RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDE 1
****
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

ÉQUILIBRES DE NASH ET OLIGOPOLES DE STACKELBERG

Mémoire rédigé et présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade (DIPES II) en

Mathématiques.

Présenté par :

AYIAGNIGNI Mohamed Elkatib

DIPES I et Licence en Mathématiques

Matricule : 14Y047

Devant le jury composé de :

Président : M. TCHANTCHO Bertrand	**Professeur**	ENS Yaoundé
Rapporteur : M. MOYOUWOU Issofa	**Maître de Conférences**	ENS Yaoundé
Examinateur : M. TEGANKONG David	**Maître de Conférences**	ENS Yaoundé

Yaoundé, Juin 2019

Année académique :2018-2019

Remerciements

Je rends grâce au Dieu tout puissant de m'avoir permis de parachever ce travail dans la paix et la santé.

J'adresse aussi mes vifs et sincères remerciements à tous ceux qui de près comme de loin m'ont aidé et soutenu dans la réalisation de ce travail.

Je pense particulièrement à :

♡ Mon directeur de mémoire le Pr. **MOYOUWOU Issofa,** Maître de Conférences, pour la confiance placée en moi en acceptant de diriger ce travail, la pertinence du thème proposé et pour sa disponibilité et le soutien sans faille qu'il m'a accordé pendant la rédaction de ce mémoire. J'ai appris énormément à vos côtés.

♡ Mes **enseignants de l'École Normale Supérieure de Yaoundé**, en particulier ceux du département de Mathématiques pour ma formation académique et sociale.

♡ Ma grande famille pour les soutiens moraux, financiers et matériels qu'elle a eu à faire jusqu'ici pour ma réussite académique. Je pense particulièrement à : mon papa **AHMADOU Tyjani**, ma maman **PENJURAP Rikiatou**, mon père spirituel **MOUMENI Inoussa**, mes oncles **NJIFIT Nourdine**, **YOUMIE Ibrahim**, **FIFEN Zakari**, ma tante **NTENTIE Amina**. mes sœurs **MAPON Nafissa** et **NJIGNET Raîmatou** et mon frère **NDICHOUT Fadil**.

♡ Mes camarades de promotion. Je pense particulièrement à mes camarades pleins droits pour leur formidable esprit d'équipe.

♡ Mon camarade **OMBOUDOU TSALA Eugène** dont les remarques et suggestions ont considérablement amélioré la qualité de ce document.

♡ Mon ami et frère **NOAH OWONO François Xavier** pour son soutien indéfectible lors de la rédaction de ce mémoire.

Que tous ceux dont les noms ne sont pas mentionnés et qui de quelque manière que ce soit, ont contribué à la réalisation de ce travail, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Déclaration sur l'honneur

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie

Signature du candidat

AYIAGNIGNI Mohamed Elkatib

Table des matières

Remerciements **i**

Déclaration sur l'honneur **ii**

Résumé **v**

Abstract **vi**

Table des figures **vii**

Liste des tableaux **viii**

Introduction générale **1**

1 JEUX SOUS FORME NORMALE **3**

1.1 Généralités sur les jeux sous forme normale 4

1.1.1 Définition et exemples 4

1.1.2 Notion de dominance entre stratégies 7

1.2 Notion d'équilibre de Nash 8

1.2.1 Équilibres de Nash en stratégies pures 8

1.2.2 Correspondance de meilleures réponses d'un jeu et équilibre de Nash 11

1.2.3 Extension mixte d'un jeu sous forme normale 13

1.2.4 Équilibres de Nash en stratégies mixtes 15

1.3 Existence d'équilibres de Nash 16

1.3.1 Quelques rappels des notions d'analyse 17

1.3.2 Conditions d'existence d'équilibres de Nash en stratégies pures . . 19

1.3.3 Existence d'équilibres de Nash en stratégies mixtes 19

2 JEUX SOUS FORME EXTENSIVE **21**
2.1 Définition et exemples de jeux sous forme extensive 21
2.2 Notion de stratégie dans un jeu sous forme extensive 25
2.2.1 Stratégies pures 25
2.2.2 Stratégies aléatoires 26
2.2.3 Notion d'équilibre parfait en sous-jeux 28

3 OLIGOPOLES DE STACKELBERG **31**
3.1 Concurrence dans un marché oligopolistique 31
3.1.1 Notion de marché 31
3.1.2 L'oligopole et ses caractéristiques 32
3.1.3 Types d'oligopoles et exemples 33
3.2 Notion de demande et prix sur un marché 34
3.3 Oligopoles de Stackelberg 36
3.3.1 Oligopole de Stackelberg à n firmes et à n étapes. 36
3.3.2 Existence des équilibres dans un oligopole de Stackelberg 38

4 APPLICATION : CAS DE L'OLIGOPOLE SIMPLIFIÉ DES PRODUCTEURS DE CIMENT CAMEROUNAIS **46**
4.1 Présentation du marché camerounais du ciment 46
4.1.1 Les principaux opérateurs du secteur 47
4.1.2 Données sur le marché du ciment 49
4.2 Analyse de la concurrence dans le marché du ciment 50
4.2.1 Approche en terme de jeu 50
4.2.2 Approche statistique 52

Implication pédagogique **53**

Conclusion et perspectives **55**

Bibliographie **57**

Annexe **59**

Résumé

L'un des domaines qui offrent de nombreuses opportunités d'implémenter les concepts de la théorie des jeux est certainement l'environnement économique. C'est par exemple le cas des oligopoles de Stackelberg sur un marché où une hiérarchie existe entre plusieurs firmes, hiérarchie dictant un ordre dans lequel les décisions stratégiques des firmes sont prises des meneurs aux suiveurs. Nous nous intéressons, d'une part, au formalisme nécessaire pour étudier les oligopoles de Stackelberg à partir des outils de la théorie des jeux. Puis d'autre part, nous étudions l'existence et la détermination des équilibres de Nash parfaits en sous-jeux dans les jeux stratégiques qui modélisent les interactions entre les firmes. Après avoir présenté certains résultats fondamentaux des équilibres en théorie des jeux, nous abordons non seulement l'étude des oligopoles classiques de Stackelberg linéaires, mais aussi le cas non linéaire ainsi qu'une analyse de l'oligopole du marché de ciment au Cameroun.

Mots clés : Jeux sous forme normale, Jeux sous forme extensive, Équilibre de Nash, Marché, Oligopole de Stackelberg.

Abstract

One of the areas that offer many opportunities to implement concepts from game theory is certainly the economic environment. This is for example the case of Stackelberg oligopolies in a market where a hierarchy exists between several firms, hierarchy dictating an order in which the strategic decisions of firms are taken from the leaders to the followers. We are interested, on the one hand, in the formalism necessary to study the Stackelberg oligopoly using game theory tools. And on the other hand, we study the existence and the determination of perfect sub-game Nash equilibria in strategic games that model interactions between firms. We first present some fundamental results on equilibria in game theory and then we deal not only with the classical Stackelberg oligopolies with linear demands, but we also consider the non linear case as well as an analysis of the oligopoly market of cement in Cameroon.

Keywords : Normal form games, Extensive form games, Nash equilibrium, Market, Stackelberg oligopoly.

Table des figures

1.1 Courbes de meilleures réponses dans le jeu de Matching Pennies 16

2.1 Arbre du jeu de l'ultimatum cas fini 23
2.2 Arbre du jeu de pile ou face sans observations 24
2.3 Arbre du jeu de l'exemple (2.2.2) 25
2.4 Arbre du jeu de l'exemple (2.2.5) 27
2.5 Exemple d'un jeu avec ses sous-jeux 29

4.1 Usine de Cimencam à Nomayos. 47
4.2 Usine du groupe DANGOTE à Douala. 48
4.3 Usine de Cimaf à Bonaberie. 48
4.4 Usine de production de la société Medcem. 48
4.5 Hiérarchie du marché de ciment 51

Liste des tableaux

1.1 Tableau représentant le jeu du dilemme du prisonnier 5
1.2 Tableau du jeu 8
1.3 Tableau du jeu 10
1.4 Tableau du jeu de Matching Pennies 10

2.1 Tableau du jeu de la forme normale du jeu de l'exemple (2.1.1) 28

3.1 Tableau de classification des marchés suivant l'offre et la demande. 32

4.1 Évolution de la demande de ciment au Cameroun entre 2011 et 2018. 49
4.2 Productions de ciment au Cameroun entre 2011 et 2018. 49
4.3 Parts de marché entre 2011 et 2018. 50
4.4 Prix du ciment au Cameroun entre 2011 et 2018. 50
4.5 Évolution du prix du ciment au Cameroun entre 2011 et 2018 52

Introduction

La théorie des jeux est la discipline mathématique qui vise à analyser les situations d'interactions stratégiques où plusieurs entités (agents, entreprises, etc ...) appelées **joueurs**, peuvent prendre des décisions qui les affectent mutuellement. On distingue deux grandes familles de jeux à savoir les jeux coopératifs (qui regroupent les familles de jeux où des accords explicites peuvent être noués entre les joueurs) et les jeux non coopératifs (regroupant des jeux où des accords contraignants ne sont pas envisageables entre les joueurs). Les oligopoles de Stackelberg initiés dans [18] qui nous intéressent dans ce travail rentrent dans la famille des jeux non coopératifs et modélisent une concurrence entre des entreprises produisant le même bien sur un marché.

En général, on parle d'oligopole sur un marché lorsqu'un petit nombre d'entreprises détiennent l'offre d'un bien sollicité par un grand nombre de consommateurs. Plusieurs types de concurrences peuvent alors être observées sur les quantités produites ou sur les prix pratiqués. La concurrence dans un oligopole de Cournot telle que décrite dans [6] se fait sur les quantités produites. Chaque entreprise décidant de son niveau de production sans connaître au préalable les décisions des autres. Dans le cas des oligopoles de Stackelberg, qui retiennent notre attention, la concurrence se fait aussi sur les quantités produites. Seulement les entreprises décident de leur niveau de production suivant une hiérarchie établie : c'est la logique meneur-suiveur très souvent dictée par la taille des entreprises présentes. Plusieurs autres variantes d'oligopoles existent à l'instar des oligopoles de Bertrand dans ses travaux dans [4].

Le choix des stratégies des entreprises en concurrence fait l'objet de plusieurs études aux approches variées. Notre approche est celle de la théorie des jeux non coopératifs. En effet un oligopole de Stackelberg peut se formaliser en un jeu sous forme extensive à *information complète* (chaque entreprise connait les règles de jeu et les caractéristiques de ses concurrentes). Il se pose alors le problème de l'existence et de la détermination des équilibres ;

notamment les équilibres de Nash parfaits en sous jeux.

L'ensemble du travail est organisé en quatre chapitres ainsi qu'il suit : dans les chapitres un et deux, nous présentons quelques outils, indispensables dans notre étude des oligopoles de Stackelberg au sens de la théorie des jeux, que sont les jeux sous forme normale et les jeux sous sous forme extensive. Au chapitre trois nous abordons la notion d'oligopoles de Stakelberg proprement dite, dans un premier temps nous présentons la concurrence oligopolistique à la Stackelberg, puis moyennant certaines hypothèses nous établissons quelques résultats sur l'existence et l'unicité des équilibres. Enfin au chapitre quatre, nous faisons une analyse de la concurrence dans le marché camerounais du ciment.

Chapitre Un

JEUX SOUS FORME NORMALE

Sommaire

1.1 Généralités sur les jeux sous forme normale 4

1.1.1 Définition et exemples 4

1.1.2 Notion de dominance entre stratégies 7

1.2 Notion d'équilibre de Nash 8

1.2.1 Équilibres de Nash en stratégies pures 8

1.2.2 Correspondance de meilleures réponses d'un jeu et équilibre de Nash 11

1.2.3 Extension mixte d'un jeu sous forme normale 13

1.2.4 Équilibres de Nash en stratégies mixtes 15

1.3 Existence d'équilibres de Nash 16

1.3.1 Quelques rappels des notions d'analyse 17

1.3.2 Conditions d'existence d'équilibres de Nash en stratégies pures . 19

1.3.3 Existence d'équilibres de Nash en stratégies mixtes 19

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à une famille particulière de jeux dans la théorie des jeux non coopératifs à savoir la famille des jeux *sous forme normale* ou *sous forme stratégique*. Ce chapitre s'organise en trois sections. Dans la première section, nous donnons la définition de la notion de jeu sous forme normale ainsi que quelques exemples classiques. Dans un second temps, nous présentons quelques concepts qui en découlent dont principalement le concept d'équilibre de Nash [15] avec quelques unes de ses caractéristiques. Enfin, nous abordons pour terminer la question de l'existence d'équilibres de Nash dans un jeu sous forme normale.

1.1 Généralités sur les jeux sous forme normale

On distingue en théorie des jeux deux grandes classes de jeux : les jeux coopératifs et les jeux non coopératifs. En général un jeu renvoie à toute situation d'interaction entre des agents appelés joueurs dont les intérêts sont généralement divergents et dépendent des actions des uns et des autres. Un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent se passer des accords contraignants de coopération dont chaque signataire est tenu de respecter. Un jeu est dit non coopératif lorsque les joueurs ne peuvent pas se passer des accords contraignants de coopération soit parce qu'ils ont des intérêts conflictuels ; soit parce que les règles du jeu ne le permettent pas. Notre travail s'inscrit dans le cadre des jeux non coopératifs et sur une famille précise de jeux que nous présentons dans la suite.

1.1.1 Définition et exemples

On considère un jeu dans lequel des joueurs (des personnes, des entreprises, des pays,. . .) prennent simultanément chacun une action, chaque joueur étant libre de son choix final même si des négociations sont en cour. Lorsque l'ensemble des actions de chaque joueur est connu ainsi que son gain algébrique (bénéfice ou perte) pour toute combinaison des actions individuelles, on obtient un jeu sous forme normale que nous définissons de façon formelle ci-dessous.

Définition 1.1.1

Un jeu sous forme normale (en abrégé **jfn**) est la donnée d'un triplet

$$G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}) \text{ où}$$

- N désigne un ensemble fini non vide de joueurs. On notera $N = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- Pour $i \in N$, A_i est un ensemble non vide des **actions** ou **stratégies pures** du joueur i ;
- Pour $i \in N$, $u_i : \prod_{i\in N} A_i \to \mathbb{R}$, est une application appelée **fonction de payement** ou **fonction d'utilité** du joueur i.

Dans la littérature, on parle aussi de *jeu statique à information complète* pour exprimer le fait que les joueurs prennent leurs actions sans au préalable observer les actions des autres (*statique*) ; chaque joueur connait les stratégies et les utilités des autres joueurs (*information complète*).

Définition 1.1.2 (Profil de stratégies pures)

Soit $(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N},)$ un jeu sous forme normale . On appelle **profil de stratégies pures** tout élément du produit cartésien $A = \prod_{i\in N} A_i$.

Remarque 1.1.1.

1. Un jfn sera dit **fini** si : $\forall i \in N, A_i$ est fini ;
2. Il est commode de représenter un jfn **fini** par un ou plusieurs tableaux regroupant à la fois les joueurs, leurs stratégies et leurs fonctions de payement ;
3. Lorsque le jeu n'est pas fini, c'est-à-dire au moins un joueur possède une infinité de stratégies pures, une représentation du jeu à l'aide de tableaux n'est plus possible.

Pour continuer, nous donnons dans la suite quelques exemples classiques de jeux sous forme normale.

Exemples de jeux sous forme normale

Exemple 1.1.1. *(Dilemme du prisonnier)*
On considère deux suspects en possession d'armes (délit mineur) qui sont mis en examen pour vol (délit majeur). La police ne dispose pas toutefois de preuves suffisantes pour les inculper de vol. Séparément, on leur propose le marché suivant :

- ◇ *Si l'un avoue et l'autre nie, alors celui qui avoue est libéré et témoigne contre l'autre qui écope 5 ans de prison ;*
- ◇ *Si les deux avouent, ils écopent chacun de 1 an de prison ;*
- ◇ *Si les deux nient alors ils écopent chacun de 3 ans de prison.*

Modélisation du jeu *: On convient de représenter les utilités des deux suspects par des "pertes" correspondant au nombre d'années de prison. On représente les joueurs par 1 et 2 ; leurs stratégies par A(Avouer) et N(Nier). Les utilités sont consignées dans le tableau suivant où on adopte la représentation (a , b)= (utilité de 1 , utilité de 2).*

1 \ 2	**A**	**N**
A	**(-1 , -1)**	**(0 ,-5)**
N	**(-5 , 0)**	**(-3 , -3)**

Table 1.1 – Tableau représentant le jeu du dilemme du prisonnier

Exemple 1.1.2. *(Enchère secrète au second prix).*
On considère deux acheteurs 1 et 2 pour un immeuble vendu aux enchères. Chaque acheteur $i \in \{1, 2\}$ évalue l'immeuble à hauteur de $v_i \in \mathbb{R}_+$. L'acheteur ayant la plus grosse enchère gagne et paye un montant égale à la seconde plus grosse enchère. En cas d'enchères égales, l'immeuble est attribuée aux deux acheteurs qui contribuent à hauteur de la moitié de la valeur commune proposée et profitent de l'immeuble en parts égales.
Nous sommes dans un jeu que l'on peut modéliser sous forme normale de la manière suivante :
Modélisation du jeu *: $N = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \mathbb{R}_+$, les fonctions d'utilités sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sont les suivantes :*

$$u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} v_1 - a_2 & si \quad a_1 > a_2 \\ \frac{1}{2}(v_1 - a_2) & si \quad a_1 = a_2 \\ 0 & si \quad a_1 < a_2 \end{cases} \quad et \quad u_2(a_1, a_2) = \begin{cases} 0 & si \quad a_1 > a_2 \\ \frac{1}{2}(v_2 - a_1) & si \quad a_1 = a_2 \\ v_2 - a_1 & si \quad a_1 < a_2 \end{cases}$$

Notation 1.1.1. *Soit $(N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn, $a \in A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, on note :*

- ♠ *a_i la stratégie du joueur i dans le profil a ;*
- ♠ *$a_{-i} = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, le profil des stratégies des joueurs autres que le joueur i ;*
- ♠ *$A_{-i} = A_1 \times A_2 \times \ldots A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n = \prod_{\substack{j\in N \\ j\neq i}} A_j$, l'ensemble des profils stratégiques des joueurs autres que le joueur i ;*
- ♠ *Pour $\sigma_i \in A_i$, $(a_{-i}, \sigma_i) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, \sigma_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A$, le profil de stratégies obtenu de a lorsque le joueur i remplace sa stratégie a_i par σ_i.*

Pour un joueur donné, deux stratégies diffèrent si elles conduisent à deux gains différents de ce joueur pour au moins un profil stratégique des autres joueurs. Dans le cas contraire les deux stratégies seront dites équivalentes. On donne la définition suivante :

Définition 1.1.3 (Stratégies équivalentes)

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn, $i \in N$ et $\sigma_i, \tau_i \in A_i$.
On dit que σ_i et τ_i sont équivalentes si : $\forall a_{-i} \in A_{-i}, \quad u_i(\sigma_i, a_{-i}) = u_i(\tau_i, a_{-i})$.

Autrement dit, deux stratégies du joueur i sont équivalentes si le joueur i obtient le même gain en jouant l'une ou l'autre des deux stratégies quelque soit le choix des autres joueurs.

1.1.2 Notion de dominance entre stratégies

Dans un jeu sous forme normale, les stratégies d'un joueur ne sont pas toujours équivalentes. Ainsi on peut avoir des cas où certaines stratégies apportent plus de gains à ce joueur que d'autres ; on va alors parler de *dominance*. De façon formelle, on donne les définitions suivantes :

Définition 1.1.4

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn, $i \in N$ et $\sigma_i, \tau_i \in A_i$.

- σ_i est **une stratégie dominante** du joueur i si :
$$\forall \alpha_i \in A_i,\ \forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\alpha_i, a_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, a_{-i})\,;$$
- σ_i est **une stratégie strictement dominante** si :
$$\forall \alpha_i \in A_i \setminus \{\sigma_i\}\ ,\ \forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\alpha_i, a_{-i}) < u_i(\sigma_i, a_{-i})\,;$$
- Un profil $\sigma = (\sigma_i)_{i\in N}$ est un **équilibre en stratégies dominantes** si :
$$\forall i \in N,\ \sigma_i \text{ est une stratégie dominante du joueur } i.$$
- σ_i est **faiblement dominée** par τ_i si : $\begin{cases} \forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\sigma_i, a_{-i}) \leq u_i(\tau_i, a_{-i}) \\ \exists l_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\sigma_i, l_{-i}) < u_i(\tau_i, l_{-i}) \end{cases}$
- σ_i est **strictement dominée** par τ_i si : $\forall a_{-i} \in A_{-i},\ u_i(\sigma_i, a_{-i}) < u_i(\tau_i, a_{-i})$. ;
- σ_i est **dominée** s'il existe une autre stratégie λ_i du joueur i qui la domine ;
- σ_i est **non-dominée** si elle n'est dominée par aucune autre stratégie du joueur i.

Notation **1.1.2.** *Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn et $i \in N$. Nous notons :*

♠ *$D_i(G)$ l'ensemble des **stratégies dominantes** du joueur i dans G ;*

♠ *$\overline{D}_i(G)$ l'ensemble des **stratégies non dominées** du joueur i dans G ;*

♠ *$D(G)$: l'ensemble des **équilibres en stratégies dominantes** du jeu G.*

Exemple **1.1.3.** *On considère l'exemple (1.1.1) du dilemme du prisonnier.*

◇ *Pour chaque joueur, seule la stratégie "A" est dominante : $\forall i \in \{1; 2\}, D_i(G) = \{A\}$;*

◇ *Pour chaque joueur, seule la stratégie "A" est non dominée : $\forall i \in \{1; 2\}\ \overline{D}_i(G) = \{A\}$;*

◇ *Le profil de stratégies (A, A) est le seul équilibre en stratégies dominantes du jeu.*

Lorsqu'une stratégie d'un joueur i est strictement dominée, cette stratégie est sous-optimale en toute circonstance. On peut donc s'attendre qu'un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie strictement dominée. Par contre une stratégie dominante est toujours optimale. Par conséquent, lorsque chaque joueur possède une stratégie dominante, on peut s'attendre à ce que chacun joue une stratégie dominante. De sorte que l'issue du jeu soit un équilibre en stratégies dominantes.

Remarque 1.1.2. Il existe des jfn où l'ensemble des stratégies dominantes d'au moins un joueur est vide.

Exemple 1.1.4. *On considère le jfn fini représenté par le tableau suivant :*

1 \ 2	**A**	**B**	**C**
X	**(3 , 3)**	**(6 , 0)**	**(6 , 0)**
Y	**(0 , 6)**	**(4 , 4)**	**(8 ,6)**
Z	**(0 ,6)**	**(0 , 8)**	**(5, 8)**

Table 1.2 – Tableau du jeu

- ◇ *La stratégie Z du joueur 1 est **strictement dominée** par sa stratégie X ;*
- ◇ *La stratégie B du joueur 2 est **faiblement dominée** par sa stratégie C ;*
- ◇ $\overline{D}_1(G) = \{X, Y\}$ *et* $\overline{D}_2(G) = \{A, C\}$ *;*
- ◇ *Aucun joueur ne dispose d'une stratégie dominante.*

Ce jeu ne possède donc pas d'équilibre en stratégies dominantes.

En émettant l'hypothèse que tous les joueurs sont rationnels, si dans un jfn chaque joueur possède une stratégie dominante, il la jouera à coup sûr. Le concept d'équilibre en stratégies dominantes apparait donc comme un idéal. Mais nous avons constaté, comme dans l'exemple précédent, que dans certains jeux les joueurs n'ont pas toujours de stratégie dominante. Dans la section suivante, nous présentons un nouveau concept d'équilibre : celui de **l'équilibre de Nash**.

1.2 Notion d'équilibre de Nash

1.2.1 Équilibres de Nash en stratégies pures

Définition 1.2.1 (Équilibre de Nash)

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn. Un profil $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_N^*) \in \prod_{i\in N} A_i$ est un **équilibre de Nash en stratégie pures** de G ou simplement **équilibre de Nash** de G si

$$\forall i \in N, \forall a_i \in A_i \; u_i(a_i, a_{-i}^*) \leq u_i(a_i^*, a_{-i}^*).$$

C'est un profil de stratégies dans lequel aucun joueur ne peut améliorer son gain en déviant unilatéralement de sa stratégie. Cette notion, élaborée par l'américain John Nash en 1950 dans [15], a eu un impact considérable dans tous les divers domaines de la théorie des jeux non coopératifs.

Notation 1.2.1. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures du jeu G est noté $EN_{SP}(G)$.*

Exemple 1.2.1.

- *Dans le jeu de l'exemple (1.1.1), le profil (A, A) est un équilibre de Nash. En effet, on a : $u_1(N, A) < u_1(A, A)$ et $u_2(A, N) < u_2(A, A)$, aucun des 2 joueurs n'a intérêt à dévier unilatéralement du profil (A, A).*
- *Dans le jeu de l'exemple (1.1.4), les profils (Y, C) et (X, A) sont les seuls équilibres de Nash du jeu.*

Nous présentons quelques propriétés des équilibres de Nash en stratégies pures dans un jfn fini.

Proposition 1.2.1

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn et $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ un profil de stratégies.

(1) Si a^* est un équilibre en stratégies dominante, alors a^* est un équilibre de Nash.

(2) Si a^* est un équilibre de Nash, alors pour tout $i \in N$, a_i^* n'est pas strictement dominée.

(3) Soient $i_0 \in N$ et $b_{i_0} \in A_{i_0}$ une stratégie strictement dominée du joueur i_0. Soit G' le jeu issu de G où l'on a supprimé la stratégie b_{i_0} du joueur i_0. Alors $EN_{SP}(G) = EN_{SP}(G')$.

Preuve.

$\boxed{1}$ Cela découle de la définition. En effet si $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ est un équilibre en stratégies dominantes, alors pour tout $i \in N$, a_i^* est une stratégie dominante du joueur i on a :

$$\forall \sigma_i \in A_i\ u_i(\sigma_i, a_{-i}^*) \leq u_i(a_i^*, a_{-i}^*).$$

Donc $(a_i^*)_{i\in N}$ est un équilibre de Nash.

$\boxed{2}$ Soit $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ un équilibre de Nash du jeu G. Supposons qu'il existe $i_0 \in N$ tel que $a_{i_0}^*$ soit strictement dominée. Il existe donc $b_{i_0} \in A_{i_0}$ tel que $u_i(a_{i_0}^*, a_{-i_0}^*) < u_i(b_{i_0}, a_{-i_0}^*)$ ce qui contredit le fait que $a^* = (a_i^*)_{i\in N}$ soit un équilibre de Nash de G. Donc pour tout $i \in N$, a_i^* n'est pas strictement dominée.

$\boxed{3}$ Posons $G' = (N, (A'_i)_{i\in N}, (u'_i)_{i\in N})$ avec $A'_{i_0} = A_{i_0} \setminus \{i_0\}$, $A'_i = A_i$ si $i \neq i_0$ et pour tout $i \in N$, u'_i est la restriction de u_i sur A'_i. Soit $a^* = (a^*_i)_{i\in N}$ un équilibre de Nash de G. Alors d'après le volet (2) ci-dessus, a_{i_0} n'est pas strictement dominée. D'où $a^*_{i_0} \neq b_{i_0}$, donc le profil (a^*_i) est jouable dans le jfn G'. Ainsi $(a^*_i) \in EN_{SP}(G')$. Inversement, si $(a^*_i)_{i\in N} \in EN_{SP}(G')$ alors

$$\forall j \in N, j \neq i_0,\ \forall a_j \in A'_j,\ u_j(a^*_j, a^*_{-j}) \geq u_j(a_j, a^*_j)$$

De plus, $\forall a_{i_0} \in A'_{i_0}$, $u_{i_0}(a^*_{i_0}, a^*_{-i_0}) \geq u_{i_0}(a_{i_0}, a^*_{-i_0})$. Étant donné que $b_{i_0} \in A_{i_0}$ et est strictement dominée, alors il existe $c_{i_0} \in A_{i_0}$ tel que $u_{i_0}(c_{i_0}, a^*_{-i_0}) > u_{i_0}(b_{i_0}, a^*_{-i_0})$. Ainsi on obtient par transitivité de '>', $u_{i_0}(a^*_{i_0}, a^*_{-i_0}) > u_{i_0}(b_{i_0}, a^*_{-i_0})$. D'après ce qui précède il vient donc que $(a^*_i)_{i\in N} \in EN_{SP}(G)$ □

Remarque 1.2.1.

1. La réciproque du (1) de la proposition 1.2.1 est fausse.
2. Un équilibre de Nash peut néanmoins contenir des stratégies faiblement dominées.

Exemple 1.2.2. ***(Contre exemple).***

Considérons le jfn représenté par le tableau ci dessous :

1 \ 2	A_2	B_2
A_1	**(1 , 1)**	**(0 , 0)**
B_1	**(0 , 0)**	**(0 , 0)**

TABLE 1.3 – Tableau du jeu

(B_1, B_2) est un équilibre de Nash de ce jeu. Par contre (B_1, B_2) n'est pas un équilibre en stratégies dominantes *car la stratégie B_1 du joueur 1 est faiblement dominée par A_1.*

Remarque 1.2.2. *L'ensemble des équilibres de Nash d'un jfn peut être vide.*

Exemple 1.2.3. ***(Matching Pennies)***

Deux joueurs 1 et 2 jouent à déclarer au choix simultanément pile ou face. Si les choix sont identiques, le joueur 1 remet 1 dollar au joueur 2. S'ils sont distincts, le joueur 2 remet 1 dollar au joueur 1. Les joueurs, les stratégies et les utilités sont représentés dans le tableau suivant :

1 \ 2	**Pile(P)**	**Face(F)**
Pile(P)	**(-1 , 1)**	**(1 , -1)**
Face (F)	**(1 , -1)**	**(-1 , 1)**

TABLE 1.4 – Tableau du jeu de Matching Pennies

Ce jeu n'admet aucun équilibre de Nash en stratégies pures, dans chaque profil, un joueur a toujours intérêt à dévier unilatéralement.

Ainsi dans les jfn **finis**, un moyen de rechercher des équilibres de Nash consiste à réduire la taille du jeu en supprimant les stratégies strictement dominées de chaque joueur. On obtient un nouveau jeu dans lequel une stratégie qui n'était pas strictement dominée au départ peut le devenir dans le nouveau jeu. On réitère le processus jusqu'à obtenir un jeu où chaque joueur ne possède pas de stratégies strictement dominées. Ce procédé ne conduit pas nécessairement à un équilibre de Nash, mais réduit considérablement l'étude du jeu.

1.2.2 Correspondance de meilleures réponses d'un jeu et équilibre de Nash

Ici, nous rappelons des notions qui seront employées dans la caractérisation des équilibres de Nash.

Définition 1.2.2 (Correspondance)

Soient X et Y deux ensembles non vides. Une **correspondance** ou (**multi-application**) de X dans Y est une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des parties de Y.

Notation 1.2.2. *On note $F : X \rightrightarrows Y$, pour dire que F est une correspondance de X vers Y qui à un $x \in X$ associe $F(x) \subseteq Y$.*

Remarque 1.2.3.
Toute application de X vers Y peut être vue comme une correspondance particulière. En effet à tout élément de l'ensemble de départ X, elle associe un élément de Y identifiable à un singleton. La notion de correspondance généralise donc celle d'application.

La notion de graphe d'une fonction se généralise aux correspondances comme suit :

Définition 1.2.3

Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une correspondance de X vers Y. On appelle **graphe** de F, l'ensemble :

$$Gr(F) := \{(x, y) \in X \times Y \ : y \in F(x)\}.$$

En outre on peut étendre la notion de **point fixe**, vue dans le cadre des fonctions, aux correspondances définies d'un ensemble non vide vers lui même.

Définition 1.2.4 (Point fixe)

Soit $F : X \rightrightarrows X$ une correspondance. On dit que $x \in X$ est un point fixe de F si $x \in F(x)$.

La notion de correspondance est utilisée en théorie des jeux sous forme normale pour définir les concepts suivants :

Définition 1.2.5

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn, $i \in N$,$a_i \in A_i$ et $a_{-i} \in A_{-i}$. On dit que a_i est une **meilleure réponse du joueur** i contre a_{-i} lorsque :

$$u_i(a_i, a_{-i}) = \max_{b_i\in A_i} u_i(b_i, a_{-i}).$$

Une meilleure réponse d'un joueur i contre a_{-i} désigne toute stratégie de ce joueur qui lui permet de maximiser son gain lorsque les autres joueurs jouent suivant le profil a_{-i}.

Notation **1.2.3.** *On note par $MR_i(a_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses du joueur i contre a_{-i}.*

Remarque **1.2.4.**

1. Par convention $MR_i(a_{-i}) = \emptyset$ si $\max_{b_i\in A_i} u_i(b_i, a_{-i})$ n'existe pas ;
2. Si $(a_i^*)_{i\in N} \in EN_{SP}(G)$, alors $\forall i \in N$, a_i^* est meilleure réponse du joueur i contre a_{-i}^*.

À partir de la notion de meilleure réponse d'un joueur et en conservant la notation précédente nous donnons la définition suivante :

Définition 1.2.6

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn. On appelle **correspondance de meilleures réponses du joueur** i, la correspondance MR_i suivante : $\begin{array}{rccc} MR_i : & A_{-i} & \rightrightarrows & A_i \\ & a_{-i} & \longmapsto & MR_i(a_{-i}) \end{array}$.

Exemple **1.2.4.**

Dans le jeu défini par le tableau de l'exemple (1.1.4), on a pour le joueur 1, $MR_1(A) = \{X\}$, $MR_1(B) = \{X\}$ et $MR_1(C) = \{Y\}$.

Définition 1.2.7

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn.

On appelle **correspondance** de **meilleures réponses du** jeu G, la correspondance MR suivante :

$$\begin{array}{rccl} MR : & A & \rightrightarrows & A \\ a = (a_i)_{i\in N} & \longmapsto & MR(a) & = \prod_{i\in N} MR_i(a_{-i}) \end{array}$$

Nous énonçons la proposition suivante :

Proposition 1.2.2

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn et soit $a^* \in A$. Le profil a^* est un **équilibre de Nash** du jeu G si et seulement si a^* est un point fixe de la correspondance de meilleure réponse du jeu G.

***Preuve*.**

Soit $MR : A \rightrightarrows A$ la correspondance de meilleure réponse du jeu G, on a :

$$\begin{aligned} a^* \in EN_{SP}(G) &\Longleftrightarrow \forall i \in N, \forall a_i \in A_i,\ u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \\ &\Longleftrightarrow \forall i \in N,\ a_i^* \in MR_i(a_{-i}^*) \\ &\Longleftrightarrow a^* \in \prod_{i\in N} MR_i(a_{-i}^*) \\ &\Longleftrightarrow a^* \in MR(a^*) \end{aligned}$$

□

1.2.3 Extension mixte d'un jeu sous forme normale

Dans cette sous-section, nous présentons la notion de stratégie mixte et d'extension mixte d'un jeu sous forme normale. Nous commençons par rappeler quelques notations

Notation 1.2.4. *Pour un ensemble **fini** S, nous notons $\Delta(S)$ l'ensemble des **distributions de probabilité** sur S. Plus précisément* $\Delta(S) := \left\{ p = (p_i)_{i\in S} \in [0,1]^{|S|} : \sum_{i\in S} p_i = 1 \right\}$

Partant de ce rappel, nous pouvons définir la notion de stratégie mixte comme suit :

Définition 1.2.8 (Stratégie mixte)

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn **fini** et $i \in N$. Une **stratégie mixte** du joueur i, est une distribution de probabilité sur l'ensemble A_i de ses stratégies pures.

Une stratégie mixte du joueur i est donc un élément de $S_i = \Delta(A_i)$.

Définition 1.2.9

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn **fini**, $i \in N$ et $s_i = (s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{k_i}) \in \Delta(A_i)$ avec $k_i = |A_i|$. La stratégie mixte s_i du joueur sera dite **complètement mixte** si :

$$\forall k \in \{1, \ldots, k_i\},\ s_i^k \neq 0.$$

Remarque 1.2.5. *Toute stratégie pure d'un joueur i peut être vue comme une stratégie mixte du joueur i. En effet si a_i^j est une stratégie pure du joueur i, alors a_i^j s'identifie à la stratégie mixte $s \in \Delta(A_i)$ définie de la manière suivante :*

$$s = (s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{k_i}) \text{ où } s_i^k = \begin{cases} 1 & si\ k = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Définition 1.2.10 (Profil de stratégies mixtes)

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn fini. Un profil de stratégies mixtes est un élément de l'ensemble $S = \prod_{i\in N} \Delta(A_i)$.

Une fois que chaque joueur i choisit une distribution de probabilité s_i dans $\Delta(A_i)$, on obtient un profil de stratégies mixtes $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. On suppose qu'aucun joueur n'est informé du choix des autres joueurs. Les choix sont donc **indépendants** et donc les probabilités $(s_i)_{i\in N}$ aussi. Par conséquent, la probabilité pour qu'un profil $a = (a_1^{r_1}, a_2^{r_2}, \ldots, a_N^{r_N})$ soit joué est donnée par :

$$P_s(a) = \prod_{i\in N} s_i(a_i^{r_i}) = \prod_{i\in N} s_i^{r_i}. \text{ Avec } s_i(a_i^{r_i}) = s_i^{r_i}.$$

Ainsi $P_s = s_1 \otimes s_2 \otimes \cdots \otimes s_n$, le **produit discret des probabilités** $(s_i)_{i\leq n}$, est une distribution de probabilité sur $A = \prod_{i\in N} A_i$.

De plus, les gains de chaque joueur ne sont payés qu'en fonction du profil $a \in A$ qui est joué. L'espérance mathématique de gain d'un joueur i lorsque le profil de stratégies mixtes $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ est choisi est donnée par :

$$R_i(s) = \sum_{a\in A} P_s(a) u_i(a).$$

Nous sommes à présent capables de présenter la notion d'extension mixte d'un jeu sous forme normale fini.

Définition 1.2.11 (Extension mixte)

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn fini. On appelle **extension mixte** de G, le jeu sous forme normale

$$\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N}) \text{ avec :}$$

- $\forall i \in N,\ S_i = \Delta(A_i)$ l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i ;
- $\forall i \in N,\ R_i : S = \prod_{i\in N} S_i \to \mathbb{R}$ est la fonction qui à tout profil de stratégies mixtes choisi, associe l'espérance mathématique de gain du joueur i dans ce profil.

Exemple 1.2.5. *On considère le jeu du dilemme du prisonnier de l'exemple 1.1.1 .*

- *Le joueur 1 peut décider d'avouer (A) avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et de nier (N) avec la probabilité $\frac{3}{4}$; alors $s_1 = (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ est un exemple de stratégies mixtes du joueur 1.*
- *De même, le joueur 2 peut décider d'avouer (A) avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et de nier (N) avec une probabilité de $\frac{2}{3}$; alors $s_2 = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ est un exemple de stratégie mixte du joueur 2.*
- *$s = (s_1, s_2)$ est donc un exemple de profil de stratégies mixtes du jeu.*
- *Le choix d'un tel profil de stratégies mixtes induit la probabilité produit $s_1 \otimes s_2$ sur $A_1 \times A_2$ qui est telle que : $s_1 \otimes s_2(A, A) = (\frac{1}{4}).(\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$, $s_1 \otimes s_2(A, N) = (\frac{1}{4}).(\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}$, $s_1 \otimes s_2(N, A) = (\frac{3}{4}).(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$ et $s_1 \otimes s_2(N, N) = (\frac{3}{4}).(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$.*
- *Les gains espérés de chacun des joueurs lorsque le profil $s = (s_1, s_2)$ est joué sont :*
  - ⋄ *Pour le joueur 1 : $R_1(s_1, s_2) = (-3)(\frac{1}{12}) + (0)(\frac{1}{6}) + (-5)(\frac{1}{4}) + (-1)(\frac{1}{2}) = -2$*
  - ⋄ *Pour le joueur 2 : $R_2(s_1, s_2) = (-3)(\frac{1}{12}) + (-5)(\frac{1}{6}) + (0)(\frac{1}{4}) + (-1)(\frac{1}{2}) = -\frac{19}{12}$.*

1.2.4 Équilibres de Nash en stratégies mixtes

Définition 1.2.12

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn. On appelle **équilibre de Nash en stratégies mixtes** du jeu G, tout équilibre de Nash de son extension mixte $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N})$.

Notation 1.2.5. *L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes du jeu G est noté $EN_{SM}(G)$. On a donc : $EN_{SP}(\Gamma) = EN_{SM}(G)$.*

Exemple 1.2.6. *Considérons le jeu de l'exemple (1.2.3). Une stratégie mixte du joueur 1 est mise sous la forme $s_1 = (p, 1-p)$ avec $p \in [0, 1]$ et sera identifiée simplement à p. Une* *stratégie pure du joueur 2 est mise sous la forme* $s_2 = (q\ , 1 - q)$ *avec* $q \in [0, 1]$ *et sera identifiée simplement à* q.

Dans la suite, un profil $s = (s_1, s_2)$ *sera noté simplement* (p, q). *Les espérances de gains de chaque joueur sont résumés dans le tableau ci dessous :*

Joueur 1	***Joueur 2***
$R_1(p, q) = (-4q + 2)p + 2q - 1$	$R_2(p, q) = (4p - 2)q - 2p + 1$

Les correspondances de meilleures réponses des joueurs sont :

$$MR_1(q) = \begin{cases} \{0\} & si \quad q > \frac{1}{2} \\ [0, 1] & si \quad q = \frac{1}{2} \\ \{1\} & si \quad q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad et \quad MR_2(p) = \begin{cases} \{0\} & si \quad p < \frac{1}{2} \\ [0, 1] & si \quad p = \frac{1}{2} \\ \{1\} & si \quad p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Un profil $(p^*, q^*) \in EN_{SM}(G) \Longleftrightarrow p^* \in MR_1(q^*)$ *et* $q^* \in MR_2(p^*)$. *On trouve que* $(p^*, q^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\boxed{EN_{SM}(G) = \left\{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right\}}$$

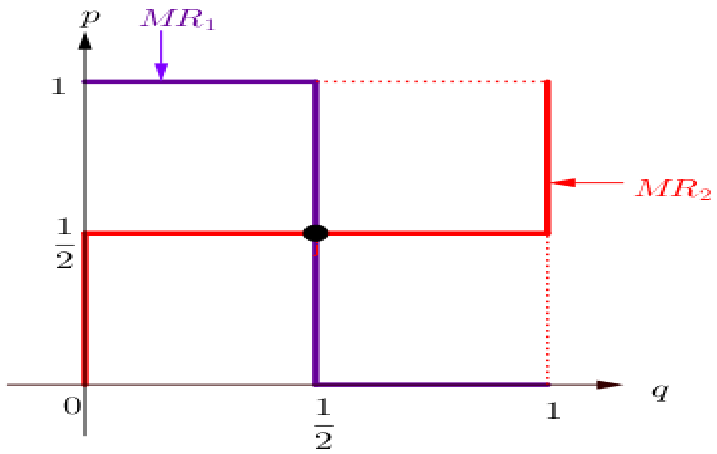

Figure 1.1 – Courbes de meilleures réponses dans le jeu de Matching Pennies

Dans un jeu sous forme normale, l'existence d'un équilibre de Nash n'est pas toujours garantie comme nous avons pu le voir dans l'exemple (1.2.3). Il serait intéressant de connaître des conditions qui garantissent l'existence d'un équilibre de Nash. En d'autres termes, sous quelles conditions peut-on garantir l'existence d'un équilibre de Nash dans un jfn ?

1.3 Existence d'équilibres de Nash

Dans cette section nous abordons la question de l'existence d'équilibres de Nash (en stratégies pures et en stratégies mixtes) dans un jeu sous forme normale. Avant cela, nous ferons certains rappels des propriétés des correspondances ; puis nous présenterons des résultats d'analyse sur les théorèmes du point fixe qui seront indispensables dans nos preuves.

1.3.1 Quelques rappels des notions d'analyse

Rappelons qu'un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie munie d'un produit scalaire.

Proposition 1.3.1

Soient X et Y des sous ensembles non vides d'espaces vectoriels euclidiens. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une correspondance. Si le graphe de F est compact, alors pour tout $x \in X$, $F(x)$ est compact.

Preuve.

Supposons que $Gr(F)$ est compact. Soit $x \in X$. Montrons que $F(x)$ est compact. Comme $F(x)$ est une partie d'un espace vectoriel euclidien, nous montrons que toute suite de points de $F(x)$ admet une sous suite qui converge dans $F(x)$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $F(x)$. Posons $z_n = (x\ , y_n)$. Alors $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $Gr(F)$. L'ensemble $Gr(F)$ étant un compact de $X \times Y$, alors il existe une sous-suite $(z_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $Gr(F)$. Donc il existe $y \in F(x)$ tel que $z_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, y)$. Cela entraîne que $y_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. D'où la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $F(x)$. Il vient que $F(x)$ est compact.

$\square$

Avant de continuer, rappelons les notions suivantes qui sont très utiles pour établir certains résultats sur l'existence des équilibres de Nash dans un jfn.

Définition 1.3.1

Soit X un ensemble non vide d'un espace vectoriel réel E.

(1) On dit que X est **convexe** si : $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1-\lambda)y \in X$;

(2) On appelle **enveloppe convexe** de X, noté $Conv(X)$, le plus petit ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant X.

(3) Si X est convexe, on dit que f est **concave** si :

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(4) On dit que f est **quasi-concave** si :

$$\forall x \in X \in Y, \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{f(x), f(y)\}.$$

(5) Si X est convexe, on dit que f est **convexe** (respectivement **quasi-convexe**) si $-f$ est concave (respectivement quasi-concave).

Remarque 1.3.1.

1 Toute fonction concave est quasi-concave mais la réciproque est fausse. En effet, si f est concave on a toujours

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq min\{f(x), f(y)\}.$$

Donc toute fonction concave est quasi-concave. La réciproque n'est pas vraie. Par exemple l'application g définie de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ qui à tout x associe x^2 est quasi-concave mais n'est pas concave.

2 Si S est un ensemble fini alors $\Delta(S)$ l'ensemble des distributions de probabilité sur S est convexe et s'identifie à l'enveloppe convexe de S.

Lemme 1.3.1

Soient X un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel réel et f une application de X dans $\mathbb{R}$.
Alors f est quasi-concave si et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\{x \in X \ : f(x) \geq \alpha\}$ est convexe.

***Preuve*.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f quasi-concave. Soit α dans $\mathbb{R}$. Posons $A = \{x \in X, f(x) \geq \alpha\}$. Nous montrons que A est convexe. Soient x et y dans A et λ dans $[0,1]$. Notons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Comme f est quasi-concave, on a $f(z) \geq min\{f(x), f(y)\}$. Comme x et y sont dans A, $min\{f(x), f(y)\} \geq \alpha$. Donc $f(z) \geq \alpha$, et $z \in A$. L'ensemble A est donc convexe.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que pour tout α de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X, f(x) \geq \alpha\}$ soit convexe. Soient x et y dans X et λ dans $[0,1]$.

$$\text{Posons } \alpha = min\{f(x), f(y)\} \text{ et } A = \{z \in X, f(z) \geq \alpha\}.$$

On a $f(x) \geq \alpha$ et $f(y) \geq \alpha$, donc x et y sont dans A. Par hypothèse A est convexe, donc $\lambda x + (1-\lambda)y$ est dans A. Donc $f(x + (1-\lambda)y) \geq \alpha$, d'où f est quasi-concave.

□

Théorème du point fixe de Kakutani

Nous présentons le théorème du point fixe de Kakutani qui est employé dans l'étude du problème de l'existence des équilibres de Nash dans un jfn.

Théorème 1.3.1 (Kakutani (voir [9]))

Soient X un ensemble convexe compact non vide d'un espace vectoriel euclidien E et $F : X \rightrightarrows X$ une correspondance de graphe fermé telle que pour tout $x \in X$, $F(x)$ est compact, convexe non vide.

Alors : $\exists x^* \in X$ *tel que* $x^* \in F(x^*)$.

1.3.2 Conditions d'existence d'équilibres de Nash en stratégies pures

Dans cette sous-section nous présentons le théorème de Glicksberg [11] et Debreu [8] qui donne des conditions suffisantes d'existence d'équilibres de Nash en stratégies pures dans un jfn ainsi que des propriétés sur l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures.

Théorème 1.3.2 (Debreu, Glicksberg ([8], [11]))

Soit $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn. On suppose que :

(1) Pour tout $i \in N$, A_i est un ensemble convexe, compact d'un espace vectoriel euclidien.

(2) Pour tout $i \in N$, u_i est continue.

(3) Pour tout $i \in N$, pour tout $a_{-i} \in A_{-i}$, l'application $\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a_i & \longmapsto & u_i(a_i, a_{-i}) \end{array}$ est quasi-concave.

Alors :

(a) Il existe un équilibre de Nash dans G

(b) L'ensemble des équilibres de Nash de G est fermé dans A.

(c) L'ensemble des paiements des équilibres de Nash est une partie compact de de $\mathbb{R}^N$.

Preuve. Voir annexe □

Toutefois Dasgupta et Maskin dans [7], ont abordé la question de l'existence des équilibres de Nash dans les jeux où les fonctions d'utilité des joueurs sont **discontinues**.

1.3.3 Existence d'équilibres de Nash en stratégies mixtes

Nous allons énoncer et démontrer le théorème de Nash qu'on retrouve dans [15] et qui porte sur l'existence d'équilibres de Nash dans l'extension mixte d'un jfn **fini** G. Avant cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.2

Soient $G = (N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un jfn **fini** et $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (R_i)_{i\in N})$ son extension mixte. Soient $i \in N$ et $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S = \prod_{j\in N} S_j$ un profil de stratégies mixtes. On a :

$$R_i(s) = \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i) R_i(a_i, s_{-i}).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} R_i(s) &= \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\ \in A} \left(\prod_{j=1}^{n} s_j(a_j)\right) \cdot u_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i) \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} (s_1(a_1)\ldots s_{i-1}(a_{i-1})s_{i+1}(a_{i+1})\ldots s_n(a_n)) \cdot u_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i) \cdot R_i(a_i, s_{-i}). \end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.3 (Nash [15])

Dans un jeu sous forme normale fini, il existe un équilibre de Nash en stratégies mixtes. De plus, l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes ainsi que l'ensemble des paiements de ces équilibres sont des ensembles compacts.

Preuve.

Nous allons appliquer le Théorème de (1.3.2). Soit i un joueur de N. $\Delta(A_i)$ est convexe compact non vide dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^{|A_i|}$. L'application R_i est multilinéaire donc est continue. Fixons s_{-i} dans $\prod_{i\neq j} \Delta(A_j)$ et notons R^i l'application de $\Delta(A_i)$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $s_i \in \Delta(A_i)$, $R^i(s_i) = R_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) = R_i(s_i; s_{-i})$. L'application R^i associe à toute probabilité s_i sur A_i le paiement du joueur i s'il joue s_i contre s_{-i}. D'après le Lemme (1.3.2), on a $R^i(s_i) = \sum_{a_i\in A_i} s_i(a_i) R^i(a_i)$, donc R^i est affine ; donc concave ; donc quasi-concave. On peut donc appliquer le Théorème (1.3.2) à Γ et on obtient les résultats escomptés.

□

Chapitre Deux

JEUX SOUS FORME EXTENSIVE

Sommaire

2.1 Définition et exemples de jeux sous forme extensive 21

2.2 Notion de stratégie dans un jeu sous forme extensive 25

2.2.1 Stratégies pures 25

2.2.2 Stratégies aléatoires 26

2.2.3 Notion d'équilibre parfait en sous-jeux 28

Introduction

Dans l'étude des jeux sous forme normale, nous avons vu que les joueurs prenaient leurs décisions une seule fois et simultanément (sans observer au préalable les choix des autres joueurs). Toutefois, il existe des situations d'interaction où au moins un des joueurs peut effectuer ses choix de façon séquentielle ; c'est le cas par exemple du jeu d'échec et du monopoly. La dimension temporelle est donc prise en compte. Dans ce chapitre nous allons modéliser ce type de jeu qu'on appellera **jeu sous forme extensive**. Nous donnons d'abord une définition de la notion de jeux sous forme extensive avec quelques exemples classiques ; puis nous abordons certains concepts clés tels que la notion de sous-jeu et d'équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

2.1 Définition et exemples de jeux sous forme extensive

Les jeux sous forme extensive ont naturellement une structure arborescente, et peuvent donc être décrits par l'utilisation d'un graphe (ou un arbre) orienté, appelé **arbre de décision** ou **arbre de jeu** que nous définissons de manière formelle comme suit :

Définition 2.1.1 (Arbre de décision)

On appelle **arbre de jeu**, tout triplet ordonné $\mathcal{A} = (S, s_0, f)$ où

- S est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés **sommets** ou **nœuds** ;
- $s_0 \in S$ représente la **racine de l'arbre** ;
- f est une application de $S \setminus \{s_0\}$ vers S, appelée **fonction prédécesseur** telle que : $\forall s \in S \setminus \{s_0\}, \exists n \geq 1 \,| f^{(n)}(s) = s_0$ où $f^{(n)} = f \circ \cdots \circ f$ (n fois).

Notation **2.1.1.** *Dans la suite nous notons :*

- *T l'ensemble des **nœuds terminaux** (les nœuds qui ne sont prédécesseur d'aucun autre nœud) c'est-à-dire : $T = \{s \in S : \forall s' \in S \backslash \{s_0\}, f(s') \neq s\}$*
- *$S \backslash T$ représente l'ensemble des **nœuds intermédiaires** ou **nœuds de décision** ;*
- *$\forall x \in S \backslash T$, on note $S(x)$ l'ensemble des nœuds successeurs du nœud x. Précisément $S(x) = \{s \in S : \exists n \geq 1 \mid f^{(n)}(s) = x\}$.*

Définition 2.1.2

Un **jeu sous forme extensive** (en abrégé **jfe**) ou encore **un jeu dynamique**, est la donnée de :

$$\Gamma = (N, \mathcal{A}, A, j, C, h, (u_i)_{i \in N}) \text{ où}$$

- N désigne un ensemble fini non vide de joueurs. Il est noté $N = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $\mathcal{A} = (S, s_0, f)$ est un arbre de décision dont l'ensemble des nœuds terminaux est T ;
- j est une application sur $S \backslash T$ vers N, qui à chaque sommet intermédiaire s, indique le joueur qui prend la décision ;
- $A(s)$ représente l'ensemble des alternatives du joueur $j(s)$ qui a la main au sommet s ;
- Si $s \in S \backslash T$, $a \in A(s)$, $C(a, s)$ représente le nœud successeur résultant du choix de a en s ;
- Pour tout $i \in N$, $u_i : T \to \mathbb{R}$ indique la fonction d'utilité ou de payement du jouer i ;
- En chaque nœud intermédiaire $s \in S \backslash T$, $h(s) \subseteq S$ représente l'ensemble d'information du joueur $j(s)$. C'est un ensemble vérifiant :

$$s' \in h(s) \Rightarrow \begin{cases} j(s') = j(s) \\ A(s') = A(s) \\ h(s') = h(s) \end{cases}$$

Lorsque l'ensemble S des sommets du jeu est fini, alors le jfe est dit **fini**.

Dans la pratique, on représente un jeu sous forme extensive fini par un graphe en forme d'arbre laissant ressortir à la fois les joueurs, les nœuds où ils interviennent, les actions qu'ils prennent à chaque nœud de décision et les utilités de chaque joueur aux nœuds terminaux.

Déroulement d'un jeu sous forme extensive

- Soit i_0 le joueur tel que $j(s_0) = i_0$;
- Le joueur i_0 choisit une action a dans $A(s_0)$, le jeu va dans le nœud $C(a, s_0)$;
- De façon inductive, supposons que le jeu s'est joué jusqu'à un nœud $s \in S \setminus T$. Soit $i \in N$ tel que $j(s) = i$. Le joueur i est informé de $h(s)$ mais ne connaît pas forcément s. Il choisit $a_s \in A(s)$ et le jeu va au nouveau nœud $C(a_s; s)$.
- Lorsque le jeu atteint $t \in T$, un nœud terminal, chaque joueur i reçoit le paiement $u_i(t)$.

La suite des nœuds $(s_0, s_1, \ldots, s_t)$ visités jusqu'à t dans le jeu est appelée une **partie du jeu**. Dans la suite, nous donnons quelques exemples classiques de jeux sous forme extensive.

Exemple 2.1.1 (Jeu de l'ultimatum cas fini).
Deux agents représentés par 1 et 2 doivent se partager 2 unités. L'agent 1 fait une proposition au second qui peut soit l'accepter (stratégie A) ou la refuser (stratégie R). Le jeu est décrit par l'arbre de jeu suivant :

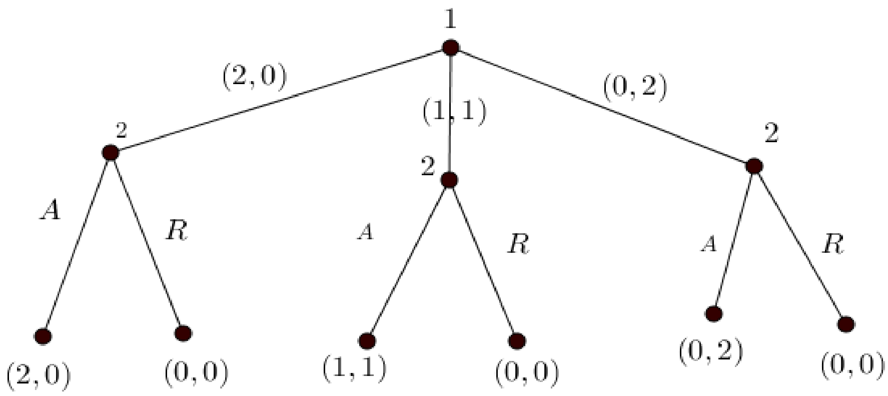

FIGURE 2.1 – Arbre du jeu de l'ultimatum cas fini

Exemple 2.1.2 (Jeu de pile ou face sans observations).
Le joueur 1 a le choix entre pile ou face ; il indique son choix sous pli fermé puis le joueur 2 sans être informé du choix du joueur 1, choisit à son tour pile ou face. Les règles sont les suivantes :

- Le joueur 2 gagne si les choix coïncident .

- Le joueur 1 gagne si les choix sont différents. Nous résumons cela dans l'arbre de jeu suivant :

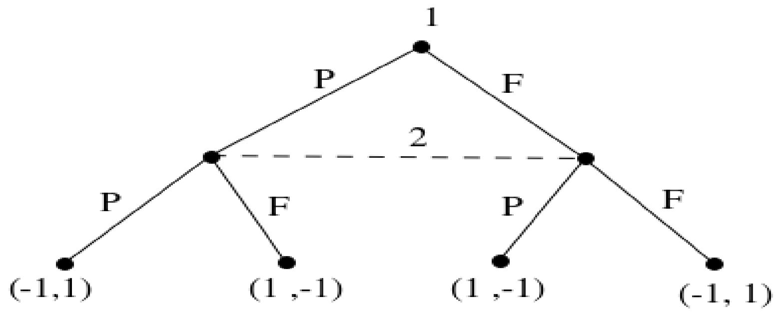

FIGURE 2.2 – Arbre du jeu de pile ou face sans observations

L'ensemble d'information du joueur 2 comprend ses deux nœuds de décision. Ceci signifie que le joueur 2 ne différencie pas ces deux nœuds. Il doit effectuer un choix indépendant de celui effectué précédemment par le joueur 1.

Cela nous conduit aux définitions suivantes :

Définition 2.1.3

Un jeu sous forme extensive $\Gamma = (N, S, A, j, C, h, u)$ est dit :

• À **information parfaite** si :

$$\forall s \in S, \quad |h(s)| = 1.$$

Dans le cas contraire, le jeu est dit à **information imparfaite**.

• À **information complète** si chaque joueur connait les stratégies et les fonctions d'utilité des autres joueurs.

Un jfe à information parfaite est un jeu dans lequel à chaque fois qu'un joueur doit intervenir, il est informé de toutes les interventions antérieures. Il sait exactement à quel nœud il se trouve au moment où il intervient.

Définition 2.1.4

Un jfe Γ est dit à **mémoire parfaite**, si chaque joueur se rappelle toujours de toutes ses actions passées à tout moment où il intervient dans le jeu.

Remarque 2.1.1. Tout jeu sous forme extensive à information complète et parfaite est à mémoire parfaite.

2.2 Notion de stratégie dans un jeu sous forme extensive

2.2.1 Stratégies pures

Dans un jfe, une stratégie pure d'un joueur est un **plan d'action** (elle indique l'action prise) de ce joueur sur chacun de ses ensembles d'information. De manière formelle, posons $S_i = \{t \in S : j(t) = i\}$ l'ensemble de tous les nœuds où le joueur i intervient. On a la définition suivante :

Définition 2.2.1 (Stratégie pure)

Une stratégie pure pour le joueur $i \in N$ est une application $s_i : S_i \longrightarrow \underset{s \in S_i}{\cup} A(s)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in S_i, & s_i(t) \in A(t) \\ \forall t, t' \in S_i, & t \in h(t') \implies s_i(t) = s_i(t'). \end{cases}$$

Notation 2.2.1. *L'ensemble des stratégies pures du joueur i sera noté A_i.*

À partir de l'arbre de jeu d'un jfe fini, on peut décider d'adopter une numérotation des sommets de l'arbre qui font parti de $S_i = \{s^i_j, 1 \leq j \leq m\}$, $i \in N$, comme suit :

$$s = s^i_j,\ s' = s^i_k,\ j \leq k$$

$$\Updownarrow$$

(s' est un nœud successeur de s) ou (s'ils sont issus d'un même nœud, s' est plus à droite que s).

Alors les stratégies pures du joueur i peuvent être vues comme des $|S_i|$-uplets formés d'éléments de $\underset{t \in S_i}{\cup} A(t)$.

Exemple 2.2.1. *Dans l'exemple (2.1.1), les stratégies pures du joueur 2 sont*

$$A_2 = \{(A, A, A), (A, A, R), (A, R, A), (A, R, R), (R, A, A), (R, A, R), (R, R, A), (R, R, R)\}$$

Dans l'exemple (2.1.2), les stratégies du joueur 2 sont $A_2 = \{(P, P), (F, F)\}$ car les deux sommets où intervient le joueur 2 appartiennent au même ensemble d'information.

Remarque 2.2.1. *Deux stratégies pures d'un joueur i peuvent donner le même résultat quelque soit ce que font les autres. On dira alors qu'elles sont **équivalentes**.*

Exemple 2.2.2. *Considérons le jfe à deux joueurs 1 et 2 dont l'arbre de jeu est représenté ci dessous :*

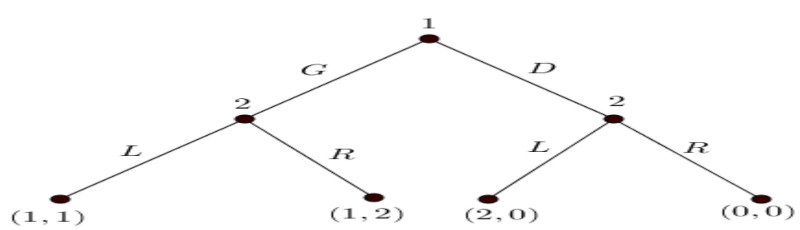

Figure 2.3 – Arbre du jeu de l'exemple (2.2.2)

Les stratégies (L, R) et (L, L) du joueur 2 sont équivalentes.

2.2.2 Stratégies aléatoires

Comme dans le cas des jeux sous forme normale, nous avons besoin de représenter les possibilités de jouer de manière aléatoire. Deux types de stratégies représentent des choix aléatoires des joueurs.

Stratégies mixtes

Définition 2.2.2 (Stratégie mixte)

Une stratégie mixte d'un joueur est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures de ce joueur.

Exemple 2.2.3. *Dans l'exemple (2.1.1), une stratégie mixte du joueur 1 est une distribution de probabilité sur l'ensemble* $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$ *et une stratégie mixte du joueur 2 est une distribution de probabilité sur l'ensemble*

$$A_2 = \{(A,A,A),(A,A,R),(A,R,A),(A,R,R),(R,A,A),(R,A,R),(R,R,A),(R,R,R)\}$$

Stratégies de comportement

Définition 2.2.3 (Stratégie de comportement)

Une stratégie de comportement du joueur i est une application $\sigma_i : S_i \longrightarrow \underset{t\in S_i}{\cup} \Delta(A(t))$

$$\text{telle que : } \begin{cases} \forall s \in S_i, \quad \sigma_i(s) \text{ est une distribution de probabilité sur } A(t) \\ \forall s, s' \in S_i, \quad s \in h(s') \Longrightarrow \sigma_i(s) = \sigma_i(s') \end{cases}$$

Dans une stratégie mixte, le joueur choisit aléatoirement "au début du jeu" la stratégie pure qu'il utilisera par la suite. Une fois qu'il a choisi cette stratégie, il joue en suivant cette règle de décisions. Une stratégie de comportement indique un choix aléatoire à chaque ensemble d'information.

Exemple 2.2.4. - *Dans l'exemple (2.1.1) du jeu de l'ultimatum fini, une stratégie comportementale du joueur 2 est la donnée de 3 distributions de probabilité sur l'ensemble* $\{A, R\}$.

Équivalence entre les stratégies

Définition 2.2.4

Deux stratégies σ_i et σ'_i du joueur i (mixtes ou de comportement) sont équivalentes lorsque pour toute stratégies σ_{-i} des autres joueurs, (σ_i, σ_{-i}) et $(\sigma'_i, \sigma'_{-i})$ induisent la même probabilité sur les issues possibles du jeu (les nœuds terminaux).

Exemple 2.2.5. *Considérons le jfe représenté par l'arbre suivant :*

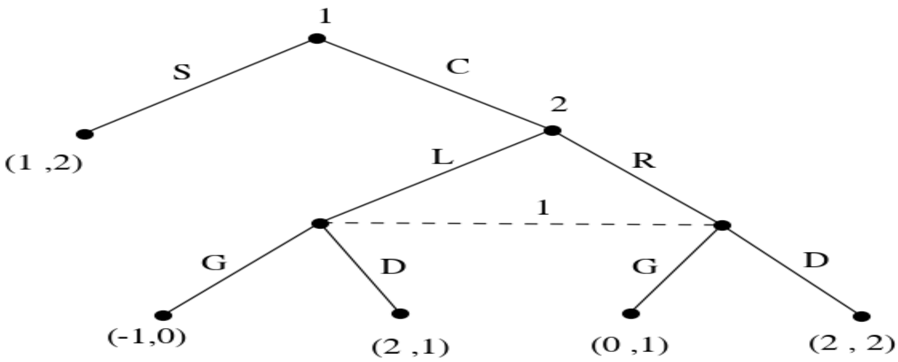

FIGURE 2.4 – Arbre du jeu de l'exemple (2.2.5)

La stratégie mixte σ_1 du joueur 1 définie par :

$$\sigma_1(S, D) = 0.4,\ \sigma_1(S, G) = 0.1,\ \sigma_1(C, D) = 0.5$$

Elle est équivalente à la stratégie de comportement du joueur 1 qui consiste à jouer S et C avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et D avec la probabilité 1.

Lorsque nous sommes dans un jfe à mémoire parfaite, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 (Kuhn, (voir [12]))

Dans tout jeu à **mémoire parfaite**,
- Toute stratégie mixte admet une stratégie de comportement qui lui est équivalente ;
- Toute stratégie de comportement admet une stratégie mixte qui lui est équivalente.

Remarque 2.2.2. Le Théorème (2.2.1) a été généralisé aux jeux sous forme extensive infinis à mémoire parfaite par Aumann en 1964 dans [2]. Le résultat précédent ne se généralise pas dans le cas des jfe qui ne sont pas à mémoire parfaite.

On déduit du théorème précédent que dans un jfe à mémoire parfaite, il y a une indifférence à utiliser les stratégies mixtes et les stratégies de comportement. Les deux manières de modéliser la capacité de jouer de manière aléatoire sont équivalentes dans les jeux sous forme extensive à mémoire parfaite.

2.2.3 Notion d'équilibre parfait en sous-jeux

Définition 2.2.5 (Forme normale associée)

La **forme normale associée** à un jfe est le jeu sous forme normale

$$G = (N, (A_i)_{i\in N}, (g_i)_{i\in N}).$$

Où pour tout profil de stratégies pures $\tilde{s} = (s_i)_{i\in N}$, $g_i(\tilde{s}) = E_{P_{\tilde{s}}}(u_i(a))$.
$P_{\tilde{s}}$ étant la probabilité induite sur les nœuds terminaux par $\tilde{s}$ et $E_{P_{\tilde{s}}}(u_i(a))$ l'espérance de gain du joueur i.

Tout comme dans un jeu sous forme normale, on définit la notion d'équilibre de Nash dans un jeu sous forme extensive.

Définition 2.2.6 (Èquilibre de Nash)

Un équilibre de Nash d'un jfe est tout équilibre de Nash de sa forme normale.

Exemple 2.2.6. *Considérons le jeu de l'ultimatum de l'exemple (2.1.1). Sa forme normale est donnée par le tableau suivant :*

1\2	(A, A, A)	(A, A, R)	(A, R, A)	(A, R, R)	(R, A, A)	(R, A, R)	(R, R, A)	(R, R, R)
(2 , 0)	(2 ,0)	(2 ,0)	(2 ,0)	(2 , 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(1 , 1)	(1 ,1)	(1 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)	(1 , 1)	(1 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
(0 ,2)	(0 ,2)	(0 ,0)	(0 ,2)	(0 ,0)	(0 , 2)	(0 , 0)	(0 , 2)	(0 , 0)

Table 2.1 – Tableau du jeu de la forme normale du jeu de l'exemple (2.1.1)

L'ensemble des équilibres de Nash est :

$\{((2,0),(A,A,A)),\ ((2,0),(A,A,R)),\ ((2,0),(A,R,A)),\ ((2,0),(A,R,R)),\ ((2,0),(R,R,A))$ $,((2,0),(R,R,R)),\ ((1,1),(R,A,A)),\ ((1,1),(R,A,R)),\ ((0,2),(R,R,A))\}$.

Remarque 2.2.3. Dans certains jfe, il existe des équilibres de Nash non raisonnables. En prenant par exemple le jeu de l'ultimatum, le profil $((0,2),(R,R,A))$ est un équilibre de Nash mais dans ce profil, on a comme l'impression que le joueur 1 ne cherche pas à maximiser son gain.

Notion de sous-jeu

Définition 2.2.7

Un **sous-jeu** d'un jfe Γ est un jfe tel que :

1- Le nœud initial s est un nœud non terminal de S tel que $|h(s)| = 1$;

2- Les nœuds non terminaux constituent le sous ensemble des nœuds successeurs de s dans le jeu Γ ;

3- Les joueurs, les ensembles d'information et les actions associées aux nœuds non terminaux ainsi que les utilités associées aux nœuds terminaux sont les mêmes que dans le jeu original Γ.

On parlera de sous-jeu **strict** ou **propre** de Γ pour désigner tout sous-jeu de Γ différent de Γ. Un jfe qui n'admet pas de sous-jeu strict sera dit **minimal**.

Exemple 2.2.7. *Considérons le jfe définie par l'arbre de jeu suivant :*

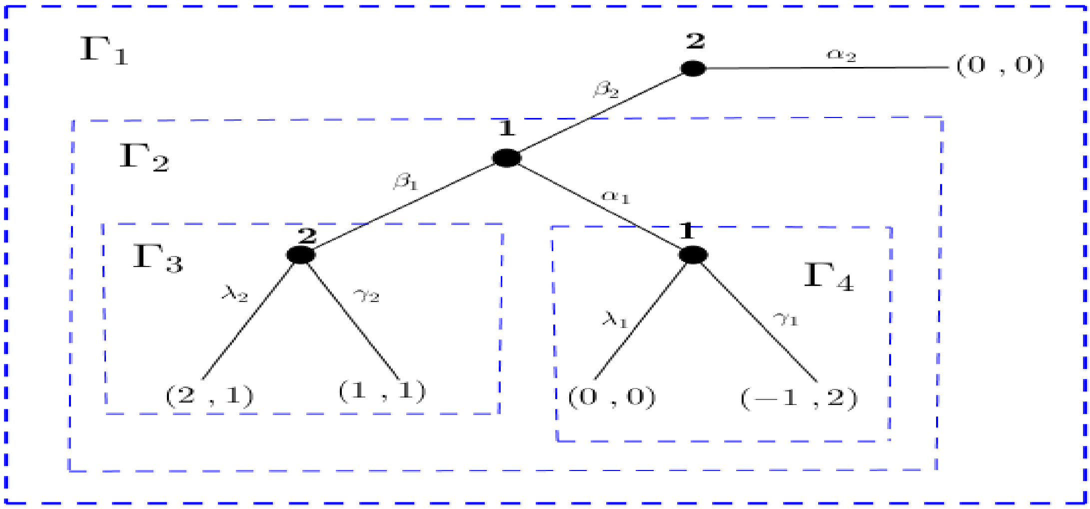

FIGURE 2.5 – Exemple d'un jeu avec ses sous-jeux

Les sous-jeux sont Γ_1, Γ_2, Γ_3 *et* Γ_4. *Les sous-jeux stricts sont :* Γ_2, Γ_3 *et* Γ_4

Remarque 2.2.4. Dans un jeu à information parfaite et complète, on a autant de sous-jeux que de nœuds non terminaux.

Nous avons vu avec l'exemple du jeu de l'ultimatum que le concept d'équilibre de Nash pour les jeux sous forme extensive était quelque peu limitée. Nous allons nous intéresser à un nouvel concept d'équilibre, qui fut introduit par Selten dans [17], à savoir le concept d'équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

Définition 2.2.8

Un **équilibre de Nash parfait en sous-jeux** ou simplement **équilibre parfait en sous-jeux** (ENPSJ), est un profil de stratégies tel que pour chaque sous-jeu, le profil de stratégies induit est un équilibre de Nash de ce sous-jeu.

Remarque 2.2.5.

1. Lorsqu'il n'y a pas de sous-jeu strict, alors un profil de stratégies est un équilibre de Nash si et seulement s'il est un équilibre parfait en sous-jeux.
2. Dans tout jfe on a : $\{ENPSJ\} \subseteq \{EN_{SP}\}$.

Nous présentons à présent un type de raisonnement sophistiqué qui est utilisé dans la résolution des jeux sous forme extensive à information parfaite : le principe d'induction à rebours.

Principe d'induction à rebours (Backward induction)

Encore appelé **induction en amont**, ce raisonnement est proche du raisonnement par récurrence ; mais il a la particularité de partir de la fin pour revenir au début. Nous donnons une description de ce principe.

Description du principe d'induction à rebours

Considérons un jfe Γ à information parfaite et avec un nombre fini d'étapes. Le principe d'induction à rebours est décrit comme suit :

- ♣ On se place en chaque sous-jeux minimal et on détermine les choix optimaux (rationnels) du joueur qui joue en dernier.
- ♣ On remplace ces sous-jeux minimaux par les paiements associés à ces choix optimaux. On obtient un nouveau jfe à information parfaite.
- ♣ On réitère le processus jusqu'à atteindre la racine de l'arbre de jeu.

Théorème 2.2.2 (Kuhn , voir [12])

Tout jeu sous forme extensive fini et à mémoire parfaite admet un équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

Chapitre Trois

OLIGOPOLES DE STACKELBERG

Sommaire

3.1 Concurrence dans un marché oligopolistique 31
3.1.1 Notion de marché 31
3.1.2 L'oligopole et ses caractéristiques 32
3.1.3 Types d'oligopoles et exemples 33
3.2 Notion de demande et prix sur un marché 34
3.3 Oligopoles de Stackelberg 36
3.3.1 Oligopole de Stackelberg à n firmes et à n étapes. 36
3.3.2 Existence des équilibres dans un oligopole de Stackelberg 38

3.1 Concurrence dans un marché oligopolistique

3.1.1 Notion de marché

Le terme "marché" est un terme polysémique, nous donnons ici deux définitions du terme marché, la première en termes d'échanges économiques et la seconde comme potentiel économique en marketing.

Définition 3.1.1 (Marché ([14]))

- Un **marché** (échange économique) est un arrangement institutionnel facilitant l'interaction des acheteurs et des vendeurs dans un processus qui détermine le prix et la quantité vendue.
- Un **marché** (potentiel économique en marketing) est l'ensemble constitué des personnes ou organisations qui consomment ou sont susceptibles de consommer le ou les produits fabriqués par une entreprise.

Pour se positionner sur un marché, une entreprise va analyser, d'une part l'offre c'est-à-dire les concurrents déjà présents sur le marché et les produits qu'ils proposent et d'autre part la demande c'est-à-dire les clients et ceux qui sont susceptibles de les influencer.

Classification des marchés

Il existe plusieurs critères de classification des marchés en économie. C'est ainsi que les marchés peuvent être classés suivant :

- **L'étendue géographique**

  On va distinguer les marchés locaux, régionaux, nationaux, africains, etc ...
- **Le degré de différenciation des produits**
- **Le nombre d'entreprises présentes sur le marché (offre) et de consommateurs (la demande)**

  À partir des données tirées dans [14], nous résumons cela dans le tableau suivant :

Offreurs \ Demandeurs	Unique acheteur	Quelques uns	Grand nombre
Unique vendeur	Monopole bilatéral	Monopole contrarié	Monopole
Quelques uns	Monopsone contrarié	Oligopole bilatéral	Oligopole
Grand nombre	Monopsone	Oligopsone	Concurrence pure et parfaite

Table 3.1 – Tableau de classification des marchés suivant l'offre et la demande.

La suite de nos études porte sur les marchés classés suivant le nombre d'entreprise et de consommateurs présents.

3.1.2 L'oligopole et ses caractéristiques

Définition 3.1.2

On appelle **Oligopole** ou **marché oligopolistique**, toute forme de marché dans laquelle d'une part, l'offre est assurée par un petit nombre d'entreprises (vendeurs) et d'autre part la demande est émise par un grand nombre d'acheteurs.

L'expression "petit nombre d'entreprises" veut simplement dire que leur nombre est strictement supérieur à 1 (cas du monopole) et que chaque entreprise peut individuellement influencer le prix du bien vendu sur le marché.

Un oligopole peut aussi être vu comme une structure de marché dans laquelle quelques entreprises dominent le marché. Toutefois, d'autres entreprises peuvent être présentes sur le marché mais être négligeables en termes d'influence sur le marché.

En particulier lorsque le marché est dominé par deux (2) entreprises, on parle dans ce cas de **duopole**.

Dans la suite nous présenterons quelques caractéristiques d'un oligopole.

Quelques caractéristiques des oligopoles

Parmi les caractéristiques essentielles des oligopoles nous pouvons citer :

- **La présence des barrières à l'entrée**
  Ces barrières renvoient aux obstacles qui s'imposent à un nouvel entrant et qui le poussent à réaliser des dépenses que ne supportent pas les autres firmes déjà installées.
- **L'interdépendance des décisions**
  Dans un oligopole, les décisions d'une entreprise peuvent affecter les ventes des autres. Ainsi chaque entreprise doit suivre et éventuellement répondre aux actions des autres firmes.

3.1.3 Types d'oligopoles et exemples

Dans un oligopole, des entreprises peuvent décider de coopérer ou non. C'est ainsi que l'on distingue :

- ⋄ **Les oligopoles coopératifs**
  Les entreprises peuvent décider de fonder un **cartel**, c'est-à-dire qu'ils se réunissent et décident de partager le marché, ils s'entendent sur les prix et parfois concluent des accords en vue d'exclure les potentiels entrants et de maintenir leur bénéfice haut. On parle alors de **collusion d'entreprises**.
- ⋄ **Les oligopoles non coopératifs**
  Dans ce cas les entreprises ne collaborent pas explicitement et se font une concurrence. Il existe plusieurs modèles d'étude de la concurrence dans ces oligopoles non coopératifs.

Parmi ces modèles d'étude on retrouve principalement :

(1) **Le modèle d'oligopole de Cournot**
Dans ce modèle proposé par Augustin Cournot en 1838 dans [6], on suppose que les entreprises produisent le même bien et la variable stratégique est la **quantité de bien produite**. Les entreprises choisissent simultanément les quantités qu'elles souhaitent

produire. Le prix de vente du bien sur le marché est alors fonction de la quantité totale du produit émise sur le marché. Ainsi chaque firme essaye de calculer la quantité de bien à produire qui maximise son profit.

(2) **Le modèle d'oligopole de Bertrand**

Ce modèle proposé par Joseph Bertrand en 1883 dans [4], suppose que les firmes produisent des biens identiques et choisissent chacun (simultanément) le prix de vente du produit sur le marché. La variable stratégique est donc le **prix de vente**.

(3) **Le modèle d'oligopole de Stackelberg**

Ce modèle fut proposé par l'allemand Von Stackelberg en 1934 comme l'indique ses travaux dans [18]. Ce modèle reprend les mêmes hypothèses que celui de Cournot à l'exception que les firmes choisissent de façon séquentielle leur niveau de production. Ainsi certaines firmes observent d'abord les quantités produites par d'autres firmes avant de fixer la leur. Il se pose ainsi un problème de timing.

Nous présentons un exemple courant d'oligopole.

Exemple d'oligopole au Cameroun

<u>Le marché des télécommunications au Cameroun</u>

- **L'offre** : - MTN Cameroon, Orange Cameroun, La Cameroon telecommunication (CAMTEL), NEXTTEL
- **La demande** : Toute la population camerounaise.

Dans la suite de ce chapitre, notre attention se porte sur les oligopoles non coopératifs en générale et en particulier l'oligopole de Stackelberg. Mais avant, nous présentons d'une part quelques concepts de bases en économie industrielle.

3.2 Notion de demande et prix sur un marché

Nous présentons quelques définitions clés en microéconomie employées dans la présentation et l'étude du modèle de Stackelberg.

Définition 3.2.1

On appelle **fonction de demande d'un bien**, toute fonction D qui met en relation la quantité Q_D de ce bien émise par la demande (les consommateurs), et le prix P_r de ce bien sur le marché. On a :

$$Q_D = D(P_r).$$

Remarque 3.2.1. La quantités Q_D ne représente pas la consommation effective du bien, mais plutôt les intentions d'achat. En effet, à chaque prix d'un bien correspond une intention d'achat et donc une quantité demandée qui lui est propre. Dans la pratique, la fonction de demande est **bijective**.

Définition 3.2.2

On appelle **fonction de demande inverse**, la fonction réciproque P de la fonction de demande. Elle exprime le prix d'un bien sur le marché en fonction des intentions d'achat de ce bien. On a

$$P = P_r(Q_D).$$

La fonction de demande inverse d'un bien noté j, définit le prix P_j que les consommateurs sont disposés à payer pour une unité de ce bien lorsque la production globale est égale à Q_j.

Définition 3.2.3

■ On appelle **fonction de coût**, toute fonction représentant le coût total minimum permettant à une firme de produire une quantité Q fixée d'un bien. Cette fonction de coût se présente de façon générale sous la forme :

$$C(Q) = F + c(Q), \text{ où}$$

- F représente le **coût fixe** de production (il s'agit des dépenses qui ne varient pas avec la de biens quantité produits).
- $c(Q)$ représente le **coût variable** de production qui est fonction de la quantité produite Q du bien produit.

■ Le **coût marginal** noté Cm, se définit comme l'augmentation du coût de production causée par la production d'une unité supplémentaire. Plus précisément :

○ Pour le cas d'une production discrète :

$$Cm(Q) = \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}$$

○ Lorsque la fonction de coût est dérivable :

$$Cm(q) = \frac{dC(q)}{dq}$$

■ Le **coût moyen** noté CM, c'est ce que coûte en moyenne la production d'une unité de bien.

$$CM(Q) = \tfrac{C(Q)}{Q} = \frac{F + c(Q)}{Q}.$$

3.3 Oligopoles de Stackelberg

Dans un marché, il est possible que les firmes n'entrent pas à la même date. Une firme peut avoir terminé la mise au point de son produit avant ses concurrentes et profiter de cette avance pour s'engager sur un niveau de production élevé avant que ses concurrentes ne puissent agir. Il est aussi possible qu'une firme choisisse de retarder le choix de son niveau de production pour observer ce que font ses concurrentes ou pour obtenir plus d'informations sur le niveau de la demande et les goûts des consommateurs. Il existe probablement beaucoup de situations dans lesquelles les firmes choisissent leurs niveaux de production séquentiellement plutôt que simultanément. L'étude de ce timing séquentiel est généralement associée à Von Stackelberg pour ses travaux en 1934 dans [18].

3.3.1 Oligopole de Stackelberg à n firmes et à n étapes.

Dans cette sous-section, nous examinons sous certaines hypothèses, une forme standard du modèle d'oligopole de Stackelberg. On considère un marché où il y a n firmes qui choisissent leur niveau de production l'une après l'autre. On suppose sans nuire à la généralité que la firme 1 est la première firme à choisir son niveau de production, la firme 2 est la seconde firme à choisir son niveau de production et ainsi de suite jusqu'à la firme n qui est la dernière firme à choisir son niveau de production. Dans la suite, la firme 1 sera appelée **première firme leader**. Pour $k \geq 1$, la firme k sera appelée k**-ème firme leader**.

Déroulement du jeu

- ♠ La firme 1 commence par choisir, de manière irréversible, son niveau de production que l'on note par q_1 ;
- ♠ La firme 2 observe le niveau de production de la firme 1 et décide par la suite de son niveau de production que l'on note par q_2. Et le jeu passe à l'étape suivante ;
- ♠ Soit $k \geq 2$. Supposons que les firmes $1, 2, \ldots, k-1$ ont choisi leur niveau de production $q_1, \ldots, q_{k-1}$ respectivement, la firme k est informée du choix des firmes $1, 2, \ldots, k-1$ et par la suite décide de son niveau de production q_k ;
- ♠ À la n-ième étape du jeu, la firme n choisit sa quantité q_n après avoir observé les quantités des firmes $1, 2, \ldots, n-1$;
- ♠ Le prix sur le marché est déterminé par la fonction de demande inverse $P = P_r(Q_D)$ avec $Q_D = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$

♠ La fonction d'utilité du joueur i est donnée par :

$$U_i(q_i, \overline{Q}_i) = P(q_i + \overline{Q}_i)q_i - C_i(q_i), \quad \text{avec } \overline{Q}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} q_j.$$

Où P est la fonction de demande inverse, $\overline{Q}_i$ les quantités produites par les firmes autres que la firme i et C_i est la fonction de coûts de la firme i.

Modélisation de l'oligopole de Stackelberg

L'oligopole à n firmes et n étapes de Stackelberg peut être modélisé sous la forme d'un jeu sous forme extensive comme suit :

$$(N, \mathcal{A}, A, j, C, h, (U_i)_{i\in N}) \quad \text{avec :}$$

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des firmes ;
- $\mathcal{A} = (S, s_0, f)$; **l'arbre de décision** du jeu est défini comme suit :
  - ◇ L'ensemble S des **sommets de l'arbre** s'identifie à : $\{s_0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+^2 \cup \cdots \cup \mathbb{R}_+^n$;
  - ◇ L'ensemble T des **nœuds terminaux** s'identifie à : $\mathbb{R}_+^n$;
  - ◇ s_0 est un symbole arbitraire choisi pour désigner la **racine de l'arbre de jeu** ;
  - ◇ La fonction prédécesseur f est définie sur $S \setminus \{s_0\} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_+^2 \cup \cdots \cup \mathbb{R}_+^n$ par :
  $$\forall s \in \mathbb{R}_+, \quad f(s) = s_0 \text{ et } \forall k \in \{2, \ldots, n\}, \ (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}_+^k,$$
  $$f(s_1, \ldots, s_k) = (s_1, \ldots, s_{k-1}) \,;$$
- A est défini sur $S \setminus T$ par : $A(s) = \mathbb{R}_+ \forall s \in S \setminus T$;
- j est défini sur $S \setminus T$ par : $j(s_0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^k, \ j(t) = k$;
- Si $t \in S \setminus T$ et $a \in \mathbb{R}_+$, $C(a, t) = a$;
- La fonction h est définie sur $S \setminus T = \{s_0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \cdots \cup \mathbb{R}_+^{n-1}$ et $\forall s \in S \setminus T$, par $h(s) = \{s\}$;
- $\forall i \in N, \forall (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in T$, $U_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = P(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)q_i - C_i(q_i)$.

Toutefois, il existe d'autres formes d'oligopoles de Stackelberg (voir [10]). En effet dans ces travaux on note qu'il est possible que la structure hiérarchique soit constituée de n firmes regroupées en m ($m \leq n$) groupes hiérarchiques $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Plus précisément, dans un palier on peut retrouver plusieurs entreprises qui prennent leurs décisions simultanément en prenant comme donnée la production des firmes des paliers supérieurs.

Dans notre travail nous allons étudié les oligopoles de Stackelberg où la hiérarchie est telle qu'on ait uniquement une seule firme par palier.

3.3.2 Existence des équilibres dans un oligopole de Stackelberg

La modélisation précédente nous a montré que l'oligopole de Stackelberg à n firmes et à n étapes est un cas particulier de jeu sous forme extensive infini à mémoire parfaite. Dans cette partie nous abordons l'étude de l'existence des équilibres de Nash parfaits en sous-jeux. Dans un premier temps, nous étudions le cas des oligopoles de **Stackelberg linéaires** (cas où la fonction de demande est linéaire et les fonctions de coûts des firmes sont des fonctions affines) à n firmes et n étapes, puis dans un second temps nous portons nos recherches sur l'existence d'équilibres parfaits en sous-jeu dans un oligopole de Stackelberg à n firmes et n étapes où la fonction de demande inverse n'est plus forcément linéaire.

Cas des oligopoles de Stackelberg linéaires à n firmes et n étapes

Dans un oligopole de Stackelberg linéaire, les utilités des firmes sont sous la forme

$$U_i(q_i, \overline{Q}_i) = (a - b(q_i + \overline{Q}_i))q_i - (\alpha_i q_i + \beta_i) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}; \text{ avec } a > 0, \ b > 0, \alpha_i > 0. \quad (3.1)$$

La recherche des potentiels équilibres dans ces oligopoles va se faire en utilisant **le principe d'induction en amont**.

Étape (n) du jeu. En supposant que les firmes 1,2,. . .,$n-1$ ont déjà choisi leurs quantités de production $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ respectivement.

La firme n choisit son niveau de production q_n de façon à maximiser son gain. En posant $\overline{Q}_n = \sum_{j=1}^{n-1} q_j$, la firme n va chercher à maximiser :

$$U_n(q_n, \overline{Q}_n) = (a - b(q_n + \overline{Q}_n))q_n - (\alpha_n q_n + \beta_n). \quad (3.2)$$

Condition de maximalité du premier ordre : La firme n doit produire une quantité q_n^* vérifiant :

$$\frac{\partial U_n}{\partial q_n}(q_n^*, \overline{Q}_n) = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial U_n}{\partial q_n}(q_n, \overline{Q}_n) = 0 \Longleftrightarrow q_n^* = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-1} q_j - \alpha_n\right). \quad (3.3)$$

Condition de maximalité du second ordre est vérifiée car

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial q_n^2}(q_n^*, \overline{Q}_n) = -2b < 0.$$

La firme i, avec $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, anticipe sur la réaction de la firme n et va donc intégrer cela dans sa fonction de payement. Ainsi en remplaçant dans l'équation (3.1) q_n par l'expression de q_n^* obtenue dans (3.3), on a :

$$U_i(q_i, \overline{Q}_i) = \frac{1}{2}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-1} q_j\right)q_i - \frac{1}{2}(2\alpha_i - \alpha_n)\, q_i - \beta_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n-1\}. \quad (3.4)$$

Étape $(n-1)$ du jeu : La firme $n-1$ choisit son niveau de production q_{n-1} de façon à maximiser son gain. En anticipant sur le choix de la firme n, le problème de la firme $n-1$ va consister à maximiser :

$$U_{n-1}(q_{n-1}, \overline{Q}_{n-1}) = \left(a - b\left(\sum_{j=1}^{n-1} q_j + q_n^*\right)\right) q_{n-1} - (\alpha_{n-1} q_{n-1} + \beta_{n-1}).$$

On a :

$$\begin{aligned} U_{n-1}(q_{n-1}, \overline{Q}_{n-1}) &= \left(a - b\left(\left(\sum_{j=1}^{n-1} q_j + q_n^*\right)\right)\right) q_{n-1} - (\alpha_{n-1} q_{n-1} + \beta_{n-1}); \\ &= \left(a - b\sum_{j=1}^{n-1} q_j + \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-1} q_j - \alpha_n\right)\right) q_{n-1} - (\alpha_{n-1} q_{n-1} + \beta_{n-1}); \\ &= \frac{1}{2}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-1} q_j\right) q_{n-1} - \frac{1}{2}\left(2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right) q_{n-1} - \beta_{n-1}. \end{aligned}$$

Condition du premier ordre : Une meilleure réponse q_{n-1}^* de la firme $n-1$ doit satisfaire l'équation suivante

$$\frac{\partial U_{n-1}}{\partial q_{n-1}}(q_{n-1}^*, \overline{Q}_{n-1}) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial q_{n-1}}(q_{n-1}^*, \overline{Q}_{n-1}) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-2} q_j - bq_{n-1}^*\right) - \frac{b}{2} q_{n-1}^* - \frac{1}{2}\left(2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow -bq_{n-1}^* + \frac{1}{2}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-2} q_j\right) - \frac{1}{2}\left(2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow q_{n-1}^* = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-2} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right). \end{aligned}$$

Condition de maximalité du second ordre : Elle est vérifiée car

$$\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial q_{n-1}^2}(q_{n-1}^*, \overline{Q}_{n-1}) = -2b < 0.$$

On trouve ainsi

$$q_{n-1}^* = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-2} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right). \tag{3.5}$$

La firme i, avec $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, anticipe sur la réaction des firmes n et $n-1$ et va donc intégrer cela dans sa fonction de payement. Ainsi en remplaçant dans l'équation (3.4) q_{n-1} par l'expression de q_{n-1}^* obtenue dans (3.5), on obtient :

$$U_i(q_i, \overline{Q}_i) = \frac{1}{4}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-2} q_j\right) q_i - \frac{1}{4}\left(4\alpha_i - (\alpha_n + 2\alpha_{n-1})\right) q_i - \beta_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n-2\}. \tag{3.6}$$

Étape $(n-2)$. : La firme $n-2$ choisit son niveau de production q_{n-2} de façon à maximiser son gain en anticipant sur les réactions des firmes n et $n-1$. Le problème de la firme $n-2$ va consister à maximiser :

$$U_{n-2}(q_{n-2}, \overline{Q}_{(n-2)}) = \frac{1}{4}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-2} q_j\right) q_{n-2} - \frac{1}{4}\left(4\alpha_{n-2} - (\alpha_n + 2\alpha_{n-1})\right) q_{n-2} - \beta_{n-2}.$$

Condition du premier ordre : Une meilleure réponse q^*_{n-2} de la firme $n-2$ doit satisfaire l'équation :

$$\frac{\partial U_{n-2}}{\partial q_{n-2}}(q^*_{n-2}, \overline{Q}_{n-2}) = 0.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{\partial U_{n-2}}{\partial q_{n-2}}(q^*_{n-2}, \overline{Q}_{n-2}) = 0 \Longleftrightarrow q^*_{n-2} = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-3} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(4\alpha_{n-2} - 2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right).$$

Condition de maximalité du second ordre : Elle est vérifiée car

$$\frac{\partial^2 U_{n-2}}{\partial q^2_{n-2}}(q^*_{n-2}, \overline{Q}_{n-2}) = -2b < 0.$$

0n obtient ainsi :

$$q^*_{n-2} = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-3} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(4\alpha_{n-2} - 2\alpha_{n-1} - \alpha_n\right). \tag{3.7}$$

■ Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Supposons que la meilleure réponse q^*_{n-k} de la firme $n-k$ est

$$q^*_{n-k} = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-k-1} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(2^k\alpha_{n-k} - \sum_{j=0}^{k-1} 2^j\alpha_{n-j}\right).$$

Et lorsque la firme i, avec $i \in \{1, 2, \ldots, n-k-1\}$, anticipe sur la réaction des firmes $n, \ldots n-k$ sa fonction de payement en intégrant ces information est :

$$U_i(q_i, \overline{Q}_i) = \frac{1}{2^{k+1}}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-k} q_j\right) q_i - \left(\alpha_i - \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right) q_i - \beta_i. \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-k-1\}.$$

- Montrons que la meilleure réponse de la firme $n-k-1$ à l'étape $n-k-1$ est :

$$q^*_{n-k-1} = \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(2^{k+1}\alpha_{n-k-1} - \sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right).$$

Et que lorsque les firmes anticipent sur les choix des firmes successeurs, on obtient les payements suivants :

$$U_i(q_i, \overline{Q}_i) = \frac{1}{2^{k+2}}\left(a - b\sum_{j=1}^{n-k-1} q_j\right) q_i - \left(\alpha_i - \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1} 2^j\alpha_{n-j}\right) q_i - \beta_i. \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-k-2\}.$$

En effet à *l'étape* $(n-k-1)$ La firme $n-k-1$ choisit son niveau de production q_{n-k-1} de façon à maximiser son gain tout en anticipant sur la réaction des firmes suiveuses.

Par l'hypothèse, la firme $n-k-1$ va donc chercher à maximiser

$$U_{n-k-1}(q_{n-k-1},\overline{Q}_{n-k-1}) = \frac{1}{2^{k+2}}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k} q_j\right)q_{n-k-1} - \left(\alpha_{n-k-1} - \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1} 2^j\alpha_{n-j}\right)q_{n-k-1} - \beta_{n-k-1}.$$

Condition de maximalité du premier ordre : Une meilleure réponse q^*_{n-k-1} de la firme $n-k-1$ doit satisfaire l'équation

$$\frac{\partial U_{n-k-1}}{\partial q^*_{n-k-1}}(q_{n-k-1},\overline{Q}_{n-k-1}) = 0.$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\partial U_{n-k-1}}{\partial q^*_{n-k-1}}(q_{n-k-1},\overline{Q}_{n-k-1}) = 0 \Longleftrightarrow q^*_{n-k-1} = \frac{1}{2b}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(2^{k+1}\alpha_{n-k-1} - \sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right)$$

La condition de maximalité du second ordre est toujours vérifiée car

$$\frac{\partial^2 U_{n-k-1}}{\partial q^2_{n-k-1}}(q^{\cdot}_{n-k-1}\overline{Q}_{n-k-1}) = -2b < 0.$$

0n trouve ainsi

$$q^*_{n-k-1} = \frac{1}{2b}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j\right) - \frac{1}{2b}\left(2^{k+1}\alpha_{n-k-1} - \sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right). \quad \blacksquare$$

Les firmes $1,2,\ldots,n-k-2$ anticipent, la réaction des firmes suiveuses on obtient les payements suivants, on a $\forall i \in \{1,2,\ldots,n-k-2\}$

$$\begin{aligned}
U_i(q_i,\overline{Q}_i) &= \frac{1}{2^{k+1}}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-1} q_j\right)q_i - \left(\alpha_i - \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right)q_i - \beta_i.\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j - bq^*_{n-k-1}\right)q_i - \left(\alpha_i - \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right)q_i - \beta_i\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j\right)q_i - \left(bq^*_{n-k-1}\alpha_i - \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{k} 2^j\alpha_{n-j}\right)q_i - \beta_i\\
&= \frac{1}{2^{k+2}}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j\right)q_i - \left(\alpha_i - \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1} 2^j\alpha_{n-j}\right)q_i - \beta_i.
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient bien :

$$U_i(q_i,\overline{Q}_i) = \frac{1}{2^{k+2}}\left(a-b\sum_{j=1}^{n-k-2} q_j\right)q_i - \left(\alpha_i - \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{j=0}^{k+1} 2^j\alpha_{n-j}\right)q_i - \beta_i. \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n-k-2\}. \quad \blacksquare$$

En particulier pour $k = n - 2$, on a :

$$U_1(q_1, \overline{Q}_1) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(a - b(q_1 + q_2^*)\right) q_1 - \left(\alpha_1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{j=0}^{n-2} 2^j \alpha_{n-j}\right) q_1 - \beta_1.$$

Et

$$q_2^* = \frac{1}{2b}(a - bq_1) - \frac{1}{2b}\left(2^{n-2}\alpha_2 - \sum_{j=0}^{n-3} 2^j \alpha_{n-j}\right).$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_1}(q_1, \overline{Q}_1) = 0 \Longleftrightarrow q_1 = q_1^* = \frac{1}{2b}\left(a - 2^n \alpha_1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j}\right).$$

Ainsi

$$q_1^* = \frac{1}{2b}\left(a - 2^n \alpha_1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j}\right). \tag{3.8}$$

■ Montrons que

$$q_i^* = \frac{1}{2^i b}\left(a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j} - 2^n \alpha_i\right), \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Raisonnons par induction forte sur i.
Pour $i = 1$ d'après l'équation(3.8), on a le résultat.

Soit $j \leq n$, supposons que $\forall i < j,\ q_i^* = \frac{1}{2^i b}\left(a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j} - 2^n \alpha_i\right)$. On a

$$\begin{aligned}
q_j^* &= \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{k=1}^{j-1} q_k^*\right) - \frac{1}{2b}\left(2^{n-j}\alpha_j - \sum_{k=0}^{n-j-1} 2^k \alpha_{n-k}\right)\\
&= \frac{1}{2b}\left(a - b\sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{1}{2^k b}\left(a + \sum_{l=0}^{n-1} 2^l \alpha_{n-l} - 2^n \alpha_k\right)\right)\right) - \frac{1}{2b}\left(2^{n-j}\alpha_j - \sum_{k=0}^{n-j-1} 2^k \alpha_{n-k}\right)\\
&= \frac{1}{2^j b}\left(a + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \alpha_{n-k} - 2^n \alpha_j\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$q_i^* = \frac{1}{2^i b}\left(a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j} - 2^n \alpha_i\right), \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sous les hypothèses de la linéarité de la fonction de demande inverse et de la linéarité des fonctions de coûts des firmes et en gardant les notations précédentes, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.3.1

Dans le modèle d'oligopole de Stackelberg linéaire à n firmes et n étapes,

$$\text{si } a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j} \geq 2^n \alpha_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \text{ alors l'oligopole admet un unique équilibre.}$$

• Les quantités à l'équilibre sont :

$$q_i^* = \frac{1}{2^i b}\left(a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j} - 2^n \alpha_i\right), \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

• Les payements associés sont donnés par :

$$U_i(q_1^*, \ldots, q_n^*) = \frac{1}{2^{n+i} b}\left(a + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \alpha_{n-j} - 2^n \alpha_i\right)^2 - \beta_i, \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Notons que dans [10], des travaux ont été fait avec des coûts fixes nuls ($\beta_i = 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$)

Corollaire 3.1. *En particulier si on suppose que les coûts marginaux sont constants et égaux c'est-à-dire* ($\forall i \in N$), $\alpha_i = \alpha$. *Si* $a - \alpha \geq 0$ *alors Les quantités à l'équilibre sont données par :*

$$q_i = \frac{1}{2^i b}(a - \alpha).$$

Cas général des oligopoles de Stackelberg à n firmes n étapes

L'étude de l'existence des équilibres de Stackelberg a fait l'objet de plusieurs études. En effet sous certaines conditions sur la fonction de demande inverse et sur les fonctions de coûts des firmes, nous parvenons à établir l'existence des équilibres de Stackelberg. Nous énonçons le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 3.3.1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

• $f(0) > 0$, f est 2 fois dérivable, concave et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Alors f s'annule en un unique point.

Preuve. La fonction f est dérivable et concave, alors la courbe de f est au dessous de ses tangentes en tout point de $\mathbb{R}_+$. En particulier au point d'abscisse 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \leq f'(0) \cdot x + f(0).$$

Posons $x_0 = -\dfrac{f(0)}{f'(0)}$. La fonction f étant strictement décroissante, alors $x_0 > 0$.
Et $\forall x \geq x_0$, $f'(0)\cdot x + f(0) \leq 0$. Il vient que $\forall x \geq x_0$, $f(x) \leq 0$. Donc f change de signe dans $\mathbb{R}_+$. La fonction f étant continue et strictement décroissante, il va exister un unique $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = 0$. D'où le résultat. □

Dans la suite, considérons un oligopole de Stackelberg à n firmes et n étapes vérifiant les hypothèses suivantes :

$\boxed{\textbf{H1}}$ La fonction de demande inverse P est telle que : $P(0) > 0$ (le prix estimé du bien avant production est strictement positif) et est 2 fois dérivables ;

$\boxed{\textbf{H2}}$ Pour tout $Q \in \mathbb{R}_+$, $P'(Q) < 0$ et $P''(Q) \leq 0$;

$\boxed{\textbf{H3}}$ Pour toute firme $i \in \{1, \ldots, n\}$, sa fonction de coûts C_i est positive, croissante, 2 fois dérivable et convexe.

Conséquence

Sous les hypothèses H1-H3 et compte tenu du Lemme (3.3.1), le prix P est tel qu'il existe $Q_0 > 0$, tel que $P(Q_0) = 0$. Par conséquent, si la somme des quantités produites par les firmes dépasse la quantité Q_0, alors toutes les firmes produiront à perte. Pour des questions de rationalité, nous supposons que :

$\boxed{\textbf{H4}}$ Chaque firme i admet un seuil de production L_i tel que $\sum_{i=1}^{n} L_i \leq Q_0$ et $\forall i \in N$, $q_i \in [0\,, L_i]$.

Théorème 3.3.2

Sous les hypothèses $H1 - H4$, un duopole de Stackelberg admet au moins un équilibre parfait en sous-jeux.

Preuve. Étant donné $q_1 \in [0\,, L_1]$, la meilleure réponse de la firme 2, consiste à maximiser la fonction $q_2 \longmapsto U_2(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_2 - C_2(q_2)$. Sous les hypothèses H1-H3, on a

$$\frac{\partial U_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = P'(q_1 + q_2)q_1 + P(q_1 + q_2) - C_2'(q_2)$$
$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) = P'(q_1 + q_2) + P"(q_1 + q_2)q_2 + P'(q_1 + q_2) - C"_2(q_2) < 0 \qquad (3.9)$$

Par conséquent, $U_2(q_1, \cdot)$ est 2 fois dérivable (donc continue) et strictement concave sur $[0\,, L_2]$. Donc elle est majorée et atteint son maximum en un unique point $q_2^* \in]0\,, L_2[$ qui est fonction de q_1. Posons $q_2^* = R_2(q_1)$.

D'après la condition de maximalité de premier ordre, on

$$\frac{\partial U_2}{\partial q_2}(q_1, q_2^*) = 0. \qquad (3.10)$$

Montrons que R_2 est continue. Soit $q_1^0 \in [0\ , L_1]$, montrons que R_2 est continue en q_1^0.

D'après 3.9, on a

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial q_2^2}(q_1, q_2) \neq 0,\ \forall (q_1\ , q_2) \in [0\ , L_1] \times [0\ , L_2]$$

D'après le théorème des fonctions implicites, l'équation (3.10) définit $q_2^* = g(q_1)$ comme une fonction implicite de q_1 qui est continue sur un voisinage de q_1^0. Comme (3.10) admet une unique solution, alors $g = R_2$. Donc R_2 est continue sur $[0\ , L_1]$.

Le problème du joueur 1 consiste à maximiser $q_1 \longmapsto U_1(q_1, R_2(q_1))$. Comme U_1 et R_2 sont continues, alors $q_1 \longmapsto U_1(q_1, R_2(q_1))$ est continue sur $[0\ , L_1]$. Donc elle est majorée et sa borne supérieure est atteinte en un point $q_1^* \in [0\ , L_1]$. Le couple $(q_1^*\ q_2^*)$ est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux. □

Remarque 3.3.1. Dans le cas général d'un oligopole de Stackelberg avec n firmes et n étapes, sous les hypothèses H1-H4. Le problème de la firme n est de maximiser la fonction $q_n \longmapsto U_n(\overline{Q}_n, q_n) = P(\overline{Q}_n + q_n)q_n - C_n(q_n)$ sur $[0\ , L_n]$. La fonction $U_n(\cdot\ , \overline{Q}_n)$ étant continue et strictement concave sur le compact $[0,\ L_n]$, alors elle est majorée et atteint sa borne supérieure en un unique point de $[0,\ L_n]$ noté $q_n^* = R_n(\overline{Q}_n)$.

En posant $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} L_i - L_n$. On définit alors une application $R_n : [0,\ \alpha_n] \longrightarrow [0,\ L_n]$, qu'on décide d'appeler **fonction de réaction de la firme** n**.**

Par la suite posons $\forall j \in N$, $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} L_i - L_j$ et supposons :

$\boxed{\textbf{\textit{H5}}}$: $\forall j \in N$, R_j (la fonction de réaction du joueur j) est continue et concave sur $[0,\ \alpha_j]$.

Ainsi à l'étape k, le problème de la firme k est donc de maximiser :

$q_k \longmapsto U_k(\overline{Q}_k, q_k) = P(q_1 + \cdots + q_{k-1} + q_k + q_{k+1}^* + \ldots q_n^*)q_k - C_k(q_k)$.

Cette fonction est continue et concave sur le compact $[0,\ L_k]$, alors elle est majorée et atteint sa borne supérieure en au moins un point de $q_k^* \in [0,\ L_k]$. La collection $(q_1^*, \ldots, q_n^*)$ est donc un équilibre parfait en sous-jeux.

Le raisonnement de la Remarque(3.3.1) est en fait une preuve du théorème suivant :

Théorème 3.3.3

Dans un oligopole de Stackelberg à n firmes et n étapes et sous les hypothèses $H_1 - H_5$, il existe au moins un équilibre parfait en sous-jeux.

Chapitre Quatre

APPLICATION : CAS DE L'OLIGOPOLE SIMPLIFIÉ DES PRODUCTEURS DE CIMENT CAMEROUNAIS

Sommaire

4.1 Présentation du marché camerounais du ciment **46**
4.1.1 Les principaux opérateurs du secteur 47
4.1.2 Données sur le marché du ciment 49
4.2 Analyse de la concurrence dans le marché du ciment **50**
4.2.1 Approche en terme de jeu 50
4.2.2 Approche statistique 52

Introduction

Le marché camerounais du ciment a connu ces dernières années une grande évolution. Ceci est due à la compétitivité des entreprises qui exercent dans le secteur et qui se livrent une concurrence sans cesse grandissante. Ce marché est structuré sous la forme d'un oligopole avec cinq principaux producteurs et une demande sans cesse croissante. Dans ce marché, il existe des interactions entre les opérateurs, les décisions des uns sont prises en considérant les réactions des autres. Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps faire une présentation du marché camerounais du ciment et dans un second temps nous ferons, sous certaines hypothèses, une analyse de la concurrence dans ce marché en utilisant l'approche de la théorie des jeux.

4.1 Présentation du marché camerounais du ciment

Dans [13], nous apprenons que marché Camerounais du ciment a connu des avancées considérables ces dernières années. En effet ce marché a connu près d'un demi-siècle de monopole. Toutefois, le changement de politique économique initié dans les années 1990 a permis au Cameroun de passer du dirigisme au libéralisme. Ce qui a favorisé l'ouverture du marché aux investisseurs au Cameroun.

4.1.1 Les principaux opérateurs du secteur

CIMENCAM

CIMENCAM (Cimenterie du Cameroun) est une filiale du groupe français Lafarge-Holcim (qui détient 55% des actions selon [13]). Elle est spécialisée dans la production et la vente du ciment son produit phare est le sac de ciment de 50 kgs de type CPJ35. Elle dispose d'une station de broyage située à Bonabérie sur les berges du fleuve Wouri à Douala, d'une cimenterie à Figuil dans la région du Nord, d'une centrale à béton située à Olembé dans la région du Centre et d'une usine située à Nomayos près de la capitale Yaoundé. Avec ses usines, CIMENCAM affiche une capacité de production annuelle d'environs 2 millions de tonnes de ciment selon des sources tirées de [3].

FIGURE 4.1 – Usine de Cimencam à Nomayos.

DANGOTE CEMENT CAMEROON S.A

La société DANGOTE Cement Cameroon S.A, qui est une filiale du groupe DANGOTE, est spécialisée dans la production de ciment au Cameroun. Parmi ses produits, on retrouve du ciment vendu en sacs de 50 kgs de type CPJ35. Elle dispose d'une usine inaugurée à Douala en mars 2015 et elle a en ligne de mire la construction d'une nouvelle usine de production à Nomayos. Sa capacité annuelle de production est estimée à 1.5 millions de tonnes de ciment.

FIGURE 4.2 – Usine du groupe DANGOTE à Douala.

Cimaf Cameroun S.A

La société Cimaf (Ciments de l'Afrique) est une filiale du groupe marocain ADDOHA. Elle s'est implantée au Cameroun en 2012 avec la construction d'une usine dans la zone industrielle de Bonaberie à Douala. C'est en 2013 qu'elle a débuté la commercialisation de ses produits. Comme nous pouvons lire dans [16], elle produit principalement des sacs de ciment de 50 kgs de type CPJ35 et a une capacité de production annuelle estimée à 1 million de tonnes de ciment.

FIGURE 4.3 – Usine de Cimaf à Bonaberie.

MEDCEM Cameroun

La société Medcem Cameroun est contrôlée par le groupe turc Eren Holdings. Selon des sources issues de [13], elle a commencé à commercialiser ses produits en octobre 2015 et compte à son actif une usine à Douala. C'est la quatrième cimenterie à s'installer sur le territoire camerounais. Elle produit des sacs de ciment de 50 kgs du type CPJ35. Selon des sources provenant de [3], sa production annuelle s'évalue à environs 600 000 tonnes.

FIGURE 4.4 – Usine de production de la société Medcem.

EGIN S.A.

L'entreprise Camerounaise Egin S.A. (Entreprise générale industrielle), est l'un des nouveaux acteurs qui anime le marché du ciment au Cameroun. Son usine de production est basée à Douala et c'est en octobre 2017 que la société a commencé la commercialisation au Cameroun. Elle produit des sacs de ciments de 50 kgs de type CEM II 42.5R sous la marque « LION». Elle a une production annuelle estimée à cent milles tonnes de ciment.

Autres acteurs (jusqu'en 2014)

Parmi les autres acteurs du ciment, il faut noter quelques importateurs de ciment tels que : Sté QUIFEUROU, Sté FOKOU, Sté COGENI, Afrique Construction etc . . .

4.1.2 Données sur le marché du ciment

Évolution de la demande

Le marché du ciment au Cameroun a considérablement évolué ces dernières années avec l'arrivée de la concurrence mais aussi à travers la multiplication des chantiers de construction. Ces chantiers ont eu pour impacte d'accroître la demande nationale en ciment. Selon des données recueillies dans ([1], [3], [13], et [16]), nous dressons dans la suite un tableau récapitulatif de l'évolution de la demande de ciment 2011 à 2018.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Demande annuelle (En millions de tonnes)	2.5	3.16	3.72	4.8	5.2	6.34	7.19	8.64

Table 4.1 – Évolution de la demande de ciment au Cameroun entre 2011 et 2018.

Évolution de la production locale de ciment

À partir des informations qui ont été regroupées de ([1], [3], [13], et [16]), nous dressons le tableau suivant qui rend compte des productions de chacun des acteurs implantés sur le sol camerounais entre 2011 et 2018.

Année / Acteurs	Production annuelle en millions de tonnes sur le marché Camerounais							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
CIMENCAM	1.04	1.07	1.09	1.085	1.1	1.13	1.21	1.25
DANGOTE Cement S.A	-	-	-	0.6	1.2	1.2	1.3	1.3
CIMAF Cameroon S. A	-	-	0.2	0.29	0.31	0.4	0.42	0.48
MEDCEM Cameroun	-	-	-	-	0.11	0.3	0.32	0.47
EGIN S.A.	-	-	-	-	-	-	0.09	0.1
Les importateurs	0.77	0.8	0.9	0.7	-	-	-	-

Table 4.2 – Productions de ciment au Cameroun entre 2011 et 2018.

Évolution des parts de marché des opérateurs locaux

Nous élaborons, à l'aide des données recueillies sur [1] et [13], le tableau ci-dessous les différentes parts de marché des acteurs.

Année / Acteurs	Parts de marché							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
CIMENCAM	92%	91.6%	89.8%	77.3%	51.8%	33.8%	40%	30%
DANGOTE Cement S.A	-	-	-	11%	37%	50.18%	41%	45%
CIMAF Cameroon S. A	-	-	3%	6.2%	10.8%	15.2%	17.9%	22%
MEDCEM Cameroun	-	-	-	-	0.4%	0.9%	1.06%	2.7%
EGIN S.A.	-	-	-	-	-	-	0.1%	0.3%
Les importateurs	8%	8.4%	7.2%	5.5%	-	-	-	-

TABLE 4.3 – Parts de marché entre 2011 et 2018.

Évolution du prix du sac de ciment

Nous faisons un récapitulatif des différents prix pratiqués sur le marché. On s'intéresse principalement au sac de ciment de 50 kgs (CPJ35 et CEM II 42.5). Nous nous servons des données recueillies dans [1], [13] et [16].

Année / Acteurs	Prix moyen de vente							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
CIMENCAM	5000	4950	4800	4650	4450	4600	4700	4800
DANGOTE Cement S.A	-	-	-	4600	4400	4500	4600	4700
CIMAF Cameroon S. A	-	-	4550	4550	4400	4500	4650	4700
MEDCEM Cameroun	-	-	-	-	4350	4600	4700	4750
EGIN S.A.	-	-	-	-	-	-	4650	4700
Les importateurs	4950	4850	4850	4600	-	-	-	-

TABLE 4.4 – Prix du ciment au Cameroun entre 2011 et 2018.

4.2 Analyse de la concurrence dans le marché du ciment

4.2.1 Approche en terme de jeu

La structure du marché du ciment au Cameroun est celle d'un oligopole (un faible nombre d'offreurs et une demande importante). Chaque firme installée ne peut donc prendre des décisions sans tenir compte des réactions des autres firmes. On peut donc parler d'un jeu entre les firmes car les décisions des unes impactent sur les intérêts des autres.

Les joueurs

joueurs sont les différentes firmes en interaction à savoir CIMENCAM, DANGOTE Cement, CIMAF, MEDCEM, EGIN. Les importateurs ne peuvent faire partie des joueurs car en 2014 une décision gouvernementale a interdit les importations de ciment sur le territoire Camerounais ceci pour favoriser les producteurs locaux.
On notera pour des raisons de simplicité : Joueur 1 = CIMENCAM ; Joueur 2 = DANGOTE Cement ; Joueur 3 = CIMAF ; Joueur 4 = MEDCEM et Joueur 5 = EGIN.

On désigne par N l'ensemble des joueurs : $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Les stratégies

Nous considérerons comme stratégie (pure) d'un joueur, sa production annuelle de ciment (en million de tonnes).

Hiérarchie du marché

D'après les informations regroupées dans [1] et [16] , le choix des niveaux de production des firmes se fait de façon séquentielle. En effet certaines firmes annoncent leur production au premier semestre tandis que d'autres le font au quatrième trimestre. Ainsi la hiérarchie qui se dessine est la suivante :

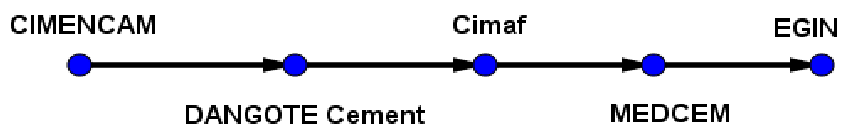

FIGURE 4.5 – Hiérarchie du marché de ciment

Problème :

En formulant l'hypothèse que les firmes sont rationnelles, la question que l'on se pose ici est la suivante : La concurrence au sein de cet oligopole s'assimile-t-elle à celle d'un oligopole de Stackelberg linéaire à 5 firmes et 5 étapes ?

• Si les fonctions de coûts des joueurs sont identiques.

Si cet oligopole était un oligopole de Stackelberg linéaire à 5 firmes et 5 étapes à coûts identiques, les niveaux de production à l'équilibre, d'après le corollaire (3.1), seraient tels que :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_2}{Q_3} = \frac{Q_3}{Q_4} = \frac{Q_4}{Q_5} = 2.$$

Ceci n'est pas le cas dans le Tableau 4.2.

Conclusion : On ne peut assimiler cet oligopole à un oligopole de Stackelbuerg linéaire avec des fonctions de coûts identiques.

Observation : L'observation que nous pouvons faire est que si la concurrence au sein de cet oligopole était celle du modèle de Stackelberg à 5 firmes 5 étapes, alors les coûts de production diffèrent d'une firme à l'autre.

Les informations sur les coûts de production des firmes n'étant pas disponibles, nous ne pouvons pas infirmer que le marché de ciment est un oligopole de Stackelberg linéaire. Toutefois, en supposant la demande linéaire, nous abordons une analyse statistique de cet oligopole dans la section suivante en estimant la fonction de demande inverse du marché.

4.2.2 Approche statistique

Estimation de la fonction de demande

Pour estimer la fonction de demande inverse du marché, nous aurons besoin d'une part des différentes productions annuelles de ciment (voir tableau 4.1.2) et des prix moyens annuels de ciment. Les prix variant selon les opérateur, nous adoptons la démarche suivante :

Si on désigne par a une année, Pm_i^a et q_i^a respectivement le prix moyen et la part de marché de la firme i au courant de l'année a. On décide d'appeler joueur 0 l'ensemble des importateurs. Alors le prix moyen du ciment au courant de l'année a est :

$$Pm^a = \sum_{i=0}^{5} Pm_i^a \cdot q_i^a$$

Nous résumons dans le tableau qui suit les résultats obtenus.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Production annuelle (En millions de tonnes)	2.35	2.43	2.5	3.23	3.32	3.85	3.98	4.17
Prix moyen du sac de ciment de 50 kgs (En Fcfa)	4995	4941.6	4843.4	4621.6	4425.7	4538.3	4648.1	4731.3

Table 4.5 – Évolution du prix du ciment au Cameroun entre 2011 et 2018

Puisque le prix moyen est supposé être de la forme $P = a + b \cdot Q$, nous allons estimer les paramètres a et b à partir de la droite de régression de P en Q. À l'aide du logiciel MATLAB nous obtenons le résultat suivant : $a = 5038,107 \quad b = -1.8274 \cdot 10^{-4}$,

Donc la fonction de demande inverse est :

$$\boxed{P(Q) = 5038,107 - \cdot 1,8274 \cdot 10^{-4} Q}.$$

Implication pédagogique

La rédaction de ce mémoire nous a donné l'opportunité de faire nos premiers pas dans le domaine de la recherche scientifique et de développer nos aptitudes à construire un raisonnement logique. Nous proposons de relever dans cette rubrique quelques points qui font montre de l'impact pédagogique de cet exercice dans la profession enseignante.

Apports dans la mobilisation et la construction des connaissances

Pour mener ce travail à terme, il nous a fallu des aptitudes à comprendre une situation-problème et d'en proposer un formalisme mathématique. Ceci en vue d'étudier les propriétés des objets obtenus à partir de ce formalisme. Les documents de travail et sites web visités (mentionnés en bibliographie), sur lesquels se sont basé nos recherches, peuvent être perçus comme des ressources pédagogiques dont les contenus doivent être partagés avec les apprenants. C'est ainsi que nous nous sommes servis de ces ressources pour élaborer ce mémoire et en donner une reconstruction en termes de chapitres, de sections, de définitions des concepts, des propriétés vérifiées par ces concepts. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien de l'enseignant que nous aspirons à être. Notamment lors de l'élaboration de nos futurs leçons à partir des diverses ressources pédagogiques.

Apports dans la construction d'un raisonnement logique

Dans le domaine de la recherche, le raisonnement mathématique est un élément capital. En effet, il permet d'émettre des hypothèses, de les vérifier et si possible de les démontrer. Il nous permet de tirer des conclusions à partir d'informations données ou de lois générales, d'aller des causes aux conséquences et inversement, de mettre au jour des contradictions ou incohérences, de justifier un résultat,... C'est donc un type de raisonnement essentiel pour comprendre beaucoup de situations de la vie quotidienne nous demandant d'analyser logiquement des situations et de prendre des décisions. On pourra donc ainsi développer chez les élèves des capacités de chercheur, d'innovateur et ainsi contribuer au progrès des connaissances. Cette démarche a pour but d'initier l'élève à la pratique de la recherche en le rendant apte à exploiter de façon adéquate les documents et les méthodes d'analyse.

Apports dans l'initiation aux nouvelles technologies de l'information et de la communication

Les instruments technologiques tels que l'ordinateur, les logiciels informatiques (WORD, LaTeX, GeoGebra, MATLAB) et internet ont été d'un appui considérable lors de la rédaction de ce mémoire. Ces moyens de communication (à l'instar des forums en ligne, des réseaux sociaux etc ...) pourront être utiles d'une part à l'enseignant, que nous aspirons à être, dans la mesure où nous devrons arrimer à la modernité pour compléter le déficit ou l'insuffisance d'informations des manuels scolaires. Ils peuvent de même nous assister dans la préparation, la saisie et la présentation d'une leçon ou d'un sujet d'évaluation. D'autre part, ces technologies aideront l'élève à mieux comprendre ses notes de cours et à se familiariser avec le monde de la recherche.

Conclusion et perspective

Au terme de notre travail qui a porté sur la notion d'équilibre de Nash et les oligopoles de Stakelberg, plusieurs étapes ont ponctué notre attention.

Pour une bonne compréhension de nos investigations, un bref aperçu des jeux non coopératifs sous forme normale et sous forme extensive a été fait aux deux premiers chapitres. L'essentiel du chapitre 1 a porté sur les outils d'analyse d'un jeu sous forme normale basés sur les notions de stratégies pures ou mixtes, de meilleures réponses des joueurs et d'équilibre de Nash. L'existence des équilibres de Nash dans un jeu sous forme normale a fait l'objet de plusieurs contributions. Nous avons à ce titre présenté, preuve à l'appui certains de ces résultats. Si les jeux sous forme normale sont statiques, les jeux sous forme extensive sont quant à eux dynamiques. L'information dont dispose un joueur au moment de décider devient capitale pour une décision rationnelle. C'est compte tenu de cette possibilité de décisions séquentielles que la notion d'équilibre de Nash admet un raffinement au nom d'équilibre de Nash parfait en sous jeux présenté au chapitre 2.

Les outils d'analyse étant mis sur pied, nous avons abordé aux chapitres 3 et 4 la notion de concurrence sur un marché qui a donné lieu aux oligopoles de Stakelberg comme cas particulier : dans ces oligopoles, un petit nombre de firmes détiennent l'offre d'un bien sur un marché comptant un grande nombre de consommateurs. La particularité d'un oligopole de Stakelberg réside dans le fait que les firmes prennent leurs décisions sur leur niveau de production les unes après les autres : des meneurs aux suiveurs. Après avoir proposé une modélisation d'un tel oligopole, au chapitre 3 par un jeu sous forme extensive à information complète et parfaite, nous avons montré l'existence d'un unique équilibre de Nash parfait en sous-jeux lorsque la demande est linéaire et que les coûts sont tous des fonctions affines de la quantité produite. Le chapitre 4 est une tentative d'étude de l'oligopole du marché du ciment au Cameroun. Il en ressort des seules observations que nous avons pu obtenir que cet oligopole ne peut être assimilé à un oligopole de Stakelberg à demande linéaire et à coûts identiques. Fort dépourvus des données sur les coûts de production, nous avons néanmoins proposé une étude statistique du prix moyen d'un sac de ciment de type CPJ35 en fonction de la production totale de ciment par la méthode de régression linéaire.

Cependant, nous nous sommes rendus compte que l'étude des oligopoles de Stakelberg reste d'actualité. Peu de résultats ont été rencontrés dans nos multiples recherches dans le cas d'une demande non linéaire. Il en est de même des propriétés de l'oligopole du marché de ciment au Cameroun. Nous espérons que les premiers pas que nous avons esquissés dans le présent travail nous serviront de rampe de lancement pour des réponses à ces problèmes qui nous intéressent sérieusement.

Bibliographie

[1] Andzogo S.(2018). Grâce aux travaux de la CAN 2019, le marché camerounais du ciment connaîtra une croissance annuelle de 10% contrôlé par Dangote. Disponible sur https :// w.w.w.ainvestiraucameroun. com. (Visité le 27. 04. 2019).

[2] Aumann R.J. (1989). *Lectures on game theory*. Boulder : Westview Press.

[3] Bell J.(2018). Ciment : Le Cameroun envisage doubler sa production d'ici 2019. Disponible sur https : // w.w.w. Cameroon-report.com. (Visité le 25. 04. 2019).

[4] Bertrand J. (1883). Théorie mathématique de la richesse sociale. *Journal des Savants*, 48. Pages 499- 508.

[5] Boyer M., Moreaux M. (1986). Perfect competition as the limit of hierarchical market game. *Economics Letters*, 22 : Pages 115-118.

[6] Cournot A. (1838). *Recherche sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Translated by N.T. Bacon as Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. New York : McMillan (1927). Librairie J. Vrin, Paris.

[7] Dasgupta P., Maskin E. (1986). The existence of equilibrium in discontinuous economic games 2 : Theory. *Review of Economic Studies*, 53 : Pages 1-26.

[8] Debreu G. (1952). A social equilibrium existence theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38 : Pages 886-893.

[9] Ewald C. O. (2004). Games, Fixed Points and Mathematical Economics. *School of Economics and Finance University of St.Andrews* : Pages 26-32.

[10] Galegov A., Garnaev A.(2009). How Hierarchical Structures Impact on Competition and taxation. *Max press*, Moscow, 3 : Pages 91-103.

[11] Glicksberg I. (1952) A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38 : Pages 170-174.

[12] Kuhn H.W. (1953) Extensive games and the problem of information. *Princeton University Press, Princeton*, 2 : Pages 193-216.

[13] Mbodian B.R., Endong H.B., Chonguang J., Djaligué Y.(2013). Cameroun : Nouvel eldorado des cimentiers, *Investir au Cameroun*, 20, Pages 12-26.

[14] Mckenzie B. R., Lee Dwight R. (2006). Microeconomics for MBAs, the economic way of think for managers. *Cambridge University Press*. Page 357.

[15] Nash J.F. (1950) Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36 : Pages 48-49.

[16] Okole S.O.(2017). Ciment : Les projections de la production en hausse. Disponible sur https : // w.w.w.Cameroonbusinesstoday. com. (Visité le 25. 04. 2019).

[17] Selten, R. (1965) : Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrägetr agheit. *Zeitschrift für dis gesamte Staatswissenschaft*, 121, Pages 301–324.

[18] Stackelberg.H.V. (1934). *Marketform und gleichgewicht*. Springer, Vienna.

Annexe

Théorème de Débreu-Glicksberg 1.3.2

Nous proposons une légère amélioration de la preuve faite dans [11] notamment les points a) et b).

Preuve.

$\boxed{a}$ En effet, chaque A_i étant un sous-ensemble d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $A = \prod_{i \in N} A_i$ est également un sous-ensemble d'un espace vectoriel euclidien. De plus chaque A_i est convexe, compact non vide, alors A est également convexe, compact non vide. Nous allons appliquer le Théorème (1.3.1) à la correspondance de meilleure réponse MR du jeu G.

Soit i dans N et $a_{-i} \in A_{-i}$. Comme u_i est continue sur le compact A_i, alors $max_{b_i \in A_i} u_i(b_i, a_{-i})$ existe et est atteint en un point de A_i. dans A_{-i}. Posons $\alpha(a_{-i}) = \max_{b_i \in A_i} u_i(b_i, a_{-i})$.
Ainsi l'ensemble des meilleures réponses du joueur i contre a_{-i}, noté $MR_i(a_{-i})$, est donné par

$$MR_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) = \alpha(a_{-i})\} = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geq \alpha(a_{-i})\}.$$

Le maximum est atteint en un point de A_i,alors $MR_i(a_{-i})$ est un ensemble non vide et fermé dans A_i. D'après l'hypothèse (3) de quasi-concavité, et par le Lemme (1.3.1), il vient que $MR_i(a_i)$ est convexe. D'où $MR_i(a_i)$ est un ensemble non vide à la fois convexe et compact.

Ainsi pour tout $a \in A$, $MR(a) = \prod_{i \in N} MR_i(a_{-i})$ est aussi un ensemble non vide convexe et compact comme produit fini d'ensembles non vides convexes et compacts.

Montrons ensuite que le graphe de la correspondance MR est fermé dans $A \times A$.
Considérons une suite $(a^p, b^p)_{p \geq 0}$ de points de $Gr(MR)$ qui converge vers une limite $(a\ ,\ b) \in A \times A$. Montrons que $(a\ ,\ b) \in Gr(MR)$. Pour tout $p \geq 0$, notons $a^p = (a_i^p)_{i \in N}$ et $b^p = (b_i^p)_{i \in N}$. Par définition, $(a^p\ ,\ b^p) \in Gr(MR)$ alors $b^p \in MR(a^p)$.

$$\text{D'où } \forall i \in N,\ \forall a_i \in A_i,\ u_i(b_i^p, a_{-i}^p) \geq u_i(a_i, a_{-i}^p).$$

L'application u_i étant continue, on a par passage à la limite quand p tend vers l'infini on obtient :

$$\forall i \in N, \forall a_i \in A_i, u_i(b_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}).$$

Ce qui signifie que pour tout joueur i, b_i est meilleure réponse contre a_{-i}, d'où $b \in MR(a)$. Ainsi $(a\ , b) \in Gr(MR)$, le graphe de MR donc est fermé.

L'ensemble $A \times A$ étant compact, le graphe de MR est aussi compact comme fermé contenu dans un compact.

On peut donc appliquer le Théorème (1.3.1) à la correspondance MR. On obtient donc l'existence d'un élément a^* de A tel que $a^* \in MR(a^*)$. Par la proposition (1.2.2), a^* est un équilibre de Nash de G.

b On a $EN_{SP}(G) = \{a \in A; a \in MR(a)\} = \{a \in A; (a; a) \in Gr(MR)\}$.

Considérons l'application $\begin{array}{rccc} g: & A & \longrightarrow & A \times A \\ & a & \longmapsto & (a\ , a) \end{array}$;

L'application g est continue et $g^{-1}\,(Gr(MR) = EN_{SP}(G))$. Comme $Gr(MR)$ est fermé, on obtient que $EN_{SP}(G)$ est fermé dans A donc $EN_{SP}(G)$ est compact comme fermé d'un compact.

c L'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de G est :

$$\{u(a) = (u_i(a))_{i \in N};\ a \in EN_{SP}(G)\} = u(EN_{SP}(G))$$

Pour chaque joueur i, u_i est continue donc l'application u est également continue. $EN_{SP}(G)$ étant compact, $u(EN_{SP}(G))$ l'est également en tant qu'image d'un compact par une application continue. L'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de G est donc compact.

□