REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE OF YAOUNDE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

N

E S

CLONES SOUS-MAXIMAUX DES POLYMORPHISMES D'UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE NON TRIVIALE CONTENANT LES FONCTIONS UNAIRES

Mémoire de Di.P.E.S II de mathématiques
De

KAM TSEMO PATRICK NOEL

Matricule : **10V0173**

Licencié en Mathématiques

Sous la direction du :

Dr TEMGOUA ALOMO ETIENNE

Chargé de cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique : 2015-2016

CLONES SOUS-MAXIMAUX DES POLYMORPHISMES D'UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE NON TRIVIALE CONTENANT LES FONCTIONS UNAIRES.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'enseignement secondaire deuxième grade: (DI.P.E.S. II)

Par

KAM TSEMO

Patrick Noël

Matricule: $10V0173$

Sous la direction du :

Dr.**TEMGOUA ALOMO Etienne Romuald**

Chargé de cours à l'E.N.S de Yaoundé

Juin 2016

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire :

A mon regretté grand frère d'illustre mémoire, **Tchamda Fotue Pierre Florimond** dont le souvenir de son esprit de guerrier et de son amour en mon endroit, m'ont permis de franchir un cap dans ma vie. Que ce travail soit, le témoignage de son oeuvre de formation en moi accomplie, qu'il lui accorde le repos de l'âme et soit la consolation de tous les siens encore éplorés.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce travail a été possible grâce au grand architecte et au concours de nombreuses personnes auxquelles nous témoignons ici notre gratitude. Nous pensons :

- ☞ Au Dr **Temgoua Alomo Etienne Romuald** pour tous les sacrifices qu'il a consenti pour la réalisation de ce travail
- ☞ A Mon professeur de Mathématique de la classe de $5^{ieme}I$ au C.E.S de Ngoa-Ekelle (2004-2005) Mme **NSSOMO AKO'O AVICE FLORE** qui m'a inspiré sur la voie de la mathématique .
- ☞ A tous les professeurs, dont j'ai bénéficié de leurs expertises jusqu'à présent.
- ☞ A mes parents Mr **Kam Claude** et Mme **Kam Rose** pour leurs affections indescriptible et leurs soutiens
- ☞ A Mme **Ghomsi Philomène** ma tante, pour tout son attention à mon égard
- ☞ Aux camarades de la $55^{\text{ème}}$ promotion pour leur soutien moral durant la formation. En particulier **Abougne, Kengne Chatue, Djoumessi, Donfack, Njokou, Nganmeni, Motcheka, Tchapnga, Kenfack Gervais, Mbok, Chouaibou, Kamila, Thepi, Tsasse, Nguefo Amour** sans oublier notre charismatique délégué **Kaldjob Kaldjob Paul Alain**
- ☞ Merci à tous mes frères **Nguekam Peguy, Kam Tchomgui Dérrick** et toutes mes sœurs **Kam Demgne Marlyse, Kam Mayou Joselline**, ainsi qu'à mon fils et ma fille **Kamkuimo Dimitri, Mayou Takeu Audrey** pour leur grande affection.
- ☞ Merci également à tous mes ami(e)s. **Bogny Bob James, Nouba Nouba Joanes, Djapa Tankoua Patrice, Djapa Nkamwa Niker, Mefo Fotso Glwadys, Matagu Fonkou Christiana, Kombo Frédérick, Kanyou Claude** pour tous les encouragements.

Déclaration sur l'honneur

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dument mentionnées et recensées en bibliographie.

Signé,
KAM TSEMO PATRICK NOËL

RESUME

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, θ une relation d'équivalence non triviale sur $E_k = \{0, ..., k-1\}$ avec t classes. On sait d' après le théorème de classification de Rosenberg (1965) que le clone $Pol\theta$ (des opérations sur E_k préservant θ) est un clone maximal au sens de l'inclusion, dans le treillis des clones d'opération sur E_k. Désignons par $Pol^{(1)}\theta$ l'ensemble de toutes les opérations unaires de $Pol\theta$. Dans ce travail nous caractérisons quelques éléments maximaux de l'intervalle de clones $[Pol^{(1)}\theta, \ Pol\theta]$ et décrivons quelques chaines de cet intervalle .

Mots clés : Relation d'équivalence non triviale, clones sous-maximaux, polymorphismes, fonction unaire , clones comparables .

ABSTRACT

Let $k \in \mathbb{N}$ such that $k \geq 3$, θ a nontrivial equivalence relation on $E_k := \{0, ..., k-1\}$ with t classes. It is known from Rosenberg's classification theorem(1965) that the clone $Pol\theta$ (of operations on E_k preserving θ) is a maximal clone in the inclusion-ordered lattice of clones on E_k. We denote by $Pol^{(1)}\theta$ the set of all unary operations of $Pol\theta$. In this work ; we characterize some maximal elements of the interval of clone $[Pol^{(1)}\theta, Pol\theta]$ and describe some chains of this interval.

Keys words : nontrivial equivalence relation, submaximal clones, polymorphism, unary operation, comparables clones

Table des matières

INTRODUCTION

Dans [3], S.Kerkhoff, R.poschel et F.M.Schneider donnent une brève introduction sur la théorie des clones, ils expliquent l'importance de l'étude des clones et présentent plusieurs résultats et problèmes ouvert sur ce sujet. Un de ces problèmes est la détermination de clones sous-maximaux dans le treillis de clones sur un ensemble à k éléments. Ce problème est résolu seulement pour $k = 2$ et $k = 3$ (voir [2], [4], [5], [8] ou [9]). Toutefois, plusieurs résultats dans la littérature sur les clones sous-maximaux, concerne les clones sous-maximaux sur les ensembles finis. Ce travail fait suite à certains travaux effectués sur la détermination des clones sous-maximaux des polymorphismes d'une relation d'équivalence non triviale θ sur un ensemble à k éléments. Dans [12] il est donné une classification de toutes les relations binaires centrale ρ sur E_k de sorte que : le clone $Pol\theta \cap Pol\rho$ soit maximal dans $Pol\theta$. Dans [13], il est question de chercher toutes les relations binaires ρ tel que le clone $Pol\rho$ soit un sous-clone maximal inf-irréductible de $Pol\theta$. Cependant, dans ce travail nous donnons une description de l'intervalle $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$ où θ est une relation d'équivalence non triviale sur un ensemble à k éléments et caractérisons quelques clones sous-maximaux de cet intervalle. L'ossature ce travail est le suivant : Dans le chapitre 1, nous présentons quelques notions de bases indispensables pour la suite. Par la suite nous abordons le vif du sujet dans le chapitre 2 en donnant une description de l'intervalle $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$ où θ est une relation d'équivalence non triviale sur un ensemble à k éléments. Enfin dans le chapitre 3 il est question pour nous, d'appliquer les résultats obtenus sur $E_3 := \{0, 1, 2\}$; $E_4 := \{0, 1, 2, 3\}$ et $E_5 := \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Chapitre Un

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous présentons quelques notions indispensables pour notre travail.

1.1 Treillis

Définition 1.1.1 :

On appelle opération binaire sur un ensemble non vide L, toute application ω de $L \times L$ dans L.

Exemple 1.1.1 :

- L'addition + et la multiplication × sont des opérations binaires sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 :

On appelle treillis, un triplet $(L, \wedge, \vee)$; où L est un ensemble non vide, $\wedge$ et $\vee$ deux opérations binaires sur L et vérifiant les propriétés suivantes :

P1 : (a) $\forall\ x, y \in L,\ x \vee y = y \vee x$

(b) $\forall\ x, y \in L,\ \ x \wedge y = y \wedge x$ *(commutativité)*

P2 : (a) $\forall\ x, y, z \in L,\ \ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

(b) $\forall\ x, y, z \in L,\ \ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ *(associativité)*

P3 : (a) $\forall\ x \in L,\ \ x \vee x = x$

(b) $\forall\ x \in L,\ \ x \wedge x = x$ *(idempotence)*

P4 : (a) $\forall\ x, y \in L,\ \ x = x \vee (x \wedge y)$

(b) $\forall\ x, y \in L,\ \ x = x \wedge (x \vee y)$ *(absorption)*

Remarque 1.1.1 :

Cette définition de treillis est dite algébrique.

Exemple 1.1.2 :

1) Soit E un ensemble non vide . $\mathcal{L} := (P(E); \cap, \cup)$ est un treillis.

2) Soit $L := \{0, 1\}$, $\wedge := +$ dans $\mathbb{Z}_2$ et $\vee := \times$ dans $\mathbb{Z}_2$. $\mathcal{L} := (L; \wedge, \vee)$ est un treillis.

Définition 1.1.3 :

Un treillis (L,$\wedge,\vee$) est dit ***distributif*** *lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) $\forall\ x,y,z \in L,\ x \wedge (y \vee z) \quad = \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ii) $\forall\ x,y,z \in L,\ x \vee (y \wedge z) \quad = \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z).$

Proposition 1.1.1 :

Soit (L,$\wedge,\vee$) un treillis. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall\ x,y,z \in L,\ x \wedge (y \vee z) \quad = \quad (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ii) $\forall\ x,y,z \in L,\ x \vee (y \wedge z) \quad = \quad (x \vee y) \wedge (x \vee z).$

Preuve:

Soient $x, y, z \in$ L.

$(i) \Longrightarrow (ii)$

$$\begin{array}{lcll}
(x \vee y) \wedge (x \vee z) & = & [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] & \text{(D'après (i))} \\
 & = & x \vee [(x \vee y) \wedge z] & \text{(Par absorption de } \wedge) \\
 & = & x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] & \text{(Par commutativité du } \wedge \text{ et d'après (i))} \\
 & = & (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) & \text{(par associativité de } \vee) \\
 & = & x \vee (y \wedge z) & \text{(par absorption de } \vee\ ) \\
\text{D'où } (x \vee y) \wedge (x \vee z) & = & x \vee (y \wedge z) &
\end{array}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

$$\begin{array}{lcll}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) & = & [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z] & \text{(D'après (ii))} \\
 & = & x \wedge [(x \wedge y) \vee z] & \text{(Par absorption de } \vee) \\
 & = & x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] & \text{(par commutativité du } \vee \text{ et d'après (ii))} \\
 & = & (x \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) & \text{(par associativité de } \wedge) \\
 & = & x \wedge (y \vee z) & \text{(par absorption de } \wedge\ )
\end{array}$$

D'où $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ ■

Remarque 1.1.2 :

les propriétés i) et ii) étant équivalentes, il s'ensuit que, dans la pratique, pour montrer qu'un treillis est distributif, il suffit d'établir i) ou ii).

Exemple 1.1.3 :

Soit E un ensemble non vide. $\mathcal{L} := (P(E); \cap, \cup)$ est un treillis distributif.

Proposition 1.1.2 :

Soit L un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel $\leq$. $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *est un treillis si et seulement si, pour tout x,y* $\in$ *L* $Sup_{\leq}\{x,y\}$ *et* $Inf_{\leq}\{x,y\}$ *existent dans L.*

Preuve:

(A) Si $(L, \vee, \wedge)$ est un treillis, alors on définit la relation d'ordre $\leq$ sur L par :

$\forall x, y \in L, x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y$.

(B) Si $(L, \leq)$ est un ensemble ordonné, alors on définit les opérations binaires $\vee$ et $\wedge$ dans L par :

$x \vee y = sup\{x, y\}$ et $x \wedge y = inf\{x, y\}$ $\forall x, y \in L$.

Supposons que L est un treillis et $\leq$ la relation définie en (A)

→ Soit $x \in L$. De $x \wedge x = x$, on a : $x \leq x$. Donc $\leq$ est réflexive.

→ Soient $x, y \in L$ tels que $x \leq y$ et $y \leq x$. Alors $x = x \wedge y$ et $y = y \wedge x$. Puisque $x \wedge y = y \wedge x$ alors $x = y$. D'où $\leq$ est antisymétrique.

→ Soient $x, y, z \in L$ tels que $x \leq y$ et $y \leq z$. Alors $x = x \wedge y$ et $y = y \wedge z$; donc $x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$; ceci entraine $x \leq z$.

D'où $\leq$ est transitive.

Ce qui montre que $\leq$ est un ordre partiel sur L.

→ Soient $x, y \in L$. Montrons que $sup\{x, y\}$ et $inf\{x, y\}$ existent dans L.

. On a : $x = x \wedge (x \vee y)$ et $y = y \wedge (y \vee x) = y \wedge (x \vee y)$; donc $x \leq x \vee y$ et $y \leq x \vee y$ et par suite, $x \vee y$ est un majorant de $\{x, y\}$.

Maintenant, si $x \leq u$ et $y \leq u$ alors $x \vee u = (x \wedge u) \vee u = u$ et $y \vee u = u$; donc $(x \vee u) \vee (y \vee u) = u \vee u = u$. $(x \vee y) \wedge u = (x \vee y) \wedge [(x \vee y) \vee u] = x \vee y$. D'où $x \vee y \leq u$ et donc $x \vee y = sup\{x, y\}$.

. On a $x \wedge y = (x \wedge y) \vee x$ et $x \wedge y = (x \wedge y) \vee y$; donc $x \wedge y \leq x$ et $x \wedge y \leq y$ et par suite, $x \wedge y$ est un minorant de $\{x, y\}$.

Maintenant, si $u \leq x$ et $u \leq y$ alors $u = u \wedge x = u \wedge y$; donc $u \wedge (x \wedge y) = (u \wedge x) \wedge y = u \wedge y = u$. D'où $u \leq x \wedge y$ et donc $x \wedge y = inf\{x, y\}$.

Donc L est un ensemble partiellement ordonné tel que $\forall x, y \in L, sup\{x, y\}$ et $inf\{x, y\}$ existent dans L.

Supposons que L est un ensemble partiellement ordonné tel que $\forall x, y \in L, sup\{x, y\}$ et $inf\{x, y\}$ existent dans L et supposons les opérations $\vee$ et $\wedge$ définies en (B).

→ Soient $x, y \in L$. Alors $sup\{x, y\} = sup\{y, x\}$ et $inf\{x, y\} = inf\{y, x\}$. Donc $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$.

→ Soient $x, y, z \in L$.

Alors $sup\{x, y \vee z\} = sup\{x, sup\{y, z\}\} = sup\{x, y, z\} = sup\{sup\{x, y\}, z\} = sup\{x \vee y, z\}$.

Donc $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$. De même, on montre que $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

→ Soit $x \in L$. Alors $sup\{x,x\} = x$ et $inf\{x,x\} = x$. Donc $x = x \vee x$ et $x = x \wedge x$.

→ Soient $x, y \in L$. Alors on a $sup\{x, inf\{x,y\}\} = x$ et $inf\{x, sup\{x,y\}\} = x$.

Donc $x = x \vee (y \wedge z)$ et $x = x \wedge (y \vee z)$.

Donc L est un treillis. ∎

Exemple 1.1.4 :

Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Alors, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un treillis.

En effet pour tous A et B éléments de $\mathcal{P}(X)$, $A \cup B = sup\{A,B\}$ et $A \cap B = inf\{A,B\}$.

Définition 1.1.4 :

*Un treillis $\mathcal{L} := (L; \leq)$ est dit **complet** lorsque, pour toute partie A de L, $Sup_{\leq}A$ et $Inf_{\leq}A$ existent.*

Exemple 1.1.5 :

Soit E un ensemble non vide. $\mathcal{E} := (P(E); \subseteq)$ est un treillis complet.

Définition 1.1.5 :

*Un treillis $(L; \wedge, \vee)$ est dit **borné**, lorsqu'il existe u,v $\in$ L tels que : $\forall x \in$ L, $u \leq x$ et $x \leq v$ Dans ce cas, on note le treillis borné $(L; \wedge, \vee; u, v)$ ou $(L; \leq; u, v)$.*

Exemple 1.1.6 :

Soit E un ensemble non vide. $\mathcal{L} := (P(E), \cap, \cup, \emptyset, E)$ est un treillis borné.

Remarque 1.1.3 :

Notons que le treillis $\mathcal{L} := (P(E), \cap, \cup, \emptyset, E)$, occupe une place centrale en **informatique théorique**, ainsi qu'en **topologie**. En fait, c'est grâce à ce treillis qu'on établit le lien qui existe entre la notion de filtre au sens algébrique et au sens topologique. En effet, rappelons ces différentes notions de filtres.

Filtre en algèbre

Soit $(A; \wedge, \vee)$ un treillis. Soit F une partie non vide de A.

F est filtre lorsque pour tout $a, b \in A$ on a :

i) $a, b \in F \Longrightarrow a \wedge b \in F$

ii) $a \leq b$ et $a \in F \Longrightarrow b \in F$.

Filtre en topologie

Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $P(E)$.

$\mathcal{F}$ est un filtre sur E lorsque pour tout $A, B \in P(E)$ on a :

i) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

ii) $A \subseteq B$ et $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$.

1.2 Fonction et clones de fonctions sur un ensemble fini

Dans toute la suite, sauf mention contraire, A désigne un ensemble fini de cardinal supérieur ou égale à 1. Soit n$\in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.1 :

On appelle fonction ou opération n-aire sur A, toute application $f : A^n \longrightarrow A$. On note $f^{(n)}$ et n désigne l'aritè de f.

On désigne par $O_A^{(n)}$ l'ensemble des opérations n-aire sur A, et par $O_A := \bigcup_{n\geq 1} O_A^{(n)}$ l'ensemble des opérations finitaires (d'arité fini) sur A.

Exemple 1.2.1 :

Soit G un groupe multiplicatif fini et $n \geq 2$.

-L'application f ; G$^n \longrightarrow$ G définie par : $f\ (\ x_{1,}\ x_{2,}\ .\ .\ .\ ,x_n\ ) = x_1\cdot\ x_2\cdot\ .\ .\ .\cdot\ x_n$ est une opération n-aire sur G.

-L'application qui à chaque élément de G associe son inverse est une opération d'arité 1.

Soit n un entier naturel non nul, soit i un entier tels que $1 \leq i \leq n$.

Définition 1.2.2 :

On appelle i^{me} projection n-aire sur A et on note e_i^n l'opération définie par :
$e_i^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$ *pour tout* $x_1, x_2, ..., x_n \in A$.

Notation : Nous désignerons par $\prod_A$ l'ensemble des projections sur A.

Définition 1.2.3 :

Soient m, n deux entiers non nuls. Soient $f \in O_A^{(n)}$, $g_1, ..., g_n \in O_A^{(m)}$. On appelle composée de f et des $(g_j)_{1\leq j\leq n}$ l'opération m-aire noté $f[g_1, ..., g_n]$ définie par :
pour tout $a \in A^m$, $f[g_1, ..., g_n](a) := f(g_1(a), ..., g_n(a))$

Définition 1.2.4 :

Un sous ensemble F de O_A est appelé un clone d'opération sur A ou simplement un clone sur A, lorsque les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) F contient $\prod_A$;

(ii) F est stable (ou fermé) pour la composition ;

i.e , si $f \in F \cap O_A^{(n)}$ et $g_1, ..., g_n \in F \cap O_A^{(m)}$ alors $f[g_1, ..., g_n] \in F$.

Exemple 1.2.2 :

- $\prod_A$ est un clone sur A ;
- O_A est un clone sur A.

Proposition 1.2.1 :

Une intersection quelconque de clones d'opération sur A est un clone d'opération sur A .

Preuve:

Soit $(C_i)_{i\in\Lambda}$ une famille de clones sur A.

✎ On a $\prod_A \subseteq C_i$, $\forall i \in \Lambda$ (Car C_i est un clone sur A pour tout $i \in \Lambda$).

Par conséquent $\prod_A \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda} C_i$.

✎ Soient m, n deux entiers non nuls.

Soient $f \in (\bigcap_{i\in\Lambda} C_i) \cap O_A^{(n)}$, $g_1, ..., g_n \in (\bigcap_{i\in\Lambda} C_i) \cap O_A^{(m)}$.

On a $f \in C_i \cap O_A^{(n)}$ et $g_1, ..., g_n \in C_i \cap O_A^{(m)}$ $\forall i \in \Lambda$. Ainsi comme C_i est un clone sur A $\forall i \in \Lambda$, il vient que, $f[g_1, ..., g_n] \in C_i$ $\forall i \in \Lambda$. D'où $f[g_1, ..., g_n] \in \bigcap_{i\in\Lambda} C_i$.

De ce fait, $\bigcap_{i\in\Lambda} C_i$ est un clone sur A ■

Notation :

- ☞ On désigne par Clone(A) l'ensemble des clones d'opération sur A.
- ☞ Pour tout $F \subseteq O_A$ on note $< F >$ le plus petit Clone sur A contenant F (i.e l'intersection de tous les clones sur A contenant F) .
- ☞ Pour tout F $\in$ Clone(A), on note $Sub(F) := \{G \in Clone(A) : G \subseteq F\}$ l'ensemble des sous clones de F

Remarque 1.2.1 :

-$(Clone(A); \wedge, \vee)$ est un **treillis**, où $F \wedge G := F \cap G$ et $F \vee G :=< F \cup G >$, $\forall$ F,G $\in Clone(A)$.

-Mieux encore $(Clone(A)\ ;\wedge, \vee, \prod_A, O_A)$ est un **treillis borné**.

-En outre, $(Clone(A), \subseteq)$ est un **treillis complet** .

-Pour tout F $\in Clone(A)$, (Sub(F) ;$\subseteq; \prod_A, F$) est **treillis borné**. Notons cependant que, l'étude de ce treillis présente un intérêt certain lorsque F est un **élément maximal** de $(Clone(A); \subseteq)$

Définition 1.2.5 :

Un clone C sur A est dit maximal lorsque, C est un élément maximal du treillis $(Clone(A); \subseteq)$ *i.e* O_A *est le seul clone sur A qui contient strictement C.*

Lemme 1.1 :

Un clone C sur A est maximal si et seulement si, pour toute opération $f \in O_A \backslash C$, $\langle C \cup \{f\} \rangle = O_A$.

Preuve:

Soit C $\in Clone(A)$.

$\Longrightarrow$) Supposons C maximal alors, soit f $\in O_A \backslash C$. On a $C \subsetneq \langle C \cup \{f\} \rangle \subseteq O_A$.

C étant maximal, il s'ensuit que : $\langle C \cup \{f\} \rangle = O_A$.

$\Longleftarrow$) Réciproquement supposons que pour toute opération f $\in O_A \backslash C$,

$\langle C \cup \{f\} \rangle = O_A$. En outre supposons que C ne soit pas maximal. Alors il existe $F \in$ Clone(A) tel que $C \subsetneq F \subsetneq O_A$. Soit $f_0 \in F \backslash C$ on a : $\langle C \cup \{f_0\} \rangle \subseteq F \subsetneq O_A$. Il s'ensuit d'après l'hypothèse que :$O_A \subseteq F \subsetneq O_A$ ce qui est absurde. Par conséquent, Un clone C sur A est maximal si et seulement si, pour toute opération f $\in O_A \backslash C$, $\langle C \cup \{f\} \rangle = O_A$ ∎

Définition 1.2.6 :

Soit F un clone maximal sur A. Soit M $\in$ Sub(F).

On dit que M est un clone sous-maximal de F lorsque, M est un élément maximal du treillis $(Sub(F); \subseteq; \prod_A, F)$ *ie F est le seul clone de ce treillis contenant strictement M.*

1.3 Relations

Soit $n \in \mathbb{N}$

Définition 1.3.1 :

Une relation n-aire (ou d'arité n) sur A, est un sous-ensemble du produit cartésien A^n.

Remarque 1.3.1 :

Lorsque $n = 1$, la relation est dite unaire ; lorsque $n = 2$, la relation est dite binaire.

Exemple 1.3.1 :

Si $A := \{0,1\}$, alors l'ensemble $\theta := \{(0,0);\ (0,1);\ (1,1)\}$ est une relation binaire sur A.

On note aussi $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ au lieu de $\theta = \{(0,0);\ (0,1);\ (1,1)\}$.

Notation :

On désigne par $R_A^{(m)}$ l'ensemble des relations d'arité m sur A, et par $R_A := \bigcup\limits_{m<\omega} R_A^{(m)}$ l'ensemble des relations finitaires (d'arité fini) sur A .

Définition 1.3.2 :

Une opération $f \in O_A^{(n)}$ *préserve une relation* $\sigma \in R_A^{(h)}$ *(ou σ est invariant par f) et on note $f \rhd \sigma$ lorsque :*

$$Pour\ tout \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{h1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{h2} \end{pmatrix}; \ldots; \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{hn} \end{pmatrix} \in \sigma,\ on\ a \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ f(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ \vdots \\ f(a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn}) \end{pmatrix} \in \sigma$$

En particulier, si $f \in O_A^{(1)}$ *(i.e* f *unaire) alors* f *préserve une relation* $\sigma \in R_A^{(h)}$ *lorsque :* $\forall\ (a_1, a_2, ..., a_h) \in \sigma$ *on a* $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_h)) \in \sigma$.

Exemple 1.3.2 :

Soit $A := \{0, 1, 2\}$. Considérons la relation binaire $\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et définissons l'opération 5-aire f par : $f(x_1, \cdots, x_5) := \begin{cases} 2 & \text{si } (x_1, ..., x_5) = (0,0,1,2,1) \\ 2 & \text{si } (x_1, ..., x_5) = (1,2,0,0,1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

On a $\begin{pmatrix} f(0,0,1,2,1) \\ f(1,2,2,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \sigma$. Donc f $\triangleright\ \sigma$.

Remarque 1.3.2 :

Lorsque, $f \triangleright \sigma$ où f est une fonction et σ une relation, on dit que f est un polymorphisme de σ.

Notation : On désigne par $Pol\rho$ ($\rho \in R_A$) l'ensemble des polymorphismes de la relation ρ,

Inv f désigne l'ensemble des relations qui sont préservées par f ; Pol R ($R \subseteq R_A$) désigne l'ensemble des opérations sur A qui préservent toutes les relations de R et $InvF$ ($F \subseteq O_A$) désigne l'ensemble de toutes les relations sur A qui sont préservées par toute fonction $f \in F$. Et en fin on désignera par $Pol^{(n)}\rho$ l'ensemble des fonctions d'arité n de $Pol\rho$

Définition 1.3.3 :

Une relation binaire θ *sur* A *est appelée relation d'équivalence lorsqu'elle remplit les propriétés suivantes :*

$E_1)$ $\forall a \in A, (a, a) \in \theta$ *(réflexivité).*

$E_2)$ $\forall a, b \in A, (a, b) \in \theta \Rightarrow (b, a) \in \theta$ *(symétrie).*

$E_3)$ $\forall a, b, c \in A, ((a, b) \in \theta\ et\ (b, c) \in \theta) \Rightarrow (a, c) \in \theta$ *(transitivité).*

NB : Une relation d'équivalence θ sur A est dite triviale, lorsqu'elle est égale à l'une des relations suivantes : $\Delta_A := \{(x, x) : x \in A\}$; $\nabla_A := A \times A$

Exemple 1.3.3 :

Sur A:= $\{0,1,2,3\}$ on définit la relation θ par :

$\theta := \{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3);(0,1);(1,0);(1,2);(2,1);(0,2);(2,0)\}$. θ est une relation d'équivalence non triviale sur A .

Définition 1.3.4 :

Une relation binaire $\leq$ sur A est appelée relation d'ordre lorsqu'elle remplit les propriétés suivantes :

O_1) $\forall a \in A, (a,a) \in \leq$ *(réflexivité).*

O_2) $\forall a,b \in A, ((a,b) \in \leq$ *et* $(b,a) \in \leq)) \Rightarrow a = b$ *(antisymétrie).*

O_3) $\forall a,b,c \in A, ((a,b) \in \leq$ *et* $(b,c) \in \leq) \Rightarrow (a,c) \in \leq$ *(transitivité).*

NB : Si de plus il existe m,M $\in$ A tels que :

$\forall x \in$ A, $(m;x) \in \leq$ et $(x;M) \in \leq$ alors on dit que $\leq$ est une relation d'ordre bornée sur A.

Exemple 1.3.4 :

Sur $A := \{0,1,2,3\}$ on définit :

$\leq_1 := \{(0,0),(1,1);(2,2);(3,3);(0,1);(0,2);(0,3);(1,2);(3,2)\}$. $\leq_1$ ainsi définit est une relation d'ordre bornée par 0 et 2

Définition 1.3.5 :

Soit m un entier naturel non nul, τ_m^A le sous ensemble de A^m définit par :

$\tau_m^A := \{(x_1, x_2, ..., x_m) \in A^m : \exists i, \exists j (i \neq j)$ *et* $x_i = x_j$ *avec* $i,j \in \{1,...,m\}$ $\}$.

*1) Une relation $\rho \subseteq A^m$ est dite **totalement réflexive** (réflexive si $m = 2$) lorsque $\tau_m^A \subseteq \rho$.*

*2) Une relation $\rho \subseteq A^m$ est dite **totalement symétrique** (symétrique si m=2) lorsque pour tout $\sigma \in S_m$ et pour tout m-uplets $(x_1,...,x_m) \in A^m$:*

$(x_1,...,x_m) \in \rho \iff (x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}) \in \rho$

***NB :** Si $\rho \subseteq A^m$ est totalement réflexive et totalement symétrique, on définit le **centre** de ρ par : $C_\rho := \{x \in A : \forall x_2,...,x_m \in A, (x,x_2,...,x_m) \in \rho\}$.*

3) Soit ρ une relation d'arité m sur E_k.

*On dit que ρ est une **relation centrale** lorsqu'elle est totalement réflexive, totalement symétrique et C_ρ est un sous ensemble-propre non vide de E_k.*

Remarque 1.3.3 :

Une relation centrale unaire sur A est sous ensemble propre de A (c'est à dire un sous ensemble non vide et distinct de A).

Exemple 1.3.5 :

Sur $A := \{0,1,2,3\}$ la relation binaire définie par :

$\rho := \{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3);(1,2);(2,1);(0,2);(2,0);(2,3);(3,2);(0,1);(1,0)\}$ est une relation centrale binaire et 2 est l'élément centrale de cette relation.

Définition 1.3.6 :

Soit A un ensemble fini non vide tel que : $|A| := p^m$ où p est un nombre premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $+$ une opération binaire sur A tel que : $(A,+) \cong \mathbb{Z}_{p^m}$. La relation 4-aires λ_+ se définie de la façon suivante :

$\lambda_+ := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in A^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$

Exemple 1.3.6 :

Soit A:= $\{0,1,2,3,4\}$, $p = 5, m = 1$, A est identifier à $\mathbb{Z}_5$ et + est l'addition dans $\mathbb{Z}_5$ on a :

$\lambda_+ = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Z}_5^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$.

Définition 1.3.7 :

Soit $l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Une famille $T := \{\theta_1,...,\theta_l\}$ de relation d'équivalences sur A est dite h-régulière avec $h \geq 3$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1) *$\forall i \in \{1,...,l\}$ θ_i posséde exactement h-classes d'équivalence .*

2) *$\bigcap_{i=1}^{l} \varepsilon_i \neq \varnothing$ pour toute classe d'équivalence ε_i de θ_i, $\forall i \in \{1,...,l\}$.*

On pose $\lambda_T := \{(x_1,...,x_h) : \forall i \in \{1,...,h\}, \exists m \neq p$ tel que $(x_m,x_p) \in \theta_i\}$. Une relation de la forme λ_T est dite régulière.

Remarque 1.3.4 :

Les relations régulières sont totalement réflexives et totalement symétriques.

Exemple 1.3.7 :

Sur $A := \{0,1,2,3\}$ prenons $h := 3$ et $l := 1$, considérons la relation d'équivalence

$\theta := \{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3);(0,1);(1,0)\}$ les classes d'équivalence suivant θ sont :

$[0]_\theta := \{0,1\}$, $[2]_\theta := \{2\}$ et $[3]_\theta := \{3\}$. $T := \{\theta\}$ est 3-régulière. La relation ρ définie par :

$\rho := \{(x_1,x_2,x_3) \in A^3 : (x_1,x_2) \in \theta$ ou $(x_1,x_3) \in \theta$ ou $(x_2,x_3) \in \theta\}$ est de la forme λ_T

Définition 1.3.8 :

Soit s une permutation sur A, le graphe de s est défini par : $\rho := \{(x,s(x)) : x \in A\}$.

s est dit sans point fixe lorsque $\forall x \in A$ $s(x) \neq x$.

La permutation s est dite d'ordre premier p, si elle est égale au produit de cycles deux à deux disjoints et de longueur p.

Exemple 1.3.8 :

Sur A:= $\{0,1,2,3\}$ la permutation s définie par : $s := (01)(23)$ est une permutation d'ordre 2 sans point fixe. Son graphe est donné par :$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.4 Connexion de Galois et théorème de classification de Rosenberg

Définition 1.4.1 :

Soient D et E deux ensembles. $\sigma : P(D) \longrightarrow P(E)$, $\tau : P(E) \longrightarrow P(D)$ deux applications. On dit que la paire (σ, τ) est une connexion de Galois de D et E si pour tout X, X' $\subseteq$ D, Y, Y' $\subseteq$ E, les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $X \subseteq X' \Longrightarrow \sigma\ (X') \subseteq \sigma\ (X)$

(b) $Y \subseteq Y' \Longrightarrow \tau\ (Y') \subseteq \tau\ (Y)$

(c) $X \subseteq \tau\sigma\ (X)$ et $Y \subseteq \tau\sigma\ (Y)$.

NB : Le théorème qui suit fait office d'exemple de connexion de Galois

Théorème 1.4.1 *:*

(Pol, Inv) est une connexion de Galois entre O_A et R_A .

Preuve:

Soient F_1, $F_2 \subseteq O_A$ et R_1, $R_2 \subseteq R_A$.

1 - Supposons que $R_1 \subseteq R_2$ et montrons que Pol $R_2 \subseteq$ PolR_1

Soit f $\in$ PolR_2 et $\sigma \in R_1$. Alors $\sigma \in R_2$ et puisque f $\in$ PolR_2, $f \rhd \sigma$. D'où f $\in$ PolR_1

Donc Pol$R_2 \subseteq$ PolR_1 .

2 - Supposons que $F_1 \subseteq F_2$ et montrons que Inv$F_2 \subseteq$ InvF_1 . Soit $\sigma \in$ InvF_2 et f $\in F_1$. Alors f $\in F_2$ et f $\rhd \sigma$. D'où $\sigma \in$ InvF_1 . Donc Inv$F_2 \subseteq$ InvF_1

3 - Montrons que $R_1 \subseteq$ Inv Pol R_1 .

Soit $\sigma \in R_1$ et f $\in$ Pol R_1 . Alors f $\rhd \sigma$. Donc $R_1 \subseteq$ Inv Pol R_1 .

- Montrons que $F_1 \subseteq$ Pol Inv F_1 .

Soit f $\in F_1$ et $\sigma \in$ Inv F_1 . Alors f $\rhd \sigma$. Donc F$_1 \subseteq$ Pol Inv F_1 .

Conclusion : (Pol, Inv) est une connexion de Galois entre O_A et R_A. ■

Lemme 1.2 :

Soit ρ une relation sur A. Polρ est un clone sur A .

Preuve:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in \{1, ..., n\}$, e_i^n une projection sur A et ρ une relation $h-aire$ sur A.

Soit $x_1, ..., x_n \in \rho$. Alors $\forall i \in \{1, ..., n\}$ on a :

$$e_i^n\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^h & x_2^h & \cdots & x_n^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_i^n(\; x_1^1 \;\; x_2^1 \;\; \cdots \;\; x_n^1 \;) \\ e_i^n(\; x_1^2 \;\; x_2^2 \;\; \cdots \;\; x_n^2 \;) \\ \vdots \\ e_i^n(\; x_1^h \;\; x_2^h \;\; \cdots \;\; x_n^h \;) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ x_i^h \end{pmatrix} = x_i \in \rho.$$

Soient f une opération $k-aire$ de $Pol\ \rho$, $g_1, ..., g_k$, des opérations $l-aires$ de $Pol\ \rho$.

Alors $f(g_1, ..., g_k)(x_1, ..., x_l) = f(g_1(x_1, ..., x_l), ..., g_k(x_1, ..., x_l))$.

Mais, $g_1(x_1, ..., x_l), ..., g_k(x_1, ..., x_l) \in \rho$ (car $g_1, ..., g_k \in pol\ \rho$),

Donc, $f(g_1(x_1, ..., x_l), ..., g_k(x_1, ..., x_l)) \in pol\ \rho$. Par suite, $pol\rho$ est un clone sur A. ■

Théorème 1.4.2 (théorème de classification de Rosenberg 1965) *[10] :*
Soit A un ensemble fini tel que $|A| \geq 2$.Les clones maximaux sur A sont les clones de la forme $Pol\rho$ où ρ est une relation de l'une des six classes suivantes :

1. *les relations d'équivalence non triviales.*
2. *les relations d'ordre bornées.*
3. *les graphes de permutations de A sans points fixes et d'ordre premier.*
4. *les relations de la forme $\{(a, b, c, d) \in A^4 : a + b = c + d\}$ où $(A, +)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}_{p^m}, +)$, avec p nombre premier et m un nombre naturel non nul .*
5. *les relations h-régulières .*
6. *les relations centrales.*

INTERVALLE $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$

Dans toute la suite, on travaillera sur l'ensemble $E_k = \{0, ..., k-1\}$ où $k > 1$; et θ désigne une relation d'équivalence non trivial sur E_k à t classes $A_0; A_1; ...; A_{t-1}$ satisfaisant : $l_0 = |A_0| \geq |A_1| = l_1 \geq ... \geq |A_{t-1}| = l_{t-1}$. λ_k est la relation sur E_k définie par : $\lambda_k = \{(a,a,b,b); (a,b,a,b); (a,b,b,a) : a, b \in E_k\}$.
D'autre part, nous noterons D_h le clone $Pol\theta \bigcap Pol\tau_h^{E_k}$ $(h > 2)$; et noterons D_2 le clone $Pol\theta \bigcap Pol\lambda_k$. En outre, τ_h désignera $\tau_h^{E_k}$ et pour un entier non nul m, nous désignerons par $\underline{m}$ l'ensemble $\{1, ..., m\}$. Enfin Si $a = (a_1, ..., a_m)$ et $b = (b_1, ..., b_m)$ sont deux éléments de E_k^m, par abus nous écrirons $a\theta b$ lorsque $(a_i, b_i) \in \theta$ pour $1 \leq i \leq m$

2.1 Sous clones comparables de $Pol\theta$

Définition 2.1.1 :
Soient F et G deux clones sur E_k.
On dit que F et G sont comparables si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Exemple 2.1.1 :
Le clone $\prod_{E_k}$ des projections sur E_k et le clone O_{E_k} de toutes les opérations finitaires sur E_k sont deux clones comparables . En effet on a : $\prod_{E_k} \subseteq O_{E_k}$.
Pour tout Clone C sur E_k , $\prod_{E_k}$ et C sont comparable. En effet, par définition d'un clone d'opération sur E_k on a : $\prod_{E_k} \subseteq$ C

Théorème 2.1.1 (Burle) *[1] :*
les clones $\langle O_{E_k}^{(1)} \rangle$; $Pol\lambda_k$; $pol\tau_3$; $Pol\tau_4$; ...; $Pol\tau_k$; O_{E_k} sont comparables et vérifient

$$\langle O_{E_k}^{(1)} \rangle \subseteq Pol\lambda_k \subseteq Pol\tau_3 \subseteq Pol\tau_4 \subseteq ... \subseteq Pol\tau_k \subseteq O_{E_k}$$

Ce sont les seules clones de O_{E_k} contenant $O_{E_k}^{(1)}$.

Corollaire 2.1.1 :

$\langle Pol^{(1)}\theta\rangle \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq ... \subseteq D_k \subseteq Pol\theta$

Preuve:

D'après le théorème de **Burle** on a : $\langle O^{(1)}_{E_k}\rangle \subsetneqq Pol\lambda_k \subsetneqq Pol\tau_3 \subseteq pol\tau_4 \subseteq ... \subseteq Pol\tau_k \subseteq O_{E_k}$.

Il s'ensuit que :

$Pol\theta \cap \langle O^{(1)}_{E_k}\rangle \subseteq Pol\theta \cap Pol\lambda_k \subseteq Pol\theta \cap Pol\tau_3 \subseteq Pol\theta \cap Pol\tau_4 \subseteq ... \subseteq Pol\theta \cap Pol\tau_k \subseteq Pol\theta \cap O_{E_k}$

. D'où $\langle Pol^{(1)}\theta\rangle \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq ... \subseteq D_k \subseteq Pol\theta$ ■

Ce corollaire nous suggère la question naturelle suivante :

D_k **est-il un clone sous maximal de** $Pol\theta$?

la réponse va venir du Lemme 14.10.8 de [6] dans laquelle l'auteur montre que,

si $E_3 = \{a, b, c\}$ et θ est une relation d'équivalence avec pour classe :

$A_0 = \{a, b\}$ et $A_1 = \{c\}$ alors $Pol\theta$ a 13 classes maximales et D_3 n'est pas membre de cette liste.

En outre, pour $\sigma := \{(a, b, c) \in E_3 : a\theta b; |\{a, b, c\}| \leq 2\}$.

On montre que que $D_3 \subseteq Pol\sigma$ et que l'opération ternaire f définit sur E_3 par :

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } (a, a, a)\theta x \\ b & \text{si } (a, c, a)\theta x \\ c & \text{ailleurs} \end{cases}$$

préserve σ et n'appartient pas à D_3. D'où $D_3 \subsetneq pol\sigma$. par ailleurs, $Pol\sigma \subseteq Pol\theta$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, soit f $\in Pol^{(n)}\sigma$.

Soit $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in \theta$, on a $(a_1, b_1, b_1), ..., (a_n, b_n, b_n) \in \sigma$

comme f $\in Pol^{(n)}\sigma$ alors $(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \sigma$ par suite, par définition de σ, il s'ensuit que :$(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)) \in \theta$ ie $f \in Pol\theta$.

Nous pouvons donc conclure que D_k **n'est pas un clone sous maximal de** $Pol\theta$

Dès lors, le but de notre travail consistera à chercher les clones sous maximaux de $Pol\theta$ contenant D_k.

Cependant, nous commencerons notre investigation par quelques notations dont nous ferons usage dans la suite :

Notation :

on pose $M := \{l_i : 1 \leq i \leq t-1\}$ on suppose que $M = \{m_1, ..., m_q\}$ avec $m_1 > m_2 > ... > m_q$.

Nous définissons la suite $(T_i)_{0\leq i\leq q}$ par : $\begin{cases} T_0 := l_0 \\ T_i := \sum\limits_{l_p \geq m_i} l_p \quad \text{pour } 1 \leq i \leq q \end{cases}$

En particulier on a : $T_q = k$.

D'autre part considérons la suite $(S_i)_{0\leq i\leq t-1}$ définie par :

$S_i := l_0 + ... + l_i$. En particulier nous avons $S_{t-1} = k$.

Si $h > l_0$, alors posons : $m := max\{i \in E_t : S_i \leq h\}$. Nous désignerons par ε_h la relation d'équivalence sur $\{1, ..., h\}$ satisfaisant les propriétés suivante :

(i) Si $h < l_0$ alors la seule classe de ε_h est $\pi_0 = \{1, ..., h\}$

(ii) Si $h = S_m$ alors ε_h admet $m+1$ classes qui sont :

$\pi_0 = \{1, ..., S_0\}$, $\pi_1 = \{S_0+1, ..., S_1\}$,... et $\pi_m = \{S_{m-1}+1, ..., h\}$.

(iii) Si $h > S_m$ alors ε_h admet $m+2$ classes qui sont :

$\pi_0, \pi_1, ..., \pi_m$ du cas (ii) et $\pi_{m+1} = \{S_m+1, ..., h\}$.

Soit $n \geq 2$ un entier,désignons par ρ_n la relation définie sur E_k par :

$$\rho_n := \{(a,a,b,b)(a,b,a,b)(a,b,b,a) : (a,b) \in \theta\} \text{ Si n=2}$$

et

$$\rho_n := \{(a_1, ..., a_n) \in \tau_n : (i,j) \in \varepsilon_n \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta\} \text{ si n>2.}$$

Lemme 2.1 :

Pour $n \geq 2$, $Pol\rho_n$ est un sous clone de $Pol\theta$.

Preuve:

☞ Pour $n = 2$.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in Pol\rho_n \cap O^{(m)}_{E_k}$. Soient $(a_1,b_1);...;(a_m,b_m) \in \theta$. Par définition de ρ_2 on a : $(a_1,b_1,a_1,b_1);...;(a_m,b_m,a_m,b_m) \in \rho_2$. Mais, $f \in Pol\rho_n \cap O^{(m)}_{E_k}$.

Par conséquent : $(f(a_1,...,a_m), f(b_1,...,b_m), f(a_1,...,a_m), f(b_1,...,b_m)) \in \rho_2$.

De ce fait, par définition de ρ_2, il vient que $(f(a_1,...,a_m), f(b_1,...,b_m)) \in \theta$ ce qui montre que $f \in pol\theta$

☞ Pour le cas $n \geq 2$ la preuve est analogue. ∎

Toutefois, pour caractériser ce clone $Pol\rho_n$, qui occupe une place centrale dans notre travail, nous allons introduire quelques sous ensemble de O_{E_k}.

Définition 2.1.2 :

Soient n, q des entiers positifs, soit f une opération n-aire et soit A une partie de E_k^n

(i) *On dit que f est essentiellement unaire sur A, lorsqu'il existe une opération h sur E_k,*

$j \in \{1, ..., n\}$ tels que $f(a) = (hoe_j^n)(a)$ pour tout $a \in A$

(ii) *On dit que f est essentiellement dépendent d'au moins deux variables sur A, si f n'est pas essentiellement unaire sur A*

(iii) *On dit que f a q valeurs distincts deux à deux sur A, s'ils existent $a_1, ..., a_q \in A$ tels que pour $1 \leq i < j \leq q$, $f(a_i) \neq f(a_j)$.*

Définition 2.1.3 :

Soit $h \geq 3$ un entier et n un entier non nul.

Soit $C := (c_1, ..., c_h) \in (E_k^n)^h$ avec $c_i = (c_{i1}, ..., c_{in})$ pour $1 \leq i \leq h$.

(i) *On dit que l'opération n-aire sur E_k f, est essentiellement unaire sur C, lorsque, f est essentiellement unaire sur $\{c_1, ..., c_h\}$*

(ii) *On dit que C satisfait la propriété $(\alpha_{h,n})$ lorsque :*

pour tout $(i,j) \in \epsilon_h$, $c_i \theta c_j$ et pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $(c_{1j}, ..., c_{hj}) \in \tau_h$

Soit A une partie de E_k^n, nous désignons par A_θ l'ensemble de tous les $b \in E_k^n$ pour lesquels il existe a $\in A$, tel que $b\theta a$

Lemme 2.2 :

soit $h \geq 3$, soient f une opération n-aire de $Pol\theta$ et C satisfaisant la propriété $(\alpha_{h,n})$. Si f est essentiellement dépendent d'au moins deux variables sur C_θ et a q valeurs distinctes deux à deux sur C_θ alors, il existe $r_1, ..., r_n \in \rho_h$ tels que $f(r_1, ..., r_n) \in E_k^q - \rho_h$

Preuve:

Elle est similaire à la preuve du théorème 1.4.4 de [6] pages 161 ∎

A présent, nous allons énoncer un théorème qui nous permet de caractériser les polymorphismes de ρ_h pour $h = 3, 4, ..., k$.

Soient n$\in \mathbb{N}$, f $\in O_{E_k}^n$. Soit h $\in \{3, 4, ..., k\}$, V_h est l'ensemble des fonctions de $Pol\theta$ tels que pour tout $C = (c_1, ..., c_h) \in (E_k^n)^h$ satisfaisant la propriété $(\alpha_{h,n})$:

f est essentiellement unaire sur C_θ ou $|\{f(c), c \in C_\theta\}| \leq h - 1$.

Théorème 2.1.2 *:*

Nous avons $V_h = pol\ \rho_h$ pour $h = 3, 4, ..., k$.

Preuve:

Nous allons établir ce résultat par double inclusion

✍

$\boxed{\text{Premièrement montrons que } V_h \subseteq Pol\rho_h.}$

Soit f une opération n-aire de V_h et soit $r_1 := (r_{11}, ..., r_{h1}), ..., r_n := (r_{1n}, ..., r_{hn}) \in \rho_h$ alors $c = (c_1, ..., c_h)$ où $c_i = (r_{i1}, ..., r_{in})$ satisfait la propriété $(\alpha_{h,n})$. D'où f est essentiellement unaire sur C_θ ou $|\{f(c), c \in C_\theta\}| \leq h - 1$.

-Si f est essentiellement unaire sur C_θ, alors $(f(c_1), ..., f(c_h)) = r_i$ pour un certains $i \in \{1, ..., n\}$ appartient à ρ_h.

-Sinon, alors $|\{f(c_1), ..., f(c_h)\}| \leq h - 1$. ainsi c'est un élément de ρ_h.

Par conséquent f $\in Pol\rho_h$

✍

Deuxièmement montrons que : $Pol\rho_h \subseteq V_h$.

Pour le faire, nous allons raisonner par l'absurde.

Soit f $\in Pol\rho_h$ tels que $f \notin V_h$. Alors, il existe C satisfaisant la propriété $(\alpha_{h,n})$ tel que f ne soit pas essentiellement unaire sur C_θ et admet h valeurs distinctes deux à deux sur C_θ. Par le **Lemme 2.1** , nous concluons que f ne préserve pas ρ_h . Ce qui contredit le fait que f $\in Pol\rho_h$. ∎

A présent, nous allons énoncer un théorème qui met en évidence quelques chaines de l'intervalle $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$

Théorème 2.1.3 *:*

Nous avons les chaines suivantes :

(i) Pour $h \in \underline{k} - \{1\}$ on a :

$Pol\theta \cap Pol\tau_h = Pol\tau_h \cap Pol\rho_h \subsetneq Pol\tau_{h+1} \cap Pol\rho_h \subsetneq ... \subsetneq Pol\tau_k \cap Pol\rho_h \subsetneq Pol\rho_h$

(ii) $< Pol^{(1)}\theta > \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq ... \subsetneq Pol\rho_{S_0} \subsetneq Pol\theta$

(iii) Pour $i \in E_t - \{0\}$ $Pol\rho_{S_{i-1}+1} \subsetneq Pol\rho_{S_{i-1}+2} \subsetneq ... \subsetneq Pol\rho_{S_i} \subsetneq Pol\theta$

Preuve:

(i) Soit $h \geq 2$ .D'après le théorème de **Burle** on a :

$Pol\theta \cap Pol\tau_h = Pol\tau_h \cap Pol\rho_h \subseteq Pol\tau_{h+1} \cap Pol\rho_h \subseteq ... \subseteq Pol\tau_k \cap Pol\rho_h \subseteq Pol\rho_k \cap Pol\rho_h \subseteq Pol\rho_h$.

Soient $m \in \{h, h+1, ..., k\}$ et $a, b \in E_k$ tels que $(a, b) \notin \theta$. Soient $u_1, ..., u_m$ m éléments deux à deux distincts de E_k .

Pour $1 \leq i \leq m$, posons : $a_i := (a_{i1}, ..., a_{im})$ avec :

$$a_{ij} = \begin{cases} b & \text{si } j = i \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons l'opération f_1 d'arité m définie sur E_k par :

$$f_1(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x\theta a_i \text{ pour un certains i tel que } 1 \leq i \leq l \\ u_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme f est constante sur le produit des classes de θ alors on a : $f_1 \in Pol\rho_h$.

D'autre part comme $|Imf_1| = m$, il s'ensuit que $f_1 \in Pol\tau_{m+1}$ et $f_1 \notin Pol\tau_m$.

(ii) Comme $Pol^{(1)}\theta \subseteq Pol\rho_2$ alors $\langle Pol^{(1)}\theta\rangle \subseteq Pol\rho_2$. Cependant considérons l'opération binaire f_2 définie sur E_k par :

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\theta y \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

par définition de f_2, on a $f_2 \in Pol\rho_2$ Toutefois f_2 n'est pas essentiellement unaire.

Par conséquent,$\langle Pol^{(1)}\theta\rangle \subsetneq Pol\rho_2$.

Par ailleurs, le fait que : $\rho_3 := \{(a,b,c,d) \in E_k^3 : \exists d \in E_k \wedge (a,b,c,d) \in \rho_2\}$, nous pouvons conclure que $Pol\rho_2 \subseteq Pol\rho_3$.

Cependant, notons que cette inclusion est stricte. En effet, soit $(a,b) \in \theta$ tel que $a \neq b$.

Considérons l'opération binaire g_1 définis sur E_k par :

$$g_1(x,y) = \begin{cases} a & \text{si } (x,y) \in \{(a,a),(a,b),(b,a)\} \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $g_1 \in Pol\rho_3$ et $g_1 \notin Pol\rho_2$.

D'où $Pol\rho_2 \subsetneq Pol\rho_3$.

Soit $h \in \{3,...,S_0 - 1\}$.

Pour montrer que $Pol\rho_h \subsetneq Pol\rho_{h+1}$, il suffit de montrer que $V_h \subsetneq V_{h+1}$.

Dés lors, soit $f \in V_h \cap O_{E_k}^{(m)}$ et $C := (c_1,...,c_{h+1}) \in (E_k^n)^{h+1}$ satisfaisant la propriété $(\alpha_{h+1,n})$.

Alors $C' := (c_1,...,c_h)$ satisfait la propriété $(\alpha_{h,n})$ et on a : $C_\theta = C'_\theta$.

De ce fait $f \in V_{h+1}$. Il reste à établir que l'inclusion est stricte.

Dés lors Soient $a,b \in E_k$ tel que $(a,b) \in \theta$ et $a \neq b$. Soient $u_1;...;u_h$, h éléments deux à deux distincts de A_0 . Pour $1 \leq i \leq h$, posons $a_i := (a_{i1},...,a_{ih})$ avec :

$$a_{ij} = \begin{cases} b & \text{si } i = j \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons l'opération f_3 d'arité h définie sur E_k par :

$$f_3(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x = a_i \text{ pour un certains i tel que } 1 \le i \le h \\ \\ u_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $f_3 \in V_{h+1}$.

D'autre part, comme $Imf_3 \subseteq A_0$ et $|Imf_3| = h$ alors $f_3 \notin V_h$.

Cependant, pour $h = S_0$ on a $f_3 \notin V_{S_0}$.

D'autre part on a $f_3 \in Pol\theta$, il s'ensuit que $Pol\rho_{S_0} \subsetneq Pol\theta$.

(iii) Soient $i \in E_t - \{0\}$ et $h \in \underline{S_i} - \underline{S_{i-1}}$ tel que $h \neq S_0$. Pour montrer que $Pol\rho_h \subsetneq Pol\rho_{h+1}$ il suffit de montrer que $V_h \subsetneq V_{h+1}$.

Dés lors soient $f \in V_h \cap O^{(n)}_{E_k}$ et $C := (c_1, ..., c_{h+1}) \in (E^n_k)^{h+1}$ satisfaisant la propriété $(\alpha_{h+1,n})$ alors $C' := (c_1, ..., c_h)$ satisfait la propriété $(\alpha_{h,n})$ et $C_\theta = C'_\theta$. De ce fait, $f \in V_{h+1}$ .Il reste à établir que l'inclusion est stricte. Pour $i \in E_t$, si $|A_i| = 1$ alors choisissons $a_i, b_i \in A_i$ tel que $a_i = b_i$. Sinon choisissons $a_i, b_i \in A_i$ tel que $a_i \neq b_i$.

Soient $u_1, ..., u_h$ h éléments deux à deux distincts de E_k satisfaisant $(i, j) \in \varepsilon_h \Longrightarrow u_i\theta u_j$.

Pour $1 \le i \le h$, posons $a_i := (a_{i1}, ..., a_{ih})$ avec :

$$a_{ij} = \begin{cases} b_0 & \text{si } i = j \in \underline{S_0} \\ \\ b_m & \text{si } i = j \in \underline{S_{m-1}} \\ \\ a_m & \text{si } i \neq j \text{ et } (i, j) \in (\underline{S_m} - \underline{S_{m-1}})^2 \\ \\ a_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Notons que la matrice $M := (a_{ij})$ est symétrique .

Considérons l'opération f_4 d'arité h définie sur E_k par :

$$f_4(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x = a_i \\ \\ u_{\sigma x} & \text{si } x \notin \{a_i : 1 \le i \le h\} \text{ et } x\theta a_j \text{ pour un certain } j \\ \\ u_1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $\sigma(x) := min\{j : x\theta a_j\}$.

Le fait que, $f_4 \in Pol\theta$ et $|Imf_4| = h$, nous pouvons conclure que : $f_4 \in V_{h+1}$.

Par ailleurs on a $f_4 \notin V_h$. Cependant, pour $h = S_i$ on a $f_4 \notin V_{S_i}$ et $f_4 \in Pol\theta$.

Par conséquent, $Pol\rho_{S_i} \subsetneq Pol\theta$. ■

2.2 Sous clones incomparables de $Pol\theta$

Définition 2.2.1 :

Soient F et G deux clones sur E_k.

On dit que F et G sont incomparables si $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$.

A présent, nous allons énoncer un résultat qui caractérisé les entiers u et v pour lesquels les clones $Pol\rho_u$ et $Pol\rho_v$ sont incomparables

Théorème 2.2.1 :

soient $i, j \in E_t$ tels que $i < j$ et $S_i, S_j \in T_{l+1} - T_l$ pour un certain l tel que $0 \leq l \leq q-1$ soient m,n deux entiers tels que : $0 \leq m, n < m_{l+1}$.

Si $S_i + m, S_j + n \in T_{l+1} - T_l$ alors $Pol\rho_{S_i+m}$ et $Pol\rho_{S_j+m}$ sont incomparables.

Preuve:

Nous allons établir le résultat pour $m = 0$ et $n = 1$. Pour les autres cas, ils se déduisent de façon analogue . De ce fait montrons donc que $Pol\rho_{S_i}$ et $Pol\rho_{s_j+1}$ sont incomparables.

Soit $a \notin \bigcup\limits_{l_i \geq m_l+1} A_i$. Considérons l'opération binaire h_1 définie sur E_k par :

$$h_1(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } \bigcup\limits_{l_p \geq m_l+1} A_p^2 \\ & \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $h_1 \in Pol\rho_{S_i}$ et $h_1 \notin Pol\rho_{s_j+1}$.

D'autre part, soit $a_0 \in A_0$, Considérons l'opération binaire h_2 définie sur E_k par :

$$h_2(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } (x,y) \in \bigcup\limits_{0 \leq p \leq i} A_{p-1}^2 \\ & \\ y & \text{si } (x,y) \in A_i^2 \\ & \\ a_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a $h_2 \in Pol\rho_{S_j+1}$ et $h_2 \notin Pol\rho_{S_i}$ ∎

Corollaire 2.2.1 :

Soient i,j $\in E_t$ tels que $i < j$ et $S_i, S_j \in \underline{T_{l+1}} - \underline{T_l}$ pour un certain l tels que : $0 \leq l \leq q-1$.

Soient m, n 2 entiers tels que $0 \leq m, n \leq m_{l+1}$. Soit $h \in \underline{k} - \{1, S_i + m, S_j + n\}$.

Si $S_i + m, S_j + n \in \underline{T_{l+1}} - \underline{T_l}$ alors $Pol\rho_h \cap Pol_{S_i+m}$ et $Pol\rho_h \cap Pol\rho_{S_j+n}$ sont incomparables.

Preuve:

Elle est similaire à la preuve du théorème précédent . ∎

L'exemple suivant nous montre que les clones de la forme $Pol\rho_n$ ne sont pas les seuls sous clones de $Pol\theta$ contenant $Pol^{(1)}\theta$. Nous utiliserons l'application $\varphi : E_k \longrightarrow E_t$ définie par :$\varphi(x) = i$ si $x \in A_i$ pour définir quelques relations.

Exemple 2.2.1 :

Considérons l'ensemble $E_4 := \{0,1,2,3\}$ et la relation d'équivalence θ sur E_4 ayant pour classes d'équivalence : $A_0 := \{0,1,2\}$ et $A_1 := \{3\}$.

Soit ρ' la relation d'arité 4 définie par :

$\rho' := \{(a,b,c,d) \in E_4 : (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d) \in \lambda_2\}$. On a $\langle Pol^{(1)}\theta\rangle \subseteq Pol\rho'$.

Soit f l'opération d'arité 3 définie sur E_4 par :

$f(1,0,0) := 0; f(0,1,0) := 1; f(0,0,1) := 2; f(3,y,z) = 3$ pour $y,z \in E_4$

et $f(x,y,z) := 0$ ailleurs . On a $f \in Pol\rho'$.

En effet, soient $(x_1,y_1,z_1,t_1); (x_2,y_2,z_2,t_2); (x_3,y_3,z_3,t_3) \in \rho'$.

Posons $X := (x_1,x_2,x_3); Y := (y_1,y_2,y_3); Z := (z_1,z_2,z_3); T := (t_1,t_2,t_3)$.

Si $3 \notin \{x_1,y_1,z_1\}$ alors $t_1 \in A_0$ et dans ce cas nous avons :

$(f(X), f(Y), f(Z), f(T)) \in A_0^4 \subseteq \rho'$

Si $3 \in \{x_1,y_1,z_1\}$ alors :

$(x_1,y_1,z_1) \in \Lambda := \{(3,u,v); (3,3,v); (3,u,3); (3,3,3); (u,3,v); (u,v,3); (u,3,3) : u,v \in A_0\}$.

Donc $(f(X), f(Y), f(Z), f(T)) \in \Omega$ avec :

$\Omega := \{(3,a,b,3); (3,3,a,b); (3,a,3,b); (3,3,3,3); (a,3,b,3); (a,b,3,3); (a,3,3,b) : a,b \in A_0\}$.

Cependant, $\Omega \subseteq \rho'$. Il s'ensuit que $f \in Pol\rho'$.

Par ailleurs, comme $f(1,0,0) := 0; f(0,1,0) := 1; f(0,0,1) := 2; f(3,3,3) = 3$, il vient que, $f \notin pol\rho_3$ et $f \notin Pol\rho_4$ où $\rho_3 := \{(a,b,c) \in E_4^3 : \{a,b,c\}^2 \subseteq \theta; |\{a,b,c\}| \leq 2\}$

et $\rho_4 := \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : \{a,b,c,d\}^2 \subseteq \theta; |\{a,b,c,d\}| \leq 2\}$.

De ce fait, $Pol\rho' \nsubseteq Pol\rho_i$.

Notons par ailleurs que : $Pol\rho' \subsetneq Pol\theta$.

En effet, considérons l'opération ternaire g définie sur E_4 par :

$g(1,0,0) := 0; g(0,1,0) := 1; g(0,0,1) := 2; f(3,3,3) = 3$ et $g(x,y,z) = 0$ ailleurs.

Comme g est constante sur le produit des classes de θ, il vient que g $\in Pol\theta$.

Cependant, on a :

$(3,0,0,3); (3,3,0,0) \in \rho'$ et $(g(3,3,3), g(0,3,3), g(0,0,0), g(3,0,0)) = (3,0,0,0) \notin \rho'$.

Ainsi g $\notin Pol\rho'$, donc $Pol\rho' \subsetneq Pol\theta$.

<u>**Moralité :**</u>

Dans cet exemple, nous avons établis que $Pol\rho'$ est un sous clone de $Pol\theta$ contenant l'ensemble des fonction unaire de $Pol\theta$ (ie $Pol^{(1)}\theta$) et que $Pol\rho'$ n'est pas un sous clone de $Pol\rho_i$. Ainsi $Pol\rho'$ est contenu dans un clone sous-maximal de $Pol\theta$ contenant $Pol^{(1)}\theta$. De ce fait dans l'optique d'identifier ce clone sous-maximal, nous allons définir une nouvelle relation.

Soit n $\in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ Dans toute la suite on désignera par : ρ'_n la relation définie sur E_k par :

$$\rho'_n := \{(a,b,c,d) \in E_k^4 : (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)) \in \lambda_t\} \qquad \text{Si } n = 2$$

et

$$\rho'_n := \{(a_1, ..., a_n) \in E_k^n : (\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n)) \in \tau_n^{E_t}\} \qquad \text{Si } n > 2$$

Posons :

$$\Gamma_n := \{(a_1, ..., a_n) \in E_k^n : (a_i, a_j) \in \theta \quad \text{pour certains i,j tels que} \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

Par définition de Γ_n on a $\Gamma_n \subseteq Pol\rho'_n$ pour $n > 2$.
Dès lors, quand $n > t$ (ie quand n est supérieur aux nombres de classe d'équivalence t de θ) on a : $\rho'_n = E_k^n$

Lemme 2.3 :

$Pol\rho'_2 \subsetneq Pol\theta$ et pour $n > 2$ $Pol\rho'_n \nsubseteq Pol\theta$.

Preuve:

☞ Montrons que $Pol\rho'_2 \subsetneq Pol\theta$.
Soient m $\in \mathbb{N}$, $f \in Pol^{(m)}\rho'_2$, $(a_1, b_1), ..., (a_m, b_m) \in \theta$.
Alors $(a_1, b_1, b_1, b_1), ..., (a_m, b_m, b_m, b_m) \in \rho'_2$. De ce fait, comme $f \in Pol^{(m)}\rho'_2$ on a :
$(f(a_1, ..., a_m), f(b_1, ..., b_m), f(b_1, ..., b_m), f(b_1, ..., b_m)) \in \rho'_2$.
Par conséquent, $(f(a_1, ..., a_m), f(b_1, ..., b_m)) \in \theta$. Donc, $Pol\rho'_2 \subseteq Pol\theta$.
Justifions à présent que cette inclusion est stricte.
Soit a $\in A_0$ et $c \in A_1$ Considérons l'opération ternaire h définie sur E_k par :

$$h(x,y,z) = \begin{cases} c & \text{si } x,y,z \in A_1 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $h \in Pol\theta$.

Cependant, $(c,a,a,c); (c,c,a,a) \in \rho'_2$ et nous avons :
$(h(c,c,c); h(a,c,c); h(a,a,a); h(c,a,a)) = (c,a,a,a) \notin \rho'_2$.

D'où $Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta$.

☞ Pour conclure justifions que pour $n > 2$ $Pol\rho_n' \nsubseteq Pol\theta$. Considérons l'opération binaire h' définie par :

$$h(x,y) = \begin{cases} a & \text{si } (x,y) = (a,a) \\ c & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $h' \in Pol\rho_n'$ et $h' \notin Pol\theta$.

Par conséquent, $Pol\rho_n' \nsubseteq Pol\theta$ ■

Avant la description de ces clones, nous allons définir quelques sous ensembles de O_{E_k}.

Soit h $\in \{3,4,...,k\}$, W_h est l'ensemble des opérations $f \in Pol^n\theta$ tels que :

pour tout $C = (c_1,...,c_h) \in (E_k^n)^h$,$|\{j \in E_t : f(c_\theta) \cap A_j \neq \theta\}| \leq h-1$ ou il existe $i \in \{1,...,n\}$ de sorte que $\forall x,y \in c_\theta$, $(x_i\theta y_i \Longrightarrow f(x)\theta f(y))$

Lemme 2.4 :

On a : $W_h = Pol\rho_h' \cap Pol\theta$ pour $h = 3,4,...,k$

Preuve:

☞ Premièrement nous allons montrer que $W_h \subseteq Pol\rho_h'$.

Soient $f \in W_h \cap O_{E_k}^{(n)}$, $r_1 := (r_{11},...,r_{h1}),...,r_n := (r_{1n},...,r_{hn}) \in \rho_h'$ et $C := (c_1,...,c_h)$ où $c_i := (r_{i1},...,r_{in})$. Alors, comme f $\in W_h$ on a :

$|\{j \in E_t : f(C_\theta) \cap A_j \neq\}| \leq h-1$ ou il existe $i \in \{1,...,n\}$ tel que :

$\forall x,y \in C_\theta, x_i\theta y_i \Longrightarrow f(x)\theta f(y)$.

Il s'ensuit dés lors que : il existe $p,q \in \{1,...,-h\}$, $p \neq q$ de sorte que $f(c_p)\theta f(c_q)$.

Par conséquent $f(r_1,...,r_n) = (f(c_1),...,f(c_h)) \in \rho_h'$ Donc $f \in Pol\rho_h'$.

☞ Deuxièmement pour conclure nous allons établir l'inclusion inverse $Pol\rho_h' \subseteq W_h$. Pour le faire nous allons raisonner par l'absurde.

Soit f $\in Pol\rho_h'$, supposons que $f \notin W_h$ alors il existe $C \in (E_k^n)^h$ tel que pour tout $i \in \{1,...,n\}$ il existe $x,y \in C_\theta$ avec $x_i\theta y_i$ et $(f(x),f(y)) \notin \theta$ et $|\{j \in E_t : f(C_\theta) \cap A_j\}| = h$. Dés lors par une approche similaire à celle de la preuve du lemme 2.1 ,il s'ensuit $f \notin Pol\rho_h'$. Ce qui contredit le fait que $f \in Pol\rho_h'$. Ainsi $Pol\rho_h' \subseteq W_h$ ■

Définition 2.2.2 :

Une opération n-aire f sur E_k préserve relativement θ s'il existe $i \in \{1,...,n\}$ tels que pour tout $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in E_k^n$ $x_i\theta y_i \Longrightarrow f(x)\theta f(y)$.

Notation :

On désigne par B' l'ensemble des opérations préservant relativement θ.

Lemme 2.5 :

B' est un clone d'opération sur E_k

Preuve:

☞ On a $\prod_{E_k} \subseteq B'$.

En effet, soit $e_p^j \in \prod_{E_k}$. Soient $x = (x_1, ..., x_p)$, $y = (y_1, ..., y_p) \in E_k^p$

On a : $e_p^j(x) = x_j$ et $e_p^j(y) = y_j$. Ainsi si $x_j \theta y_j$ alors $e_p^j(x)\theta e_p^j(y)$. Par suite $e_p^j \in B'$.

D'où $\prod_{E_k} \subseteq B'$.

☞ B' est fermé pour la composition.

En effet, soit f $\in O_{E_k}^{(m)} \cap B'$. Soient $g_1, ..., g_m \in O_{E_k}^{(n)} \cap B'$.

Comme $f \in B'$ alors il existe $i \in \{1, ..., m\}$ tel que :

pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in E_K^n$,

on ait $g_i(x)\theta g_i(y) \Longrightarrow f(g_1(x), ..., g_m(x))\theta f(g_1(y), ..., g_m(y))$.

Cependant, comme $g_i \in B'$ alors il existe $j_i \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_{j_i}\theta y_{j_i} \Longrightarrow g_i(x)\theta g_i(y)$.

Par conséquent, il existe $j_i \in \{1, ..., n\}$ tel que :

$x_{j_i}\theta y_{j_i} \Longrightarrow f(g_1(x), ..., g_m(x))\theta f(g_1(y), ..., g_m(y))$

D'où B' est fermé pour la composition. ∎

Théorème 2.2.2 :

Nous avons les chaines suivantes :

(i) $< Pol^{(1)}\theta > \subsetneqq B' \subsetneqq Pol\rho_2' \subsetneqq Pol\theta \cap Pol\rho_3' \subsetneqq ... \subsetneqq Pol\theta \cap Pol\rho_t' \subsetneqq Pol\theta$

(ii) Pour $h \in \{2, ..., t\}$, $< Pol^{(1)}\theta > \subsetneqq Pol\rho_2 \cap Pol\rho_h' \subsetneqq ... \subsetneqq Pol\rho_{S_0} \cap Pol\rho_h' \subsetneqq Pol\theta \cap Pol\rho_h'$

(iii) Pour $i \in E_t - \{0\}$ *et* $h \in \{2, ..., t\}$,

$Pol\rho_{S_{i-1}+1} \cap Pol\rho_h' \subsetneqq Pol\rho_{S_{i-1}+2} \cap Pol\rho_h' \subsetneqq ... \subsetneqq Pol\rho_{S_i} \cap Pol\rho_h' \subsetneqq Pol\theta \cap Pol\rho_h'$.

(iv) Pour $h \in \underline{k} - \{1\}$ *et h'* $\in \{2, ..., t\}$, $Pol\rho_h \cap Pol\rho_{h'}' \subsetneqq Pol\rho_h \cap Pol\rho_{h'+1}'$.

Preuve:

(i) Comme $Pol^{(1)}\theta \subseteq Pol\rho_2'$ alors on a $\langle Pol^{(1)}\theta \rangle \subseteq Pol\rho_2'$.

Soit $(a, b) \in \theta$ tel que $a \neq b$, alors considérons l'opération binaire f définie sur E_k par :

$$f(x, y) = \begin{cases} a & \text{si } (x, y) \in \{(a, a), (a, b), (b, a)\} \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $f \in Pol\rho_2'$ en outre f n'est pas essentiellement unaire . D'où $\langle Pol^{(1)}\theta \rangle \subsetneq Pol\rho_2'$.

D'autre part, le fait que $\rho_3' := \{(a, b, c) \in E_k^3 : \exists d \in E_k, (a, b, c, d) \in \rho_2'\}$

Nous pouvons conclure que $Pol\rho_2' \subseteq Pol\rho_3'$.

Soit $(a,b) \notin \theta$. Considérons l'opération binaire g défini sur E_k par :

$$g(x,y) = \begin{cases} a & \text{si } (x,y)\theta u \text{ avec } u \in \{(a,a),(a,b),(b,a)\} \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $g \in Pol\rho_3' \cap Pol\theta$ et $g \notin Pol\rho_2'$ Par conséquent, $Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta \cap Pol\rho_3'$.

Soit $h \in \{3,...,t-1\}$ nous allons montrer que $Pol\theta \cap Pol\rho_h' \subsetneq Pol\theta \cap Pol\rho_{h+1}'$

Pour le faire, il suffit de montrer que : $W_h \subsetneq W_{h+1}$.

Soient $f \in W_h \cap O_{E_k}^n$, $C := (c_1,...,c_{h+1}) \in (E_k^n)^{(h+1)}$ tel que $|\{i \in E_t : f(C_\theta) \cap A_i \neq \varnothing\}| = h+1$ alors pour $C' := (c_1,...,c_h)$ et $C" := (c_1,...,c_{h-1},c_{h+1})$.

Nous avons : $|\{i \in E_t : f(C_\theta') \cap A_i \neq \varnothing\}| = |\{i \in E_t : f(C"_\theta) \cap A_i \neq \varnothing\}| = h$.

Donc $C_\theta' \cap C"_\theta \neq \varnothing$. De ce fait il existe $j \in \{1,...,n\}$ tel que :

$\forall x,y \in C_\theta, x_i\theta y_i \Longrightarrow f(x)\theta f(x)$ .Par conséquent $f \in W_{h+1}$. Dés lors il reste à établir que l'inclusion est stricte.

Soient $a,b \in E_k$ de sorte que $(a,b) \notin \theta$ .Considérons $u_1,...,u_h$ h éléments deux à deux distincts de classes de θ .

Pour $1 \leq i \leq h$, posons $a_i := (a_{i1},...,a_{ih})$ où :

$$a_{ij} = \begin{cases} b & \text{si } i = j \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons l'opération f définie sur E_k par :

$$f(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x\theta a_i \text{ pour un certain i tel que } 1 \leq i \leq h \\ u_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $f \in W_{h+1}$. En outre, le fait que $|\{i \in E_t : Imf \cap A_i \neq \varnothing\}| = h$, implique que $f \notin W_h$. Par conséquent, $W_h \subsetneq W_{h+1}$.

Dés lors, pour $h = t$, on a : $f \notin W_t$. Or $f \in \theta$. il s'ensuit que : $Pol\theta \cap Pol\rho_t' \subsetneq Pol\theta$.

(ii) Soient $h \in \{2,...,t\}$ et $(a,b) \in \theta$ tel que $a \neq b$. Alors considérons l'opération binaire h définie sur E_k par :

$$h(x,y) = \begin{cases} a & \text{si } (x,y) \in \theta \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Par définition de h, nous avons $h \in Pol\rho_2 \cap Pol\rho_h'$. Toutefois, notons que h n'est pas essentiellement unaire . De ce fait, $\langle Pol^{(1)}\theta\rangle \subseteq Pol\rho_2 \cap Pol\rho_h'$. Rappelons par ailleurs que, $f \in Pol\rho_3 \cap Pol\rho'_h$. En outre, $f \notin Pol\rho_2$ (En effet, $(a,a,b,b);(a,b,a,b) \in \rho_2$ et $f((a,a,b,b)(a,b,a,b)) \notin \rho_2$) Par suite $Pol\rho_2 \cap Pol\rho'_h \subsetneq Pol\rho_3 \cap Pol\rho'_h$.

Soit $h' \in \{3,...,S_0-1\}$ en remplaçant h par h' dans la définition de l'opération $h-aire$ de la preuve de (ii) du théorème 2.1.3 nous obtenons une fonction préservant $\rho_{h'+1}$ et ρ'_h . Cependant , elle ne préserve pas ρ_h. Par conséquent, $Pol\rho'_h \cap Pol\rho'_h \subsetneq Pol\rho_{h'+1} \cap Pol\rho'_h$ et $Pol\rho_{S_0} \cap Pol\rho'_h \subseteq Pol\theta \cap Pol\rho'_h$

(iii) Soient $i \in E_t - \{0\}$, $h \in \{2,...,t\}$ et $p \in \{1,...,S_i - Si-1-1\}$.

Comme $V_{S_{i-1}+p} \subsetneq V_{S_{i-1}+p+1}$ alors $Pol\rho_{S_{i-1}+p} \cap Pol\rho'_h \subseteq Pol\rho_{S_{i-1}+p+1} \cap Pol\rho'_h$.

Pour $i \in E_t$, si $|A_i| = 1$ alors choisissons $a_i, b_i \in A_i$ tels que $a_i = b_i$. Sinon choisir $a_i \neq b_i$.

D'autre part, soient $u_1,...,u_l$ l éléments deux à deux distincts de E_k (où $l := S_{i-1}+p$) satisfaisant : $(i,j) \Longrightarrow u_i\theta u_j$.

Supposons $|A_0| > 2$ alors pour $1 \leq i \leq l$ posons $a_i := (a_{1i},...,a_{li})$ avec :

$$a_{ji} = \begin{cases} b_0 & \text{si } j = i \in \underline{S_0} \\ b_m & \text{si } j = i \in \underline{S_m} - \underline{S_{m-1}} \\ a_m & \text{si } j \neq i \text{ et } j \in \underline{S_m} - \underline{S_{m-1}} \\ a_0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Par définition des $(a_i)_{1\leq i\leq l}$ on a $a_1,...,a_l \in \rho_l$. Soit $i \in \{1,...,l\}$ posons $y_i := (a_{i1},...,a_{il})$. Considérons l'opération f d'arité l définie sur E_k par :

$$f(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x = y_i \\ u_{\sigma(x)} & \text{si } x \notin \{y_i : 1 \leq i \leq h\} \text{ et } x_1\theta y_{j1} \text{ pour un certain } j_1 \\ u_1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $\sigma(x) = min\{j : x_1\theta y_{j1}\}$

Comme $f \in Pol\theta$ et $|Imf| = h$ alors $f \in V_{h+1}$. Cependant, $f \notin V_h$. Par conséquent, $f \in Pol\rho'_2$ donc $f \in Pol\rho'_h$

Maintenant, nous allons supposer que $|A_0| = 2$. Alors pour $i \in \{1,2\}$ posons $a_i := (a_{1i},...,a_{li})$ où :

$$a_{j1} = \begin{cases} a_1 & \text{si } j = 3 \\ b_1 & \text{si } j = 4 \\ a_m & \text{si } j > 4 \text{ et } j \in \underline{S_m} - \underline{S_{m-1}} \\ b_m & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$a_{j2} = \begin{cases} a_0 & \text{si } j \in \{1,3,4\} \\ b_0 & \text{si } j = 2 \\ a_m & \text{si } j \in \underline{S_m} - \underline{S_{m-1}} \text{ pour un certain j pair} \\ b_m & \text{si } j \in \underline{S_m} - \underline{S_{m-1}} \text{ pour un certain j impair} \end{cases}$$

On a $a_1; a_2 \in \rho_l$

Pour $1 \leq i \leq l$, posons $y_i := (a_{i1}; a_{i2})$ et considérons l'opération f d'arité l définie sur E_k par :

$$f(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x = y_i \text{ pour un certain i tel que } 1 \leq i \leq h \\ u_{\sigma(x)} & \text{si } x \notin \{y_i : 1 \leq i \leq h\} \text{ et } x_1\theta y_{j1} \text{ pour un certain } j_1 \\ u_1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $\sigma(x) = min\{j : x_1\theta y_{j1}\}$

Comme $f \in Pol\theta$ et $|Imf| = h$ alors $f \in V_{h+1}$. Cependant, $f \notin V_h$. Par conséquent, $f \in Pol\rho'_2$ donc $f \in Pol\rho'_h$.

Dés lors pour $h = S_i$ on a $f \in W_{S_i}$ par ailleurs, $f \in Pol\theta$.

Il s'ensuit que : $Pol\rho_{S_i} \cap Pol\rho'_h \subsetneq Pol\theta \cap Pol\rho'_h$.

(iv) Soient $h \in \underline{k} - \{1\}$, h'$\in \underline{t} - \{1\}$ et $a, b \in E_k$ tels que $(a, b) \notin \theta$.

Soient $u_1, ..., u_{h'}$ h' éléments deux à deux distincts de E_k de sorte que deux d'entre eux ne soient pas dans une même classe de θ .

Pour $1 \leq i \leq h'$ posons : $a_i := (a_{i1}, ..., a_{ih'})$ où :

$$a_{ij} = \begin{cases} b & \text{si } i = j \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons l'opération f d'arité h' définie sur E_k par :

$$f(x) = \begin{cases} u_i & \text{si } x\theta a_i \text{ pour un certain i tel que } 1 \leq i \leq l \\ u_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme f est constante sur le produit des classes de θ, il s'ensuit que : $f \in Pol\rho_h$.

Ainsi, $|\{i \in E_t : Imf \cap A_i \neq \varnothing\}| = h'$ et $(f(a_i), f(a_j)) \notin \theta$ pour $1 \leq i \leq j \leq h'$.

De ce fait, $f \in Pol\rho'_{h'+1}$ et $f \notin Pol\rho'_{h'}$ ■

QUELQUES CLONES SOUS-MAXIMAUX DE L'INTERVALLE $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux grandes formes de clones sous maximaux de l'intervalle $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$, en l'occurrence la forme $Pol\rho_{T_i}$ et la forme $Pol\theta \cap Pol\rho_t'$. Toutefois, il est important de rappeler que :
θ désigne une relation d'équivalence non trivial sur E_k à t classes $A_0; A_1; ...; A_{t-1}$ satisfaisant $l_0 = |A_0| \geq |A_1| = l_1 \geq ... \geq |A_{t-1}| = l_{t-1}$. et que pour $i \in E_t$, $A_i := \{a_{i1}, ..., a_{il_i}\}$.
Par ailleurs, $M := \{l_i : 1 \leq i \leq t-1\}$
et on suppose que $M = \{m_1, ..., m_q\}$ avec $m_1 > m_2 > ... > m_q$

3.1 Clones sous maximaux de la forme $Pol\rho_{T_i}$

D'après le (ii) du Théorème 2.1.3 nous avons vu que les clones de la forme $Pol\rho_h$ $(2 \leq h \leq S_0)$ étaient des sous clones de $Pol\theta$ contenant les fonctions unaire de $Pol\theta$. Á présent nous allons montrer que certains de ces clones sont sous-maximaux dans $Pol\theta$.

Théorème 3.1.1 :

Pour $i \in \{0; ...; q\}$, $Pol\rho_{T_i}$ est un clone sous-maximal de $Pol\theta$

Preuve:

Soit $i \in \{0, ..., q\}$ et $l := max\{j \in E_t : S_j \in \underline{T_i}\}$ où $S_j = l_0 + ... + l_j$.
On a $S_l = T_i$ Soit $f \in Pol^{(n)}\theta \backslash Pol\rho_{T_i}$. Posons $F :=< Pol\rho_{T_i} \cup \{f\} >$ nous allons montrer que $F = Pol\theta$. D'après le Théorème 2.1.3 on a $Pol\rho_{T_i} \subsetneq Pol\theta$. Par ailleurs, $\{f\} \subsetneq Pol\theta$. Par conséquent, $< Pol\rho_{T_i} \cup \{f\} > \subseteq Pol\theta$. Il reste à montrer l'inclusion inverse .

Pour le faire nous allons simplifier les notations en posant : $m := T_i$.

Au préalable comme f $\in Pol^{(n)}\theta \backslash Pol\rho_m$,

il existe $u_1, .., u_n \in \rho_m$ avec $u_i = (u_{1i}, ..., u_{mi})$ pour $i = 1, ..., n$ tel que :

$$\begin{pmatrix} f(u_{11}, ..., u_{1n}) \\ f(u_{21}, ..., u_{2n}) \\ \vdots \\ f(u_{m1}, ..., u_{mn}) \end{pmatrix} \notin \rho_m$$

Ainsi F contient une fonction d'arité n, qui préserve θ. Nous pouvons donc supposer que, pour $1 \leq j \leq m$

$$f(u_{j1}, ..., u_{jn}) = \begin{cases} a_{0j} & \text{si } j \in \underline{S_0} \\ a_{ip} & \text{si } j \in \underline{S_n} - \underline{S_{n-1}} \text{ et } j = S_{n-1} + p,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Dès lors, soit h $\in Pol^{(r)}\theta$ nous allons établir que, h$\in F$. Nous distinguons deux cas :

✍

$\boxed{1^{er} \text{ cas : } |Imh| \leq m}$

✎ Si h $\in Pol\rho_m$ alors h $\in F$ car $F :=< Pol\rho_m \cup \{f\} >$

✎ Si h $\notin Pol\rho_m$ alors il existe $c_1, ..., c_r$ avec $c_i = (c_{1i}, ..., c_{mi})$ pour $i = 1, ..., r$ tel que :

$$\begin{pmatrix} h(c_{11}, ..., c_{1r}) \\ h(c_{21}, ..., c_{2r}) \\ \vdots \\ h(c_{m1}, ..., c_{mr}) \end{pmatrix} \notin \rho_m$$

Nous pouvons donc supposer que, pour $1 \leq j \leq m$

$$h(c_{j1}, ..., c_{jr}) = \begin{cases} a_{0j} & \text{si } j \in \underline{S_0} \\ a_{ip} & \text{si } j \in \underline{S_n} - \underline{S_{n-1}} \text{ et } j = S_{n-1} + p,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Pour $1 \leq s \leq n$, nous définissons h_s l'opération d'arité r par :

$$h_s(x) = \begin{cases} u_{js} & \text{si } h(x) = a_{0j} \\ u_{(s_{j-1}+p)s} & \text{si } h(x) = a_{jp} \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

Le fait que $u_i \in \rho_m$ pour $i = 1, ..., r$, nous pouvons conclure que $h_s \in Pol\rho_m$ pour $s = 1, ..., n$ par conséquent, $h_s \in F$ pour $s = 1, ..., n$. De ce fait, comme F est un clone d'opération sur

E_k et que $h(x) = f(h_1(x), ..., h_n(x))$, il s'ensuit que $h \in F$ Ainsi F contient toute opération sur E_k d'arité inférieur ou égal à m .

✏ Si $m = k$ alors $F = Pol\theta$

✏ On suppose que $m < k$ alors l'opération binaire g définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A_0 \cup ... \cup A_l \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

où $l := max\{j \in E_t : S_j \in \underline{T_i}\}$ préserve la relation ρ_m . De ce fait $g \in Pol\rho_m$ par conséquent g $\in F$

✍

2^{ieme} cas : $|Imh| > m$

✎ Si h $\in Pol\rho_m$ alors h $\in F$ car $F :=< Pol\rho_m \cup \{f\} >$

✎ Si h $\notin Pol\rho_m$ alors, considérons les deux opérations d'arité r, h_1 et h_2 définis par :

$$h_1(x) = \begin{cases} a_{01} & \text{si } h(x) \in A_0 \cup ... \cup A_l \\ h(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } h(x) \in A_0 \cup ... \cup A_l \\ a_{01} & \text{sinon} \end{cases}$$

h_1 préserve ρ_m (ie $h_1 \in Pol\rho_m$), $h_2 \in Pol\theta$ et $|Imh_2| = m$

Par conséquent, h_1, $h_2 \in F$. En outre comme $h(x) = g(h_1(x), h_2(x))$ De ce fait, il vient que, h $\in F$ (Car F est un clone) ■

3.2 Clones sous maximaux de la forme $Pol\theta \cap Pol\rho_t^{'}$

D'après le (i) du Théorème 2.2.2, nous avons vu que le clone $Pol\theta \cap Pol\rho_t^{'}$ était un sous clone de $Pol\theta$ contenant les fonctions unaire de $Pol\theta$. Maintenant, nous allons voir la sous-maximalité de ce clones.

Théorème 3.2.1 :

$Pol\theta \cap pol\rho_t^{'}$ est un clone sous-maximal de $Pol\theta$

Preuve:

Soit f $\in Pol^{(n)} \backslash Pol\rho_t^{'}$, posons $F :=< (Pol\theta \cap Pol\rho_t^{'}) \cup \{f\} >$.

Nous allons montrer que, $F = Pol\theta$.

Comme $Pol\theta \cap Pol\rho_t' \subsetneq Pol\theta$ et f $\in Pol^{(n)}\theta$, il s'ensuit que $< (Pol\theta \cap Pol\rho_t') \cup \{f\} > \subseteq Pol\theta$ ie $F \subseteq Pol\theta$.

Il reste à montrer que $Pol\theta \subseteq F$. Soit h $\in Pol^{(m)}\theta$ nous allons établir que $h \in F$

✌ **Premièrement supposons que** $|\{i \in E_t : Imh \cap A_i \neq \varnothing\}| < t$

Alors h préserve ρ_t' ie $h \in Pol\rho_t'$. Or h $\in Pol\theta$, ainsi h $\in Pol\theta \cap Pol\rho_t'$.

Par suite, $h \in F$.

✌ **Deuxièmement supposons que** $|\{i \in E_t : Imh \cap A_i \neq \varnothing\}| = t$

Nous allons établir par induction sur $|Imh|$ que h $\in F$

☞ Nous commençons avec le cas $|Imh| = t$.

Posons $Imh := \{a_0, ..., a_{t-1}\}$ où $a_j \in A_j$ pour $j = 0; ...; t-1$.

Cependant, comme f $\in Pol^{(n)}\theta - Pol\rho_t'$ il existe $U_1, ..., U_n \in \rho_t'$ avec $U_i = (u_{0i}, ..., u_{(t-1)i})$ pour $i = 1, ..., n$ tels que : $f(U_1, ..., U_n) \notin \rho_t'$. Par ailleurs d'après le (i) du théorème 2.2.2 on a $< Pol^1\theta > \subseteq Pol\theta \cap Pol\rho_t' \subseteq F$ par conséquent F contient les fonctions unaire préservant θ . De ce fait nous pouvons supposer que $f(u_{j1}, ..., u_{jn}) = a_j$ pour $j = 0, ...t-1$. Dés lors pour $i = 1; ...; n$ considérons l'opération h_i d'arité m, définie par :

$$h_i(x) = u_{ji} \qquad \text{si } h(x) = a_j$$

Le fait que pour tout $i = 1; ...; n$ $U_i \in \rho_t'$, l'on peut conclure que $h_i \in Pol\rho_t'$, d'où $h_i \in F$. En outre $h(x) = f(h_1(x), ..., h_n(x))$ de ce fait comme F est un clone on $h \in F$.

☞ Soit p un nombre entier naturel non nul. Supposons que pour tout h $\in Pol\theta$ tel que $|Imh| \leq p$ on a h $\in F$.

Soit h $\in Pol^{(m)}\theta$ tel que $|Imh| = p+1$ posons $Imh := \{a_0, ..., a_p\}$ où $a_j \in A_j$ pour $j = 0, ..., t-1$ et $a_t \in A_0$. Dés lors considérons les opérations m-aires h_1 et h_2 définies respectivement par :

$$h_1(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } h(x) \neq a_t \\ a_t & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } h(x) \neq a_t \\ a_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $|Imh_1| = 2$ et $|Imh_2| = p$. D'autre part $h_1, h_2 \in Pol\theta$. De ce fait par hypothèse d'induction, il s'ensuit que $h_1, h_2 \in F$.

Cependant, considérons l'opération binaire g définie sur E_k par :

$$g(x,y) = \begin{cases} a_t & \text{si } x = a_t \text{ et } y \in A_0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme pour tout $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E_k^2$, $y_1\theta y_2 \Longrightarrow g(x_1,y_1)\theta g(x_2,y_2)$ alors g préserve θ et ρ_t' . Ainsi g $\in Pol\theta \cap Pol\rho_t'$ Dés lors, comme $h(x) = g(h_1(x),h_2(x))$ on peut conclure que h $\in F$. ∎

3.3 Applications

Les différents clones sous-maximaux obtenus dans toutes la suite s'obtiennent par application des Théorèmes 3.1.1 et Théorèmes 3.2.1. Quant aux différentes chaines mentionnées dans les différents cas ci-dessus, elles proviennent du (i) (respectivement (ii)) du théorème 2.2.2 (respectivement du théorème 2.1.3)

3.3.1 Cas de $E_3 := \{0,1,2\}$

Sur $E_3 := \{0,1,2\}$, nous avons exactement 3 relations d'équivalence non triviales et elles sont représentées par leurs classes d'équivalence comme suite :

θ_1 : $A_0 = \{1,2\}$, $A_1 = \{0\}$

θ_2 : $A_0 = \{0,2\}$, $A_1 = \{1\}$

θ_3 : $A_0 = \{0,1\}$, $A_1 = \{2\}$.

Toutes ces relations étant du même type, nous allons appliquer nos résultats uniquement pour θ_1.

On a : le nombre de classe $t = 2$, $l_0 := |A_0| = 2 \geq l_1 := |A_1| = 1$, $M = \{1,2\}$, $m_1 := 2 \geq m_2 := 1$.

$T_0 = 2, T_1 = 2, T_2 = 3$ $S_0 = 2$, $S_1 = 3$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_2$, $Pol\rho_3$ et $Pol\theta_1 \cap Pol\rho_2'$

avec $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$\rho_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \tau_3 : (i,j) \in \varepsilon_3 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_1\}$

où $\tau_3 = E_3^3 \backslash \{(a,b,c) \in E_3^3 : |\{a,b,c\}| = 3\}$

et $\rho_2' = \{(a,b,c,d) \in E_3^4 : (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)) \in \lambda_2\}$

où $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = \varphi(2) = 0$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_1 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\theta_1$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_1 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\theta_1 \cap Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_1$.

3.3.2 Cas de $E_4 := \{0, 1, 2, 3\}$

Sur $E_4 := \{0,1,2,3\}$, nous avons exactement 13 relations d'équivalence non triviales, regroupées en trois types et elles sont représentées par leurs classes d'équivalence comme suite :

Type I

$\theta_1 :\quad A_0 := \{1,2,3\}, \quad A_1 := \{0\}$

$\theta_2 :\quad A_0 := \{0,2,3\}, \quad A_1 := \{1\}$

$\theta_3 :\quad A_0 := \{0,1,3\}, \quad A_1 := \{2\}$

$\theta_4 :\quad A_0 := \{0,1,2\} \quad A_1 := \{3\}$

Type II

$\theta_5 :\quad A_0 := \{0,1\}, \quad A_1 := \{2,3\}$

$\theta_6 :\quad A_0 := \{0,2\}, \quad A_1 := \{1,3\}$

$\theta_7 :\quad A_0 := \{0,3\}, \quad A_1 := \{1,2\}$

Type III

$\theta_8 :\quad A_0 := \{0,1\}, \quad A_1 := \{2\} \quad A_2 := \{3\}$

$\theta_9 :\quad A_0 := \{0,2\}, \quad A_1 := \{1\} \quad A_2 := \{3\}$

$\theta_{10} :\quad A_0 := \{0,3\}, \quad A_1 := \{1\} \quad A_2 := \{2\}$

$\theta_{11} :\quad A_0 := \{1,2\}, \quad A_1 := \{0\} \quad A_2 := \{3\}$

$\theta_{12} :\quad A_0 := \{1,3\}, \quad A_1 := \{0\} \quad A_2 := \{2\}$

$\theta_{13} :\quad A_0 := \{2,3\}, \quad A_1 := \{0\} \quad A_2 := \{1\}$

A présent, nous allons appliquer nos résultats à un représentant de chaque type, notamment à θ_1, θ_5 et θ_8.

☞ Pour θ_1 : $A_0 := \{1,2,3\}$, $A_1 := \{0\}$

On a : le nombre de classe $t = 2$, $l_0 := |A_0| = 3 \geq l_1 := |A_1| = 1$, $M = \{1,3\}$, $m_1 := 3 > m_2 := 1$. $q := |M| = 2$, $T_0 = 3, T_1 = 3, T_2 = 4$, $S_0 = 3$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas sont :

$Pol\rho_3$, $Pol\rho_4$ et $Pol\theta_1 \cap Pol\rho_2'$.

avec $\rho_3 = \{(a_1,a_2,a_3) \in \tau_3 : (i,j) \in \varepsilon_3 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_1\}$

où $\tau_3 = E_4^3 \backslash \{(a,b,c) \in E_4^3 : |\{a,b,c\}| = 3\}$ et ε_3 est défini par son unique classe $\pi_0 = \{1,2,3\}$;

$\rho_4 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \tau_4 : (i,j) \in \varepsilon_4 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_1\}$

où $\tau_4 = E_4^4 \backslash \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : |\{a,b,c,d\}| = 4\}$ et ε_4 est défini par ses classes d'équivalence $\pi_0 = \{1,2,3\}$, $\pi_1 = \{4\}$;

$\rho_2' = \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : (\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c),\varphi(d)) \in \lambda_2\}$ où $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3) = 0$ et $\lambda_2 = \{(a,a,b,b);(a,b,a,b);(a,b,b,a) : a,b \in \{0,1,2,3\}\}$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_1\rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\rho_3 \subsetneq Pol\theta_1$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_1\rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\theta_1 \cap Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_1$.

☞ Pour θ_5 : $A_0 := \{0,1\}$, $A_1 := \{2,3\}$

On a : le nombre de classe $t = 2$, $l_0 := |A_0| = 2 \geq l_1 := |A_1| = 2$, $M = \{2\}$, $m_1 := 2$. $q := |M| = 1$, $T_0 = 2, T_1 = 4$ $S_0 = 2, S_1 = 4$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_2$, $Pol\rho_4$ et $Pol\theta_5 \cap Pol\rho_2'$.

avec $\rho_2 = \{(a,a,b,b);(a,b,a,b);(a,b,b,a) : (a,b) \in \theta_5\}$

$\rho_4 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \tau_4 : (i,j) \in \varepsilon_4 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_5\}$

où $\tau_4 = E_4^4 \backslash \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : |\{a,b,c,d\}| = 4\}$ et ε_4 est définie par ses deux classes $\pi_0 = \{1,2\}$; $\pi_1 = \{3,4\}$ et $\rho_2' = \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : (\varphi(a),\varphi(b),\varphi(c),\varphi(d)) \in \lambda_2\}$ où $\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \varphi(2) = \varphi(3) = 1$, $\lambda_2 = \{(a,a,b,b);(a,b,a,b);(a,b,b,a) : a,b \in \{0,1,2,3\}\}$.

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_5\rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\theta_5$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_5\rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\theta_5 \cap Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_5$.

☞ Pour θ_8 : $A_0 := \{0,1\}$, $A_1 := \{2\}$ $A_2 := \{3\}$

On a : le nombre de classe $t = 3$, $l_0 := |A_0| = 2 \geq l_1 := |A_1| = 1 \geq l_2 := |A_2| = 1$, $M = \{1,2\}$,

$m_1 := 2 > m_2 := 1$. $q := |M| = 2$, $T_0 = 2, T_1 = 2, T_2 = 4$ $S_0 = 3, S_1 = 4, S_2 = 5$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_2$, $Pol\rho_4$ et $Pol\theta_8 \cap Pol\rho'_3$.

Avec $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\rho_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \tau_4 : (i,j) \in \varepsilon_4 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_8\}$

où $\tau_4 = E_4^4 \backslash \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : |\{a,b,c,d\}| = 4\}$ et ε_4 est définie par ses deux classes $\pi_0 = \{1,2,3\}$; $\pi_1 = \{4\}$ et $\rho_3^{'} = \{(a,b,c,d) \in E_4^4 : (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)) \in \tau_3\}$ où $\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \varphi(2) = \varphi(3) = 1$, $\tau_3 = E_4^3 \backslash \{(a,b,c) \in E_4^3 : |\{a,b,c\}| = 3\}$.

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_8 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\theta_8$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_8 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\rho'_2 \subsetneq Pol\theta_8 \cap Pol\rho'_3 \subsetneq Pol\theta_8$.

3.3.3 Cas de $E_5 := \{0,1,2,3,4\}$

Sur $E_5 := \{0,1,2,3,4\}$, nous avons exactement 50 relations d'équivalence non triviales. Nous pouvons classer ces 50 relations suivants 5 types, dont un représentant de chaque type est donné par :

Type I	θ_1 :	$A_0 := \{0,1,2\}$,	$A_1 := \{3,4\}$		
Type II	θ_2 :	$A_0 := \{0,1,2,3\}$,	$A_1 := \{4\}$		
Type III	θ_3 :	$A_0 := \{0,1,2\}$,	$A_1 := \{3\}$	$A_2 := \{4\}$	
Type IV	θ_4 :	$A_0 := \{0,1\}$,	$A_1 := \{2,3\}$	$A_2 := \{4\}$	
Type V	θ_5 :	$A_0 := \{0,1\}$,	$A_1 := \{2\}$	$A_2 := \{3\}$	$A_3 := \{4\}$

A présent, nous allons appliquer nos résultats pour chaque type.

☞ Type I

θ_1 : $A_0 := \{0,1,2\}$, $A_1 := \{3,4\}$

On a : le nombre de classe $t = 2$, $l_0 := |A_0| = 3 \geq l_1 := |A_1| = 2$, $M = \{2,3\}$, $m_1 := 3 \geq m_2 := 2$. $q := |M| = 2$, $T_0 = 2, T_1 = 2, T_2 = 5$ $S_0 = 3$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas sont :

$Pol\rho_3$, $Pol\rho_5$ et $Pol\theta_1 \cap Pol\rho'_2$.

$\rho_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \in \tau_3 : (i,j) \in \varepsilon_3 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_1\}$

où $\tau_3 = E_5^3 \backslash \{(a,b,c) \in E_5^3 : |\{a,b,c\}| = 3\}$ et ε_3 est définie par sa classes $\pi_0 = \{1,2,3\}$

$\rho_2' = \{(a,b,c,d) \in E_5^4 : (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)) \in \lambda_2\}$ où

$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \varphi(2) = \varphi(3) = 1$, $\rho_5 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \in \tau_5 : (i,j) \in \varepsilon_5 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_1\}$

où $\tau_5 = E_5^5 \backslash \{(a,b,c,d,e) \in E_5^5 : |\{a,b,c,d,e\}| = 5\}$ et ε_5 est définie par ses classes :

$\pi_0 = \{1,2,3\}$, $\pi_1 = \{4,5\}$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_1 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\rho_3 \subsetneq Pol\theta_1$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_1 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\theta_1 \cap Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_1$.

☞ Type II

$\theta_2 : A_0 := \{0,1,2,3\}$, $A_1 := \{4\}$

On a : le nombre de classe $t = 2$, $l_0 := |A_0| = 4 \geq l_1 := |A_1| = 1$, $M = \{1,4\}$, $m_1 := 4 \geq m_2 := 1$.

$q := |M| = 2$ $T_0 = 4, T_1 = 4, T_2 = 5$ $S_0 = 4$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_4$, $Pol\rho_5$ et $Pol\theta_2 \cap Pol\rho_2'$

$\rho_4 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \tau_4 : (i,j) \in \varepsilon_4 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_2\}$

où $\tau_4 = E_5^4 \backslash \{(a,b,c,d) \in E_5^4 : |\{a,b,c,d\}| = 4\}$ et ε_4 est définie par sa classes $\pi_0 = \{1,2,3,4\}$

$\rho_2' = \{(a,b,c,d) \in E_5^4 : (\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)) \in \lambda_2\}$ où

$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3) = 0, \varphi(4) = 1$, et $\lambda_2 = \{(a,a,b,b),(a,b,a,b),(a,b,b,a) : a,b \in E_5\}$

$\rho_5 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \in \tau_5 : (i,j) \in \varepsilon_5 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_1\}$

où $\tau_5 = E_5^5 \backslash \{(a,b,c,d,e) \in E_5^5 : |\{a,b,c,d,e\}| = 5\}$ et ε_5 est définie par ses classes :

$\pi_0 = \{1,2,3\}$, $\pi_1 = \{4,5\}$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_2 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\rho_3 \subsetneq Pol\rho_4 \subsetneq Pol\theta_2$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_2 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_2$.

☞ Type III

$\theta_3 : A_0 := \{0,1,2\}$, $A_1 := \{3\}$ $A_2 := \{4\}$

On a : le nombre de classe $t = 3$, $l_0 := |A_0| = 3 \geq l_1 := |A_1| = 1 \geq l_2 := |A_2| = 1$, $M = \{1,3\}$, $m_1 := 3 \geq m_2 := 1$. $q := |M| = 2$, $T_0 = 3, T_1 = 3, T_2 = 5$ $S_0 = 3$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_3$, $Pol\rho_5$ et $Pol\theta_3 \cap Pol\rho_3'$.

Avec $\rho_3 = \{(a_1,a_2,a_3) \in \tau_3 : (i,j) \in \varepsilon_3 \Longrightarrow (a_i,a_j) \in \theta_3\}$

où $\tau_3 = E_5^3 \backslash \{(a,b,c) \in E_5^3 : |\{a,b,c\}| = 3\}$ et ε_3 est définie par sa classe $\pi_0 = \{1,2,3\}$

$\rho_5 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \tau_5 : (i,j) \in \varepsilon_5 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_3\}$

où $\tau_5 = E_5^5 \backslash \{(a,b,c,d,e) \in E_5^5 : |\{a,b,c,d,e\}| = 5\}$ et ε_5 est définie par ses classes $\pi_0 = \{1,2,3\}$, $\pi_1 = \{4,5\}$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_3 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\rho_3 \subsetneq Pol\theta_3$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_3 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_3 \cap Pol\rho_3' \subsetneq Pol\theta_3$.

☞ Type IV

$\theta_4 : A_0 := \{0,1\},\ A_1 := \{2,3\}\ A_2 := \{4\}$

On a : le nombre de classe $t = 3$, $l_0 := |A_0| = 2 \geq l_1 := |A_1| = 2 \geq l_2 := |A_2| = 1$, $M = \{1,2\}$, $m_1 := 2 \geq m_2 := 1$. $q := |M| = 2$, $T_0 = 2, T_1 = 4, T_2 = 5$ $S_0 = 2$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_2$, $Pol\rho_4$, $Pol\rho_5$, $Pol\theta_4 \cap Pol\rho_3'$.

Avec $\rho_2 = \{(a,a,b,b), (a,b,a,b), (a,b,b,a) : (a,b) \in \theta_4\}$

$\rho_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \tau_4 : (i,j) \in \varepsilon_4 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_4\}$

où $\tau_4 = E_5^4 \backslash \{(a,b,c,d) \in E_5^4 : |\{a,b,c,d\}| = 4\}$ et ε_4 est définie par ses classes $\pi_0 = \{1,2\}$, $\pi_1 = \{3,4\}$.

$\rho_5 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \tau_5 : (i,j) \in \varepsilon_5 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_4\}$

où $\tau_5 = E_5^5 \backslash \{(a,b,c,d,e) \in E_5^5 : |\{a,b,c,d,e\}| = 5\}$ et ε_5 est définie par ses classes $\pi_0 = \{1,2\}$, $\pi_1 = \{3,4\}$, $\pi_2 = \{5\}$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_4 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\theta_4$
- $\langle Pol^{(1)}\theta_4 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\rho_2' \subsetneq Pol\theta_4 \cap Pol\rho_3' \subsetneq Pol\theta_4$.

☞ Type V

$\theta_5 : A_0 := \{0,1\},\ A_1 := \{2\}\ A_2 := \{3\}\ A_3 := \{4\}$. On a : le nombre de classe $t = 4$, $l_0 := |A_0| = 2 \geq l_1 := |A_1| = 1 \geq l_2 := |A_2| = 1 \geq l_3 := |A_3| = 1$, $M = \{1,2\}$, $m_1 := 2 > m_2 := 1$. $q := |M| = 2$, $T_0 = 2, T_1 = 2, T_2 = 5$, $S_0 = 2, S_1 = 3, S_2 = 4$.

✎ Clones sous-maximaux correspondant dans ce cas :

$Pol\rho_2$, $Pol\rho_5$, $Pol\theta_5 \cap Pol\rho_4'$.

Avec $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rho_5 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \tau_5 : (i,j) \in \varepsilon_5 \Longrightarrow (a_i, a_j) \in \theta_4\}$

où $\tau_5 = E_5^5 \backslash \{(a,b,c,d,e) \in E_5^5 : |\{a,b,c,d,e\}| = 5\}$ et ε_5 est définie par ses classes $\pi_0 = \{1,2\}$, $\pi_1 = \{3\}$ et $\pi_2 = \{4,5\}$

✎ Quelques chaines correspondantes :

- $\langle Pol^{(1)}\theta_5 \rangle \subsetneq Pol\rho_2 \subsetneq Pol\theta_5$

- $\langle Pol^{(1)}\theta_5 \rangle \subsetneq B' \subsetneq Pol\rho'_2 \subsetneq Pol\theta_5 \cap Pol\rho'_3 \subsetneq Pol\theta_5 \cap Pol\rho'_4 \subsetneq Pol\theta_5$.

APPORTS PÉDAGOGIQUES

Ce travail nous a permis de nous outiller sur deux plans :

☞ Sur le plan de la forme

✎ La rédaction de ce mémoire nous a permis de voir comment peut être structuré un cours.

✎ En outre, la saisie de ce travail nous a permis de nous familiariser au logiciel de saisie LATEX qui est un excellent logiciel pour la saisie des épreuves et leçons au lycée

☞Sur le plan du fond

La notion de relation d'équivalence nous a permis d'avoir une meilleurs perceptions des concepts tels que
✎ les partitions en analyse combinatoire ;

✎ ainsi que la notion de partage équitables.

✎ En outre ce travail nous a permis d'étudier des structures algébriques plus générale que les espaces vectoriels, notamment les algèbres universels, ce qui nous présente une vue plus globale des structures algébriques étudiées au lycée.

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons donné une description de l'intervalle de clones $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$ où θ est une relation d'équivalence non triviale sur un ensemble à k éléments. En outre nous avons caractérisé principalement deux formes de clones sous-maximaux de cet intervalle et enfin nous avons appliqué les principaux résultats aux ensembles E_3, E_4 et E_5. Cependant, il serait envisageable, de déterminer d'autres formes, pourquoi pas toutes les formes possibles de clones sous maximaux de l'intervalle $[< Pol^{(1)}\theta >; Pol\theta]$. Ceci pouvant faire l'objet de travaux ultérieurs.

Bibliographie

[1] Burle, G.A. (1967) *The classes of k-valued logics containing all one variable functions.* (Russian) Diskret. Analiz 10, 3-7.

[2] Jablonskij, S.V.(1958) *Functional constructions in many-valued logics.* (Russian). Tr. Mat. Inst. Steklova 51, 5-142 .

[3] Kerkhof, S., Poschel, R., Schneider, F.M. :(2014) *A short introduction to clones.* Electronic Notes in Theoretical Computer Science 303 107-120.

[4] Lau, D. :(1978) *Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik.* Z. Math. Logik u. Grundl. Math. 24, 79-96.

[5] Lau, D. :(1982) *Submaximale Klassen von* P_3*. J. Inf. Process.* Cybern. EIK 18, 4/5, 227-243 24, 79-96 .

[6] Lau, D. : (2006)*Function Algebras on Finite Sets.* A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[7] Lehtonen, E., Szendrei, A. : (2011) *Clones with finitely many relative R-classes* Algebra Universalis 65, 109-159.

[8] Post, E.L. :(1921)*Introduction to a general theory of elementary propositions.* Amer. J. Math. 43, 163-185.

[9] Post, E.L. : (1941)*The two-valued iterative systems of mathematical logic.* Ann. Math. Studies 5, Princeton Univ. Press.

[10] Rosenberg, I.G. : (1965) *La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, 260, 3817-3819.

[11] Rosenberg, I.G. : (1970)*Functional completeness in many-valued logics ; the structure of functions of several variables on finite sets.* (In German). Rozpravy Ceskoslovenské Akad. Ved, Rada Mat. Prirod. Ved 80, 3-93.

[12] Temgoua, E.R.A,Rosenberg I.G. : (2012)*Binary central relations and submaximal clones determined by nontrivial equivalence relations.* Algebra Universalis 67 299-311.

[13] Temgoua. :(2013) *Meet-irreducible submaximal clones determined by nontrivial equivalence relations.* Algebra Universalis 70 175-196.