REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE 1
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE 1
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE OF YAOUNDE 1
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

EQUATIONS D'EINSTEIN FLUIDE PARFAIT EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de D.I.P.E.S. II de Mathématiques

par :

YOMENI Flavien Duclair

Licencié en Mathématiques

Matricule : 14H2270

Sous la direction du

Pr. TEGANKONG David

Maître de conférences

Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, Université de Yaoundé 1

Année académique : 2018-2019

EQUATIONS D'EINSTEIN FLUIDE PARFAIT EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de D.I.P.E.S. II de Mathématiques

par

YOMENI Flavien Duclair

Licencié en Mathématiques

Matricule : 14H2270

Sous la direction du

Pr. TEGANKONG David

Maître de conférences

Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, Université de Yaoundé 1

Yaoundé, Juin 2019

♣ Dédicace ♣

Je dédie ce mémoire à ma mère : **NKAMDEU Christine.**

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle par ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

YOMENI Flavien Duclair

♣ Remerciements ♣

Au début, je ne savais pas si je pouvais terminer ce travail ; mais beaucoup de personnes m'ont encouragé à aller jusqu'au bout. Cet ainsi que je tiens à remercier le professeur TEGANKONG David de m'avoir donné ce thème plein de recherche et d'avoir accepté de superviser ce travail. Je lui suis infiniment reconnaissant pour toutes ses qualités humaines : sa disponibilité, son intégrité. Ses meilleurs conseils et sa force de me pousser dans la recherche ont transformé l'élève naïf que j'étais. Je souhaite à tous les élèves professeur d'avoir cette chance.

Je remercie aussi tous les enseignants de l'E.N.S de Yaoundé pour leurs enseignements lumineux et leurs conseils.

Je remercie du fond du coeur les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail. cet honheur qu'ils me font, je ne l'oublierai jamais.

Je garde un souvenir ému des moments passés et de nombreuses discussions que j'ai pu avoir depuis le début de ce travail avec mes camarades de promotion : NANKEP, NGOKO, EHONE, KAMGA, ZAPOUE et bien d'autres.

Les mots me manquent pour dire tout ce que ce mémoire doit au couple MOMENI pour tout l'encouragement, le soutien, l'amour et tous les conseils qu'ils m'ont apportés.

Je n'en serais pas là aujourd'hui si je ne recevais pas des encouragements sans cesse de mes amis : TCHOUAFFI Dallin, FEUKAM, LEUMANI et NANA. La liste s'allonge et il m'est impossible de tous les nommer, mais je remercie les camarades du département de mathématiques de la faculté des sciences de l'UY1 pour tous les échanges qu'on a eu et qui m'ont poussé jusqu'ici.

Merci aux couples YOSSA MONKAM, FONDJO, MONKAM, DEUTOU A. et à tous mes oncles. Merci aussi à mes tantes : maman KAMANI, TCHAWOUA, TCHOUKOUAFFI, YANTOU YONGA et bien d'autres.

Je ne saurai terminer sans adresser mes remerciements à : ma maman NKAMDEU Christine, ma grand-mère MANDIFFO Madeleine et à toute ma famille pour toute leur éducation, leur amour, leur soutien, leur tendresse et aussi pour la confiance qu'elles me donnent.

♣ Table des matières ♣

♣ Résumé ♣

Les équations d'Einstein sont le nœud central de la relativité générale. Ce sont des équations aux dérivées partielles qui fournissent en langage mathématique une formulation précise de la relation qui existe entre la géométrie de l'espace-temps et les propriétés de la matière. Nous écrivons dans le présent mémoire les équations d'Einstein fluide parfait dans un système de coordonnées en symétrie cylindrique. Nous obtenons un système complet de huit équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre à sept inconnues et nous posons le problème de Cauchy correspondant.

Mots clés : *Relativité générale, équations d'Einstein, équations d'Euler, symétrie cylindrique, espace-temps.*

♣ Abstract ♣

Einstein's equations are the central node of general relativity. These are equations to partial derivatives that provide in mathematical language a precise formulation of the relation which exists between the geometry of space-time and the properties of matter. We write in the present memory Einstein's perfect fluid equations in cylindrical symmetry coordinate system. We obtain a complete system set of eight first and second order nonlinear partial differential equations at seven unknowns and we pose the Cauchy problem.

Keys words : *General Relativity, Einstein equations, Euler equations, cylindrical symmetry, space-times.*

♣ Introduction ♣

La relativité générale est une théorie de la gravitation développée par Albert Einstein [1] entre 1907 et 1915 qui révolutionne celle de Newton[10]. Pour Newton, le mouvement d'un corps est déterminé par des forces, mais pour Einstein il est déterminé par la configuration de l'espace-temps([10]). Dans cette théorie, l'espace-temps est modelisé par une variété lorentzienne (M, g) de dimension quatre muni d'un tenseur métrique. Selon cette théorie, l'espace-temps régit le mouvement de la matière et la matière régit le mouvement de l'espace-temps. Einstein a donc formulé cette relation par les équations dites d'Einstein [1] :

$$G_{\lambda\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\lambda\beta} \quad avec \quad \lambda, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Où $(G_{\lambda\beta})$ sont les composantes du tenseur d'Einstein données par $G_{\lambda\beta} = R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} R g_{\lambda\beta}$, $(T_{\lambda\beta})$ celles du tenseur d'impulsion-énergie, $(g_{\lambda\beta})$ celles du tenseur métrique, $(R_{\lambda\beta})$ celles du tenseur de Ricci, R la courbure riemannienne, G la constante gravitationnelle et c la célérité de la lumière. Cela signifie qu'à une constante multiplicative près, le tenseur $(G_{\lambda\beta})$ (qui décrit cetains aspects de la courbure de l'espace-temps) est égale au tenseur $(T_{\lambda\beta})$ (qui décrit cetains aspects du contenu de la matière).

A cause de la symétrie, les tenseurs $(G_{\lambda\beta})$ et $(T_{\lambda\beta})$ sont chacune un ensemble de dix composantes, fonction des coordonnées de l'espace-temps ; l'équation ci-dessus devient un système complexe de dix équations à vingt inconnues. Cette complexité peut être améliorée en écrivant cette équation dans un système de coordonnées où la métrique est invariante par symétrie. Dans le présent travail, nous l'écrivons dans le système de coordonnées cylindriques dont la métrique $(g_{\lambda\beta})$ prend la forme [3] :

$$ds^2 = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)} dt^2 + e^{2(\eta-\gamma)} dr^2 + e^{2\gamma}(dz + A d\theta)^2 + r^2 e^{-2\gamma} d\theta^2.$$

où t est le temps et (r, z, θ) les coordonnées de l'espace.

Compte tenu du fait que le tenseur d'impulsion-énergie dépend du choix de la matière, cette matière

1. Physicien américain d'origine allemande né le 14 mars 1879 à Ulm dans le Wurtemberg et mort le 18 avril 1955 à New Jersey.[9]

utilisée dans ce travail est comparée à un fluide parfait [2] et $(T_{\lambda\beta})$ est donnée par [6] :

$$T_{\lambda\beta} = (p+\rho)u_\lambda u_\beta + pg_{\lambda\beta}, \quad \lambda, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

p est la pression du fluide et les principales inconnues décrivant la matière sont la vitesse unitaire temporelle u^λ et la densité d'énergie $\rho > 0$. Ces inconnues u^λ et ρ font coupler les équations d'Einstein aux équations d'Euler.

Pour écrire ces équations, nous subdivisons notre travail en trois chapitres : au chapitre un, nous donnons quelques notions de géométrie différentielle et de géométrie lorentzienne ; des expressions des composantes du tenseur d'Einstein que nous illustrons au chapitre deux. Au chapitre trois, nous établissons le système complet d'Einstein-Euler fluide parfait en symétrie cylindrique et nous obtenons un système de huit équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre à sept fonctions inconnues dépendant chacune du temps et de l'espace. Nous terminons le travail par l'étude du cas particulier des équations d'Euler homogènes [3].

2. C'est un fluide dépourvu de viscosité(résistance à l'écoulement uniforme et sans turbulence se produisant dans la masse de la matière).

3. Les fonctions inconnues dépendent uniquement du temps.

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

QUELQUES NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ET DE GÉOMÉTRIE LORENTZIENNE

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions importantes pour l'établissement des équations dont nous avons besoin.

1.1 Notions de géométrie différentielle

Définition 1.1.1. *(Espace topologique)*

Soit E un ensemble non vide. Une famille $\mathcal{O}$ de parties de E est une topologie lorsqu'elle vérifie les axiomes suivants :

(i) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$ *;*

(ii) $\forall\ A, B \in \mathcal{O}, A \cap B \in \mathcal{O}$ *;*

(iii) $\forall\ (O_i)_{i\in I} \subset \mathcal{O},\ \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$ *.*

Le couple $(E, \mathcal{O})$ est appelé espace topologique et $\mathcal{O}$ est appelé ensemble des ouverts de E.

Définition 1.1.2. *(Voisinage d'un point)*

Dans un espace topologique $(E, \mathcal{O})$, on appelle voisinage d'un point $x \in E$ une partie V de E qui contient x et qui contient un ouvert de E contenant x.

Remarque 1.1.1. *Tout ouvert de E est voisinage en chacun de ses points.*

Définition 1.1.3. *(Espace topologique séparé)*

Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit séparé au sens de Hausdorff ou tout simplement séparé si $\forall x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $U \in \mathcal{O}$ contenant x et $V \in \mathcal{O}$ contenant y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Dans la suite, l'espace topologique $(E, \mathcal{O})$ sera noté E lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur la topologie.

Définition 1.1.4. *(Continuité)*

Soient E et F deux espaces topologiques et soit f une application de E vers F.

1. *On dit que f est continue en un point x de E lorsque l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ dans F est un voisinage de x dans E.*
2. *On dit que f est continue sur E lorsqu'elle est continue en tout point de E.*

Définition 1.1.5. *(Homéomorphisme)*

Soient E et F deux espaces topologiques. Une application $f : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme lorsqu'elle est continue sur E, bijective et lorsque son inverse f^{-1} est continu sur F.

Définition 1.1.6. *(Application différentiable)*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$. Une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N})$ est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ appelée différentielle de f en x_0 telle que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|_n \varepsilon(h) \quad et \quad \varepsilon(h) \longrightarrow 0 \quad quand \quad \|h\|_n \longrightarrow 0.$$

Où $\|.\|_n$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$.

Notation 1.1.1. *La différentielle de f en x_0 se note $df(x_0)$ et est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} df(x_0) : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ h & \mapsto & df(x_0)(h) \end{array}$$

Définition 1.1.7. *(Application de classe $\mathcal{C}^\infty$)*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$. On dit qu'une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N})$ est de classe $\mathcal{C}^k (k \in \mathbb{N})$ dans U si elle est $k-$fois différentiable dans U et si son application différentielle d'ordre k est continue dans U.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^r$, $\forall r \in \mathbb{N}$.

Définition 1.1.8. *($\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, $k \in \mathbb{N}$)*

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$. On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si f est une bijection de U sur V, f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans U et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ dans V.

Définition 1.1.9. *(Cartes locales et $\mathcal{C}^k$-compatibilité, $k \in \mathbb{N}$)[8]*

Soit E un espace topologique séparé et soit $p \in E$.

1. *On appelle carte locale de E en p de dimension $n \in \mathbb{N}$, tout couple (U, φ) tel que :*
   (i) $U \subset E$ est un voisinage ouvert de p dans E, $\varphi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;

(ii) L'application $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme.

2. *Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes locales de E en p de dimension n. (U, φ) et (V, ψ) sont dites $\mathcal{C}^k-$compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si $U \cap V \neq \emptyset$ et l'application $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme ; avec $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ ouverts de $\mathbb{R}^n$. $\psi \circ \varphi^{-1}$ est aussi appelée fonction de transition.*

Définition 1.1.10. *(Atlas)[8]*

Soit E un espace topologique séparé. Un atlas de classe $\mathcal{C}^k (k \in \mathbb{N})$ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur E est la donnée d'une famille $((U_i, \varphi_i))_{i \in I}$ telle que : $\forall i \in I, (U_i, \varphi_i)$ sont des cartes $\mathcal{C}^k-$compatibles recouvrant E.

Remarque 1.1.2. *Dans l'ensemble $L(E)$ des atlas de classe $\mathcal{C}^p$ et de dimension n, on définit la relation suivante : $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in L(E)$, ($\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$) si et seulemnt si ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont $\mathcal{C}^p-$compatibles).*
La relation " $\sim$ " est une relation d'équivalence sur $L(E)$.

Définition 1.1.11. *(Variété différentielle)[8]*

Une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^r (r \in \mathbb{N})$ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est la donnée à la fois d'un espace topologique séparé E et d'une classe d'équivalence d'atlas de classe $\mathcal{C}^r$ et de dimension n sur E.

Définition 1.1.12. *(Applications différentiables entre variétés)*

Soient M et N deux variétés de dimensions respectives n et m $(n, m \in \mathbb{N}^*)$ et de classe $\mathcal{C}^r (r \in \mathbb{N})$, $x \in M$. On dit qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ en x si f est continue et s'il existe une carte (U, φ) de M en x et une carte (V, ψ) de N en $f(x)$ telles que $f(U) \subset V$ et l'application (représentation locale de f) $\quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^r$.

Dans la suite, E désigne une variété différentiable de dimension n, de classe $\mathcal{C}^r$ et x un point de E.

Définition 1.1.13. *(Courbe différentielle en un point)*

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ contenant 0. Une courbe différentiable de E en x est une application continue $c : I \longrightarrow E$, $t \mapsto c(t)$ telle que $c(0) = x$.
$\Gamma = c(I) \subset E$ est appelé arc paramétré de E et le couple (I, c) est la paramétrisation de l'arc Γ.

Notation 1.1.2. *On note $\Gamma_x^\infty(E)$ l'ensemble des courbes différentiables de E en x.*

Définition 1.1.14. *(Courbes tangentes en un point)[8]*

Soient $(I, c_1), (J, c_2) \in \Gamma_x^\infty(E)$. (I, c_1) et (J, c_2) sont dites tangentes si pour toute carte locale (U, φ) en x , on a :

$$\begin{cases} c_1(0) = c_2(0) = x, \\ \frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(t)|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(t)|_{t=0}. \end{cases}$$

Remarque 1.1.3. *Dans $\Gamma_x^\infty(E)$, on définit la relation suivante, notée $\mathcal{R}_x$: $c_1 \ \mathcal{R}_x \ c_2$ si et seulement si c_1 et c_2 sont tangents en x.*
$\mathcal{R}_x$ ainsi définie est une relation d'équivalence et une classe d'équivalence suivant la relation $\mathcal{R}_x$ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} [c]_x : \mathcal{C}^\infty(E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g & \longmapsto & [c]_x(g) = \dfrac{d}{dt}(g \circ c)(t)|_{t=0}. \end{array}$$

Définition 1.1.15. *(Vecteur tangent-Espace tangent)*

Un vecteur tangent à E est une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_x$ définie ci-dessus. L'espace tangent à E en x est l'ensemble des vecteurs tangents à E en x.

Définition 1.1.16. *(Fibré tangent)*

On appelle fibré tangent à E la réunion disjointe de tous les espaces tangents de E.

Notation 1.1.3. *On note T_xE l'espace tangent de E en x et $TE = \bigcup\limits_{x \in E}(\{x\} \times T_xE)$ la variété fibré tangente à E.*

Proposition 1.1.1. *T_xE est un espace vectoriel de dimension égale à celle de E et TE est une variété différentielle de dimension égale à deux fois celle de E et de classe $\mathcal{C}^r$.*

Preuve . *voir [8]*

Définition 1.1.17. *(Champ de vecteurs)[8]*

Un champ de vecteurs sur E est une application $X : E \longrightarrow TE$ telle que $\pi \circ X : E \longrightarrow E$ soit l'application identité ($\pi : TE \longrightarrow E$ étant la projection canonique définie par $\pi(x, X) = x$). Un champ de vecteurs est dit différentiable si l'application qui le définit est $\mathcal{C}^\infty$.

Notation 1.1.4. *On note $\mathfrak{X}(E)$ l'ensemble des champs de vecteurs définis sur E.*

Définition 1.1.18. *(Dérivation)[8]*

Un champ de vecteurs X de E définit une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(E)$ par :

$$\begin{array}{rcl} X : \mathcal{C}^\infty(E) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(E) \\ g & \longmapsto & X(g) \end{array}$$

où $X(g)(x) = X_x(g)$ vérifiant :

i) $\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall g,\ h \in \mathcal{C}^\infty(E),\ X(ag + bh) = aXg + bXh;$

ii) $\forall g,\ h \in \mathcal{C}^\infty(E),\ X(gh) = gXh + hXg.$

Définition 1.1.19. *(Produit de deux champs de vecteurs)*

Le produit de deux champs de vecteurs X et Y sur E est défini par : $XY(g) = X(Yg), \forall g \in \mathcal{C}^\infty(E)$.

Proposition 1.1.2. *Le produit de deux champs de vecteurs ne définit pas toujours une dérivation.*

Preuve . *Soient X et Y deux champs de vecteurs. Pour tout $\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(E)$, on a :*

$$\begin{aligned} XY(gh) &= X(Y(gh)) \\ &= X(gYh + hYg) \\ &= gX(Yh) + XgYh + hX(Yg) + XhYg \end{aligned}$$

Mais $g(XY)h + h(XY)g = gX(Yh) + hX(Yg);$ *d'où* $XY(gh) \neq g(XY)h + h(XY)g.$ ■

Définition 1.1.20. *(Crochet)*

On appelle crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y , le champ de vecteurs $[.,.]$ défini par :

$$\begin{aligned} [.,.] : \mathfrak{X}(E) \times \mathfrak{X}(E) &\longrightarrow \mathfrak{X}(E) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.4. *L'opérateur crochet définit une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(E)$.*

Définition 1.1.21. *(Dérivée de Lie)*

La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs X par rapport à un autre champ de vecteurs Y est le champ de vecteurs $L_X(Y)$ défini par : $L_X(Y) = [X, Y]$.

Définition 1.1.22. *(Application $n-$linéaire)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).
Une application $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est dite $n-$linéaire si elle est linéaire par rapport à chacun des n facteurs.
On dit que f est une forme linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ lorsque $F = \mathbb{K}$.

Remarque 1.1.5. *Lorsque $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$ et $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme $n-$linéaire sur E.*

Définition 1.1.23. *(Tenseur élémentaire)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) , *$x \in E$ et $y \in F$. On appelle tenseur élémentaire, l'application*

$$\begin{aligned} x \otimes y : E^* \times F^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha(x)\beta(y), \end{aligned}$$

où E^* (respectivement F^*) désigne le dual algébrique de l'espace E c'est-à-dire l'ensemble des formes lineaires sur E (respectivement sur F).

Définition 1.1.24. *(Produit tensoriel)*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On appelle produit tensoriel de E et F noté $E \otimes F$, l'ensemble des combinaisons linéaires finies de tenseurs élémentaires.

Dans la suite, M désigne une variété différentiable de dimension n.

Définition 1.1.25. *(Tenseur covariant)*

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ ou $p-$fois covariant au point $x \in M$ est une forme $p-$linéaire définie sur $(T_xM)^p$.
On désigne par $\otimes^p T_x^* M \equiv T_{xp}^0$ l'espace des formes $p-$linéaire sur $(T_xM)^p$.

Définition 1.1.26. *(Tenseur contravariant)*

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $q-$fois contravariant au point $x \in M$ est une forme $q-$linéaire définie sur $(T_x^*M)^q$.
On désigne par $\otimes^q T_x M \equiv T_{x0}^q$ l'espace des formes $q-$linéaire sur $(T_x^*M)^q$.

Définition 1.1.27. *(Tenseur mixte)*

Un tenseur mixte de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ ou tenseur $p-$fois covariant et $q-$fois contravariant au point $x \in M$ est une forme $(p+q)-$linéaire définie sur $(T_xM)^p \times (T_x^*M)^q$.
On désigne par T_{xp}^q l'ensemble des tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ au point $x \in M$.

Définition 1.1.28. *(Fibré tensoriel)*

On appelle fibré tensoriel, la variété différentielle T_p^qM définie par :

$$T_p^qM = \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times T_{xp}^q).$$

Définition 1.1.29. *(Champ de tenseurs)*

Un champ de tenseurs de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ sur M est une application différentiable

$$\begin{array}{rcl} T : M & \longrightarrow & T_p^qM \\ x & \longmapsto & T(x) = (x, T_x), \quad T_x \in T_{xp}^q. \end{array}$$

1.2 Notions de géométrie lorentzienne

Convention de sommation d'Einstein :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et $B = \{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\ ;\ x_i \in \mathbb{K}$.

Un indice i sur lequel on effectue la somme est appelé indice muet. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe $\sum$ et d'indiquer l'indice muet en haut et en bas. Ainsi

$x = x^i e_i \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$

Dans toute la suite, V_4 désigne une variété différentiable de dimension 4, le corps de base est $\mathbb{R}$. On adopte la convention de sommation d'Einstein où les indices grecs $\alpha,\ \beta,\ \gamma, ...$ vont de 0 à 3.

Définition 1.2.1. *(Variété lorentzienne)[8]*

Une variété lorentzienne ou hyperbolique est la donnée d'un couple (V_4, g) où g un champ de tenseurs $2-$fois covariant de classe $\mathcal{C}^2$ sur V_4 tel que pour $x \in V_4$, l'application $g_x : T_xV_4 \times T_xV_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée de signature $(+, -, -, -)$ ou $(-, +, +, +)$. g est appelé tenseur métrique.

Remarque 1.2.1.

1. *La forme quadratique associée à g admet une décomposition en un carré positif et trois carrés négatifs (ou en un carré négatif et trois carrés positifs).*
2. *Dans un repère naturel e_α de V_4, g s'écrit en coordonnées locales par $g = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ où $g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta)$. g est alors vu comme une matrice carrée symétrique d'ordre 4 dont les composantes sont les $g_{\alpha\beta}$. On note alors $g = (g_{\alpha\beta})$. La matrice g est inversible et son inverse est noté $(g^{\alpha\beta})$. On a : $g^{\alpha\lambda}g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta$ (tenseur de Kronecker).*

Définition 1.2.2. *(Repère orthonormé)*

Le repère (e_α) est dit orthonormé dans (V_4, g) si g s'écrit : $g = ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ en signature $(+, -, -, -)$ ou $g = ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ en signature $(-, +, +, +)$.

Un élément $x \in V_4$ est représenté par $x = (x^0, x^i)$ avec $x^0 = t$ appelée coordonnée temporelle et x^i coordonnée d'espace. Ainsi, pour tout système de coordonnées locales (x^α) dans V_4, x^0 représente le temps t et x^i l'espace. Cette représentation est due à Minkowski dans les années 1908([10]).

Définition 1.2.3. *(Espace-temps)[8]*

Un espace-temps est la donnée d'un couple (V_4, g) de variété lorentzienne.

Exemple 1.2.1.

1. *$(\mathbb{R}^4, \eta)$ est l'espace-temps de Minkowski où la métrique η dite métrique de Minkowski est définie par : $\eta = -(dt)^2 + \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ avec $\eta_{00} = -1$,*

   $\eta_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ i = j \\ 0 & si\ \ i \neq j \end{cases}$ *ou $\eta = (dt)^2 - \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2$ (suivant la signature de η).[8]*

2. *$(\mathbb{R}\times S^3, g)$ est l'espace-temps de De Sitter. S^3 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^4$, la métrique g s'écrit :*
   $g = dt^2 - a^2ch^2(\frac{t}{a})[d\alpha^2 + sin^2\alpha(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)]$.
   $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
   g est de signature $(+,-,-,-)$ avec $g_{00} = 1$, $g_{11} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})$, $g_{22} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})sin^2\alpha$, $g_{33} = -a^2ch^2(\frac{t}{a})sin^2\alpha sin^2\theta$ et les autres coefficients sont nuls.[8]

Un élément u de T_xV_4 est encore appelé vecteur contravariant et ses composantes dans une base (e_α) de T_xV_4 sont notées (u^α), c'est-à-dire $u = u^\alpha e_\alpha$. Un élément u^* de $T_x^*V_4$ est encore appelé vecteur covariant et ses composantes dans la base duale (θ^α) de (e_α) sont notées (u^*_α), c'est-à-dire $u^* = u^*_\alpha\theta^\alpha$. On sait que $g \equiv g_x : T_xV_4 \times T_xV_4 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, donc $\forall u \in T_xV_4,\ u$ fixé, l'application $v \longmapsto g(u, v)$ est une forme linéaire sur T_xV_4 et par suite $u^* = g(u, .) \in T_x^*V_4$.
On a : $u^* = u^*_\alpha\theta^\alpha$ où $u^*_\alpha = u^*(e_\alpha)$. D'où

$$u^*_\alpha = u^*(e_\alpha) = g(u, e_\alpha) = g(u^\beta e_\beta, e_\alpha) = u^\beta g(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta}u^\beta.$$

Par analogie, avec l'inverse $g^{\alpha\beta}$ qui est une forme bilinéaire symétrique sur $T_x^*V_4$, on associe à tout vecteur covariant $u^* \in T_x^*V_4$ un vecteur contravariant par $u^\beta = g^{\alpha\beta}u^*_\alpha$. Ainsi g permet d'associer canoniquement à tout vecteur contravariant u un vecteur covariant u^* et réciproquement. Par la suite, u sera identifié à u^* et on parlera de u tout simplement et de ses composantes covariantes u_α et contravariantes u^β liées par les relations : $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta$ et $u^\alpha = g^{\alpha\beta}u_\beta$.

La généralisation de ce résultat aux tenseurs d'ordre p quelconques est immédiate car un tenseur est une combinaison de tenseurs élémentaires de la forme $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p$. Ainsi, on a pour $p = 2$: $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\mu}T^{\gamma\mu}$, $T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\mu}T_{\gamma\mu}$, $T^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu}T_{\mu\beta}$, $T^\alpha_\beta = g_{\beta\mu}T^{\mu\alpha}$.

Si (e_α) est la base naturelle de $T^p_qV_4$ et (θ^α) sa base duale, alors pour tout tenseur T, on a :

$$T = T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_p} \otimes \theta^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \theta^{\beta_q}.$$

Définition 1.2.4. *(connexion linéaire)[4]*

Une connexion linéaire sur V_4 est une application

$$\nabla : \mathfrak{X}(V_4) \times \mathfrak{X}(V_4) \longrightarrow \mathfrak{X}(V_4)$$

telle que pour tout $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}(V_4)$ et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(V_4)$

i) $\nabla_{fX+gX'}(Y) = f\nabla_X(Y) + g\nabla_{X'}(Y)$.

ii) $\nabla_X(Y + Y') = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Y')$.

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$.

On dit que ∇_XY est la dérivée covariante de Y en direction de X.

Définition 1.2.5. *(Symboles de Christoffel)[4]*

Soit (U, φ) *une carte sur* V_4 *et* $\{x^\alpha\}$ *les coordonnées associées pour les quelles on note* $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. *Les symboles de Christoffel d'une connexion* ∇ *relativement aux coordonnées* $\{x^\alpha\}$ *sont les* $4^3 = 64$ *fonctions* $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(V_4)$ *définies par :*

$$\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta = \sum_{\lambda=0}^{3} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\partial_\lambda \tag{1.1}$$

Lemme 1.2.1. *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entièrement la connexion* ∇. *Plus précisement, pour* $X = X^\alpha\partial_\alpha$, $Y = Y^\beta\partial_\beta \in \mathfrak{X}(V_4)$,

$$\nabla_X Y = (X(Y^\lambda) + X^\alpha Y^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta})\partial_\lambda$$

Preuve . *On a :*

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^\beta\partial_\beta) \\
&= Y^\beta \nabla_X \partial_\beta + X(Y^\beta)\partial_\beta \\
&= Y^\beta X^\alpha \nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta + X(Y^\beta)\partial_\beta \\
&= Y^\beta X^\alpha \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\partial_\lambda + X(Y^\lambda)\partial_\lambda \\
&= (X(Y^\lambda) + X^\alpha Y^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta})\partial_\lambda
\end{aligned}$$

Définition 1.2.6. *(Torsion d'une connexion)[4]*

La torsion d'une connexion ∇ *est le tenseur de type* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *défini par l'expression*

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad , X, Y \in \mathfrak{X}(V_4).$$

$\tau(X, Y)$ *est un champ de vecteurs.*

Lemme 1.2.2. *Soit* (x^λ) *un système de coordonnées locales sur* V_4. *Soient* $X = X^\alpha\partial_\alpha$, $Y = Y^\beta\partial_\beta$ *deux éléments de* $\mathfrak{X}(V_4)$. *La torsion en* (X, Y) *est donnée par :*

$$\tau(X, Y) = X^\alpha Y^\beta(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\partial_\lambda \tag{1.2}$$

Preuve . *Soit* ∇ *une connexion linéaire. On a :* $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(V_4)$

$$\begin{aligned}
\tau(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= \nabla_X(Y^\beta\partial_\beta) - \nabla_Y(X^\alpha\partial_\alpha) - (X \circ Y - Y \circ X) \\
&= X^\alpha\partial_\alpha(Y^\beta)\partial_\beta + X^\alpha Y^\beta \nabla_\alpha\partial_\beta - Y^\beta\partial_\beta(X^\alpha)\partial_\alpha - Y^\beta X^\alpha \nabla_\beta\partial_\alpha - X^\alpha\partial_\alpha(Y^\beta)\partial_\beta + Y^\beta\partial_\beta(X^\alpha)\partial_\alpha \\
&= X^\alpha Y^\beta(\nabla_\alpha\partial_\beta - \nabla_\beta\partial_\alpha) \\
&= X^\alpha Y^\beta(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha})\partial_\lambda
\end{aligned}$$

En vertu de (1.1). ■

Définition 1.2.7. *La relation (1.2) est appelée expression locale de la torsion τ de la connexion ∇.*

Définition 1.2.8. *(Dérivée covariante d'un tenseur)[4]*

Soit F un tenseur de type $(0, q)$ sur V_4. La dérivée covariante ∇F du tenseur F est un tenseur de type $(0, q+1)$ défini par :

$$\nabla_X F(Y_1, \ldots, Y_q) = X(F(Y_1, \ldots, Y_q)) - \sum_{i=1}^{q} F(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_q)$$

pour tous $X, Y_1, \ldots, Y_q \in \mathfrak{X}(V_4)$.

Pour les composantes $\nabla_m F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ on a :

$$\begin{aligned}\nabla_m F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} &= \partial_m F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \Gamma^{i_1}_{ms} F^{i_1 s \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \Gamma^{i_2}_{ms} F^{s i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \ldots + \Gamma^{i_p}_{ms} F^{i_1 i_2 \ldots s}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \\ &\quad - \Gamma^{s}_{m j_1} F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \Gamma^{s}_{m j_2} F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 s \ldots j_q} - \ldots - \Gamma^{s}_{m j_q} F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots s}\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2.

- *Pour un tenseur de type* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \nabla_\alpha F^\lambda_\mu = \partial_\alpha F^\lambda_\mu + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} F^\gamma_\mu - \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} F^\lambda_\gamma.$
- *Pour un tenseur de type* $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \nabla_\nu F^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} = \partial_\nu F^{\alpha\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} F^{\sigma\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\sigma} F^{\alpha\sigma}_{\lambda\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} F^{\alpha\beta}_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} F^{\alpha\beta}_{\lambda\sigma}.$
- *Soit F un tenseur de type $(0, 2)$. On a :*

$$\nabla_X F(Y_1, Y_2) = X(F(Y_1, Y_2)) - F(\nabla_X Y_1, Y_2) - F(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

Théorème et défintion 1.2.1. *(Connexion de Levi-Civita)[4]*

Soit (V_4, g) une variété lorentzienne de dimension 4.

Il existe sur V_4 une connexion linéaire et une seule ∇ telle que :

1. *∇ soit sans torsion, c'est-à-dire $\tau = 0$;*
2. *∇ soit métrique, c'est-à-dire $\nabla g = 0$.*

Une telle connexion est appelée connexion riemannienne ou connexion de Levi-Civita sur V_4.

Proposition 1.2.1. *Les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices covariants c'est-à-dire :*

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} \quad \forall \lambda, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Preuve . *Soient $X = X^\alpha \partial_\alpha$, $Y = Y^\beta \partial_\beta$ deux éléments de $\mathfrak{X}(V_4)$. Soit τ la torsion de la connexion de Levi-Civita ∇. Puisque ∇ est sans torsion alors $\tau = 0$.*

$$\begin{aligned}\tau = 0 &\iff \tau(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(V_4) \\ &\iff X^\alpha Y^\beta (\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}) \partial_\lambda = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(V_4) \\ &\iff \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} = 0 \\ &\iff \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

Propriété 1.2.1. *(Identités de Ricci)[7]*

Les identités de Ricci sont donnnées par la relation suivante :

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}. \tag{1.3}$$

Proposition 1.2.2. *Les coefficients de Christoffel en coordonnées locales s'obtiennent du tenseur métrique par :*

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}). \tag{1.4}$$

Preuve . *D'après les identités de Ricci, on a :*

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha g_{\mu\beta} &= g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\\
\partial_\beta g_{\alpha\mu} &= g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\beta} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\\
\partial_\mu g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\mu}\partial_\alpha g_{\mu\beta} &= \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + g^{\lambda\mu}g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\\
&= \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\mu}\partial_\beta g_{\alpha\mu} &= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\\
&= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\mu\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\mu}\partial_\mu g_{\alpha\beta} &= g^{\lambda\mu}g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g^{\lambda\mu}g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\\
&= \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}
\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant la proposition 1.2.1, on a :

$$\begin{aligned}
g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) &= \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} + \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \delta^\mu_\alpha\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \delta^\mu_\beta\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\\
&= 2\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}).$$

D'où le résultat (1.4). ■

Définition 1.2.9. *(Tenseur de courbure)[7]*

Le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann $R^\lambda_{\mu\alpha\beta}$ associé à la connexion linéaire ∇ est un tenseur mixte de type $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ sur V_4 défini par :

$$R^\lambda_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\mu\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\alpha\mu}. \tag{1.5}$$

Proposition **1.2.3.** *Le tenseur de courbure* $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}$ *est antisymétrique par rapport aux indices* α *et* β, λ *et* μ *c'est-à-dire* $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta} = -R^{\lambda}_{\mu\beta\alpha}$

Preuve **.** *D'après* (1.5) *, on a :* $R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}$, *et* $R^{\lambda}_{\mu\beta\alpha} = \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}$. *Ainsi en utilisant la proposition 1.2.1, on a :*

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\mu\beta\alpha} &= -(\partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}) \\ &= -R^{\lambda}_{\mu\alpha\beta}. \end{aligned}$$

■

Définition **1.2.10.** *(Tenseur de Ricci)[7]*

Dans le cadre de la théorie de la relativité générale, le champ gravitationnel est interprété comme une déformation de l'espace-temps. Cette déformation est exprimée par le tenseur de Ricci qui est un tenseur d'ordre 2 *de composantes* $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$ *obtenu par contraction de l'indice supérieur et du deuxième indice inférieur du tenseur de courbure.*
Son expression en fonction des coefficients de Christoffel est :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}. \tag{1.6}$$

Proposition **1.2.4.** *Le tenseur de Ricci est un tenseur symétrique :*

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}.$$

Preuve **.** *Voir [7].*

Définition **1.2.11.** *(Courbure riemannienne)[7]*

La courbure riemannienne R *de* (V_4, g) *est un outil renseignant sur la courbure de l'espace-temps en assignant à chaque point de l'espace, un nombre réel caractérisant la courbure en ce point. Elle est obtenue par contraction des deux indices du tenseur de Ricci :*

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \tag{1.7}$$

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

LE TENSEUR D'EINSTEIN EN SYMÉTRIE CYLINDRIQUE

Les fondements de la théorie de la relativité générale sont mis au point par les équations qui relient le contenu de la matière à la courbure de l'espace-temps. Ces équations sont connues sous le nom des équations d'Einstein[1] :

$$R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\lambda\beta}, \tag{2.1}$$

où $R_{\lambda\beta}$ est le tenseur de Ricci, R la courbure riemannienne, $(g_{\lambda\beta})$ le tenseur métrique, G la constante gravitationnelle, c la célérité de la lumière et $T_{\lambda\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie dont l'expression dépend du choix de la matière. Le membre de gauche $G_{\lambda\beta} = R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta}$ est appelé le tenseur d'Einstein.

Le but de ce chapitre est de déterminer les composantes de ce tenseur. Pour cela, nous allons d'abord déterminer les symboles de Christoffel, le tenseur de Ricci, la coubure Riemannienne et enfin le tenseur d'Einstein.

2.1 La métrique cylindrique et identification de ses coefficients

Le tenseur métrique est un tenseur $2-$fois covariant permettant de décrire la géométrie de l'espace-temps.

2.1.1 L'expression de la métrique

D'après [3], l'expression de la métrique en symétrie cylindrique dans le système de coordonnées locales $(x^\beta) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, z, \theta)$ est :

$$ds^2 = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}dt^2 + e^{2(\eta-\gamma)}dr^2 + e^{2\gamma}(dz + Ad\theta)^2 + r^2e^{-2\gamma}d\theta^2. \tag{2.2}$$

Ici, $x^0 = t$ représente le temps et $(x^1, x^2, x^3) = (r, z, \theta)$ sont les coordonnées d'espace. Les fonctions α, η, γ et A sont toutes des fonctions réelles inconnues des variables t et r.

Cette métrique a pour signature $(-,+,+,+)$ et permet de mesurer les distances au sein d'une variété.

2.1.2 Identification des coefficients de la métrique et expression sous forme matricielle

Etant donné que $ds^2 = g_{\lambda\beta}dx^\lambda dy^\beta$ est la forme quadratique associée au tenseur métrique g avec $g_{\lambda\beta}$ les coefficients de la métrique et qu'en symétrie cylindrique les coordonnées de l'espace-temps sont (t,r,z,θ) , on a :

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}dz^2 + g_{33}d\theta^2 + g_{01}dtdr + g_{02}dtdz + g_{03}dtd\theta + g_{10}drdt \\ &\quad + g_{12}drdz + g_{13}drd\theta + g_{20}dzdt + g_{21}dzdr + g_{23}dzd\theta + g_{30}d\theta dt + g_{31}d\theta dr \\ &\quad + g_{32}d\theta dz. \end{aligned}$$

Ainsi par identification avec (2.2), on a :

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \quad , \quad g_{11} = e^{2(\eta-\gamma)} \quad , \quad g_{22} = e^{2\gamma} \quad , \quad g_{33} = r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma} \quad , \quad g_{23} = g_{32} = Ae^{2\gamma}, \\ g_{01} &= g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = g_{10} = 0 \quad , \quad g_{20} = g_{30} = g_{21} = g_{31} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ainsi, l'expression matricielle de la métrique est :

$$g = (g_{\lambda\beta}) = \begin{pmatrix} -\alpha e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\gamma} & Ae^{2\gamma} \\ 0 & 0 & Ae^{2\gamma} & r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $detg = -\alpha r^2 e^{4(\eta-\gamma)} \neq 0$; donc la matrice g est inversible et son inverse g^{-1} est donnée par :

$$g^{-1} = (g^{\lambda\beta}) = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} & -\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} & \frac{e^{2\gamma}}{r^2} \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que les composantes de g^{-1} sont :

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha} \quad , \quad g^{11} = e^{-2(\eta-\gamma)} \quad , \quad g^{22} = e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} \quad , \quad g^{23} = g^{32} = -\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} \quad , \quad g^{33} = \frac{e^{2\gamma}}{r^2} \\ g^{01} &= g^{02} = g^{03} = g^{12} = g^{13} = g^{10} = 0 \quad , \quad g^{20} = g^{30} = g^{21} = g^{31} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Calcul des composantes du tenseur d'Einstein

2.2.1 Les coefficients de Christoffel

Les coefficients de Christoffel représentent l'évolution des vecteurs de base d'un point à l'autre de l'espace-temps, due à la courbure de ce dernier. Ces coefficients dépendent de la métrique de la variété sur laquelle on s'y trouve. La forme générale de ces coefficients en système de coordonnées locales est donnée par (1.4) :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\beta}).$$

On dénombre 64 coefficients et pour des raisons de symétrie et de la forme de la métrique, plusieurs coefficients de Christoffel sont nuls.

Proposition 2.2.1. *Les coefficients de Christoffel nuls sont :*

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{13} = 0,\\
\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{13} = 0,\\
\Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{33} = 0,\\
\Gamma^3_{00} = \Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{33} = 0.
\end{aligned}$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilise les résultats de (2.3) et (2.4) et aussi le fait que* $\partial_2 g_{\mu\lambda} = \partial_3 g_{\mu\lambda} = 0$, $\forall \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3$ *car les fonctions* A, η, γ, α *ne dépendent pas de* z *et de* θ.
On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{02} &= \frac{1}{2} g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02})\\
&= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{02} + \partial_2 g_{00} - \partial_0 g_{02})\\
&= \frac{1}{2} g^{00}\partial_2 g_{00}\\
&= 0 = \Gamma^0_{20} \quad car \quad \partial_2 g_{00} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{03} &= \frac{1}{2} g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03})\\
&= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{03} + \partial_3 g_{00} - \partial_0 g_{03})\\
&= \frac{1}{2} g^{00}\partial_3 g_{00}\\
&= 0 = \Gamma^0_{30} \quad car \quad \partial_3 g_{00} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{2} g^{0\nu}(\partial_1 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12})\\
&= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{02} + \partial_2 g_{10} - \partial_0 g_{12})\\
&= 0 = \Gamma^0_{21} \quad car \quad g_{02} = g_{10} = g_{12} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_1 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1 g_{03} + \partial_3 g_{10} - \partial_0 g_{13}) \\
&= 0 = \Gamma^0_{31} \quad car \quad g_{01} = g_{03} = g_{13} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{12} + \partial_2 g_{01} - \partial_1 g_{02}) \\
&= 0 = \Gamma^1_{20} \quad car \quad g_{12} = g_{01} = g_{02} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{13} + \partial_3 g_{01} - \partial_1 g_{03}) \\
&= 0 = \Gamma^1_{30} \quad car \quad g_{13} = g_{01} = g_{03} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_1 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{12} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} \\
&= 0 = \Gamma^1_{21} \quad car \quad \partial_2 g_{11} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_1 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{13} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_3 g_{11} \\
&= 0 = \Gamma^1_{31} \quad car \quad \partial_3 g_{11} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) \quad car \quad g^{20} = g^{21} = 0 \\
&= -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{00} - \frac{1}{2}g^{23}\partial_3 g_{00} \quad car \quad g_{02} = g_{03} = 0 \\
&= 0 \quad car \quad \partial_3 g_{00} = \partial_2 g_{00} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_0 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{21} + \partial_1 g_{02} - \partial_2 g_{01}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_0 g_{31} + \partial_1 g_{03} - \partial_3 g_{01}) \\
&= 0 = \Gamma^2_{10} \quad car \quad g_{02} = g_{03} = g_{21} = g_{31} = g_{01} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) \\
&= 0 \quad car \quad g_{21} = g_{31} = 0 \quad et \quad \partial_3 g_{11} = \partial_2 g_{11} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) \\
&= 0 \quad car \quad \partial_2 g_{22} = \partial_2 g_{23} = \partial_3 g_{22} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_2 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{23} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) \\
&= 0 = \Gamma^2_{32} \quad car \quad \partial_2 g_{33} = \partial_3 g_{22} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) \\
&= 0 \quad car \quad \partial_3 g_{23} = \partial_2 g_{33} = \partial_3 g_{33} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{30} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) \\
&= 0 \quad car \quad g_{02} = g_{03} = 0 \quad et \quad \partial_2 g_{00} = \partial_3 g_{00} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{10} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{10}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{30} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{10}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_0 g_{20} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{10}) \\
&= 0 = \Gamma^3_{01} \quad car \quad g_{02} = g_{03} = g_{31} = g_{21} = 0 \quad et \quad \partial_2 g_{01} = \partial_3 g_{01} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{31} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_1 g_{21} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) \\
&= 0 \quad car \quad g_{12} = g_{31} = 0 \quad et \quad \partial_2 g_{11} = \partial_3 g_{11} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{32} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) \\
&= 0 \quad car \quad \partial_2 g_{22} = \partial_3 g_{22} = \partial_2 g_{32} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_2 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_2 g_{23} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{23}) \\
&= 0 = \Gamma^3_{32} \quad car \quad \partial_2 g_{33} = \partial_3 g_{22} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{33} + \partial_3 g_{33} - \partial_3 g_{33}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\
&= 0 \quad car \quad \partial_3 g_{33} = \partial_3 g_{23} = \partial_2 g_{33} = 0.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2. *Les coefficients de Christoffel non nuls sont :*

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma, \\
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha + \partial_r\eta - \partial_r\gamma = \Gamma^0_{10}, \\
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma), \\
\Gamma^0_{22} &= \frac{\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}, \\
\Gamma^0_{23} &= \frac{\partial_t A + 2A\partial_t\gamma}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} = \Gamma^0_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{33} &= -\frac{r^2\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta} + \frac{A\partial_t A + A^2\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}, \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}\partial_r\alpha + \alpha(\partial_r\eta - \partial_r\gamma), \\
\Gamma^1_{01} &= \partial_t\eta - \partial_t\gamma = \Gamma^1_{10}, \\
\Gamma^1_{11} &= \partial_r\eta - \partial_r\gamma, \\
\Gamma^1_{22} &= -\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= -\frac{\partial_r A + 2A\partial_r\gamma}{2}e^{-2\eta+4\gamma} = \Gamma^1_{32}, \\
\Gamma^1_{33} &= (r^2\partial_r\gamma - r)e^{-2\eta} - (A\partial_r A + A^2\partial_r\gamma)e^{-2\eta+4\gamma}, \\
\Gamma^2_{02} &= \partial_t\gamma - \frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{30}, \\
\Gamma^2_{12} &= \partial_r\gamma - \frac{A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{21}, \\
\Gamma^2_{13} &= \frac{\partial_r A}{2} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A}{r} - \frac{A^2\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^2_{31},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{20},\\
\Gamma^3_{03} &= -\partial_t\gamma + \frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{30},\\
\Gamma^3_{12} &= \frac{\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{21},\\
\Gamma^3_{13} &= -\partial_r\gamma + \frac{1}{r} + \frac{A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = \Gamma^3_{31}.
\end{aligned}$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilise les résultats de (2.3) et (2.4) et aussi le fait que* $\partial_2 g_{\mu\lambda} = \partial_3 g_{\mu\lambda} = 0$, $\forall \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3$ *car les fonctions* A, η, γ, α *ne dépendent pas de* z *et de* θ.
On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00})\\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{00}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)})\\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01})\\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial r}(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)})\\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial r\alpha + \partial_r\eta - \partial_r\gamma = \Gamma^0_{10}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11})\\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11}\\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}(e^{2(\eta-\gamma)})\\
&= \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22})\\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{22}\\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}(e^{2\gamma})\\
&= \frac{\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{23} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_2 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{23} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_t A + 2A\partial_t\gamma}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} = \Gamma^0_{32}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{33} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial t}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) \\
&= -\frac{r^2\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta} + \frac{A\partial_t A + A^2\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\frac{\partial}{\partial r}(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r\alpha + \alpha(\partial_r\eta - \partial_r\gamma).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_0 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\frac{\partial}{\partial t}(e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \partial_t\eta - \partial_t\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\frac{\partial}{\partial r}(e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \partial_r\eta - \partial_r\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\frac{\partial}{\partial r}(e^{2\gamma}) \\
&= -\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2} g^{1\nu}(\partial_2 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= -\frac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{23} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\frac{\partial}{\partial r}(Ae^{2\gamma}) \\
&= -\frac{\partial_r A + 2A\partial_r\gamma}{2} e^{-2\eta+4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} g^{1\nu}(\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= -\frac{1}{2} g^{11}\partial_1 g_{33} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\frac{\partial}{\partial r}(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= (r^2\partial_r\gamma - r)e^{-2\eta} - (A\partial_r A + A^2\partial_r\gamma)e^{-2\eta+4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2} g^{2\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\partial_0 g_{22} + \frac{1}{2} g^{23}\partial_0 g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{2\gamma}) \\
&= \partial_t\gamma - \frac{A\partial_t A}{2r^2} e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2} g^{2\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\partial_0 g_{23} + \frac{1}{2} g^{23}\partial_0 g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2\partial_t A}{2r^2} e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{2\nu}(\partial_1 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\partial_1 g_{22} + \frac{1}{2} g^{23}\partial_1 g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(Ae^{2\gamma}) \\
&= \partial_r\gamma - \frac{A\partial_r A}{2r^2} e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2} g^{2\nu}(\partial_1 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\partial_1 g_{23} + \frac{1}{2} g^{23}\partial_1 g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_r A}{2} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A}{r} - \frac{A^2\partial_r A}{2r^2} e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_0 g_{23} + \frac{1}{2}g^{32}\partial_0 g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(e^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_0 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_0 g_{33} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_0 g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{2\gamma}) \\
&= -\partial_t\gamma + \frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{23} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_1 g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(e^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_1 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_1 g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}(Ae^{2\gamma}) \\
&= -\partial_r\gamma + \frac{1}{r} + \frac{A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}
$$

■

2.2.2 Le tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci est un tenseur $2-$fois covariant exprimant la déformation de l'espace-temps. Son expression est donnée par (1.6) :

$$R_{\mu\beta} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}) + (\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}). \tag{2.5}$$

Proposition 2.2.3. *Les coefficients nuls du tenseur de Ricci sont :*

$$
\begin{aligned}
R_{02} &= R_{03} = R_{20} = R_{30} = 0, \\
R_{12} &= R_{13} = R_{21} = R_{31} = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilise les coefficients de Christoffel donnés par les propositions 2.2.1 et 2.2.2 et aussi le fait que* $\partial_2\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \partial_3\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0$, $\forall\nu,\mu,\lambda = 0,1,2,3.$

On a :

$$R_{02} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{20} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 0}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{20} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0}).$$

Mais,

$$\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{20} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 0} = \partial_0\Gamma^0_{20} - \partial_2\Gamma^0_{20} + \partial_1\Gamma^1_{20} - \partial_2\Gamma^1_{10} + \partial_2\Gamma^2_{20} - \partial_2\Gamma^2_{20} + \partial_3\Gamma^3_{20} - \partial_2\Gamma^3_{30} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{20} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{20} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{20} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{20} - \Gamma^2_{20}\Gamma^0_{20} + \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{20} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{30} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{20} \\
&\quad -\Gamma^0_{21}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{20} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{20} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{20} + \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{20} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{30} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{20} \\
&\quad -\Gamma^0_{22}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{20} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{10} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{20} - \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{20} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{30} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{20} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{00} \\
&\quad +\Gamma^1_{31}\Gamma^3_{20} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{20} - \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{20} + \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{20} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{30} \\
&= \Gamma^3_{20}(\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) \\
&= \frac{\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma}\left(\frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma} - \partial_t\gamma + \partial_t\gamma - \frac{A\partial_t A}{2r^2}e^{4\gamma}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

de sorte que $\quad R_{02} = 0.$

$$R_{03} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{30} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 0}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{30} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0}).$$

Mais, $\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{30} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 0} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{30} = \partial_0\Gamma^0_{30} + \partial_1\Gamma^1_{30} = 0,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{30} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{30} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{30} - \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{30} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{20} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{30} - \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{30} \\
&\quad -\Gamma^1_{31}\Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{30} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{30} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{20} + \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{20} - \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{30} \\
&\quad -\Gamma^1_{32}\Gamma^2_{10} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{30} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{20} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{30} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{30} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{20} \\
&= 0
\end{aligned}$$

de sorte que $\quad R_{03} = 0.$

$$R_{12} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{21} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 1}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{21} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1}).$$

Mais, $\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{21} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 1} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{21} = \partial_0\Gamma^0_{21} + \partial_1\Gamma^1_{21} = 0,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{21} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{21} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{21} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{11} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{21} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{31} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{21} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{30} \\
&\quad -\Gamma^1_{31}\Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{21} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{31} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{21} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{01} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{21} \\
&\quad -\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{21} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{31} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{21} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{01} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{21} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{31} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{31} \\
&= 0
\end{aligned}$$

de sorte que $\quad R_{12} = 0.$

$$R_{13} = (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{31} - \partial_3 \Gamma^\lambda_{\lambda 1}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{31} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1}).$$

Mais, $\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{31} - \partial_3 \Gamma^\lambda_{\lambda 1} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{31} = \partial_0 \Gamma^0_{31} + \partial_1 \Gamma^1_{31} = 0,$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{31} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{31} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{31} - \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{11} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{31} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{21} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{31} - \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{01} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{31} \\
&\quad - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{21} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{31} - \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{01} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{31} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{31} \\
&\quad - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{21} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{31} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{01} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{31} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{21} \\
&= 0
\end{aligned}$$

de sorte que $\quad R_{13} = 0.$ ■

Proposition 2.2.4. *Les coefficients non nuls du tenseur de Ricci sont :*

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\
&\quad - \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_t\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2r},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$R_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\
&\quad - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2 - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad - \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
R_{23} &= \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad - \frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad - \frac{A(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad + \frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2(\alpha\partial_{rr}\gamma - \partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad + \frac{r^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta} - \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} + \frac{A\partial_r A}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{2}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad + \frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad - \frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + r\partial_r\gamma e^{-2\eta}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilise les coefficients de Christoffel donnés par les propositions 2.2.1 et 2.2.2 et aussi le fait que* $\partial_2\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \partial_3\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0,\ \forall \nu, \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3.$

On a : $R_{00} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\lambda_{0\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0})$*. Mais,*

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} &= \partial_0\Gamma^0_{00} + \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) \\ &= \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0(\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\lambda_{0\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{20} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{30} \\ &\quad + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{20} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00} - \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{30} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} \\ &\quad - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{00} - \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{10} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{00} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{00} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{30} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} \\ &\quad + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{00} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{00} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{00} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30} \\ &= \Gamma^0_{00}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10}) - 2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20} - (\Gamma^1_{01})^2 - (\Gamma^2_{02})^2 \\ &\quad - (\Gamma^3_{03})^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}R_{00} &= \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0(\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) + \Gamma^0_{00}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) \\ &\quad + \Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10}) - 2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20} - (\Gamma^1_{01})^2 - (\Gamma^2_{02})^2 - (\Gamma^3_{03})^2.\end{aligned}$$

On obtient finalement après calculs :

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &\quad - \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_t\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2r}.\end{aligned}$$

De même, $R_{01} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{01} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 0}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{01} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0})$. *Mais,*

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{01} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 0} &= \partial_0\Gamma^0_{01} - \partial_1\Gamma^0_{00} + \partial_1\Gamma^1_{10} - \partial_1\Gamma^1_{10} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{01} - \partial_1\Gamma^0_{00},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{01} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{10} + \Gamma^0_{10}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{10} + \Gamma^0_{10}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{10} \\ &\quad + \Gamma^1_{10}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{20}\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{11} + \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{02} \\ &\quad - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{03} \\ &\quad - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{13} + \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{10}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{10}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13} \\ &= \Gamma^0_{10}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{10}(\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{31}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13} \\ &\quad - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13};\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} R_{01} &= \partial_0\Gamma^0_{01} - \partial_1\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{10}(\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{31}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} \\ &\quad -\Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13}. \end{aligned}$$

D'où après calculs, on a $R_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}.$

$$R_{11} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{11} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 1}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{11} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 1} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1\Gamma^0_{01} + \partial_1\Gamma^1_{11} - \partial_1\Gamma^1_{11} + \partial_2\Gamma^2_{11} - \partial_1\Gamma^2_{21} + \partial_3\Gamma^3_{11} - \partial_1\Gamma^3_{31} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{21} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{11} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{31} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} \\ &\quad -\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{31} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{11} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{01} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{11} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31} \\ &\quad +\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{11} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{01} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{21} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\ &= \Gamma^0_{11}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{11}(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}) - (\Gamma^0_{10})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 \\ &\quad -2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^0_{11}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}) \\ &\quad +\Gamma^1_{11}(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}) - (\Gamma^0_{10})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 - 2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31}. \end{aligned}$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &\quad -\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2 - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}. \end{aligned}$$

$$R_{22} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{22} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 2}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2}).$$

Mais,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{22} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 2} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{22} = \partial_0\Gamma^0_{22} + \partial_1\Gamma^1_{22} + \partial_2\Gamma^2_{22} + \partial_3\Gamma^3_{22} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{22} + \partial_1\Gamma^1_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{22} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{02} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{22} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{12} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{22} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{02} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} \\ &\quad -\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{22} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{32} \\ &\quad +\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{22} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{02} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\ &= \Gamma^0_{22}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^2_{02}) + \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}) - 2\Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} - 2\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}R_{22} &= \partial_0\Gamma^0_{22} + \partial_1\Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{22}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^2_{02}) + \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}) \\ &\quad -2\Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} - 2\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32}.\end{aligned}$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}.\end{aligned}$$

$$R_{23} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{32} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 2}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{32} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{32} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 2} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{32} = \partial_0\Gamma^0_{32} + \partial_1\Gamma^1_{32} + \partial_2\Gamma^2_{32} + \partial_3\Gamma^3_{32} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{32} + \partial_1\Gamma^1_{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{32} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{32} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{02} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{32} - \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{12} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{32} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{22} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{32} - \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{02} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{32} \\ &\quad -\Gamma^1_{31}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{32} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{32} - \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{32} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{32} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{22} \\ &\quad +\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{32} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{02} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{22} \\ &= \Gamma^0_{32}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{32}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}) - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{02} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{22}.\end{aligned}$$

Donc,

$$R_{23} = \partial_0\Gamma^0_{32} + \partial_1\Gamma^1_{32} + \Gamma^0_{32}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{32}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}) - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{02} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{22}.$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}R_{23} &= \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma},\end{aligned}$$

$$R_{33} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 3}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{33} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 3}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda 3} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33} = \partial_0\Gamma^0_{33} + \partial_1\Gamma^1_{33} + \partial_2\Gamma^2_{33} + \partial_3\Gamma^3_{33} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{33} + \partial_1\Gamma^1_{33},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{33} - \Gamma^{\lambda}_{3\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda 3} &= \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{33} - \Gamma^{0}_{30}\Gamma^{0}_{03} + \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{0}_{33} - \Gamma^{1}_{30}\Gamma^{0}_{13} + \Gamma^{2}_{02}\Gamma^{0}_{33} - \Gamma^{2}_{30}\Gamma^{0}_{23} + \Gamma^{0}_{10}\Gamma^{1}_{33} - \Gamma^{0}_{31}\Gamma^{1}_{03} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{1}_{33} \\
&\quad -\Gamma^{1}_{31}\Gamma^{1}_{13} + \Gamma^{2}_{12}\Gamma^{1}_{33} - \Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{23} + \Gamma^{0}_{20}\Gamma^{2}_{33} - \Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{03} + \Gamma^{1}_{21}\Gamma^{2}_{33} - \Gamma^{1}_{32}\Gamma^{2}_{13} + \Gamma^{2}_{22}\Gamma^{2}_{33} \\
&\quad -\Gamma^{2}_{32}\Gamma^{2}_{23} + \Gamma^{0}_{30}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{0}_{33}\Gamma^{3}_{03} + \Gamma^{1}_{31}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{1}_{33}\Gamma^{3}_{13} + \Gamma^{2}_{32}\Gamma^{3}_{33} - \Gamma^{2}_{33}\Gamma^{3}_{23} \\
&= \Gamma^{0}_{33}(\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{2}_{02} - \Gamma^{3}_{03}) + \Gamma^{1}_{33}(\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{3}_{13}) - 2\Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{03} - 2\Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{23}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
R_{33} = \partial_0\Gamma^{0}_{33} + \partial_1\Gamma^{1}_{33} + \Gamma^{0}_{33}(\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{2}_{02} - \Gamma^{3}_{03}) + \Gamma^{1}_{33}(\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{2}_{12} - \Gamma^{3}_{13}) - 2\Gamma^{0}_{32}\Gamma^{2}_{03} - 2\Gamma^{2}_{31}\Gamma^{1}_{23}.
$$

D'où après calcul, on obtient

$$
\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad + \frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2(\alpha\partial_{rr}\gamma - \partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad + \frac{r^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta} - \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} + \frac{A\partial_r A}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{2}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad + \frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
&\quad - \frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + r\partial_r\gamma e^{-2\eta}.
\end{aligned}
$$

■

2.2.3 La courbure Riemannienne

Encore appelée constante de Ricci, la courbure Riemannienne notée R est obtenue par contraction du tenseur de Ricci. Son expression est donnée par (1.7) :

$$
R = g^{\mu\beta}R_{\mu\beta} \quad .
$$

Proposition 2.2.5. *La courbure Riemannienne en Symétrie cylindrique est donnée par :*

$$
\begin{aligned}
R &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} \\
&\quad - \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - \partial_t\gamma)}{\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma} \\
&\quad + \frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Preuve . *On a :*

$$
\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} + g^{02}R_{02} + g^{03}R_{03} + g^{10}R_{10} + g^{11}R_{11} + g^{12}R_{12} + g^{13}R_{13} + +g^{20}R_{20} \\
&\quad + g^{21}R_{21} + g^{22}R_{22} + g^{23}R_{23} + g^{30}R_{30} + g^{31}R_{31} + g^{32}R_{32} + g^{33}R_{33} \\
&= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + 2g^{23}R_{23} + g^{33}R_{33} \quad Car \quad g^{01} = g^{02} = g^{03} = g^{12} = g^{13} = 0.
\end{aligned}
$$

Mais,en utilisant les propositions 2.2.3 et 2.2.4 et aussi le résultat de (2.4), on a :

$$\begin{aligned}
g^{00}R_{00} &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad -\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\eta-\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad +\frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{11}R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\eta-\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad -\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}-(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad -\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{22}R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&\quad +\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&\quad -\frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma}+\frac{(A^2(\partial_rA)^2}{2r^4}e^{-2\eta+10\gamma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g^{23}R_{23} &= -\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma-\alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&\quad +\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{4A\partial_rA\partial_r\gamma}{r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&\quad +\frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{2A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_rA}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A^2(\partial_tA)^2}{\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma}\\
&\quad -\frac{A^2(\partial_rA)^2}{r^4}e^{-2\eta+10\gamma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{33}R_{33} &= \frac{\alpha\partial_{rr}\gamma-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad +\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A^2(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&\quad +\frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{4A\partial_rA\partial_r\gamma}{r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&\quad +\frac{A\partial_rA}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma}\\
&\quad +\frac{A^2(\partial_rA)^2}{2r^4}e^{-2\eta+10\gamma}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad -\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma}\\
&\quad +\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}.
\end{aligned}$$

■

2.2.4 Le tenseur d'Einstein

En relativité générale, l'espace-temps est courbe et cette courbure définit une quantité appelée tenseur d'Einstein qui est donné par l'expression suivante :

$$G_{\lambda\beta} = R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta}. \tag{2.14}$$

Proposition 2.2.6. *Les coefficients nuls du tenseur d'Einstein sont :*

$$\begin{aligned} G_{02} &= G_{03} = G_{20} = G_{30} = 0, \\ G_{12} &= G_{13} = G_{21} = G_{31} = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilisera la proposition 2.2.3 et le résulta de (2.3). On a :*

$$\begin{aligned} G_{02} &= R_{02} - \frac{1}{2}Rg_{02} = 0 = G_{20} \quad car \quad R_{02} = g_{02} = 0, \\ G_{03} &= R_{03} - \frac{1}{2}Rg_{03} = 0 = G_{30} \quad car \quad R_{03} = g_{03} = 0, \\ G_{12} &= R_{12} - \frac{1}{2}Rg_{12} = 0 = G_{21} \quad car \quad R_{12} = g_{12} = 0, \\ G_{13} &= R_{13} - \frac{1}{2}Rg_{13} = 0 = G_{31} \quad car \quad R_{13} = g_{13} = 0. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.7. *Les coefficients non nuls du tenseur d'Einstein sont :*

$$G_{00} = \frac{\alpha\partial_r\eta}{r} - (\partial_t\gamma)^2 - \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma}; \tag{2.16}$$

$$G_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}; \tag{2.17}$$

$$G_{11} = \frac{\partial_r\eta}{r} + \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} - (\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma}; \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} G_{22} = &-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &+\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &-\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + (\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{3(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{3(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{-2\eta+8\gamma} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} G_{23} = &\frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &+\frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &-\frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{2A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &+\frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} + A(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{3A(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{-2\eta+8\gamma} \\ &-\frac{3A(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$
\begin{aligned}
G_{33} = {} & \frac{r^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} - \frac{r^2(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}e^{-2\eta} + \frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha}e^{-2\eta} + \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha^2}e^{-2\eta} - \frac{r^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta} \\
& - \frac{r^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta} + r^2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta} + \frac{A^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
& + \frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
& + \frac{A^2\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\
& + \frac{(\partial_tA)^2}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{(\partial_rA)^2}{4}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{2A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} + A^2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+4\gamma} - 4A\partial_rA\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} \\
& + \frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A\partial_rA}{r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{3A^2(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{-2\eta+8\gamma} \\
& - \frac{3A^2(\partial_tA)^2}{4\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma}. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Preuve . *On a :*

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00}; \\
G_{01} &= R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} = R_{01} \quad car \quad g_{01} = 0; \\
G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11}; \\
G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22}; \\
G_{23} &= R_{23} - \frac{1}{2}Rg_{23}; \\
G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, en utilisant la proposition 2.2.4 et les résultats de (2.3) et (2.13), on obtient les résultats voulus.

■

⋆ ⋆ CHAPITRE TROIS ⋆ ⋆

FORME EXPLICITE DES EQUATIONS

Dans ce chapitre, nous calculons les composantes du tenseur d'impulsion-énergie et en ajoutant à ces composantes celles du tenseur d'Einstein obtenues au chapitre précédent, nous écrivons les équations dont nous avons besoin.

3.1 Tenseur d'impulsion-énergie lié au fluide

Dans les équations d'Einstein, le tenseur d'impulsion-énergie est un champ tensoriel symétrique de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui décrit la distribution de la matière et de l'énergie dans l'univers. Son expression liée au fluide parfait dans son référentiel de repos est [6] :

$$T_{\lambda\beta} = (p+\rho)u_\lambda u_\beta + pg_{\lambda\beta}, \quad \lambda, \beta = 0, 1, 2, 3. \tag{3.1}$$

Où $(g_{\lambda\beta})$ est définie par (2.3), ρ est la densité énergétique de masse du fluide, $p = k^2\rho$ est la pression du fluide avec k la vitesse du son dans le fluide $(0 \leq k \leq 1)$, $u = (u_\lambda) = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ est le vecteur vitesse unitaire temporel du fluide. u est orienté vers le futur c'est-à-dire $u_0 > 0$.

Proposition 3.1.1. *Les composantes du tenseur d'impulsion-énergie lié au fluide parfait sont :*

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \rho[(1+k^2)(u_0)^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}];\\
T_{01} &= \rho(1+k^2)u_0u_1 = T_{10};\\
T_{02} &= \rho(1+k^2)u_0u_2 = T_{20};\\
T_{03} &= \rho(1+k^2)u_0u_3 = T_{30};\\
T_{11} &= \rho[(1+k^2)(u_1)^2 + k^2e^{2(\eta-\gamma)}];\\
T_{12} &= \rho(1+k^2)u_1u_2 = T_{21};\\
T_{13} &= \rho(1+k^2)u_1u_3 = T_{31};\\
T_{22} &= \rho[(1+k^2)(u_2)^2 + k^2e^{2\gamma}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{23} &= \rho[(1+k^2)u_2u_3 + k^2Ae^{2\gamma}] = T_{32}; \\ T_{33} &= \rho[(1+k^2)(u_3)^2 + k^2(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})]. \end{aligned}$$

Preuve . *Dans cette preuve, on ultilsera le résultat de* (2.3) *et aussi le fait que* $p = k^2\rho$.

On a :

$$\begin{aligned} T_{00} &= (p+\rho)u_0u_0 + pg_{00} \\ &= (p+\rho)(u_0)^2 - p\alpha e^{2(\eta-\gamma)} \\ &= \rho[(1+k^2)(u_0)^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}] \quad car \quad p = k^2\rho. \\ T_{01} &= (p+\rho)u_0u_1 + pg_{01} = \rho(1+k^2)u^0u_1. \\ T_{02} &= (p+\rho)u_0u_2 + pg_{02} = \rho(1+k^2)u_0u_2. \\ T_{03} &= (p+\rho)u_0u_3 + pg_{03} = \rho(1+k^2)u_0u_3. \\ T_{11} &= (p+\rho)u_1u_1 + pg_{11} \\ &= (p+\rho)(u_1)^2 + pe^{2(\eta-\gamma)} \\ &= \rho[(1+k^2)(u_1)^2 + k^2e^{2(\eta-\gamma)}]. \\ T_{12} &= (p+\rho)u_1u_2 + pg_{12} = \rho(1+k^2)u_1u_2. \\ T_{13} &= (p+\rho)u_1u_3 + pg_{13} = \rho(1+k^2)u_1u_3. \\ T_{22} &= (p+\rho)u_2u_2 + pg_{22} \\ &= \rho[(1+k^2)(u_2)^2 + k^2e^{2\gamma}]. \\ T_{23} &= (p+\rho)u_2u_3 + pg_{23} \\ &= \rho[(1+k^2)u_2u_3 + k^2Ae^{2\gamma}]. \\ T_{33} &= (p+\rho)u_3u_3 + pg_{33} \\ &= \rho[(1+k^2)(u_3)^2 + k^2(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})]. \end{aligned}$$

■

3.2 Les équations d'Einstein

Rappelons que les équations d'Einstein données par (2.1) s'écrivent :

$$R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\lambda\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\lambda\beta}, \tag{3.2}$$

En posant $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ et d'après (2.14), (3.2) devient :

$$G_{\lambda\beta} = KT_{\lambda\beta}. \tag{3.3}$$

Suivant les indices λ , β et les raisons de symétrie, (3.3) donne le système suivant :

$$G_{00} = KT_{00} \tag{3.4}$$

$$G_{01} = KT_{01} \tag{3.5}$$

$$G_{11} = KT_{11} \tag{3.6}$$

$$G_{22} = KT_{22} \tag{3.7}$$

$$G_{23} = KT_{23} \tag{3.8}$$

$$G_{33} = KT_{33} \tag{3.9}$$

$$G_{02} = KT_{02} = 0 \tag{3.10}$$

$$G_{03} = KT_{03} = 0 \tag{3.11}$$

$$G_{12} = KT_{12} = 0 \tag{3.12}$$

$$G_{13} = KT_{13} = 0 \tag{3.13}$$

Proposition 3.2.1. *En posant :*

$$\Phi = -g^{00}KT_{00} \quad , \quad P_1 = g^{11}KT_{11} \quad et \quad J = -\frac{g^{11}}{\sqrt{\alpha}}KT_{01}, \tag{3.14}$$

les équations (3.4), (3.5) *et* (3.6) *deviennent respectivement :*

$$\frac{\partial_r \eta}{r} = (\partial_r \gamma)^2 + \frac{(\partial_t \gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2} e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2} e^{4\gamma} + \Phi e^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial_t \eta}{r} = 2\partial_t \gamma \partial_r \gamma + \frac{\partial_t A \partial_r A}{2r^2} e^{4\gamma} - \sqrt{\alpha} J e^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{r} = 2\alpha(P_1 - \Phi)e^{2(\eta-\gamma)}. \tag{3.17}$$

Preuve . *D'après l'équation* (3.4),

$$\frac{\alpha \partial_r \eta}{r} = (\partial_t \gamma)^2 + \alpha(\partial_r \gamma)^2 + \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2} e^{4\gamma} + \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{4r^2} e^{4\gamma} + KT_{00}$$

Or de (3.14) $\quad , \quad KT_{00} = -\frac{\Phi}{g^{00}}$ *; donc*

$$\frac{\partial_r \eta}{r} = (\partial_r \gamma)^2 + \frac{(\partial_t \gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2} e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2} e^{4\gamma} + \Phi e^{2(\eta-\gamma)}.$$

De même, (3.5) *entraine*

$$\frac{\partial_t \eta}{r} = 2\partial_t \gamma \partial_r \gamma + \frac{\partial_t A \partial_r A}{2r^2} e^{4\gamma} + KT_{01}$$

Or de (3.14) $\quad , \quad KT_{01} = -\frac{\sqrt{\alpha}J}{g^{11}}$ *; donc*

$$\frac{\partial_t \eta}{r} = 2\partial_t \gamma \partial_r \gamma + \frac{\partial_t A \partial_r A}{2r^2} e^{4\gamma} - \sqrt{\alpha} J e^{2(\eta-\gamma)}.$$

D'après l'équation (3.6),

$$\frac{\partial_r \alpha}{2\alpha r} = -\frac{\partial_r \eta}{r} + (\partial_r \gamma)^2 + \frac{(\partial_t \gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + KT_{11}.$$

Or de (3.14) , $KT_{11} = \frac{P_1}{g^{11}}$ et en utilisant (3.15), on obtient

$$\frac{\partial_r \alpha}{r} = 2\alpha(P_1 - \Phi)e^{2(\eta-\gamma)}.$$

■

Proposition 3.2.2. *En posant :*

$$S_{23} = \frac{K(T_{23} - AT_{22})}{r} \quad , \quad P_2 = KT_{22}e^{-2\gamma} \quad et \quad P_3 = \frac{Ke^{2\gamma}}{r^2}(T_{33} - A^2T_{22} - \frac{2ArS_{23}}{K}), \tag{3.18}$$

les équations (3.7) , (3.8) et (3.9) deviennent respectivement :

$$\begin{aligned}
\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 \\
&\quad -\alpha P_3 e^{2\eta-2\gamma}, \qquad (3.19)\\
\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} \\
&\quad + \frac{\alpha(\Phi - P_1 + P_2 - P_3)}{2}e^{2\eta-2\gamma}, \qquad (3.20)\\
\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A &= -\frac{\alpha\partial_r A}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r A}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{2\alpha} - 4\partial_t A\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_r A\partial_r\gamma + 2\alpha r S_{23}e^{2\eta-4\gamma}. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Preuve . *De l'équation (3.7), on a*

$$\begin{aligned}
\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= -K\alpha T_{22}e^{2\eta-4\gamma} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + 2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma) + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} + \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2} \\
&\quad + \frac{\partial_t\alpha(\partial_e\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha} + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{3(\partial_t A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \frac{3\alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

En reportant cette valeur dans (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
KT_{23}e^{2\eta-4\gamma} &= \frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + KT_{22}e^{2\eta-4\gamma} + \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} - \frac{A(\partial_{rr}\alpha)}{2\alpha} + \frac{2A\partial_r\gamma}{r} \\
&\quad - \frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} - \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} - \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r} + \frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - A(\partial_r\gamma)^2 + \frac{3A(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} \\
&\quad - \frac{3A(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} + \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha} + \frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} \\
&\quad + \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} - \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} + \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r} - \frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{2A\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r A}{2r} - \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2} \\
&\quad - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha} + \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha} - 2\partial_r A\partial_r\gamma + A(\partial_r\gamma)^2 + \frac{3A(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{3A(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

Ceci entraine

$$\frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha} = K(T_{23} - AT_{22})e^{2\eta-4\gamma} - \frac{\partial_r A}{2r} + \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2} + \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha} - \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha} + 2\partial_r A\partial_r\gamma$$

de sorte que

$$\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A = -\frac{\alpha\partial_r A}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r A}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{2\alpha} - 4\partial_t A\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_r A\partial_r\gamma + 2\alpha r S_{23}e^{2\eta-4\gamma}.$$

En remplaçant cette dernière égalité et aussi celle (3.22) *dans* (3.9), *on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{2r^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-4\gamma} &= -KT_{33}e^{2\eta-4\gamma} + Kr^2T_{22}e^{2\eta-8\gamma} + 2r\partial_r\gamma e^{-4\gamma} + \frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha}e^{-4\gamma} + \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2}e^{-4\gamma}\\ &\quad -\frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-4\gamma} + \frac{(\partial_t A)^2}{\alpha} - (\partial_r A)^2 + KA^2T_{22}e^{2\eta-4\gamma} + 2ArS_{23}e^{2\eta-4\gamma}\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= -\frac{K\alpha T_{33}}{2r^2}e^{2\eta} + \frac{K\alpha T_{22}}{2}e^{2\eta-4\gamma} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} - \frac{\partial_r\alpha}{4r} + \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma}\\ &\quad -\frac{\alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \frac{KA^2\alpha T_{22}}{2r^2}e^{2\eta} + \frac{A\alpha S_{23}}{r}e^{2\eta}.\end{aligned}$$

Or d'après (3.17) , $\frac{\partial_r\alpha}{r} = 2\alpha(P_1 - \Phi)e^{2(\eta-\gamma)}$ *; donc*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} - \frac{\partial_r\alpha}{4r} + \frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - \frac{K\alpha T_{33}}{2r^2}e^{2\eta}\\ &\quad +\frac{K\alpha T_{22}}{2}e^{2\eta-4\gamma} - \frac{\alpha(P_1 - \Phi)}{2}e^{2\eta-2\gamma} + \frac{KA^2\alpha T_{22}}{2r^2}e^{2\eta} + \frac{A\alpha S_{23}}{r}e^{2\eta}.\end{aligned}$$

Mais d'après (3.18) , $P_3 = \frac{Ke^{2\gamma}}{r^2}(T_{33} - A^2T_{22} - \frac{2ArS_{23}}{K})$; *d'où*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma}\\ &\quad +\frac{\alpha(\Phi - P_1 + P_2 - P_3)}{2}e^{2\eta-2\gamma}.\end{aligned}$$

En reportant cette dernière égalité dans (3.22), *on a :*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= -K\alpha T_{22}e^{2\eta-4\gamma} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} + \partial_r\alpha\partial_r\gamma + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2}{r^2}e^{4\gamma}\\ &\quad +\alpha(\Phi - P_1 + P_2 - P_3)e^{2\eta-2\gamma} + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} - \partial_r\alpha\partial_r\gamma + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha}\\ &\quad -\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{3((\partial_t A)^2 - \alpha(\partial_r A)^2)}{4r^2}e^{4\gamma}.\end{aligned}$$

Or $\frac{\partial_r\alpha}{r} = 2\alpha(P_1 - \Phi)e^{2(\eta-\gamma)}$ *; donc*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2\\ &\quad -\alpha P_3e^{2\eta-2\gamma}.\end{aligned}$$

■

3.3 Les équations d'Euler

Remarque 3.3.1. *Si $u_2 = u_3 = 0$ alors $u^2 = u^3 = 0$. En effet, On a :*
$u^2 = g^{2\lambda}u_\lambda = g^{20}u_0 + g^{21}u_1 + g^{22}u_2 + g^{23}u_3 = 0$ *car* $g_{20} = g_{21} = 0$ *et* $u_2 = u_3 = 0$.
De même, $u^3 = g^{3\lambda}u_\lambda = g^{30}u_0 + g^{31}u_1 + g^{32}u_2 + g^{33}u_3 = 0$ *car* $g_{30} = g_{31} = 0$ *et* $u_2 = u_3 = 0$.

Proposition 3.3.1. *On a le résultat suivant :*

$$(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)}. \tag{3.23}$$

Où $u = (u^\lambda)$ est le vecteur vitesse unitaire temporel du fluide.

Preuve . *D'après (3.10), $KT_{02} = G_{02} = 0$. Ceci entraine $T_{02} = 0$ ou encore $\rho(1 + k^2)u_0u_2 = 0$. Comme $u_0 > 0$, alors cette dernière égalité entraine $u_2 = 0$. En appliquant le même raisonnement avec (3.11), on obtient $u_3 = 0$. Donc par la remarque 3.3.1, on a $u^2 = u^3 = 0$.*
Puisque le vecteur u est unitaire, alors $g_{\lambda\beta}u^\lambda u^\beta = -1$, $\forall\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3$. En faisant varier les indices λ et β, cette égalité implique :

$$\begin{aligned}&g_{00}u^0u^0 + g_{10}u^1u^0 + g_{20}u^2u^0 + g_{30}u^3u^0 + g_{01}u^0u^1 + g_{11}u^1u^1 + g_{21}u^2u^1 + g_{31}u^3u^1 + g_{02}u^0u^2\\ &+g_{12}u^1u^2 + g_{22}u^2u^2 + g_{32}u^3u^2 + g_{03}u^0u^3 + g_{13}u^1u^3 + g_{23}u^2u^3 + g_{33}u^3u^3 = -1\end{aligned}$$

ou encore $g_{00}(u^0)^2 + g_{11}(u^1)^2 = -1$ car $u^2 = u^3 = 0$ et $g_{01} = 0$. Donc en utilisant le résultat de (2.3), on a $-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}(u^0)^2 + e^{2(\eta-\gamma)}(u^1)^2 = -1$ de sorte que

$$(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)}.$$

■

Théorème 3.3.1. *On a le résultat suivant :*

$$\nabla_\lambda G^{\lambda\beta} = 0, \forall\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3. \tag{3.24}$$

Où $(G^{\lambda\beta})$ sont les composantes du tenseur d'Einstein G obtenu au chapitre deux.

Preuve . *cf[2]* ■

Remarque 3.3.2. *L'équation (3.24) est équivalente à :*

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\beta} = 0, \forall\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3. \tag{3.25}$$

(3.25) est la conservation du tenseur d'impulsion-énergie lié au fluide.

Proposition 3.3.2. *L'équation de conservation* (3.25) *se réduit à l'équation suivante :*

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + (1+k^2)\rho(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0. \tag{3.26}$$

Pour prouver cette proposition, nous allons commencer par une remarque préliminaire.

Remarque 3.3.3. *Pour tout* $\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3$ *, on a :*

$$(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta = 0. \tag{3.27}$$

En effet, u *étant unitaire, on a* $g_{\mu\beta}u^\mu u^\beta = -1\ \forall \mu, \beta = 0, 1, 2, 3$*. Ceci entraine que pour tout* $\lambda = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad \nabla_\lambda(g_{\mu\beta}u^\mu u^\beta) = \nabla_\lambda(-1) = 0$*.*
Or $\nabla_\lambda(g_{\mu\beta}u^\mu u^\beta) = 0$ *entraine* $\nabla_\lambda(g_{\mu\beta})u^\mu u^\beta + \nabla_\lambda(u^\mu)g_{\mu\beta}u^\beta + \nabla_\lambda(u^\beta)g_{\mu\beta}u^\mu = 0$*.*
Donc $\nabla_\lambda(u^\mu)g_{\mu\beta}u^\beta + \nabla_\lambda(u^\beta)g_{\mu\beta}u^\mu = 0$ *c'est-à-dire* $\nabla_\lambda(u^\mu)u_\mu + \nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0$*, pour tout* $\mu, \beta = 0, 1, 2, 3$*. Donc pour* $\mu = \beta$*, on a :* $2\nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0$ *c'est-à-dire* $\nabla_\lambda(u^\beta)u_\beta = 0$ *pour tout* $\lambda = 0, 1, 2, 3$*, pour tout* $\beta = 0, 1, 2, 3$*.*

Preuve . *(de la proposition) D'après* (3.25)*,* $\nabla_\lambda T^{\lambda\beta} = 0, \forall \lambda, \beta = 0, 1, 2, 3$*.*
On a $p = k^2\rho$*; et* (3.1) *dans* (3.25) *donne*

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda T^{\lambda\beta} = 0 \iff & \nabla_\lambda((1+k^2)\rho u^\lambda u^\beta + k^2\rho g^{\lambda\beta}) = 0 \\
\iff & (1+k^2)(\nabla_\lambda\rho)u^\lambda u^\beta + (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda)u^\beta + (1+k^2)\rho u^\lambda(\nabla_\lambda u^\beta) + k^2(\nabla_\lambda\rho)g^{\lambda\beta} \\
& + k^2\rho(\nabla_\lambda g^{\lambda\beta}) = 0.
\end{aligned}$$

Comme $\nabla_\lambda g^{\lambda\beta} = 0$*, on a :*

$$(1+k^2)(\nabla_\lambda\rho)u^\lambda u^\beta + (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda)u^\beta + (1+k^2)\rho u^\lambda(\nabla_\lambda u^\beta) + k^2(\nabla_\lambda\rho)g^{\lambda\beta} = 0.$$

Ainsi, en multipliant cette dernière égalité par u_β*, on obtient :*

$$(1+k^2)(\nabla_\lambda\rho)u^\lambda u^\beta u_\beta + (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda)u^\beta u_\beta + (1+k^2)\rho u^\lambda(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta + k^2(\nabla_\lambda\rho)g^{\lambda\beta}u_\beta = 0. \tag{3.28}$$

u *étant unitaire,* $g_{\lambda\beta}u^\lambda u^\beta = -1, \forall\lambda, \beta = 0, 1, 2, 3$*. Or* $u_\beta = g_{\lambda\beta}u^\lambda$ *; donc* $u^\beta u_\beta = -1$*. Ainsi,* (3.28) *devient*

$$-(1+k^2)(\nabla_\lambda\rho)u^\lambda - (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda) + (1+k^2)\rho u^\lambda(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta + k^2(\nabla_\lambda\rho)g^{\lambda\beta}u_\beta = 0.$$

Mais, $u^\lambda = g^{\lambda\beta}u_\beta$ *; donc l'égalité précédente devient*

$$-(1+k^2)(\nabla_\lambda\rho)u^\lambda - (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda) + (1+k^2)\rho u^\lambda(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta + k^2(\nabla_\lambda\rho)u^\lambda = 0$$

ou encore

$$-(\nabla_\lambda \rho)u^\lambda - (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda) + (1+k^2)\rho u^\lambda(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta = 0.$$

Or d'après (3.27), $(\nabla_\lambda u^\beta)u_\beta = 0$ *; donc* $(\nabla_\lambda \rho)u^\lambda + (1+k^2)\rho(\nabla_\lambda u^\lambda) = 0$. *Ainsi, en faisant varier* λ *et en tenant compte du fait que* $u^2 = u^3 = 0$, *on a :*

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (1+k^2)\rho(\nabla_0 u^0) + (\nabla_1\rho)u^1 + (1+k^2)\rho(\nabla_1 u^1) = 0.$$

Ceci entraine

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + (1+k^2)\rho(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0.$$

D'où (3.26). ■

Remarque 3.3.4. *Les équations* (3.23) *et* (3.26) *sont appelées les équations d'Euler.*

Remarque 3.3.5. *Les équations* (3.15), (3.16), (3.17), (3.19), (3.20), (3.21), (3.23) *et* (3.26) *forment le système complet d'Eintein-Euler en symétrie cylindrique.*

Remarque 3.3.6. *L'existence des solutions du système d'Einstein-Euler nécessite des données initiales. Mais à cause de la singularité à* $t = 0$, *ces données initiales sont prescrites à* $t = t_0 > 0$ *par :*

$$\begin{aligned}
&\eta(t_0,r) = \eta_0(r), \quad \eta_t(t_0,r) = \eta_1(r), \quad \alpha(t_0,r) = \alpha_0(r), \quad \gamma(t_0,r) = \gamma_0(r),\\
&\gamma_t(t_0,r) = \gamma_1(r), \quad A(t_0,r) = A_0(r), \quad A_t(t_0,r) = A_1(r), \quad \rho(t_0,r) = \rho_0(r),\\
&u(t_0,r) = u_0(r).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Il est question d'étudier l'existence locale et globale dans le temps du problème de Cauchy pour le système complet d'Einstein-Euler (3.15), (3.16), (3.17), (3.19), (3.20), (3.21), (3.23), (3.26) *et* (3.29) *qui jusqu'à présent reste un problème ouvert. Ce système est un système de* 8 *équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre dont les* 7 *inconnues* $\alpha, \eta, \gamma, A, \rho, u^0$ *et* u^1 *qui sont toutes des fonctions réelles des variables réelles* t *et* r *sont les solutions en temps du problème de Cauchy. Etant donné que le nombre d'équations de ce système est supérieur au nombre d'inconnues, certaines équations peuvent être considérées comme équations de contraintes et d'autres comme équations d'évolution.*

3.4 Les équations d'Euler : cas homogène

Dans cette section, nous étudions les équations d'Euler dans le cas homogène.

Définition 3.4.1. *Dans le cas où les fonctions $u^0, u^1, \rho, \eta, \alpha$ et γ dépendent uniquement de t, les équations (3.23) et (3.26) sont appelées les équations d'Euler dans le cas homogène. En adjoignant à ces équations les conditions de Cauchy, on obtient le système suivant :*

$$(S) : \begin{cases} (\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)} \\ (\nabla_0\rho)u^0 + (1+k^2)\rho\nabla_0 u^0 = 0 \\ u^0(t_0) = c_0, c_0 \in \mathbb{R} \\ u^1(t_0) = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \\ \rho(t_0) = b_0, b_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En fixant les fonctions η, α et γ, le systèmes (S) est un système de deux équations à trois inconues u^0, u^1 et ρ dépendantes de t.

Proposition 3.4.1. *En fixant la fonction ρ, le système (S) a pour solution :*

$$u^0(t) = c_0\left(\frac{b_0}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{1+k^2}} \quad et \quad (u^1(t))^2 = \frac{c_0^2(b_0)^{\frac{1}{1+k^2}}\alpha(t) - (\rho(t)^{\frac{1}{1+k^2}})^2 e^{-2(\eta(t)-\gamma(t))}}{\rho(t)^{\frac{2}{1+k^2}}}$$

Preuve . *L'équation $(\nabla_0\rho)u^0 + (1+k^2)\rho\nabla_0 u^0 = 0$ entraine $\frac{\partial_t u^0}{u^0} + \frac{1}{1+k^2} \times \frac{\partial_t \rho}{\rho} = 0$ c'est-à-dire $\partial_t(\ln u^0 + \frac{\ln\rho}{1+k^2}) = 0$. Donc $\ln u^0 + \frac{\ln\rho}{1+k^2} = c$, $c \in \mathbb{R}$.*
Ainsi,

$$u^0(t) = \frac{B}{\rho(t)^{\frac{1}{1+k^2}}} \quad , \quad B \in \mathbb{R}_+^*.$$

Or $u^0(t_0) = c_0$ et $\rho(t_0) = b_0$; donc $\frac{B}{(b_0)^{\frac{1}{1+k^2}}} = c_0$ c'est-à-dire $B = c_0(b_0)^{\frac{1}{1+k^2}}$ de sorte que

$$u^0(t) = c_0\left(\frac{b_0}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{1+k^2}}.$$

En remplaçant u^0 par sa valeur dans l'équation $(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)}$, on obtient

$$(u^1)^2 = \frac{c_0^2(b_0)^{\frac{1}{1+k^2}}\alpha(t) - (\rho(t)^{\frac{1}{1+k^2}})^2 e^{-2(\eta(t)-\gamma(t))}}{\rho(t)^{\frac{2}{1+k^2}}}.$$

■

♣ Conclusion ♣

L'objet de notre travail était d'écrire les équations d'Einstein fluide parfait dans un système de coordonnées locales en symétrie cylindrique. Nous avons donné au chapitre un quelques notions réquises pour bien comprendre l'établissement de ces équations. Les coefficients de Christoffel calculés au chapitre deux nous ont permis d'obtenir les composantes du tenseur de Ricci qui, avec la courbure riemannienne et les composantes du tenseur métrique conduisent à l'obtention des composantes du tenseur d'Einstein. Le chapitre trois nous a fourni les composantes du tenseur d'impulsion-énergie qui, avec celles du tenseur d'Einstein nous ont permis d'obtenir les six équations d'Einstein réduites sous l'effet de la métrique. Dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie dans le reférentiel de repos du fluide parfait se trouvent deux inconnues u (vitesse unitaire temporelle) et ρ (densité d'énergie) qui font apparaître les équations d'Euler. Nous avons remarqué que les équations d'Einstein couplées à celles d'Euler conduisent à un système de huit équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre à sept inconnues dépendantes de t et de r. Ces équations fournissent en langage mathématique une formulation précise de la relation qui existe entre la géométrie de l'espace-temps et les propriétés de la matière[10]. Ajouter au fait que ce système d'équations soit difficile à résoudre, des perspectives pour nous seront d'étudier l'existence locale et globale du problème de Cauchy dans le temps ; et d'écrire les équations d'Einstein couplées à celles de Maxwell fluide parfait avec constante cosmologique en symétrie cylindrique.

♣ Portée Pédagogique ♣

Le présent mémoire du D.I.P.E.S II intitulé **Equations d'Einstein fluide parfait en symétrie cylindrique** a beaucoup d'intérêts sur le plan pédagogique et peut donc être important chez l'enseignant pour l'exercice de son métier.

♣ Il développe la curiosité scientifique.

♣ Il permet de se rendre compte qu'il y a une théorie plus générale qui prolonge celle de Newton.

♣ Il permet de mieux comprendre la loi de l'attraction gravitationnelle.

♣ Il permet de se rendre compte que la nature et la résolution des équations d'Einstein reste d'actualité.

♣ Il permet de maitriser la résolution des équations différentielles ordinaires à coefficients constants.

♣ Il permet de voir les différents champs d'application des mathématiques dans l'étude des phénomènes physiques.

♣ Il permet de comprendre l'importance des équations différentielles ordinaires à coefficients constants dans la modélisation des phénomènes courants.

♣ Il permet de mieux comprendre notre univers.

♣ Il permet aussi de se familiariser avec le logiciel de programmation Latex qui fait une très bonne mise en page et s'avère donc très utile pour la rédaction des épreuves d'évaluation.

♣ Bibliographie ♣

[1] CHOQUET-BRUHAT Y. (2009) *General Relativity and the Einstein equations. Oxford Math. Monographs, Oxford University Press, 812 pages.*

[2] CHOQUET-BRUHAT Y. (1971) *Problème de Cauchy pour le système intégro différentiel d'Einstein-Liouville. Ann, inst Fourier 21 n0 3 : 181-201.*

[3] FJALLBORG M. (2007) *The cylindrically Symmetry Einstein-Vlasov system. class. quantum. grav, 24 : 2253-2270.*

[4] HASNI Abdelbasset (Juin 2014) *Les géométries de Thurston et la pseudo symétrie d'après R. Deszcz.* Thèse de doctorat en mathématique, université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen, Algérie.

[5] JIOTSA K. Aubin (2015) *Equations d'Einstein-champ scalaire en symétrie cylindrique.* Mémoire DIPESS II. Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, Cameroun.

[6] LEFLOCH P. G (2008-2009) *Einstein-Euler equations for matter spacetimes with Gowdy symmetry.* Centre de Mathématiques Laurent Schwartz. Exposé n0 XXIII. 1-15.

[7] O'NEIL B. (1983) *Semi-Riemannian geometry*. New York-London : Academic press, 482 pages.

[8] TALPAERT Y. (1993) *Leçons et Applications de Géométrie Différentielle et de Mécanique Analytique*. Ouagadougou, Burkina Faso. Cepaduece editions, 554 pages.

Sites web

[9] http ://fr.m.wikipedia.org/wiki/Albert-Einstein. Consulté le 15 mai 2019 à 19h30.

[10] http ://fr.m.wikipedia.org/wiki/Equations-d'Einstein. Consulté le 05 décembre 2018 à 14h56.