\partial_tA)^2}{\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma}\\ &\quad -\frac{A^2(\partial_rA)^2}{r^4}e^{-2\eta+10\gamma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{33}R_{33} &= \frac{\alpha\partial_{rr}\gamma-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&+\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A^2(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&+\frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{4A\partial_rA\partial_r\gamma}{r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&+\frac{A\partial_rA}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma}\\
&+\frac{A^2(\partial_rA)^2}{2r^4}e^{-2\eta+10\gamma}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&-\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma}\\
&+\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}.
\end{aligned}$$

■

2.5 Tenseur d'Einstein avec constante cosmologique

Le calcul des composantes du tenseur métrique, du tenseur de Ricci, de la courbure scalaire et des symboles de Christoffel ayant été achevé, nous pouvons à présent calculer les composantes du tenseur d'Einstein avec constante cosmologique $S_{\lambda\beta}$ données par :

$$S_{\lambda\beta}=R_{\lambda\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta}+\Lambda g_{\lambda\beta}.$$

Proposition 2.5.1. *Les composantes du tenseur d'Einstein avec constante cosmologique sont :*

$$S_{00} = \frac{\alpha\partial_r\eta}{r}-(\partial_t\gamma)^2-\alpha(\partial_r\gamma)^2-\frac{(\partial_tA)^2}{4r^2}e^{4\gamma}-\frac{\alpha(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma}-\Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)}; \tag{2.13}$$

$$S_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r}-2\partial_t\gamma\partial_r\gamma+\frac{\partial_tA\partial_rA}{2r^2}e^{4\gamma}; \tag{2.14}$$

$$S_{11} = \frac{\partial_r\eta}{r}+\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}-(\partial_r\gamma)^2-\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}-\frac{(\partial_tA)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma}+\Lambda e^{2(\eta-\gamma)}; \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= -\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&+\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-2\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}+\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&-\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}+(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+4\gamma}-\frac{3(\partial_tA)^2}{4\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\frac{3(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{-2\eta+8\gamma}+\Lambda e^{2\gamma} \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
S_{23} &= \frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&+\frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&-\frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{2A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&+\frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} + A(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{3A(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{-2\eta+8\gamma} \\
&-\frac{3A(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \Lambda A e^{2\gamma}; \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{33} &= \frac{r^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} - \frac{r^2(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}e^{-2\eta} + \frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha}e^{-2\eta} + \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha^2}e^{-2\eta} - \frac{r^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta} \\
&-\frac{r^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta} + r^2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta} + \frac{A^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&+\frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&+\frac{A^2\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&+\frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{4}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{2A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} + A^2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+4\gamma} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} \\
&+\frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A\partial_r A}{r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{3A^2(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{-2\eta+8\gamma} \\
&-\frac{3A^2(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \Lambda(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

$$S_{02} = S_{03} = S_{12} = S_{13} = 0 \qquad (2.20)$$

Preuve . *On a :*

$$\begin{aligned}
S_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} + \Lambda g_{00}; \\
S_{01} &= R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} + \Lambda g_{01} = R_{01} \quad car \quad g_{01} = 0; \\
S_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} + \Lambda g_{11}; \\
S_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} + \Lambda g_{22}; \\
S_{23} &= R_{23} - \frac{1}{2}Rg_{23} + \Lambda g_{23}; \\
S_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} + \Lambda g_{33}; \\
S_{02} &= R_{02} - \frac{1}{2}Rg_{02} + \Lambda g_{02} = 0 \quad car \quad R_{02} = g_{02} = 0; \\
S_{03} &= R_{03} - \frac{1}{2}Rg_{03} + \Lambda g_{03} = 0 \quad car \quad R_{03} = g_{03} = 0; \\
S_{12} &= R_{12} - \frac{1}{2}Rg_{12} + \Lambda g_{12} = 0 \quad car \quad R_{12} = g_{12} = 0; \\
S_{13} &= R_{13} - \frac{1}{2}Rg_{13} + \Lambda g_{13} = 0 \quad car \quad R_{13} = g_{13} = 0;
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les propositions 2.3.1 et 2.4.1 et le résultat de (2.3), on obtient les résultats voulus.

■

★ ★ CHAPITRE TROIS ★ ★

ECRITURE DES EQUATIONS

Dans ce chapitre, nous calculons en symétrie cylindrique les composantes du tenseur impulsion-énergie lié au fluide parfait; ce qui nous permet avec les résultats du chapitre précédent d'écrire les équations que nous recherchons.

3.1 Tenseur impulsion-énergie lié au fluide parfait

Le tenseur impulsion-énergie décrit la distribution de la matière et de l'énergie dans l'univers. Son expression liée au fluide parfait est (cf[4]) :

$$T_{\lambda\beta} = (p+\rho)u_\lambda u_\beta + pg_{\lambda\beta} \;;\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

où $(g_{\lambda\beta})$ est la métrique; ρ est la densité énergétique de masse du fluide; $u = (u_\beta) = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ est le vecteur vitesse unitaire temporel du fluide, il est orienté vers le futur c'est à dire $u_0 > 0$; k est la vitesse du son dans le fluide avec $0 \leq k \leq 1$ et on choisit $p = k^2\rho$ la pression du fluide[4].

Proposition 3.1.1. *Le tenseur impulsion-énergie est symétrique et ses composantes en symétrie cylindrique sont :*

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \rho[(1+k^2)(u_0)^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}].\\
T_{01} &= \rho(1+k^2)u_0u_1.\\
T_{02} &= \rho(1+k^2)u_0u_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{03} &= \rho(1+k^2)u_0u_3.\\
T_{11} &= \rho[(1+k^2)(u_1)^2 + k^2e^{2(\eta-\gamma)}].\\
T_{12} &= \rho(1+k^2)u_1u_2.\\
T_{13} &= \rho(1+k^2)u_1u_3.\\
T_{22} &= \rho[(1+k^2)(u_2)^2 + k^2e^{2(\gamma)}].\\
T_{23} &= \rho[(1+k^2)u_2u_3 + k^2Ae^{2(\gamma)}].\\
T_{33} &= \rho[(1+k^2)(u_3)^2 + k^2(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})].
\end{aligned}$$

Preuve .

-Le tenseur d'Einstein étant symétrique, on conclut par la relation (2.2) *qu'il en est de même pour le tenseur impulsion-énergie.*

-En utilisant la relation (3.1) *et en remplaçant chaque composante de la métrique par sa valeur on a :*

$$\begin{aligned}
T_{00} &= (p+\rho)(u_0)^2 + pg_{00} = (k^2\rho+\rho)(u_0)^2 - \alpha k^2\rho e^{2(\eta-\gamma)} = \rho[(1+k^2)(u_0)^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}].\\
T_{11} &= (p+\rho)(u_1)^2 + pg_{11} = (k^2\rho+\rho)(u_1)^2 + k^2\rho e^{2(\eta-\gamma)} = \rho[(1+k^2)(u_1)^2 + k^2e^{2(\eta-\gamma)}].\\
T_{22} &= (p+\rho)(u_2)^2 + pg_{22} = (k^2\rho+\rho)(u_2)^2 + k^2\rho e^{2(\eta-\gamma)} = \rho[(1+k^2)(u_2)^2 + k^2e^{2\gamma}].\\
T_{23} &= (p+\rho)u_2u_3 + pg_{23} = (k^2\rho+\rho)u_2u_3 + Ak^2\rho e^{2\gamma} = \rho[(1+k^2)u_2u_3 + Ak^2e^{2\gamma}].\\
T_{33} &= (p+\rho)(u_3)^2 + pg_{33} = (k^2\rho+\rho)(u_3)^2 + (r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})k^2\rho = \rho[(1+k^2)(u_3)^2 + k^2(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})]\\
T_{01} &= (p+\rho)u_0u_1 + pg_{01} = (k^2\rho+\rho)u_0u_1 = \rho(1+k^2)u_0u_1.\\
T_{02} &= (p+\rho)u_0u_2 + pg_{02} = (k^2\rho+\rho)u_0u_2 = \rho(1+k^2)u_0u_2.\\
T_{03} &= (p+\rho)u_0u_3 + pg_{03} = (k^2\rho+\rho)u_0u_3 = \rho(1+k^2)u_0u_3.\\
T_{12} &= (p+\rho)u_1u_2 + pg_{12} = (k^2\rho+\rho)u_1u_2 = \rho(1+k^2)u_1u_2.\\
T_{13} &= (p+\rho)u_1u_3 + pg_{13} = (k^2\rho+\rho)u_1u_3 = \rho(1+k^2)u_1u_3.
\end{aligned}$$

■

3.2 Ecriture des équations d'Einstein avec constante cosmologique

Les équations d'Einstein données par (2.2) s'écrivent :

$$S_{\lambda\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\lambda\beta} \tag{3.2}$$

Dans la suite, nous prendrons $\frac{8\pi G}{c^4} = K$. Suivant les composantes, ces équations donnent :

$$S_{00} = KT_{00} \tag{3.3}$$

$$S_{01} = KT_{01} \tag{3.4}$$

$$S_{02} = KT_{02} \tag{3.5}$$

$$S_{03} = KT_{03} \tag{3.6}$$

$$S_{11} = KT_{11} \tag{3.7}$$

$$S_{12} = KT_{12} \tag{3.8}$$

$$S_{13} = KT_{13} \tag{3.9}$$

$$S_{22} = KT_{22} \tag{3.10}$$

$$S_{23} = KT_{23} \tag{3.11}$$

$$S_{33} = KT_{33} \tag{3.12}$$

Remarque 3.2.1. *les solutions des équations(3.5), (3.6), (3.8) et (3.9) sont triviales puisque S_{02}, S_{03}, S_{12} et S_{13} sont tous nuls. On obtient alors $u_2 = u_3 = 0$ car $u_0 > 0$*

En remplaçant les membres de gauche par leurs valeurs dans les équations (3.3), (3.4), (3.7), (3.10), (3.11) et (3.12) on obtient respectivement :

$$\frac{\alpha\partial_r\eta}{r} - (\partial_t\gamma)^2 - \frac{e^{4\gamma}}{4r^2}(\partial_t A)^2 - \frac{\alpha e^{4\gamma}}{4r^2}(\partial_r A)^2 - \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \alpha\Lambda e^{2(\eta-\gamma)} = KT_{00}. \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A\partial_r A = KT_{01}. \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial_r\eta}{r} + \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} - (\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \Lambda e^{2(\eta-\gamma)} = KT_{11}. \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
&e^{-2\eta+4\gamma}[\frac{2}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma) - \frac{1}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta) + \frac{1}{2\alpha}\partial_{rr}\alpha + \frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} + \frac{1}{2\alpha^2}(\partial_t\alpha)\\
&(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma) - \frac{2\partial_r\gamma}{r} - \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + (\partial_r\gamma)^2 - \frac{1}{4\alpha^2}(\partial_r\alpha)^2 - \frac{3e^4\gamma}{4r^2\alpha}((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2)] + \Lambda e^{2\gamma}\\
&= KT_{22}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
&e^{-2\eta+4\gamma}[\frac{2A}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma) - \frac{A}{\alpha}(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta) + \frac{1}{2\alpha}(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A) + \frac{A}{2\alpha^2}\partial_t\alpha\partial_t\eta - \frac{3Ae^{4\gamma}}{4r^2\alpha}((\partial_t A)^2\\
&-\alpha(\partial_r A)^2) - \frac{1}{4\alpha^2}\partial_t\alpha\partial_t A + \frac{2}{\alpha}\partial_t A\partial_t\gamma - 2\partial_r A\partial_r\gamma - \frac{A}{\alpha^2}\partial_t\gamma\partial_t\alpha - \frac{1}{4\alpha}\partial_r A\partial_r\alpha - \frac{A}{\alpha}(\partial_t\gamma)^2\\
&+\frac{A}{2\alpha r}\partial_r\alpha - \frac{2A}{r}\partial_r\gamma + \frac{\partial rA}{2r} - \frac{A(\partial r\alpha)^2}{4(\alpha)^2} + \frac{A\partial rr\alpha}{2\alpha} + \frac{A\partial r\alpha\partial r\eta}{2\alpha} - \frac{A\partial r\alpha\partial r\gamma}{\alpha} + A(\partial r\gamma)^2] + \Lambda Ae^{2\gamma}\\
&= KT_{23}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$
\begin{aligned}
&e^{-2\eta}[\frac{r^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}-\frac{r^2(\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}+\frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha}+\frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2(\alpha)^2}-\frac{r^2(\partial_r\alpha)^2}{4(\alpha)^2}-\frac{r^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}+r^2(\partial_r\gamma)^2] \\
&+e^{-2\eta+4\gamma}[\frac{A^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}-\frac{A^2(\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}+\frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}+\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha} \\
&+\frac{A^2\partial_r\alpha(\partial_r\eta-2\partial_r\gamma)}{2\alpha}+\frac{A^2\partial_t\alpha(\partial_t\eta-2\partial_t\gamma)}{2(\alpha)^2}-\frac{A^2(\partial_r\alpha)^2}{4(\alpha)^2}+\frac{A^2\partial_r\alpha}{2\alpha r}-\frac{A^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}+\frac{(\partial_tA)^2}{4\alpha} \\
&-\frac{(\partial rA)^2}{4}-\frac{2\partial_r\gamma A^2}{r}+A^2(\partial_r\gamma)^2-4A\partial_rA\partial_r\gamma+\frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}-\frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha}-\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2(\alpha)^2}+\frac{A\partial_rA}{r} \\
&+\frac{3A^2(\partial_rA)^2e^{4\gamma}}{4r^2}-\frac{3A^2(\partial_tA)^2e^{4\gamma}}{4\alpha r^2}]+\Lambda(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})=KT_{33}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Remarque 3.2.2. *Puisque $u_2=u_3=0$, on déduit que $T_{23}=AT_{22}$.*

Proposition 3.2.1. *Si l'on pose $\varphi=-g^{00}T_{00}K,\ J=-\frac{g^{11}}{\sqrt{\alpha}}T_{01}K,\ P_1=g^{11}T_{11}K,\ P_2=T_{22}e^{-2\gamma}K$ et $P_3=\frac{e^{2\gamma}}{r^2}T_{33}K$; le système formé par les équations d'Einstein est équivalent au système d'équations suivant :*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
\frac{\partial_r\eta}{r}=\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}+(\partial_r\gamma)^2+\frac{(\partial_tA)^2e^{4\gamma}}{4\alpha r^2}+\frac{(\partial_rA)^2e^{4\gamma}}{4r^2}+e^{2(\eta-\gamma)}(\Lambda+\varphi)\\
\frac{\partial_t\eta}{r}=2\partial_t\gamma\partial_r\gamma-\frac{\partial_rA\partial_tAe^{4\gamma}}{2r^2}-\sqrt{\alpha}e^{2(\eta-\gamma)}J\\
\frac{\partial_r\alpha}{2}=\alpha re^{2(\eta-\gamma)}(P_1-\varphi-2\Lambda)\\
\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A=\frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha}+\frac{\partial_rA\partial_r\alpha}{2}-4\partial_tA\partial_t\gamma+4\alpha\partial_rA\partial_r\gamma-\frac{\alpha\partial_rA}{r}\\
\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma=\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2}+\frac{\alpha\partial_r\gamma}{r}+\frac{e^{4\gamma}}{2r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)+\frac{\alpha}{2}e^{2(\eta-\gamma)}(\varphi-P_1+P_2-P_3+2\Lambda)\\
\partial_{tt}\eta-\alpha\partial_{rr}\eta=\frac{\partial_{rr}\alpha}{2}+\frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2}+\frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha}-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha}+\alpha(\partial_r\gamma)^2-(\partial_t)^2+\frac{e^{4\gamma}}{4r^2}((\partial_tA)^2-\alpha(\partial_rA)^2)\\
-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_3-\Lambda)
\end{array}
\right.
$$

Preuve .

-D'après (3.13) on a :

$$\frac{\alpha\partial_r\eta}{r}=(\partial_t\gamma)^2+\frac{e^{4\gamma}}{4r^2}(\partial_tA)^2+\frac{\alpha e^{4\gamma}}{4r^2}(\partial_rA)^2+\alpha(\partial_r\gamma)^2+\alpha\Lambda e^{2(\eta-\gamma)}+KT_{00}.$$

c'est à dire que :

$$\frac{\partial_r\eta}{r}=\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}+(\partial_r\gamma)^2+\frac{(\partial_tA)^2e^{4\gamma}}{4\alpha r^2}+\frac{(\partial_rA)^2e^{4\gamma}}{4r^2}+e^{2(\eta-\gamma)}(\Lambda-g^{00}T_{00}K)$$

d'où :

$$\frac{\partial_r\eta}{r}=\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}+(\partial_r\gamma)^2+\frac{(\partial_tA)^2e^{4\gamma}}{4\alpha r^2}+\frac{(\partial_rA)^2e^{4\gamma}}{4r^2}+e^{2(\eta-\gamma)}(\Lambda+\varphi)\tag{3.19}$$

-D'après (3.14) on a :

$$\frac{\partial_t\eta}{r}=2\partial_t\gamma\partial_r\gamma-\frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_tA\partial_rA+KT_{01}$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial_t\eta}{r} = 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma - \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A\partial_r A - \sqrt{\alpha}g_{11}J$$

d'où :

$$\frac{\partial_t\eta}{r} = 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma - \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A\partial_r A - \sqrt{\alpha}e^{2(\eta-\gamma)}J \tag{3.20}$$

-D'après (3.15) *on a :*

$$\frac{\partial_r\alpha}{2r} = -\frac{\alpha\partial_r\eta}{r} + \alpha(\partial r\gamma)^2 + (\partial_t\gamma)^2 + \frac{(\partial_t A)^2e^{4\gamma}}{4r^2} + \frac{\alpha(\partial_r A)^2e^{4\gamma}}{4r^2} - \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} + \alpha KT_{11}$$

en utilisant l'expression de $\frac{\partial_r\eta}{r}$ *obtenue à l'équation* (3.19) *et en multipliant par* r *on obtient après simplifications :*

$$\frac{\partial_r\alpha}{2} = -\alpha re^{2(\eta-\gamma)}(2\Lambda+\varphi) + \alpha rT_{11}K$$

c'est à dire :

$$\frac{\partial_r\alpha}{2} = -\alpha re^{2(\eta-\gamma)}(2\Lambda+\varphi) + \alpha rP_1g_{11}$$

d'où :

$$\frac{\partial_r\alpha}{2} = \alpha re^{2(\eta-\gamma)}(P_1 - 2\Lambda - \varphi) \tag{3.21}$$

-D'après (3.15) *on a :*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta \;&=\; -\alpha e^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}d + 2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma) + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} + \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha}\\ &\quad -\frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} - (\partial_r\gamma)^2 + \alpha(\partial_r)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} - \frac{3((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2)}{4r^2}e^{4\gamma} + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\end{aligned}$$

d'après (3.17) *on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha} \;&=\; (KT_{23} - \Lambda Ae^{2\gamma})e^{2\eta-4\gamma} - \frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{A(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha} - \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}\\ &\quad -\frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} - \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} + \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r} + \frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{2A\partial_r\gamma}{r}\\ &\quad -\frac{\partial_r A}{2r} + \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2} + \frac{\partial_r A(\partial_r\alpha}{4\alpha} - \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha} + 2\partial_r A\partial_r\gamma - A(\partial_r\gamma)^2 - \frac{3A(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma}\\ &\quad +\frac{3A(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma}\end{aligned}$$

en remplaçant $\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta$ *par son expression précédente dans la dernière égalité et en la multipliant par* 2α *on obtient après simplifications :*

$$\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A = 2\alpha de^{2\eta-4\gamma}(T_{23} - AT_{22}) + \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha} + \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{2} - \frac{\alpha\partial_r A}{r} - 4\partial_t A\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_r A\partial_r\gamma$$

or d'après la remarque $(3.2.2)$, $T_{23} - AT_{22} = 0$ *d'où :*

$$\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A = \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha} + \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{2} - \frac{\alpha\partial_r A}{r} - 4\partial_t A\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_r A\partial_r\gamma \tag{3.22}$$

-En utilisant (3.18), *en remplaçant* $\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta$ *par son expression précédente et en utilisant l'expression de* $\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A$ *donnée à l'équation* (3.21), *on a après simplifications :*

$$\begin{aligned} -\frac{2r^2}{\alpha}(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta} &= KT_{33} - r^2e^{-4\gamma}KT_{22} - A^2KT_{22} - \frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha}e^{-2\eta} - \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2}e^{-2\eta} + \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} \\ &\quad -2r\partial_r\gamma e^{-2\eta} - \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= -\frac{\alpha}{2r^2}KT_{33}e^{2\eta} + \frac{\alpha}{2}e^{2\eta-4\gamma}KT_{22} + \frac{\alpha A^2}{2r^2}e^{2\eta}KT_{22} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} - \frac{\partial_r\alpha}{4r} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} \\ &\quad + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} \end{aligned}$$

en utilisant l'équation (3.20) *on a :*

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha}{2}e^{2(\eta-\gamma)}(KT_{22}e^{-2\gamma} - \frac{1}{r^2}KT_{33}e^{2\gamma} + 2\Lambda + \varphi - P_1) + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} \\ &\quad + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} \end{aligned}$$

d'où :

$$\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma = \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \frac{\alpha}{2}e^{2(\eta-\gamma)}(\varphi - P_1 + 2\Lambda + P_2 - P_3) \tag{3.23}$$

-On a vu précedemment que :

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= -\alpha e^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}K + 2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma) + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} + \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha} \\ &\quad - \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} - \frac{3((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2)}{4r^2}e^{4\gamma} + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \end{aligned}$$

en remplaçant $\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma$ *par son expression donnée à l'équation* (3.23) *on obtient après simplifications :*

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \alpha e^{2(\eta-\gamma)}(\varphi - P_1 + 2\Lambda + P_2 - P_3) \\ &\quad + \Lambda\alpha e^{2(\eta-\gamma)} - \alpha e^{2(\eta-2\gamma)}T_{22}K + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} \end{aligned}$$

d'où en remplaçant $\frac{\partial_r\alpha}{2r}$ *par son expression donnée par* (3.21) *on a après simplifications :*

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \alpha e^{2(\eta-\gamma)}(P_3 - \Lambda) + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - (\partial_t\gamma)^2 \\ &\quad + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Les équations $(3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23)$ *et* (3.24) *forment le système recherché.*

3.3 Les équations d'Euler

Remarque 3.3.1. $u^2 = u^3 = 0$. *En effet,* $u^\alpha = g^{\alpha\beta}u_\beta$ *d'où* $u^2 = g^{2\beta}u_\beta = g^{20}u_0 + g^{21}u_1 + g^{22}u_2 + g^{23}u_3 = 0$ *et* $u^3 = g^{3\beta}u_\beta = g^{30}u_0+g^{31}u_1+g^{32}u_2+g^{33}u_3 = 0$ *car* $g^{20} = g^{21} = g^{30} = g^{31} = u_2 = u_3 = 0$

Lemme 3.3.1. *Si* $u = (u_\lambda)$ *est le vecteur vitesse unitaire temporel du fluide on a :*

$$(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)} \tag{3.25}$$

Preuve . *Le vecteur u étant unitaire on a* $g_{\lambda\beta}u^\lambda u^\beta = -1 \quad , \forall \lambda, \beta = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} g_{\lambda\beta}u^\lambda u^\beta = -1 \quad &\Longrightarrow \quad g_{0\beta}u^0u^\beta + g_{1\beta}u^1u^\beta + g_{2\beta}u^2u^\beta + g_{3\beta}u^3u^\beta = -1 \\ &\Longrightarrow \quad g_{00}(u^0)^2 + 2g_{01}u^0u^1 + 2g_{02}u^0u^2 + 2g_{03}u^0u^3 + g_{11}(u^1)^2 + 2g_{12}u^1u^2 + 2g_{13}u^1u^3 \\ &\qquad +g_{22}(u^2)^2 + 2g_{23}u^2u^3 + g_{33}(u^3)^2 = -1 \end{aligned}$$

or $g_{01} = g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0$ *on obtient alors :*

$$g_{00}(u^0)^2 + g_{11}(u^1)^2 + g_{22}(u^2)^2 + 2g_{23}u^2u^3 + g_{33}(u^3)^2 = -1$$

d'après la remarque 3.3.1, on a $u^2 = u^3 = 0$ *et par suite ,*

$$\begin{aligned} g_{00}(u^0)^2 + g_{11}(u^1)^2 = -1 \quad &\Longrightarrow \quad -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}(u^0)^2 + e^{2(\eta-\gamma)}(u^1)^2 = -1 \\ &\Longrightarrow \quad \alpha(u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)} \end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. *On a le résultat suivant :*

$$\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \ , \forall \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \tag{3.26}$$

où S *est le tenseur d'Einstein obtenu au chapitre 2*

Preuve . *cf[1]*

Remarque 3.3.2. *Puisque* $S^{\alpha\beta} = KT^{\alpha\beta}$*, l'équation (3.26) est équivalente à :*

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \ , \forall \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \tag{3.27}$$

l'équation (3.27) traduit la conservation du tenseur impulsion énergie lié au fluide .

Lemme 3.3.2. *Pour tout* $\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3$*, on a* $(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta = 0$ *.*

Preuve . *u étant unitaire, on a :* $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1 \ \forall \alpha, \beta$, *alors :*

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta) = 0 \ \forall \lambda \qquad & \Rightarrow \nabla_\lambda(g_{\alpha\beta})u^\alpha u^\beta + g_{\alpha\beta}\nabla_\lambda(u^\alpha)u^\beta + g_{\alpha\beta}u^\alpha\nabla_\lambda(u^\beta) = 0 \\
& \Rightarrow g_{\alpha\beta}\nabla_\lambda(u^\alpha)u^\beta + \nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0 \\
& \Rightarrow \nabla_\lambda(u^\alpha)g_{\alpha\beta}u^\beta + \nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0 \\
& \Rightarrow \nabla_\lambda(u^\alpha)u_\alpha + \nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0.
\end{aligned}$$

En particulier, on prend $\alpha = \beta$ *et on obtient,* $2\nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0$ *d'où,*$\nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0.$

■

Proposition 3.3.1. *La relation de conservation* (3.27) *se réduit à l'équation :*

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + (1+k^2)\rho(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0 \tag{3.28}$$

Preuve . *D'après* (3.27)*, on a :* $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \ \forall \alpha, \beta = 0,1,2,3$. *Et d'après* (3.1)*,*
$T^{\alpha\beta} = (p+\rho)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta = 0,1,2,3$ *avec* $p = k^2\rho$. *On a alors,*
$T^{\alpha\beta} = (1+k^2)\rho u^\alpha u^\beta + (k^2\rho)g^{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta = 0,1,2,3.$

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \iff & \nabla_\alpha[(1+k^2)\rho u^\alpha u^\beta + (k^2\rho)g^{\alpha\beta}] = 0 \\
\iff & (1+k^2)(\nabla_\alpha\rho)u^\alpha u^\beta + (1+k^2)\rho(\nabla_\alpha u^\alpha)u^\beta + (1+k^2)\rho u^\alpha(\nabla_\alpha u^\beta) + k^2(\nabla_\alpha\rho)g^{\alpha\beta} \\
& + k^2\rho(\nabla_\alpha g^{\alpha\beta}) = 0
\end{aligned}$$

puisque $\nabla_\alpha g^{\alpha\beta} = 0$, *on a alors :*

$$(1+k^2)(\nabla_\alpha\rho)u^\alpha u^\beta + (1+k^2)\rho(\nabla_\alpha u^\alpha)u^\beta + (1+k^2)\rho u^\alpha(\nabla_\alpha u^\beta) + (\nabla_\alpha\rho)g^{\alpha\beta} = 0$$

En multipliant l'équation ci-dessus par u_β*, on obtient l'équation suivante :*

$$(1+k^2)(\nabla_\alpha\rho)u^\alpha u^\beta u_\beta + (1+k^2)\rho(\nabla_\alpha u^\alpha)u^\beta u_\beta + (1+k^2)\rho u^\alpha(\nabla_\alpha u^\beta)u_\beta + (\nabla_\alpha\rho)g^{\alpha\beta}u_\beta = 0;$$

Puisque $u^\beta u_\beta = -1$, *on a :*

$$-(\nabla_\alpha\rho)u^\alpha - (1+k^2)\rho(\nabla_\alpha u^\alpha) + (1+k^2)\rho u^\alpha(\nabla_\alpha u^\beta)u_\beta = 0.$$

Et d'après le lemme (3.3.2), $(\nabla_\alpha u^\beta)u_\beta = 0$, *on obtient*

$$(\nabla_\alpha\rho)u^\alpha + (1+k^2)\rho(\nabla_\alpha u^\alpha) = 0.$$

Puisque $u^2 = u^3 = 0$, *on obtient :*

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + (1+k^2)\rho(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0.$$

■

Remarque 3.3.3. *Les équations (3.25) et (3.28) sont appelées les équations d'Euler.*

Remarque 3.3.4. *Les équations* (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.25) *et* (3.28) *forment un système de* 8 *équations à* 7 *inconnues* $\alpha, \eta, \gamma, A, \rho, u_0, u_1$ *appelé système complet d'Einstein-Euler en symétrie cylindrique. C'est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre dont les* 7 *inconnues sont toutes des fonctions réelles des variables réelles* t *et* r*. Compte tenu du fait que le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues, certaines équations peuvent être considérées comme des équations de contraintes et d'autres comme des équations d'évolution.*

Remarque 3.3.5. *L'existence des solutions du système d'Einstein-Euler requiert la présence de données initiales. En tenant compte de la singularité à* $t = 0$*, ces données initiales sont prescrites à* $t = t_0 > 0$ *par :*
$\eta(t_0, r) = \eta_0(r),\ \partial_t\eta(t_0, r) = \eta_1(r),\ \alpha(t_0, r) = \alpha_0(r),\ \gamma(t_0, r) = \gamma_0(r),\ \partial_t\gamma(t_0, r) = \gamma_1(r),$
$A(t_0, r) = A_0(r),\ \partial_t A(t_0, r) = A_1(r),\ \rho(t_0, r) = \rho_0(r),\ \partial_t\rho(t_0, r) = \rho_1(r),\ \partial_t\alpha(t_0, r) = \alpha_1(r),$
$u(t_0, r) = u_0(r),\ \partial_t u(t_0, r) = u_1(r).$
Il est alors question d'étudier l'existence locale et globale dans le temps du problème de Cauchy pour le système d'Einstein-Euler en symétrie cylindrique, c'est un problème qui demeure ouvert jusqu'à présent.

3.4 Les équations d'Euler, cas homogène

Ici, toutes les fonctions ne dépendent que du temps (de la variable t), et dans ce cas, les équations d'Euler deviennent :

$$(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)} \tag{3.29}$$

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (1 + k^2)\rho\nabla_0 u^0 = 0 \tag{3.30}$$

Proposition 3.4.1. *Pour des données initiales prescrites à* $t = t_0 > 0$ *par* $u^0(t_0) = c_0$ *et* $\rho(t_0) = \rho_0$*, on a :*

$$u^0(t) = c_0\left(\frac{\rho_0}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{1+k^2}} \quad et \quad (u^1(t))^2 = \frac{c_0^2(\rho_0)^{\frac{1}{1+k^2}}\alpha(t) - (\rho(t)^{\frac{1}{1+k^2}})^2 e^{-2(\eta(t)-\gamma(t))}}{\rho(t)^{\frac{2}{1+k^2}}}$$

Preuve . *L'équation* $(\nabla_0\rho)u^0 + (1 + k^2)\rho\nabla_0 u^0 = 0$ *entraine* $\frac{\partial_t u^0}{u^0} + \frac{1}{1+k^2} \times \frac{\partial_t\rho}{\rho} = 0$ *c'est-à-dire* $\partial_t(\ln u^0 + \frac{\ln\rho}{1+k^2}) = 0$*. Donc* $\ln u^0 + \frac{\ln\rho}{1+k^2} = c$ *,* $c \in \mathbb{R}$*.*
Ainsi,

$$u^0(t) = \frac{B}{\rho(t)^{\frac{1}{1+k^2}}} \quad , \quad B \in \mathbb{R}_+^*.$$

Or $u^0(t_0) = c_0$ *et* $\rho(t_0) = \rho_0$ *; donc* $\frac{B}{(\rho_0)^{\frac{1}{1+k^2}}} = c_0$ *c'est-à-dire* $B = c_0(\rho_0)^{\frac{1}{1+k^2}}$ *de sorte que*

$$u^0(t) = c_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho(t)} \right)^{\frac{1}{1+k^2}} .$$

En remplaçant u^0 *par sa valeur dans l'équation* $(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)}$*, on obtient*

$$(u^1)^2 = \frac{c_0^2(\rho_0)^{\frac{1}{1+k^2}}\alpha(t) - (\rho(t)^{\frac{1}{1+k^2}})^2 e^{-2(\eta(t)-\gamma(t))}}{\rho(t)}^{\frac{2}{1+k^2}} .$$

■

♣ Intérêt Pédagogique ♣

Dans le cadre de la rédaction du mémoire de D.I.P.E.S II, il nous a été demandé de donner l'intérêt pédagogique de notre travail : rappelons que le thème soumis à notre étude s'intitule **Equations d'Einstein fluide parfait et constante cosmologique en symétrie cylindrique**. C'est un sujet qui a su contribuer à notre formation au métier d'enseignant.

♣ Ce travail nous a permis de développer notre culture et nos connaissances scientifiques. En effet, un bon enseignant doit être cultivé afin de captiver l'attention de ses élèves, d'étayer son cours par des exemples pratiques.

♣ Ce travail nous a permis de nous exercer sur la résolution d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants.

♣ La rédaction de ce travail nous a permis de nous familiariser avec le logiciel de programmation Latex qui fait une très bonne mise en page et s'avère donc très utile pour la rédaction des épreuves d'évaluation, des fiches de travaux dirigés ainsi que des notes de cours.

♣ Nous avons appris à rédiger des documents scientifiques. Nous serons appelés au lycée à produire des fascicules ainsi que des notes de cours qui pourront être lues et appréciées partout.

♣ Nous avons également appris à rassembler des ressources, les organiser et à pouvoir juger de la pertinence d'une ressource par rapport à une autre. En effet, au lycée nous serons appelés à préparer des cours, pour cela il nous faudra des ressources telles que : le livre au programme, des livres hors programme, les anciens cours et des documents trouvés sur le net. Nous devrions donc être capables de synthétiser toutes ces ressources afin de produire un cours de qualité.

♣ Conclusion ♣

En somme, nous pouvons dire que les équations d'Einstein fluide parfait avec constante cosmologique en symétrie cylindrique se réduisent sous l'effet de la symétrie, de quelques changements de variables et sous certaines hypothèses en un système de huit équations à sept inconnues. Pour parvenir à un tel résultat, nous avons dû dans un premier temps donner quelques notions préliminaires sur la topologie, sur la géométrie différentielle et sur la géométrie lorentzienne ; nous avons ensuite effectué divers calculs tensoriels qui nous ont conduit à l'obtention des composantes du tenseur d'Einstein avec constante cosmologique et pour finir, nous avons après avoir calculé les composantes du tenseur impulsion-énergie pû établir les équations que nous avons par la suite simplifiées à l'aide de changements de variables. Notons que les équations d'Einstein sont très souvent difficiles à résoudre (c'est-à-dire sans faire des approximations) et que l'étude des solutions exactes de ces équations est l'une des activités de la cosmologie, étude qui a mené à la prédiction de l'existence de trous noirs [1] et aux divers modèles de l'évolution de l'univers.

1. Régions de l'espace tellements denses qu'aucun rayonnement n'en sort[8]

♣ Bibliographie ♣

[1] CHOQUET-BRUHAT.Y (2009) *General Relativity and the Einstein equations*. Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, 812 pages.

[2] HASNI ABDELBESSET(juin 2014) *Les géometries de Thurston et la pseudo symétrie d'après R.Desczcz*. Thèse de doctorat en mathématiques spécialité géometrie différentielle. Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen, Algérie.

[3] JIOTSA KENFACK Aubin(2014) ,*Equations d'Einstein-champ scalaire en symétrie cylindrique*. Mémoire de DIPESII Mathématiques, Ecole normale supérieure de Yaoundé, Cameroun.

[4] LEFLOCH P.G. (2008-2009) *Einstein-Euler equations for matter spacetimes with Gowdy symmetry*. Centre de mathématiques Laurent Schwartz.Exposé n^0XXIII. 1-15.

[5] O'NEILL.B (1983) *Semi-Riemanian Geometry* . New York-London. Academic Press, 482 pages.

[6] R. FORTUNIER *Eléments de Calcul Tensoriel* . Centre micro-electronique de provences "Georges charpak", Avenue des anémones, 13541-GARDANNE, pages 18-19.

[7] TALPART.Y (1993) *Leçons et Applications de Geométrie Différentielle et de Mécanique Analytique.* Ouagadougou, Burkina Faso. Cepaduece editions, 554 pages.

Sites web

[8] *http ://fr.m.wikipedia.org/wiki/Equations d'Einstein.* Consulté le 16/05/2019 à 10h40.

[9] *http ://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fluide parfait.* Consulté le 16/05/2019 à 12h00.