REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE DEPARTEMENT DE
MATHEMATHIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF DEPARTEMENT OF
MATHEMATICS
****

SERIES DE FOURIER

Mémoire de DI.P.E.S.II de mathématiques

Par :

KUETE KENNE Duplex
Licencié en Mathématiques

Sous la direction
Pr. NNANG Hubert
Maître de conférences

Année Académique
2015-2016

Dédicace

À

Mon feu père ***KENNE Josué***

Remerciements

Je voudrais exprimer toute ma gratitude :

• Au **Dieu** tout puissant, qui m'a accordé les grâces nécessaires au cours de ce travail pour accomplir l'une des missions auxquelles il m'a appelé. Dieu d'amour comment ne pas te bénir et te glorifier pour tant de merveilles que tu as accompli dans ma vie depuis le sein maternel ? Merci Seigneur, à toi la plénitude de la gloire.

• Mon valeureux et dynamique encadreur, le Professeur **NNANG Hubert**, pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire et surtout pour les sacrifices qu'il a consentis pour la réalisation de ce mémoire.

• Mes enseignants du cycle de licence et de l'École Normale pour le savoir qu'ils ont bien voulu me transmettre pendant mon cursus scolaire au département de Mathématique de l'Université de Dschang et à l'École Normale Supérieure de Yaoundé I.

• Mes mamans **TCHINDA Éveline**, **MAKENNE Rose** qui n'ont jamais cesser de me soutenir moralement et financièrement.

• Mon ami et frère **PANKITI Pascal** qui m'a toujours soutenu depuis la classe de quatrième jusqu'à nos jours sur le plan scolaire et moral.

• Mes oncles **YOTA Daniel**, **KOUGOUM Charcot**, **NGOUFO Leonard** qui m'ont toujours soutenu aussi financièrement que moralement pendant mon parcours scolaire et d'avoir encouragé les autres à faire de même.

• Mon grand frère **KAGNING Magloire** qui a pris la place d'un père pour moi depuis que nous avons perdu notre papa et pour toute l'aide financière qu'il m'a toujours accordée.

• Mes soeurs **DJIMELI Hermine**, **MONA Armelle** pour tout leur soutien moral et financier.

• La grande famille **KENNE**, pour tout leur soutien qu'ils ont bien voulu m'accorder.

• Mes camarades de classe et amis, en particulier : **MOTCHEKA Albert**, **NOGHENG Achille**, **DJOU Ferdinand**, **KOTSAP Roussel**, **MAFFO Chrystelle**, **TAKAM Clovis**, **NZEMBOUONG Patrick**, **MBOK Jacques**, **FOKONEH Perez** pour tout leur soutient.

Déclaration sur l'honneur

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

KUETE KENNE Duplex

Résumé

Dans ce mémoire nous partons de quelques résultats sur les séries numériques pour établir la convergence des séries de fonctions, plus particulièrement des séries de Fourier. Nous avons montré par quelques exemples que ce type de séries peut permettre de résoudre bon nombre de problèmes en mathématiques, en physique et même en informatique. A titre illustratif, nous avons aussi fait usage des séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries numériques et pour résoudre une équation aux dérivées partielles (équation des cordes vibrantes).

Mots clés : suite, séries, convergence, continuité, équations aux dérivées partielles,

Abstract

In this work, we move from some results on the numerical series to establish a convergence of functional series, and particularly Fourier series. We have indicated with some examples that this type of series can enable to solve a good number of problems in mathematics, in physics, and in computer technology. We have also made use of Fourier series to calculate a certain numerical series and to solve an equation to a partial derivation (vibrant cord equation).

Key words : Sequence, Series, Convergence, Continuity, Partial derivative equations.

Table des matières

Introduction

Le but du travail est l'étude des séries de Fourier qui constituent une sous branche des séries de fonctions numériques. Une série de Fourier est une somme infinie de fonctions particulières, que l'on regarde très souvent comme la limite d'une suite des sommes partielles. Les séries de Fourier ont un intérêt certain dans la société. Elles permettent par exemple d'interpréter certains signaux (autrement dit, certaines fonctions définies sur un intervalle) comme résultant de la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. L'idée d'une telle décomposition apparaît en 1807 dans une première communication de Joseph Fourier $(1768 - 1830)$, cf $[11]$ à l'Académie des Sciences de Paris, concernant la résolution de l'équation aux dérivées partielles qui régit la propagation de la chaleur dans les solides. En 1822, Fourier publie sur ce sujet un ouvrage devenu célèbre, intitulé Théorie analytique de la chaleur (cf $[11]$). Cependant, c'est sous l'impulsion de Peter Gustav Lejeune Dirichlet (cf $[11]$) que la théorie de Fourier, jusqu'alors controversée, prend vraiment son essor : en particulier, Dirichlet publie en 1829 la première démonstration rigoureuse d'un résultat de convergence pour les séries de Fourier (cf $[10]$). Dès lors, le développement de l'analyse au XIXème siècle devient indissociable des problèmes liés à ces séries, qui seront à l'origine de contributions monumentales de Riemann (sur l'intégration), d'Abel (sur la convergence des séries de fonctions), de Weierstrass (qui introduit la convergence uniforme et met les bases de l'analyse) et de Cantor (qui fonde la topologie générale).

Pour cela, nous allons subdiviser notre travail en trois chapitres et un quatrième sur la portée pédagogique, à savoir : au premier chapitre, nous rappelons succinctement la notion de séries numériques avec quelques exemples d'application ; au deuxième chapitre, nous partons des suites de fonctions pour définir les séries de fonctions et quelques théorème fondamentaux ; au troisième chapitre nous allons parler des séries de Fourier et d'un exemple d'application et en fin au quatrième chapitre nous donnons la portée pédagogique des séries de Fourier.

CHAPITRE UN

SÉRIES NUMÉRIQUES

Ce chapitre est introductif à l'étude des séries de fonctions. Ainsi bon nombre de résultats sont énoncés sans démonstration. On pourra alors se référer à [1], [3], [2], [7], [8] pour plus de détails.

1.1 Définition et propriétés des séries numériques

Définition 1.1.1. [1] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour tout entier $n \geq 0$ on définit la somme partielle des $(n+1)$-premiers termes de la suite un par l'expression :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n.$$

1. La famille $(u_n, S_n)_n$ s'appelle série numérique de terme général u_n. On note souvent la série $(u_n, S_n)_n$ par $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, et nous adoptons cette notation (bien que abusive) dans la suite.
2. Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge) dans $\mathbb{R}$ on dira que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge (resp. diverge). Lorsqu'elle converge, on note :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n.$$

3. Étudier la nature d'une série consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.
4. Si la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge vers $S \in \mathbb{R}$ (resp. $S \in \mathbb{C}$) on lui associe la suite numérique dont le terme général est

$$R_n = S - S_n = \sum_{p\geq n+1} u_p \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

qui s'appelle reste d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Dans la suite, on donnera quelques conditions nécessaires à la convergence d'une série numérique qui seront tirées à partir des résultats classiques des suites numériques convergentes.

Proposition 1.1.1. [1] Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série numérique. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
(ii) $(R_n)_n$ converge vers zéro, avec $R_n = \sum\limits_{p\geq n+1} u_p$.

Proposition 1.1.2. [7] Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série numérique. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
(ii) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout couple d'entiers $n > m \geq n_0$, $|u_m + u_{m+1} + ... + u_n| < \varepsilon$.

Corollaire 1.1.1. Si une série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Proposition 1.1.3. [8] Une série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ dont le terme général est positif $(u_n > 0)$ converge si et seulement si, la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$ est majorée.

Proposition 1.1.4. [8] Si les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ convergent alors pour tous les réels λ et μ la série de terme général, $\lambda u_n + \mu v_n$ converge.

Exemple 1.1.1. Cherchons la nature des séries de termes généraux respectifs

$$u_n = \tfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1 \qquad \text{et } v_n = \tfrac{1}{n+1}\ \forall n \geq 0$$

Puisque pour tout entier $n \geq 1$ le terme général

$$u_n = \tfrac{1}{n(n+1)} = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}$$

on en déduit que la somme partielle des n-premiers termes,
$S_n = u_1 + ... + u_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$,
converge vers 1. Par conséquent, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme est égale à :

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ... = 1$$

Notons aussi que le reste d'ordre $n \geq 1$ de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est égale à

$$R_n = 1 - S_n = \tfrac{1}{n+1}$$

• La série de terme général $v_n = \frac{1}{n}$ s'appelle série harmonique. La série harmonique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge parce que si on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ on voit que pour tout entier $n \geq 1$ on a l'inégalité

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

qui implique que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

Remarque 1.1.1. Notons que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge malgré que son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers zéro. Donc la condition $\lim_{n\longrightarrow +\infty} u_n = 0$ est nécessaire pour la convergence de la série numérique mais n'est pas suffisante.

1.2 Séries géométriques

Définition 1.2.1. [1] Soient a et q deux nombres complexes non nuls. La série de terme général

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = aq^n$$

s'appelle série géométrique de raison q.

Proposition 1.2.1. [1] Une série géométrique de terme général, $u_n = aq^n$, converge si et seulement si $|q| < 1$.

Corollaire 1.2.1. Si le module $|q| < 1$ alors la somme et le reste de la série géométrique $u_n = aq^n$ sont données respectivement par,

$$\sum_{n\geq 0} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad \text{et} \quad R_n = a\frac{q^{n+1}}{1-q}, \forall n \geq 0.$$

Exemples 1.2.1. 1) La série géométrique de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}$ converge vers $\frac{3}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ avec un reste d'ordre n égal à $R_n = \frac{3}{2}\frac{1}{3^{n+1}}$. En effet la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}$ a pour raison $\frac{1}{3} < 1$ d'où $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, le reste d'ordre n est $R_n = \frac{3}{2}\frac{1}{3^{n+1}}$.

2) La série géométrique de terme général $v_n = (\frac{-1}{5})^n$ converge vers $\frac{5}{6} = \sum_{n\geq 0} (\frac{-1}{5})^n$ avec un reste d'ordre n égal à $R_n = \frac{5}{6}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$. En effet $\sum_{n\geq 0} (\frac{-1}{5})^n$ a pour raison $-\frac{1}{5} < 1$ d'où $\sum_{n\geq 0} (\frac{-1}{5})^n = \frac{5}{6}$, le reste d'ordre n est $R_n = \frac{5}{6}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$.

1.3 Séries à termes positifs

Dans cette section, on se propose de donner quelques méthodes et règles pratiques qui permettent de décider sur la nature des séries numériques dont le terme général est positif.

1.3.1 Critères de comparaison de deux séries à termes positifs

Théorème 1.3.1. [8] (Premier critère de comparaison) : Soient $u_n > 0$ et $v_n > 0$ les termes généraux de deux séries. S'il existe un réel $C > 0$ et un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq Cv_n$, alors les propositions suivantes sont vraies :

1. Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors la séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors la séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Exemple 1.3.1. Cherchons la nature des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 0} x_n \text{ et } \sum_{n\geq 0} y_n \text{ avec } x_n = \frac{n}{n^3+n^2+n+1} \text{ et } y_n = \frac{n}{n^2+1}$$

1) Puisque pour tout entier $n \geq 1$ on peut écrire

$$0 < x_n \leq \frac{n}{n^3+n^2} = \frac{1}{n(n+1)}$$

on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge parce que nous avons démontré que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge

2) De même, puisque pour tout entier $n > 0$ on a,

$$\tfrac{1}{n+1} \leq y_n$$

il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 0} y_n$ diverge parce qu'on a démontré que la série harmonique $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}$ diverge.

Théorème 1.3.2. (Second critère de comparaison). Soit $u_n > 0$ et $v_n > 0$ les termes généraux de deux séries. S'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout entier $n > n_0$,

$$\tfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \tfrac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors les propositions suivantes sont vraies :

1. Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge.

Preuve. L'hypothèse s'écrit encore : $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ la suite de terme général $q_n = \frac{u_n}{v_n}$ est décroissante au moins à partir d'un n_0. On en déduit que

$$0 \leq q_n \leq q_{n_0} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Ainsi $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq q_{n_0} v_n$ dans ces conditions d'après le premier critère de comparaison on a la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ implique celle de $\sum_{n\geq 0} u_n$. De même la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum_{n\geq 0} v_n$.

Théorème 1.3.3. [8] (Critère d'équivalence). Soit $u_n > 0$ et $v_n > 0$ les termes généraux de deux séries. Si la limite $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}_+^*$ alors les deux séries numériques $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ possèdent la même nature de convergence.

Preuve. Pour $\varepsilon = \frac{L}{2}$ on applique la définition de la limite $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_n}{v_n} = L$ on peut trouver un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on aura

$$|\tfrac{u_n}{v_n} - L| < \tfrac{L}{2} \Longrightarrow \tfrac{L}{2} < \tfrac{u_n}{v_n} < \tfrac{3L}{2} \Longrightarrow \tfrac{L}{2}v_n < u_n < \tfrac{3L}{2}v_n.$$

Ainsi, si on applique le premier théorème de comparaison aux deux membres de la double inégalité $\frac{L}{2}v_n < u_n < \frac{3L}{2}v_n$ on déduit que les séries u_n et v_n sont de même nature.

Exemple 1.3.2. : Cherchons la nature de la série de terme général

$$v_n = arctg(\frac{n}{n^2+1}).$$

Puisque la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow 0_{x\neq 0}} \dfrac{arctg(x)}{x} = 1$ (ie. $arctg(x) \sim x$ au voisinage de 0) on voit que si on désigne par $w_n = \frac{1}{n}$ le terme général de la série harmonique, on obtient la limite suivante

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 0} arctg(\dfrac{n}{n^2+1})$ diverge.

1.3.2 Comparaison d'une série à termes positifs avec une intégrale généralisée

Dans ce paragraphe, étant donnée une fonction décroissante continue $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ on se propose d'étudier la nature de convergence de la série numérique dont le terme général est défini par l'expression $u_n = f(n)$.

Théorème 1.3.4. Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné inclus $[a, +\infty[$ décroissante et positive. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum\limits_n f(n)$ sont de même nature (convergente ou divergente).

Preuve. Comme f est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n, n+1]$,
$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, donc,

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$$

c'est-à-dire $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$. Or

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{X\longrightarrow +\infty_{X\in\mathbb{N}}} \int_a^X f(x)dx \\ &= \lim_{X\longrightarrow +\infty_{X\in\mathbb{N}}} (\int_a^{E(a)+1} f(x)dx + \sum_{n=E(a)+1}^{X-1} \int_n^{n+1} f(x)dx).\end{aligned}$$

Puisque $\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$, si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge c'est-à-dire $\sum_n \int_n^{n+1} f(x)dx$ diverge, alors $\sum_n f(n)$ diverge et si $\sum_n f(n)$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

De même on a $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx$, si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_n f(n+1)$ converge et donc $\sum_n f(n)$ converge, et si $\sum_n f(n)$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Corollaire 1.3.1. (Encadrement du reste). Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ positive et décroissante continue, telle que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors le reste d'ordre $n \geq a$ de la série $\sum_n f(n)$ noté $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ possède l'encadrement suivant, $\forall n \geq a$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Exemple 1.3.3. Cherchons la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sinh(n)}$.

Notons que si pour tout réel $x \geq 1$ on pose $f(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$ on obtient une fonction décroissante et continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Donc, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sinh(n)}$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh(x)}$ possèdent la même nature.

En effet, puisque pour $x > 0$ assez grand la fonction $\frac{1}{\sinh(x)}$ est équivalente à la fonction $2e^{-x}$ et comme l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{e}$ converge on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sinh(x)}$ converge aussi. Par conséquent, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sinh(n)}$ converge.

Définition 1.3.1. [8] La série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ s'appelle série de Riemann de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.3.1. [1] La série de Riemann de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si le réel $\alpha > 1$.

Proposition 1.3.2. [3] Soient $u_n \geq 0$ une suite et α un nombre réel tel que la limite $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha u_n = A \in [0, +\infty[$

Alors les propositions suivantes sont vraies.

1. Si la limite $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha u_n = A \in \mathbb{R}_+^*$ alors la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) si et seulement si $\alpha > 1$ (resp. $\alpha \leq 1$).

2. Si la limite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha u_n = 0$ avec $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Si la limite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 1.3.4. La série de terme général, $u_n = n^2 sin(\frac{1}{n^4})$ converge parce que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2 u_n = 1$ et on sait que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge.

1.3.3 Règles de Cauchy et de d'Alembert

Théorème 1.3.5. (Règle de Cauchy). Soit $u_n \geq 0$ le terme général d'une série telle que $\lambda = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Alors les propositions suivantes sont vraies :
1. Si $0 \leq \lambda < 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq0} u_n$ converge.
2. Si $\lambda > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq0} u_n$ diverge.
3. Si $\lambda = 1$, on peut rien conclure a priori.

Preuve.
1) Supposons que $0 \leq \lambda < 1$ et choisissons un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $0 \leq \lambda < \lambda + \varepsilon < 1$. Puis appliquons la définition de la limite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$ au nombre réel $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N}); n \geq n_0 &\Longrightarrow |\sqrt[n]{u_n} - \lambda| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow -\varepsilon + \lambda < \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon + \lambda < 1 \\ &\Longrightarrow 0 \leq u_n < (\varepsilon + \lambda)^n < 1.\end{aligned}$$

Puisque le réel $q = \varepsilon+\lambda < 1$, on en déduit que la série géométrique de terme général $v_n = (\varepsilon+\lambda)^n$ converge, et donc la série de terme général u_n converge d'après le théorème de comparaison.
2) Comme dans le cas précédent, si on suppose que le réel $\lambda > 1$ on peut trouver un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $1 \leq \lambda - \varepsilon < \lambda$ et, si on applique la définition de la limite on peut trouver un entier $n_0 > 0$ tel que dès que l'entier $n > n_0$ cela implique qu'on a l'inégalité,

$$1 < \lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \lambda + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad 1 < (\lambda - \varepsilon)^n < u_n,$$

qui montre que la série de terme général u_n diverge parce que la série géométrique de terme général $w_n = (\lambda - \varepsilon)^n$ diverge.
3) Si on suppose que $\lambda = 1$ alors on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\lambda - \varepsilon)^n < u_n < (\varepsilon + \lambda)^n.$$

La série géométrique de terme général $w_n = (1-\varepsilon)^n$ converge alors que la série géométrique de terme général $t_n = (1+\varepsilon)^n$ diverge. Donc on ne saurait donner la nature de la série de terme général u_n.

Théorème 1.3.6. [3] (Règle de d'Alembert). Soit $u_n \geq 0$ le terme général d'une série telle que $\lambda = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Alors les propositions suivantes sont vraies :
1. Si $0 \leq \lambda < 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\lambda > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Si $\lambda = 1$, on peut rien conclure a priori.

1.3.4 Séries absolument convergentes

Définition 1.3.2. [7] Soit u_n le terme général d'une suite de nombres réels ou complexes.
1. On dira que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument si la série des modules $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge.
2. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge tandis que la série des modules $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ diverge alors on dira dans ce cas que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est semi-convergente. Pour trouver la nature de convergence de la série des modules $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ on pourra donc appliquer à la série de terme général $v_n = |u_n| \geq 0$ toutes les règles de convergence que nous avons étudié dans le paragraphe précédent. Ci-dessous, nous donnerons deux résultats importants qui vont enrichir la liste des méthodes d'étude des séries non nécessairement réelles et positives.

Proposition 1.3.3. Si la série des modules $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge. C'est-à-dire, une série qui converge absolument converge.

Preuve. Supposons que la série des modules converge, alors elle vérifie le critère de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \geq N_\varepsilon \Longrightarrow |\sum\limits_{k=n+1}^{m} |u_k|| = \sum\limits_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon$.

Or $|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |u_k| \leq \varepsilon$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente car vérifie le critère de Cauchy.

Théorème 1.3.7. [2] Soit u_n le terme général d'une série numérique. S'il existe une série à termes positifs convergente $\sum_{n\geq 0} a_n$ telle que à partir d'un certain rang on a, $|u_n| \leq a_n$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

Exemples 1.3.1. 1) La série de terme général $a_n = \frac{sin(n^2)}{n^3}$ converge absolument parce que pour tout entier $n \geq 1$ on a l'inégalité $|a_n| \leq \frac{1}{n^3}$ et on sait que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge.

2) Montrons que la série de terme général $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente.

Puisque la série des valeurs absolues $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ n'est autre que la série Harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ qui diverge, la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ ne converge pas absolument. Pour prouver que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge nous allons montrer que les deux sous-suites extraites de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$,

$$u_n = S_{2n} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \quad \text{et} \quad v_n = S_{2n+1} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$$

sont adjacentes car la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

D'autre part, comme pour tout entier $n \geq 1$ on a,

$$v_n = S_{2n+1} = (\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + ... + (\tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n}) + \tfrac{1}{2n+1} \geq 0$$

on conclut que la suite v_n converge. De plus $u_n - v_n = \frac{-1}{2n+1} < 0$, d'où $u_n < v_n$. Cette différence tend vers zéro, cela implique que les deux suites $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes. Par conséquent, puisque les deux sous-suites S_{2n} et S_{2n+1} extraites de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}$ convergent on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

1.4 Séries alternées

Définition 1.4.1. [7] Soit $a_n > 0$ une suite décroissante qui tend vers zéro. La série de terme général $u_n = (-1)^n a_n$ s'appelle série alternée.

Théorème 1.4.1. (Leibnitz). Toute série alternée converge.

Preuve. Il s'agit donc de démontrer que si la suite a_n décroît vers zéro alors la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ converge.

Puisque $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ on en déduit que la suite (S_{2n}) est décroissante. D'autre part, puisque pour tout entier $n \geq 0$ on a $a_n - a_{n+1} \geq 0$ et $a_n \geq 0$ on en déduit que la suite $S_{2n} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + ... + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n} \geq 0$ est minorée, donc elle converge. Enfin, notons que puisque la suite a_n tend vers zéro et $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$ il s'ensuit que les deux sous-suites extraites des sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1} convergent vers la même limite. Par conséquent, comme la suite des sommes partielles S_n converge on déduit que la série alternée $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

Proposition 1.4.1. [8] Pour tout entier $n \geq 0$ le reste R_n de la série alternée $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ vérifie l'inégalité $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Théorème 1.4.2. [8] (Critère de convergence d'Abel).Soient a_n et b_n deux suites numériques. Pour que la série de terme général $u_n = a_n b_n$ converge il suffit qu'on a les conditions suivantes :

1. La suite des sommes partielles $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$ est bornée.
2. La suite a_n tend vers zéro.
3. La série numérique $\sum_{n\geq 0}|a_n - a_{n+1}|$ converge.

Corollaire 1.4.1. : Soit $a_n > 0$ une suite décroissante qui tend vers zéro. Pour toute suite numérique b_n dont la suite des sommes partielles $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est bornée, la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

De façon analogue aux séries, les séries de fonctions sont définies à partir des suites de fonctions. Dans ce chapitre il est question pour nous de partir de quelques résultats donnés sur les séries numériques pour déterminer le domaine de convergence des séries de fonctions à travers des exemples.

2.1 SUITES DE FONCTIONS

Soit $K = \mathbb{R}$ et D une partie non vide de K une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans K est une application $n \longmapsto f_n$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des fonctions de D dans K.

2.1.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 2.1.1. [2] :Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans K converge simplement vers la fonction f si pour tout $x \in D$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ on note $f_n \longrightarrow f$ si : $\forall\varepsilon > 0$, $\forall x \in D$, $\exists\eta_x$ tel que pour tout $n \geq \eta_x$ on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Remarque 2.1.1. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, alors la limite est unique.

Exemples 2.1.1. Soit pour tout entier n,

1)

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

2) $\forall n \geq 1$, soit

$$\begin{array}{rccc} h_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\sin(nx)}{n} \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n} = 0$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h \equiv 0$ identiquement nulle.

Remarque 2.1.2. Dans l'exemple ci-dessus en 1), toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ mais la fonction f ne l'est pas.

En 2), toutes les les fonctions h_n sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, mais la suite $(h'_n)_n$ n'a pas de limite car $h'_n(x) = \cos(nx)$.

2.1.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Dans la suite de ce chapitre, afin d'alléger les notations pour toute fonction bornée $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nous poserons

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in D\}$$

Définition 2.1.2. [1] Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$, et f définie de D vers $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur D, et on note $f_n \rightrightarrows f$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \Longrightarrow \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

C'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Longrightarrow \sup\limits_{x\in D}|f_n - f| < \varepsilon$, ce qui signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.

Remarque 2.1.3. 1) Dans la convergence simple N dépend de x, mais dans la convergence uniforme, N ne dépend pas de x.

2) La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f signifie qu'à partir d'un certain rang, la distance entre les fonctions f_n et la fonction f tendra vers 0.

Exemples 2.1.2. 1) Pour tout entier $n \geq 0$, soit

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{-nx} \end{array}$$

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction nulle. $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 0, f_n'(x) = (1-nx)e^{-nx}$, d'où $\sup\limits_{x\geq 0}|f_n(x) - f(x)| = f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{ne}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$, ce qui signifie que $f_n \rightrightarrows f \equiv 0$, sur $\mathbb{R}_+$.
2) la suite de fonctions $(f_n)_n$ telles que

$$\begin{array}{rccc} f_n: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

converge simplement vers la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Donc $|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n \text{ si } x \in [0,1[\\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Ce qui entraine que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \nrightarrow 0$. Ce qui prouve que la suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

3) la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ telles que

$$\begin{array}{rccc} h_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\sin(nx)}{n} \end{array}$$

converge simplement vers la fonction nulle sur l'ensemble des réels. En plus, on a
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, |\frac{\sin(nx)}{n}| \leq \frac{1}{n} \Longrightarrow 0 \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|h_n(x) - h(x)| \leq \dfrac{1}{n}$ ce qui entraine $\lim\limits_{n\to+\infty} ||h_n - h||_\infty = 0$.

D'où on a $h_n \rightrightarrows h$ sur $\mathbb{R}$

2.1.3 Propriétés de la convergence uniforme

Théorème 2.1.1. [2] (Critère de Cauchy uniforme)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$ alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f de D vers $\mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$ si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \geq 0$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}, (p > N_\varepsilon, q > N_\varepsilon) \Longrightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$.

Propriété 2.1.1. [1] la somme de deux suites de fonctions uniformément convergentes est une suite de fonctions uniformément convergentes.

Théorème 2.1.2. : (de continuité) Soit $D \subseteq \mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) uniformément convergente sur D vers une fonction f. Soit $x_0 \in D$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ chaque fonction f_n est continue en x_0. Alors la fonction f est continue en x_0.

Preuve. Soit $x_0 \in D$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, $f_n \rightrightarrows f$, ie

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall x \in D.$$

En plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, ie

$$\exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } (|x - x_0| \leq \eta_\varepsilon \text{ et } x \in D) \Longrightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, $(|x - x_0| \leq \eta_\varepsilon$ et $x \in D)$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)| + |f_{N_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc f est continue en x_0.

Corollaire 2.1.1. Si une suite de fonctions continues $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformément alors pour tout réel $x_0 \in [a, b]$ on a la formule de la limite double suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x)) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\lim_{x \longrightarrow x_0} f_n(x))$$

Théorème 2.1.3. (d'intégration) : Soient a et b des réels, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continues sur $[a, b]$, convergeant uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.
Pour tout $x \in [a, b]$ on pose $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction F, et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. D'après le théorème précédent la fonction f est continue donc intégrable.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_ε tel que :

$\forall n > N_\varepsilon$ on ait $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \forall t \in [a,b]$.

Alors pour $n > N_\varepsilon$ et $x \in [a,b]$ on a :

$$\begin{aligned} |F_n(t) - F(t)| = |\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt| &\leq \int_a^x |(f_n(t) - f(t))|dt \\ &\leq \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(F_n)_n$ vers F, ie

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Théorème 2.1.4. (de dérivation). Soient a et b des réels, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

1) que la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.

2) qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.

Alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Preuve. On pose $g_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n(t)dt$ pour $x \in [a,b]$. On déduit facilement du théorème d'intégration que la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $\overline{g}$ donnée par $\overline{g}(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$. Comme les fonctions f'_n sont continues on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$g_n(x) = f_n(x) - f_n(x_0)$.

Comme la suite $(f_n(x_0))_n$ converge, soit l sa limite, on obtient donc que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction $\overline{g}(x) + l = f(x)$.

Enfin le théorème de continuité dit que la fonction g est continue, donc $\overline{g}(x)$ est dérivable de dérivée $g(x)$. Donc f est dérivable et $f'(x) = g(x)$.

Ce théorème peut se généraliser au cas où les fonctions f'_n ne sont pas continues. On pourra retenir la démonstration du théorème 2.1.4 et l'énoncé du théorème suivant :

Théorème 2.1.5. [6] (de dérivation). Soient a et b des réels, $a < b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

1) que la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.

2) qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.

Alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

2.2 SÉRIES DE FONCTIONS

2.2.1 Définitions et propriétés

[8] Soient $D \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions.

1. Pour tout entier naturel $n \geq 0$ on définit la somme partielle des $(n+1)$-premiers termes de la suite (f_n) par l'expression,

$$\forall x \in D, \quad S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)$$

2. La famille des couples de fonctions $(f_n, S_n)_n$ s'appelle série de fonctions de termes général f_n. On note souvent la série $(f_n, S_n)_n$ par $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ et nous adoptons cette notation dans toute la suite de ce chapitre. Le sous-ensemble

$$J = \{x \in D; S_n(x) \quad converge\}$$

s'appelle domaine de convergence simple de la série de fonctions.

3. Si le domaine de convergence simple $J \subset D$ de la suite de fonctions de terme général S_n est non vide on définit une fonction $S : J \longrightarrow \mathbb{R}$ par l'expression,

$$S(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x), \qquad \forall x \in J$$

qu'on appellera limite simple de la série de fonctions de terme général f_n.

4. En plus, si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers la fonction S sur le domaine $J \subset D$ on dira que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers la fonction $S : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Propriété 2.2.1. [4] Si une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, converge simplement (resp. uniformément) sur un sous-ensemble non vide $J \subseteq \mathbb{R}$, alors son terme général f_n converge simplement (resp.uniformément) sur J vers la fonction nulle.

Propriété 2.2.2. Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur un sous-ensemble non vide $J \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) La suite des restes $R_n(x) = \sum\limits_{k\geq n+1} f_k(x), \qquad \forall x \in J$ converge simplement (resp. uniformément) sur J vers la fonction nulle.

Preuve. On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur J si et seulement si la suite de fonctions (S_n) converge uniformément vers f sur J.
ie ssi $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\sup_{x\in J}|S_n(x)-f(x)|)=0$ (d'après la propriété précédente)
ie ssi $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\sup_{x\in J}|R_n(x)|)=0$
ie ssi $R_n \rightrightarrows 0$ sur J.
Puisque la convergence uniforme entraine la convergence simple, alors on a l'équivalence entre (i) et (ii).

Définition 2.2.1. [1] On dira que la série de fonctions bornées, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$, converge normalement (ie. en normes) si la série numérique $\sum_{n\geq 0}||f_n||_\infty$ est convergente.

Théorème 2.2.1. Une série de fonctions bornées qui converge normalement sur un intervalle non vide $D \subset \mathbb{R}$ converge uniformément sur D.

Preuve. Supposons que la série de fonctions de terme général $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ converge normalement sur D. Donc, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\, n \geq m \geq n_0,\, ||f_m||_\infty + ... + ||f_n||_\infty \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité triangulaire pour la norme $||.||_\infty$ on voit que

$$n \geq m \geq n_0 \Longrightarrow ||f_m + ... + f_n||_\infty \leq ||f_m||_\infty + ... + ||f_n||_\infty \leq \varepsilon$$

Donc, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur l'intervalle D.

Théorème 2.2.2. (Weierstrass). Soient $a_n \geq 0$ une suite et $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions bornées telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq a_n$. Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur D.

Preuve. En effet, puisque pour tout réel $x \in D$ on a l'inégalité $|f_n(x)| \leq a_n$ cela implique que la norme de convergence uniforme $||f_n||_\infty \leq a_n$. Ainsi, comme la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge il s'ensuit que la série numérique $\sum_{n\geq 0}||f_n||_\infty$ converge. Donc, la série de fonctions bornées $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur D.

Exemples 2.2.1. 1) Cherchons la nature de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par son terme général,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \tfrac{1}{n^2+x^2}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité

$$0 \leq f_n(x) \leq \tfrac{1}{n^2} \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ ||f_n||_\infty \leq \tfrac{1}{n^2}.$$

Donc, puisque la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge le théorème de Weierstrass implique que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2) Cherchons la nature de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ définies sur $\mathbb{R}$ par son terme général,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \tfrac{1}{1+n^2x^2}.$$

a) Pour $x_0 \neq 0$ le terme général $\frac{1}{1+n^2(x_0)^2} \leq \frac{1}{n^2(x_0)^2}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$.

b) Puisque la borne supérieure,

$$\sup\{|g_n(x)|; \forall x \in \mathbb{R}^*\} = 1$$

on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^*$.

Toutefois, si pour tout réel $a > 0$ on restreint la suite de fonctions g_n sur le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq a\}$ on voit que la borne supérieure

$$||g_n||_\infty = \sup\{|g_n(x)|; |x| \geq a\} = \tfrac{1}{1+n^2a^2}$$

ce qui implique que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{1}{1+n^2x^2}$ converge normalement sur tout les sous-ensembles $\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq a\}$ avec $a > 0$.

2.2.2 Théorèmes fondamentaux de la convergence uniforme

On rappelle que la nature d'une série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ s'obtient en étudiant la nature de la suite de fonctions des sommes partielles associée $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$. Par exemple, si on veut étudier la continuité, la dérivabilité ou chercher une primitive de la fonction $S(x) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ sur le domaine de convergence de la suite de fonctions (S_n) il suffit qu'on lui applique respectivement les théorèmes de continuité, de dérivabilité ou d'intégrabilité et qui s'énoncent comme suit.

Théorème 2.2.3. [3] (Continuité). Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. Si la suite de fonctions des sommes partielles, $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)$, converge uniformément sur le segment $[a,b]$ alors la fonction

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$$

est continue sur le segment $[a,b]$.

Théorème 2.2.4. [4] (Intégrabilité). Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues. Si la suite de fonctions des sommes partielles, $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)$, converge uniformément sur le segment $[a,b]$ alors pour tout $x \in [a,b]$ on a la formule

$$\int_a^x \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^x S_n(x)dx \Longleftrightarrow \int_a^x (\sum_{n\geq 0} f_n(x))dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^x f_n(x)dx$$

Théorème 2.2.5. [1] (Dérivabilité). Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues, dérivables sur l'intervalle $]a,b[$ et telles que la suite des sommes partielles des fonctions dérivées, $S'_n(x) = f'_0(x) + f'_1(x) + ... + f'_n(x)$, converge uniformément sur $]a,b[$. S'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge, alors la fonction,

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$$

est continue sur le segment $[a,b]$ et est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. De plus, pour tout $x \in]a,b[$ on a la formule de dérivation,

$$S'(x) = \frac{d}{dx}(\sum_{n\geq 0} f_n(x)) = \sum_{n\geq 0} f'_n(x)$$

Exemple 2.2.1. Montrons que la série de fonctions, $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{x^2+n^2}$ définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Continuité de la fonction $x \longmapsto F(x)$ sur $\mathbb{R}$

Pour tout entier $n \geq 1$ posons $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ et notons que la norme de convergence uniforme, $||f_n||_\infty = \sup\{|f_n(x)|; x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{n^2}$. Puisque la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, d'après le théorème de Weierstrass la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, comme le terme général f_n est continu sur $\mathbb{R}$ il s'ensuit que la fonction $F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Dérivabilité de la fonction $x \longmapsto F(x)$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivabilité pour montrer que la fonction $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ il suffit qu'on démontre que la série des fonctions dérivées $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

En effet, puisque la fonction dérivée, $f'_n(x) = \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$ on en déduit que la dérivée seconde

$$f_n^{(2)} = \frac{2(3x^2-n^2)}{(x^2+n^2)^3}$$

et donc le tableau des variations de $f'_n(x) = \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{n}{\sqrt{3}}$		$\frac{n}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f_n^{(2)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'_n(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8n^3}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{8n^3}$	↗	0

Par conséquent, puisque la norme de convergence uniforme,

$$||f'_n||_\infty = \sup\{|f'_n(x)|; x \in \mathbb{R}\} = \frac{3\sqrt{3}}{8n^3}$$

et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, le théorème de Weierstrass implique que la série $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de la dérivation implique que la fonction $F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est donnée en tout point $x \in \mathbb{R}$ par,

$$F'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}.$$

Pour achever ce chapitre nous allons énoncer le théorème d'Abel pour les séries de fonctions.

Théorème 2.2.6. [2] (Abel). Soient a_n et $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux suites de fonctions. Pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} a_n(x) f_n(x)$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$ il suffit qu'on ait les conditions suivantes :

1. Il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$||\sum_{k=0}^{n} a_k||_\infty = \sup\{|\sum_{k=0}^{n} a_k(x)|; x \in [a,b]\} < M.$$

2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} |f_{n+1} - f_n(x)|$ converge uniformément sur $[a,b]$.
3. La suite de fonctions f_n converge sur le segment $[a,b]$ uniformément vers la fonction nulle.

Corollaire 2.2.1. [2] (Leibniz). Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Si la suite de fonctions (f_n) est décroissante (i.e $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$) et converge uniformément sur le segment $[a,b]$ vers la fonction nulle, alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} (-1)^n f_n(x)$ converge uniformément sur le segment $[a,b]$.

SÉRIES DE FOURIER

Les séries de Fourier sont un cas particulier des séries de fonctions. Ce chapitre concerne notre travail proprement dit. Ici il est question pour nous d'utiliser le développement en série de Fourier d'une fonction périodique pour calculer la somme de quelques séries numériques et nous allons aussi donner une application.

3.1 Séries trigonométriques

Définition 3.1.1. [5] Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe un nombre T tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.
Si f est périodique, on appelle période de f le plus petit nombre $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$.

Définition 3.1.2. [3] soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.1. Si la série trigonométrique (3.1) converge simplement sur un intervalle $[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{\omega}]$, alors elle converge pour toute valeur de x, et sa somme est une fonction périodique f de période :

$$T = \tfrac{2\pi}{w}.$$

Les séries trigonométriques réelles sont donc une forme particulière des séries de fonctions dont l'étude complète est déjà développée dans le chapitre 2. Par exemple, grâce au théorème de Weierstrass (cf. chap. 2) on déduit qu'on a la proposition suivante,

Propriété 3.1.1. [8] Si les séries numériques, $\sum_{n\geq 0}|a_n|$ et $\sum_{n\geq 0}|b_n|$ converge, alors la série trigonométrique (3.1) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue et $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.

De même, grâce au théorème d'Abel pour les séries de fonctions (cf. chap.2) on déduit qu'on a la proposition suivante,

Propriété 3.1.2. [6] Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (3.1) converge simplement sur tout intervalle $]\frac{2k\pi}{\omega}, \frac{(2k+1)\pi}{\omega}[$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique

Définition 3.1.3. [5] La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ est par définition la série $x_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n + x_{-n})$

Propriété 3.1.3. Toute série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ peut se réécrire sous la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ avec $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$

Preuve. D'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \text{ et } \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ devient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[e^{in\omega x}\frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x}\frac{a_n + ib_n}{2}].$$

En posant : $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, la série devient :

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{in\omega x} + c_{-n}e^{-in\omega x}) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}e^{-in\omega x} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega x} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \end{aligned}$$

La résolution du système suivant $\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$ nous conduit aux résultats suivants $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Remarque 3.1.2. De ce qui précède on a, en particulier $a_0 = 2c_0$ et $b_0 = 0$. On convient donc d'écrire une série trigonométrique sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \tag{3.2}$$

3.1.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel

Propriété 3.1.4. [11] Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et intégrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Dans ce paragraphe on suppose que la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue et $T-$périodique avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Lemme 3.1.1. [3] Si $T = \frac{2\pi}{\omega}$ alors pour tous les entiers n et $m \in \mathbb{N}$ on a les formules suivantes,
1. $\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(n\omega x)dx = 0$;
2. $\int_0^T \cos(n\omega x)\cos(n\omega x)dx = \int_0^T \sin(n\omega x)\sin(n\omega x)dx = \frac{T}{2}$;
3. $\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(m\omega x)dx = \int_0^T \cos(n\omega x)\cos(m\omega x)dx = \int_0^T \sin(n\omega x)\sin(m\omega x)dx = 0$;

Propriété 3.1.5. Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue et $T-$périodique notée f.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

Preuve. Supposons que la série trigonométrique $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x)+b_n \sin(n\omega x))$ converge uniformément vers f, posons $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ alors pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(x)\cos(m\omega x) = \tfrac{a_0}{2}\cos(m\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega x)\cos(m\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\cos(m\omega x)].$$
$$f(x)\sin(m\omega x) = \tfrac{a_0}{2}\sin(m\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega x)\sin(m\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\sin(m\omega x)]$$

puisque la série trigonométrique (3.2) converge uniformément sur la période $[0,T]$ vers f, d'après le théorème d'intégration (cf chap 2) on a :

- $$\int_0^T f(x)\cos(m\omega x)dx = \frac{a_0}{2}\int_0^T \cos(m\omega x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\int_0^T \cos(n\omega x)\cos(m\omega x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\int_0^T \sin(n\omega x)\cos(m\omega x)dx$$
- $$\int_0^T f(x)\sin(m\omega x)dx = \frac{a_0}{2}\int_0^T \sin(m\omega x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(m\omega x)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\int_0^T \sin(n\omega x)\sin(m\omega x)dx$$

Ainsi, grâce aux formules du lemme précédent on conclut que pour tout entier $n \geq 0$ les coefficients de la série trigonométrique de somme $f(x)$ sont donnés par les expressions :

$$a_n = \tfrac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$$
$$b_n = \tfrac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx$$

Remarque 3.1.3. 1. D'après le lemme précédent les coefficients peuvent s'écrire :

$$a_n = \tfrac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx = \tfrac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos(n\omega x)dx, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$
$$b_n = \tfrac{\omega}{\pi}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = \tfrac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin(n\omega x)dx, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

2. En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π-périodique ;

$$a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

3.1.3 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas complexe

Propriété 3.1.6. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ une série trigonométrique écrite sous forme complexe qui converge uniformément sur $[0,T]$ vers f, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx.$$

Preuve. Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ fixé. Puisque $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ converge uniformément sur $[0,T]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in_0\omega x}dx &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}e^{-in_0\omega x}dx \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^T e^{in\omega x}e^{-in_0\omega x}dx\end{aligned}$$

Or $\int_0^T e^{in\omega x}e^{-in_0\omega x}dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq n_0 \\ T \text{ si } n = n_0 \end{cases}$

D'où on a $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx.$

3.2 Séries de Fourier d'une fonction périodique

Dans cette section, étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est T-périodique et intégrable au sens de Riemann sur le segment $[0,T]$, nous allons lui associer une série trigonométrique réelle que l'on appelle série de Fourier.

Définition 3.2.1. [3] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Si f est intégrable sur le segment $[0,T]$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on définit les coefficients de Fourier de f par les formules suivantes,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx, \qquad \forall n \geq 0 \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx, \qquad \forall n \geq 1. \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx, \qquad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))(= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}).$$

Corollaire 3.2.1. [4] Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T-périodique paire (resp. impaire) et intégrable sur $[0,T]$ alors ses coefficients $b_n = 0$, $c_{-n} = c_n$ (resp. $a_n = 0$, $c_{-n} = -c_n$).

Exemples classiques de séries de Fourier

a) Coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $x \longmapsto e^{ax}$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ fixé. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prend sur la période $[0, 2\pi]$ la valeur $f(x) = e^{ax}$.

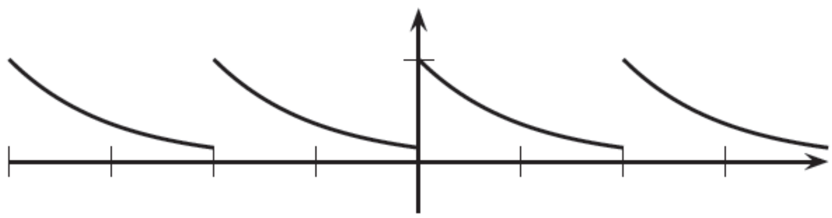

FIGURE 3.1 – Le graphe de la fonction 2π-périodique $x \longmapsto e^{\frac{-x}{2\pi}}$

Pour calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f nous allons calculer ses coefficients de Fourier complexes qui sont donnés par l'intégrale simple complexe,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(a-in)x}dx$$

$$c_n = [\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(a-in)x}}{a-in}]_0^{2\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}(\frac{e^{2\pi a}}{a-in} - \frac{1}{a-in}) \quad = \quad \frac{(e^{2\pi a}-1)(a+in)}{2\pi(a^2+n^2)} = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

De ce calcul, on obtient les coefficients de Fourier réels de la fonction f donnés par
$a_0 = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi a}$, et si $\forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{a(e^{2\pi a}-1)}{\pi(a^2+n^2)} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{-n(e^{2\pi a}-1)}{\pi(a^2+n^2}.$$

La série de Fourier associée à la fonction e^{ax} est donc donnée par la somme

$$\frac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e^{2\pi a}-1)}{(a^2+n^2)}(a\cos(nx) - n\sin(nx)).$$

b) Coefficients de Fourier d'une fonction constante par morceaux

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction impaire T-périodique qui coïncide avec la fonction $h(x) = 1$ sur l'intervalle $]0, \frac{T}{2}]$.

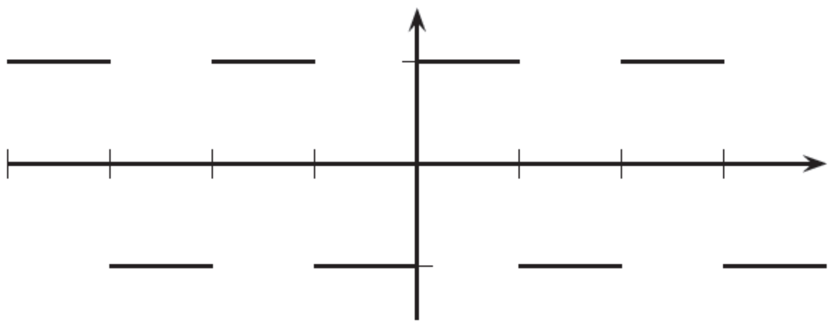

FIGURE 3.2 – Le graphe de la fonction impaire 2π-périodique et constante

Puisque la fonction h est impaire on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. Tandis que les coefficients b_n se calculent par intégration par parties comme suit :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T h(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx \\ &= \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} h(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\frac{2\pi nx}{T})dx = \frac{4}{T}[\frac{-T}{2n\pi}\cos(\frac{2\pi nx}{T})]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}]. \end{aligned}$$

Les coefficients de Fourier de la fonction h sont finalement donnés par les expressions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0, \qquad \forall n \geq 1, b_{2n} = 0 \text{ et } \forall n \geq 0, b_{2n+1} = \tfrac{4}{(2n+1)\pi}.$$

D'après le calcul précédent on conclut que la série de Fourier associée à la fonction 2π-périodique impaire égale à un sur $[0, \pi]$ est donnée par l'expression

$$\tfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

Définition 3.2.2. [4] Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent.

Définition 3.2.3. [4] Une fonction f est dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle admet un nombre fini de discontinuité sur tout intervalle borné, et si chaque discontinuité est de première espèce.

3.3 Problème de convergence des séries de Fourier

Dans la section précédente à la donnée d'une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nous lui avons associé la série de Fourier suivante

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

sans s'intéresser à sa convergence. En effet, c'est dans cette section qu'on se propose d'étudier la convergence d'une série de Fourier et on calculera aussi sa limite dans le cas échéant. Pour régler ces questions nous allons suivre la méthode de Dirichlet qui permet d'écrire la somme partielle d'une série de Fourier sous la forme d'une intégrale définie qui dépend de la fonction périodique donnée et d'une fonction remarquable appelée noyau de Dirichlet. Ensuite, c'est grâce au noyau de Dirichlet que nous dégagerons les conditions suffisantes qui assureront la convergence de la série de Fourier vers la fonction périodique donnée au départ.

Définition 3.3.1. [5] Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Pour tout entier naturel N, on appelle N-ième somme de Fourier de f le polynôme trigonométrique défini par

$$P_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

On dit que la série de Fourier de f converge simplement (resp. uniformément) sur une partie E de $\mathbb{R}$ si la suite de fonctions $(P_N f)_{N\geq 0}$ converge simplement (resp. uniformément) sur E. La limite de cette suite est alors appelée somme de la série de Fourier de f et sa valeur en tout point x de E est notée

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

3.3.1 Convergence des coefficients de Fourier

Lemme 3.3.1. [2] (Riemann-Lebesgue). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et intégrable au sens de Riemann. Alors les fonctions définies par les intégrales suivantes,

$$C(\lambda) = \textstyle\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx \qquad \text{et} \qquad S(\lambda) = \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx$$

tendent vers zéro quand le réel λ tend vers l'infini.

Corollaire 3.3.1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T-périodique intégrable sur $[0, T]$ alors ses coefficients de Fourier a_n et b_n tendent vers zéro à l'infini i.e. :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx = 0 \qquad \text{et}$$
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx = 0$$

Preuve. Il suffit d'appliquer à la définition 17 le lemme précédent.

3.3.2 Théorème de convergence de Dirichlet

Soit f une fonction T-périodique ($T > 0$) et intégrable au sens de Riemann sur $[0, T]$. Notons que si dans la somme partielle d'ordre $n \geq 0$ de la série de Fourier associée à f on remplace les coefficients de Fourier complexes c_k de la fonction f par leurs expressions intégrale on obtient,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} (\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt) e^{ik\omega x} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(x-t)}) dt. \end{aligned}$$

Dans la suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \notin \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ posons

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t} = e^{-in\omega t} \frac{1 - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{ik\omega}} \\ &= \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} - e^{i(n+\frac{1}{2})\omega t}}{e^{\frac{-i\omega t}{2}} - e^{\frac{i\omega t}{2}}} \\ &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t}{\sin(\frac{\omega t}{2})} \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que la somme partielle $S_n(x)$ de la série de Fourier de f prend la forme intégrale suivante,

$$S_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+t) D_n(t) dt. \tag{3.3}$$

Définition 3.3.2. [4] Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction périodique définie par l'expression suivante

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega t} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\omega t)}{\sin(\frac{\omega t}{2})}, t \notin \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad D_n(t) = 2n+1, t \in \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$$

s'appelle $n^{ième}$ noyau de Dirichlet.

La suite (D_n) des noyaux de Dirichlet possède des propriétés remarquables que nous résumerons dans la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. Le noyau de Dirichlet $D_n(x)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\frac{1}{T}\int_0^T D_n(x)dx = 1$.

2. Si f est une fonction T-périodique alors la somme partielle d'ordre $n \geq 0$ de sa série de Fourier est donnée par l'intégrale

$$S_n(x) = \tfrac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t) + f(x-t))D_n(t)dt$$

Preuve.

1. Puisque pour tout entier $n \neq 0$ l'intégrale définie par $\int_0^T e^{-in\omega t}dt$ est nulle il s'ensuit que $\frac{1}{T}\int_0^T D_n(t)dt = 1$.

2. Si on écrit la somme partielle $S_n(x)$ en utilisant l'expression intégrale donnée par (3.3) la périodicité de la fonction f et du noyau de Dirichlet D_n nous permet d'exprimer $S_n(x)$ par une intégrale sur $[0, \frac{T}{2}]$:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)D_n(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x+t)D_n(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x+t)D_n(t)dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x+t)D_n(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x+t)D_n(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x-t)D_n(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (f(x+t) + f(x-t)D_n(t)dt
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.1. (de Dirichlet). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique intégrable sur le segment $[0, T]$ et qui vérifie en plus les conditions suivantes dites de Dirichlet :

1. Sur l'intervalle $[0, T]$ la fonction f est discontinue seulement sur un ensemble fini de points $0 \leq x_1 < x_2 < .... < x_n \leq T$;

2. la fonction f est dérivable sur les intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[\subset [0, T]$;

3. la fonction f admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point x_i.

Alors, la série de Fourier de la fonction f converge simplement vers la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \tfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) désigne la limite à droite (resp. la limite à gauche) de la fonction f au point $x \in \mathbb{R}$.

Preuve. Pour calculer la somme de la série de Fourier associée à une fonction f qui est T-périodique et vérifiant les conditions de Dirichlet nous allons étudier la limite simple de la suite de fonctions

$$S_n(x) - \tfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

tout en utilisant l'expression intégrale de la somme partielle (3.3)

$$\tfrac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(f(x+t) + f(x-t)D_n(t)dt.$$

Puisque le noyau de Dirichlet $D_n(x)$ est T-périodique et paire son intégrale sur la moitié de la période est égale à $\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$. Ainsi, on peut écrire pour tout entier n :

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(f(x+t) - f(x^+))D_n(t)dt \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(f(x-t) - f(x^-))D_n(t)dt. \end{aligned}$$

Si F_x^+ et F_x^- : $[0, \frac{T}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ désignent les fonctions définies respectivement par les expressions suivantes :

$$F_x^+ = \tfrac{f(x+t)-f(x^+)}{t}\tfrac{t}{\sin(\frac{\omega t}{2})} \qquad \text{et} \qquad F_x^- = \tfrac{f(x-t)-f(x^-)}{t}\tfrac{t}{\sin(\frac{\omega t}{2})}$$

on voit que la différence

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_x^+(t)\sin(\frac{(2n+1)\omega t}{2})dt \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_x^-(t)\sin(\frac{(2n+1)\omega t}{2})dt \end{aligned}$$

Puisque les fonctions F_x^+ et F_x^- sont bornées et intégrables sur le segment $[0, \frac{T}{2}]$ le lemme de Lebesgue (ou son corollaire) implique que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_x^+(t)\sin(\frac{(2n+1)\omega t}{2})dt = 0 \qquad \text{et}$$
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} F_x^-(t)\sin(\frac{(2n+1)\omega t}{2})dt = 0$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier associée à la fonction T-périodique f converge vers

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Corollaire 3.3.2. [6] Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T-périodique continue et dérivable par morceaux sur $[0, T]$ alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Proposition 3.3.2. [4] Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ converge.

Théorème 3.3.2. Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

Preuve. D'après le théorème de Dirichlet, on sait déjà qu'il y a convergence simple vers f, puisque l'hypothèse de continuité implique $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Posons maintenant $f_0(x) = c_0$ et $f_n(x) = c_{-n}e^{-inx} + c_n e^{inx}$, pour $n \geq 1$, de telle sorte que, la suite des sommes de Fourier $(P_N f)_{N \geq 0}$ s'identifie à la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq |c_{-n}| + |c_n|$$

et la série numérique $\sum_{n \geq 1} (|c_{-n}| + |c_n|)$ converge d'après la proposition précédente. Par suite, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Dirichlet nous permet de calculer la somme de toutes les séries de Fourier que nous avons étudié dans les exemples classiques de séries de Fourier.

Exemples 3.3.1. 1) Rappelons qu'au paragraphe $3.2.1$, pour tout réel $a \neq 0$ nous avons déterminé la série de Fourier associée à la fonction 2π-périodique qui coïncide avec e^{ax} sur $]0, 2\pi[$, si on lui applique le théorème de Dirichlet on conclut que

$$e^{ax} = \tfrac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi a} + \tfrac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi a} - 1)}{(a^2 + n^2)} (a \cos(nx) - n \sin(nx)), \qquad \forall x \in]0, 2\pi[.$$

Si on pose $x = 0$ dans cette série de Fourier on déduit la somme suivante

$$\tfrac{e^{2\pi a}-1}{2\pi a} + \tfrac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(e^{2\pi a}-1)}{(a^2+n^2)} = \frac{1+e^{2\pi a}}{2}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}^*$$

à partir de laquelle on déduit aussi que pour tout réel $a \neq 0$,

$$\pi a \coth(\pi a) = 1 + 2a^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+a^2}.$$

Si dans la série de Fourier de e^{ax} on pose $x = \pi$ on obtient la somme suivante

$$\tfrac{e^{\pi a}}{e^{2\pi a}-1} = \tfrac{1}{2\pi a} + \tfrac{a}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}.$$

2) La série de Fourier associée à la fonction 2π-périodique impaire qui coïncide avec la fonction $h(x) = 1$ sur $[0, \pi]$ converge simplement vers la somme :

$$\tfrac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = 1, \qquad \forall x \in]0, \pi[.$$

Puisque l'expression qu'on vient d'établir est équivalente à la suivante

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \forall x \in]0, \pi[$$

on voit que si on prend $x = \frac{\pi}{2}$ cette somme implique que la série numérique alternée

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

3.3.3 Théorème de la convergence quadratique

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique bornée et intégrable sur le segment $[0, T]$. Rappelons que sous ces hypothèses on pourra associer à la fonction f une série de Fourier dont la somme partielle d'ordre $n \geq 0$ est donnée par

$$S_n(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x))$$

Puisque la fonction f est bornée on pourra trouver un réel $M > 0$ tel que pour tout réel $x \in [0, T]$,

$$|f(x)|^2 \leq M|f(x)| \qquad \Longrightarrow \textstyle\int_0^T |f(x)|^2dx \leq M\int_0^T |f(x)|dx < +\infty.$$

Ici nous supposons que toutes les propriétés de l'ensemble des fonctions de carré intégrable $\mathcal{L}^2([0,T])$ sont connues.
Le but de ce paragraphe est de calculer $\int_0^T |f(x)|^2 dx$ en fonction des coefficients de Fourier de la fonction f.
Pour calculer $\int_0^T |f(x)|^2 dx$ nous allons considérer la suite réelle

$$\Delta_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T |f(x) - S_n(x)|^2 dx$$

dont le terme général s'appelle l'écart quadratique d'ordre $n \geq 0$ de la fonction f. Le nombre réel $\Delta_n(f)$ est fini et il mesure l'erreur qu'on commet lorsque la valeur de la fonction f est approchée par la $n^{ième}$ somme partielle de la série de Fourier associée à f.

Lemme 3.3.2. [5] Pour tout entier $0 \leq k \leq n$ on a les formules suivantes
1. $\int_0^T (f(x) - S_n(x)) \cos(k\omega x) dx = 0$;
2. $\int_0^T (f(x) - S_n(x)) \sin(k\omega x) dx = 0$.

En conséquence, pour tout entier $n \geq 0$ on a $\int_0^T (f(x) - S_n(x)) S_n(x) dx = 0$.
D'après ce lemme on peut énoncé la proposition suivante :

Proposition 3.3.3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0,T]$. Alors, pour tout entier $n \geq 0$ l'écart quadratique d'ordre $n \geq 0$ de la fonction f est égale

$$\Delta_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx - [\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}((a_k)^2 + (b_k)^2)]$$

Preuve. En effet, grâce aux résultats du lemme on pourra développer l'écart quadratique $\Delta_n(f)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T |f(x) - S_n(x)|^2 dx \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T (f(x) - S_n(x)) f(x) dx - \frac{2}{T}\int_0^T (f(x) - S_n(x)) S_n(x) dx \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx - \frac{2}{T}\int_0^T f(x) S_n(x) dx \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx - [\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}((a_k)^2 + (b_k)^2)].
\end{aligned}$$

Corollaire 3.3.3. (Inégalité de Bessel). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0, T]$. Alors, les coefficients de Fourier de la fonction f vérifient l'inégalité de Bessel,

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n\geq 1}((a_n)^2 + (b_n)^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx. \tag{3.4}$$

Preuve. La proposition précédente implique que l'écart quadratique d'ordre $n \geq 0$, $\Delta_n(f) \geq 0$. Donc,

$$\tfrac{(a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}((a_n)^2 + (b_n)^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

En faisant tendre l'entier $n \geq 0$ vers l'infini, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\tfrac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n\geq 1}((a_n)^2 + (b_n)^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

Remarque 3.3.1. De l'inégalité de Bessel on déduit que pour toute fonction f qui est T-périodique, bornée et intégrable sur $[0, T]$, si a_n et b_n désignent les coefficients de Fourier de f alors les séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent. Ceci confirme donc le résultat du lemme de Lebesgue qui affirme que les coefficients de Fourier de la fonction f tendent vers zéro.

Le théorème suivant prouvé par Parseval montre qu'en effet l'inégalité de Bessel est une égalité.

Théorème 3.3.3. [6] (Identité de Parseval). Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et appartenant à $L^2([0, T])$. Les coefficient de Fourier de f vérifient l'égalité de Parseval :

$$\tfrac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n\geq 1}((a_n)^2 + (b_n)^2) = \frac{2}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx.$$

Ci-dessous, nous allons appliquer la formule de Parseval pour calculer la somme de certaines séries numériques remarquables.

Exemples 3.3.2. 1) Dans cet exemple nous allons calculer la somme des trois séries numériques,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Pour cela considérons la fonction 2π-périodique qui coïncide sur la période $[-\pi, \pi]$ avec la fonction impaire $f(x) = x$. Donc, les coefficients de Fourier a_n de f sont nuls tandis que ses coefficients de Fourier b_n se calculent par l'intégrale définie,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}[\frac{-x\cos(nx)}{n}]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx = 2\frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

d'après le théorème de Dirichlet on obtient la somme suivante

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad x = 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx).$$

Si on applique la formule de Parseval à la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ on trouve que

$$\tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n\geq 1} (b_n)^2 \Longrightarrow \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Donc, la série de Riemann,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

D'autre part, la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ peut s'écrire sous la forme

$$\tfrac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Par conséquent, la série de Riemann

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En fin la série alternée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Par conséquent, la série alternée

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

2) Calculons la somme des deux séries de Riemann suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$$

en utilisant la série de Fourier de la fonction 2π-périodique qui coïncide sur la période $[-\pi, \pi]$ avec la fonction $g(x) = x^2$. Notons que puisque la fonction g est paire ses coefficients de Fourier

b_n sont nuls tandis que les coefficients a_n se calculent par intégration par parties comme suit : $a_0 = \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}([\frac{x^2 \sin(nx)}{n}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2\sin(nx)}{n}dx) \\ &= \frac{2}{\pi}([\frac{2x\cos(nx)}{n^2}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{n^2}\cos(nx)dx \\ &= 4\frac{(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Dirichlet, puisque la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue donc sa série de Fourier converge en tout point $x \in [-\pi, \pi]$ vers

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Donc, si on pose $x = 0$ dans la série de Fourier précédente on obtient la somme

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Enfin, si on applique la formule de Parseval à la fonction g et à ses coefficients de Fourier on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx &= \frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n)^2 \\ \frac{2\pi^4}{5} &= \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n\geq 1}\frac{16}{n^4}. \end{aligned}$$

Après simplification on conclut que la série de Riemann

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}$$

3.4 Séries de Fourier d'une fonction non périodique

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, mais non périodique. On peut définir une infinité de fonctions ϕ de période T, intégrables sur un intervalle d'une période, telle que sur un intervalle Δ de longueur inférieure à T ([5]), on ait

$$\phi(x) = f(x) \qquad \text{pour } x \in \Delta.$$

Alors, si la série de Fourier de ϕ est convergente, pour tout $x \in \Delta$, on aura ainsi obtenu une série trigonométrique convergente vers f pour $x \in \Delta$.

Nous calculons ici, à titre d'exemple, des développements en série trigonométrique de la fonction constante $f(x) = 1$ dans divers intervalles. Considérons une fonction ϕ de période T, telle que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in [a, b[\\ -1 \text{ pour } x \in [b, a+T[\end{cases}.$$

Cette fonction ϕ, continue par morceaux, admet en ses points de discontinuité une dérivée à gauche et à droite égales à 0. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de ϕ converge vers 1 pour $x \in]a, b[$ et vers -1 pour $x \in]b, a+T[$.

Le choix de a et b reste arbitraire. Nous étudierons deux cas particuliers.

Exemple 3.4.1. Soit ϕ, de période T, définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } -\frac{T}{4} \leq x < \frac{T}{4} \\ -1 \text{ pour } \frac{T}{4} \leq x < \frac{3T}{4} \end{cases}.$$

ϕ étant une fonction paire, sa série de Fourier est une série de cosinus. Les coefficients de Fourier de ϕ sont :

$$a_{2p} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} \cos(\frac{4p\pi x}{T})dx - \frac{4}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{4p\pi x}{T})dx = 0$$
$$a_{2p+1} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} \cos(\frac{(4p+2)\pi x}{T})dx - \frac{4}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos(\frac{(4p+2)\pi x}{T})dx = (-1)^p\frac{4}{(2p+1)\pi}.$$

D'où le développement

$$\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos(\frac{(2p+1)2\pi x}{T}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in]kT - \frac{T}{4}, kT + \frac{T}{4}[\\ 0 \text{ pour } x = k\frac{T}{2} + \frac{T}{4} \\ -1 \text{ pour } x \in]kT + \frac{T}{4}, kT + \frac{3T}{4}[\end{cases}.$$

Il est ainsi possible de représenter la fonction $f(x) = 1$ dans un intervalle ouvert $]kT - \frac{T}{4}, kT + \frac{T}{4}[$, de longueur $\frac{T}{2}$ arbitraire mais finie, par une série de cosinus.

La même série représente la fonction $f(x) = -1$ dans les intervalles $]kT + \frac{T}{4}, kT + \frac{3T}{4}[$.

En prenant, par exemple, $T = 2\pi$ et $k = 0$, on obtient un développement en série de cosinus de $f(x) = 1$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$1 = \frac{4}{\pi}\{\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + ...\}, pour -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{3.5}$$

En faisant dans la formule (3.5) le changement de variable $y = x + \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$1 = \frac{4}{\pi}\{\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + ...\}, \text{pour } 0 < x < \pi. \tag{3.6}$$

Nous retrouverons ce résultat dans l'exemple suivant :

Exemple 3.4.2. Soit ϕ la fonction impaire, de période T, définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } 0 \leq x < \frac{T}{2} \\ -1 \text{ pour } -\frac{T}{2} \leq x < 0 \end{cases}.$$

En calculant la série de Fourier de ϕ on obtient

$$\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin(\frac{(2p+1)2\pi x}{T}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in]kT, kT + \frac{T}{2}[\\ 0 \text{ pour } x = k\frac{T}{2} \\ -1 \text{ pour } x \in]kT + \frac{T}{2}, (k+1)T[\end{cases}.$$

Ce développement représente la fonction $f(x) = 1$ dans les intervalles ouverts $]kT, kT + \frac{T}{2}[$. La formule (3.6) est obtenue en prenant $T = 2\pi$ et $k = 0$.

On remarquera que, dans ces deux exemples, la série obtenue en dérivant terme à terme n'est pas convergente, bien que la fonction ϕ admette une dérivée égale à 0 presque partout.

3.5 Résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires

Les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre jouent un rôle important en mécanique et en physique ([10], [12]).

Nous donnerons ici un exemple d'application des séries de Fourier à la résolution d'équations de la physique, exemple qui est précisément à l'origine des recherches, en mathématiques, sur les séries de Fourier.

Nous nous proposons de rechercher certaines solutions $u(x,t)$ d'équations au dérivées partielles de la forme

$$c^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t). \tag{3.7}$$

Nous utilisons pour les dérivées partielles les notations :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{etc.}$$

L'équation (3.7) est généralement appelée l'équation des cordes vibrantes.
On considère une corde de longueur L fixée en ses extrémités d'abscisses 0 et L d'une droite Ox. On suppose que cette corde, douée d'une certaine élasticité, est déformée dans un plan Oxu. Elle se met alors à vibrer et son état de mouvement est décrit par la fonction $u(x,t)$ qui représente, à l'instant t, le déplacement transversal, par rapport à la position d'équilibre, du point d'abscisse x.
Dans les conditions idéales, où l'on suppose la corde homogène, où l'on néglige son poids, et à l'approximation des petits mouvements, la fonction $u(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre, (3.7), où c est une constante définie par les propriétés de densité linéaire et de tension de la corde.
On démontre (cf $[4]$) que l'énergie mécanique de la corde est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\frac{1}{c^2}\{u_t(x,t)\}^2 + \{u_x(x,t)\}^2)dx. \tag{3.8}$$

Nous vérifierons cette propriété après avoir calculé une solution $u(x,t)$. Pour la justification des équations (3.7) et (3.8) on se reportera à un cours de Physique ($[12]$).
Notre but n'est pas de trouver la solution générale de équation (3.7), mais de déterminer la solution particulière correspondant à un problème physique donné. Il est donc nécessaire de commencer par établir les conditions qui spécifient cette solution, conditions qui sont de deux types : les conditions aux limites et les conditions initiales.
De plus, il est entendu ici que la fonction $u(x,t)$ recherchée doit être définie pour $x \in [0,L]$ et $t \geq 0$, et admettre, en tout point de ce domaine du plan (x,t), des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2.

• Conditions aux limites

Pour définir le problème physique régi par l'équation (3.7), il est nécessaire de considérer les conditions au limites.
Ce sera, par exemple,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{3.9}$$

• Conditions initiales

Cependant, l'équation (3.7) admet une infinité de solutions vérifiant les conditions aux limites. Cette situation est due au fait que les mouvements qui peuvent être initialement imprimés à une corde tendue entre deux points sont divers.

il est donc nécessaire de connaitre les conditions supplémentaires que l'on doit imposer, dans la recherche d'une solution particulière de l'équation, correspondant au problème physique donné, pour assurer l'unicité de cette solution. Cette question a été résolue par par Cauchy (cf [2]), sous la forme de conditions initiales.
Cauchy a montré que l'équation (3.7), qui est du second ordre en t, que deux données initiales sont nécessaires :

$$u_0(x) = u_(x, 0) \qquad et \qquad v_0(x) = u_t(x, 0) \tag{3.10}$$

qui représentent respectivement la forme de la corde et la distribution des vitesse le long de la corde à l'instant $t = 0$, pris comme instant initial.
Ces conditions initiales doivent, en particulier, vérifier les conditions aux limites. Ainsi, les conditions aux limites (3.9) imposent

$$u_0(0) = u_0(L) = 0, \qquad v_0(0) = u_t(0, 0) = u_t(0, 0) = v_0(L) = 0. \tag{3.11}$$

De plus, pour que la méthode des séries de Fourier, telle que nous l'exposons dans cette section, soit applicable, les fonctions de x, définies pour $x \in [0, L]$, que sont les conditions initiales, doivent présenter certaines propriétés de dérivabilités que nous indiquerons plus loin.

• Résolution

La résolution de l'équation (3.7) par la méthode des séries de Fourier consiste à rechercher la solution $u(x, t)$, pour chaque valeur de t, sous la forme d'un développement en série trigonométrique en x, s'il existe.
On cherche donc $u(x, t)$ sous la forme :

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(t) \cos(n\omega x) + b_n(t) \sin(n\omega x)] \tag{3.12}$$

Théorème 3.5.1. L'équation aux dérivées partielles,

$$c^2 u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t),$$

admet une et une seule solution définie par les conditions initiales

$$u_0(x) = u_(x, 0) \qquad et \qquad v_0(x) = u_t(x, 0),$$

sous réserve que les données initiales $u_0(x)$ et $v_0(x)$ satisfassent les conditions aux limites (3.11) et, de plus, des conditions de dérivabilités qui légitiment la démonstration.

Cette solution est, pour $x \in [0, L]$ et $t \geq 0$, la somme de la série :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\omega x)[\alpha_n \cos(n\omega ct) + \beta_n \sin(n\omega ct)], \qquad \omega = \frac{\pi}{L} \tag{3.13}$$

où les constantes α_n sont les coefficients de Fourier de la fonction impaire $U(x)$, de période $T = 2L$, égale à $u_0(x)$ pour $x \in [0, L]$:

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx \tag{3.14}$$

et où $\beta_n n\omega c$ est un coefficient de Fourier de la fonction impaire $V(x)$, de période $T = 2L$, égale à $v_0(x)$ pour $x \in [0, L]$:

$$\beta_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx. \tag{3.15}$$

La solution se présente comme superposition de solutions stationnaires

$$\sin(n\omega x)\cos(n\omega ct) \qquad \text{et} \qquad \sin(n\omega x)\sin(n\omega ct)$$

vérifiant les conditions aux limites.

Preuve. Pour une corde de longueur L fixée en ses extrémités d'abscisses 0 et L, toute solution de l'équation (3.7) doit satisfaire aux conditions au limites (3.9). Il faut donc que le développement (3.12) satisfasse les deux conditions suivantes :

$$u(0,t) = \tfrac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) = 0$$
$$u(L,t) = \tfrac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(t)\cos(n\omega L) + b_n(t)\sin(n\omega L)] = 0.$$

Des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont :

$$a_0(t) = a_n(t) = 0, \qquad \omega L = \pi.$$

On cherche donc un développement de $u(x,t)$ de la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin(n\omega x), \qquad \omega = \tfrac{\pi}{L}.$$

Si on admet que ce développement peut être dérivé terme à terme, à l'ordre 2, par rapport à x et t, on obtient

$$u_{xx}(x,t) = -\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(t)\sin(n\omega x), \qquad u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b"_n(t)\sin(n\omega x).$$

Alors l'équation (3.7) des cordes vibrantes sera satisfaite si $\quad b"_n(t) = -c^2\omega^2 b_n(t).$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$b_n(t) = \alpha_n \cos(n\omega ct) + \beta_n \sin(n\omega ct).$$

Ayant ainsi tenu compte de l'équation (3.7) et des conditions aux limites (3.9), nous recherchons $u(x,t)$ sous la forme (3.13), qui représente l'ensemble des solutions de l'équation du mouvement d'une corde de longueur L, fixée à ses extrémités.

Il reste à déterminer les constantes α_n et β_n qui doivent être fixées par les conditions initiales $u_0(x)$ et $v_0(x)$.

De (3.13), on déduit

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(n\omega x), x \in [0,L]. \tag{3.16}$$

En admettant que la série (3.13) est dérivable, il vient que

$$v_0(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin(n\omega x), x \in [0,L]. \tag{3.17}$$

Les séries de sinus (3.16) et (3.17) représentent des fonctions impaires, de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2L$.

En nous appuyant sur l'étude de la section 2, nous pouvons conclure que les coefficients α_n sont les coefficients de Fourier de la fonction impaire $U(x)$, de période $T = 2L$, égale à $u_0(x)$ pour $x \in [0,L]$. D'où la formule (3.14)

De même, $\beta_n n\omega c$ est un coefficient de Fourier de la fonction impaire $V(x)$ de période $T = 2L$, égale à $v_0(x)$ pour $x \in [0,L]$, ce qui implique la formule (3.15).

• Solutions Stationnaires

Les fonctions $\begin{cases} c_n(x,t) = \sin(n\omega x)\cos(n\omega ct) \\ s_n(x,t) = \sin(n\omega x)\sin(n\omega ct) \end{cases}, \qquad n = 1, 2, ...$ où $\omega = \frac{\pi}{L}$

sont solutions de l'équation aux dérivées partielles (3.7) et satisfont les conditions aux limites (3.9). Produits d'une fonction de x et une fonction de t, elles sont dites "à variables séparées" et sont appelées des solutions stationnaires.

Les solutions stationnaires $c_n(x,t)$ correspondent aux conditions initiales

$$u_0(x) = c_n(x,0) = \sin(n\omega x), \qquad v_0(x) = (c_n)_t(x,0) = 0.$$

Pour les solutions $s_n(x,t)$, on a

$$u_0(x) = s_n(x,0) = 0, \qquad v_0(x) = (s_n)_t(x,0) = n\omega c \sin(n\omega x).$$

En utilisant les formules (3.16) pour calculer les états stationnaires, on trouve pour c_n et s_n la valeur commune

$$E = \tfrac{n^2\pi^2}{4L}$$

qui est une constante.

La solution de (3.13) se présente comme une superposition de solutions stationnaires.

• Étude de la validité de la méthode des séries de Fourier

La validité de cette méthode dépend des propriétés des données initiales $u_0(x)$ et $v_0(x)$.

D'une part $u_0(x)$ et $v_0(x)$ doivent être intégrables sur $[0, L]$ pour que les coefficients α_n et β_n soient définis par (3.14) et (3.15).

D'autre part, ces fonctions doivent satisfaire les conditions aux limites (3.11).

En particulier, des conditions suffisantes pour la validité de la méthode sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.5.2. [4] Soient $U(x)$ et $V(x)$ les fonctions impaires, de période $2L$, respectivement égales à $u_0(x)$ et $v_0(x)$ pour $x \in [0, L]$.

Si $U(x)$ et ses dérivées sont absolument continues jusqu'à l'ordre 3 et si $V(x)$ et ses dérivées sont absolument continues jusqu'à l'ordre 2, alors la solution de l'équation des cordes vibrantes est donnée par le théorème précédent.

La solution correspondante de l'équation des cordes vibrantes peut encore s'écrire sous la forme compacte suivante (cf [7]) :

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[U(x+ct) + U(x-ct)] + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} V(\theta)d\theta.$$

• Calcul de l'énergie

Nous calculons l'énergie du mouvement à partir de la formule (3.8) et de la solution (3.13), en supposant que les séries obtenues en dérivant sont uniformément convergentes :

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t)\cos(n\omega x), \qquad A_n(t) = n\omega[\alpha_n \cos(n\omega ct) + \beta_n \sin(n\omega ct)],$$
$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t)\sin(n\omega x), \qquad B_n(t) = n\omega[-\alpha_n \sin(n\omega ct) + \beta_n \cos(n\omega ct)].$$

En appliquant, à t fixé, l'égalité de Parseval à ces séries trigonométriques en x, on obtient

$$\tfrac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[u_x(x,t)]^2dx = \tfrac{1}{L}\int_0^L[u_x(x,t)]^2dx = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[A_n(t)]^2,$$
$$\tfrac{1}{2L}\int_{-L}^{L}[u_t(x,t)]^2dx = \tfrac{1}{L}\int_0^L[u_t(x,t)]^2dx = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}[B_n(t)]^2.$$

D'où

$$E = \tfrac{L}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\{[A_n(t)]^2 + \frac{1}{c^2}{}_n(t)]^2\} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\pi^2}{4L}(\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

On constate que l'énergie est une constante. De plus, en comparant avec l'énergie précédemment obtenue, on remarque que l'énergie d'un mouvement est égale à la somme des énergies des mouvements stationnaires qui le composent.

Portée pédagogique

Dans ce chapitre il est question pour nous de donner l'intérêt des séries de fonctions (séries entières et les séries de Fourier) dans l'enseignement secondaire, supérieur et dans la vie courante.

4.1 Portée pédagogique au supérieure

En analyse, les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. C'est à partir de ce concept que s'est développée la branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse harmonique.
Nous supposons que le cours sur les séries entières est connu.
On voit là que contrairement aux autres séries de fonctions, les séries entières sont bien adaptées à la dérivation. Grâce à cette propriété, elles constituent un outil pratique pour la résolution de certaines équations différentielles (cours de niveau 2 filière mathématiques et filière physique) :

Exemple 4.1.1. On cherche une série entière qui soit égale à sa dérivée (donc on cherche une série entière solution de $f' - f = 0$). On suppose donc qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Donc $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.
Donc $f'(x) - f(x) = 0$ donc pour tout $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_n) x^n = 0$.
D'où on a $(n+1)a_{n+1} = a_n$. ie $a_0 = a_1$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{6}$.......
Montrons par récurrence que $a_n = \frac{a_0}{n!}$: c'est vrai aux rangs 1, 2 et 3. Supposons que ça l'est encore au rang k : $a_k = \frac{a_0}{k!}$. Alors $a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1} = \frac{a_0}{(k+1)!}$
La série ainsi formée, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence ∞ et on peut montrer en utilisant le

théorème de Taylor-Lagrange que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \exp(x)$.
Donc toute série entière solution de $f' - f = 0$ est de la forme $C \exp(x)$ où C est une constante.
En fait il n'y a pas d'autre solution, définie sur un intervalle : si g est définie sur un intervalle I et telle que $g' - g = 0$, alors

$$\left(\frac{g(x)}{\exp(x)}\right)' = \frac{g'(x)\exp(x) - g(x)\exp(x)}{\exp(2x)} = 0.$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $\frac{g(x)}{\exp(x)} = C$. Donc $g(x) = C \exp(x)$.
Avec cet exemple nous voyons comment les élèves du niveau 2 mathématiques peuvent utiliser les séries de fonctions (séries entières) pour résoudre une équation différentielle.
On peut aussi s'intéresser aux équations différentielles ordinaires et linéaires réelles de degré deux,

$$p(x)y"(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = 0$$

tel que au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $p(x_0) \neq 0$ et $r(x_0) \neq 0$. Ces équations différentielles sont dites régulières au point x_0.

Exemple 4.1.2. Cherchons une solution développable en séries entière au voisinage de zéro pour l'équation differentielle régulière,

$$y" - xy' + y = 0.$$

Posons la série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, ses deux premières dérivées sont

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n \\ y"(x) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation différentielle $y" - xy' + y = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 0 \\ (2a_2 - a_0) + \sum_{n\geq 1}((n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n - a_n)x^n &= 0 \\ (2a_2 - a_0) + \sum_{n\geq 1}(n+1)((n+2)a_{n+2} - a_n)x^n &= 0. \end{aligned}$$

Donc, si on compare les deux membres de la dernière ligne on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 = y(0), \\ a_1 = y'(0), \\ (n+2)a_{n+2} = a_n, \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

qui définit les a_n par une relation de récurrence grâce à laquelle on obtient,

$$\begin{cases} a_{2n-1} = \frac{a_1}{(2n-1)(2n-3)...5.3} \\ a_{2n} = \frac{a_0}{(2n)(2n-2)...4.2} \end{cases}.$$

Donc, la solution de l'équation différentielle $y" - xy' - y = 0$ possède une solution développable en série entière au voisinage de zéro, $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, où

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)(2n-2)...4.2} \\ y_2(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-3)...5.3} \end{cases}.$$

sont des séries entières dont le rayon de convergence est infini.

La raison d'être de ce cours est la présence des séries de Fourier au programme de nombreuses institutions : sections de BTS (électronique, optique, etc.). Les séries de Fourier sont capitales pour la physique. En effet l'intérêt des séries de Fourier apparaît notamment quand on cherche à résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre associées aux circuits électriques. Considérons un circuit RLC comprenant un condensateur de capacité C, une bobine d'inductance L et une résistance R. On envoie dans ce circuit un courant alternatif, dont la tension est une fonction périodique s, et on s'intéresse à la charge q du condensateur. L'équation (E) qui régit ce circuit est $Lq" + Rq' + \frac{q}{C} = s(t)$. On sait qu'on en trouve les solutions en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E) une solution particulière de (E). Lorsque le signal s est sinusoïdal, par exemple $s(t) = \sin t$, c'est facile car on cherche une solution de la forme : $a\cos t + b\sin t$. Mais, souvent, le signal fourni est plus compliqué, et pas forcément régulier (signal en créneau ou en dents de scie par exemple). Si l'on a une décomposition de s en somme de fonctions trigonométriques : $s(t) = \sum_{k=0}^{N}(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t))$ le calcul est encore facile en traitant séparément le cas de chaque terme et en les ajoutant (principe de superposition). En général on ne peut espérer avoir un tel développement avec une somme finie et c'est pourquoi on va essayer d'écrire la fonction périodique s comme somme d'une série trigonométrique. C'est toute la problématique des séries de Fourier. Joseph Fourier a introduit les séries qui portent son nom à propos d'une autre question de physique : l'équation de la chaleur (cours de quatrième année filière mathématiques). Les séries de Fourier sont importantes pour les informaticiens qui font le réseau (car les sinusoïdes sont les signaux les plus faciles à utiliser lors de l'analyse de circuits ou de systèmes).

La base de Fourier est en fait très bien adapté pour étudier les phénomènes oscillatoires, et ces derniers sont abondants dans la vie de tous les jours : le mouvement d'un camion sur un pont génère des vibrations dans toute la structure de ce dernier ; le mouvement des pistons dans le moteur met la voiture en vibration ; une onde électromagnétique provoque l'oscillation des électrons à la surface du métal, Nous ne pourrions pas traiter ces problèmes si nous ne disposions pas de la base de Fourier.

4.2 Portée pédagogique au secondaire

Pour l'enseignant du lycée les séries de Fourier constituent un bagage intellectuel suffisant pour aborder le cours sur les suites numériques en classe de première et en classe de terminale scientifique et le calcul intégrale en terminale scientifique et littéraire.

Un cours sur les circuits RLC est vu en terminale scientifique et en terminale F_2, raison pour laquelle les enseignants de physique du secondaire doivent avoir une notion sur la nouvelle méthode d'analyse de signaux et de circuits : la série de Fourier.

La maîtrise des séries de Fourier permettra au futur enseignant de mieux préparer les cours de sur la trigonométrie, sur les nombres complexes selon l'A.P.C.

4.3 Intérêt des séries de Fourier dans la vie de tous les jours

La base de Fourier est en fait très bien adapté pour étudier les phénomènes oscillatoires, et ces derniers sont abondants dans la vie de tous les jours : le mouvement d'un camion sur un pont génère des vibrations dans toute la structure de ce dernier ; le mouvement des pistons dans le moteur met la voiture en vibration ; une onde électromagnétique provoque l'oscillation des électrons à la surface du métal, Nous ne pourrions pas traiter ces problèmes si nous ne disposions pas de la base de Fourier.

Conclusion

Tout au long de ce mémoire, nous nous sommes appliqués à présenter les séries de Fourier et une application. A cet effet nous avons d'abord présenté les séries numériques de façon très brève. Pour cela nous avons étudié entre autres le critère de Cauchy et celui de d'Alembert pour la convergence des séries numériques à terme positif.

Ensuite nous avons étudier les suites et séries de fonctions. Nous sommes partis de quelques résultats donnés sur les séries numériques pour déterminer le domaine de convergence simple et uniforme des séries de fonctions à l'exemple du théorème de Weierstrass et d'Abel.

Enfin nous avons présenté les séries de Fourier et une applications. Pour cela nous avons calculer les coefficients de Fourier, puis nous avons énoncé le théorème de Dirichlet pour la convergence simple des séries de Fourier et celui de Parseval et nous avons utilisé ces deux théorèmes pour calculer les sommes de quelques séries numériques. Nous avons aussi utilisé les séries de Fourier pour résoudre l'équation des cordes vibrantes. Il ressort que la décomposition en séries de Fourier d'une fonction permet de comprendre le comportement d'un système linéaire vis à vis d'une excitation quelconque. Cette excitation peut en effet se décomposer en une somme d'excitations sinusoïdales.

Bibliographie

[1] J. BASS, (1961), *Cours de mathématiques (2 volumes), Masson et* C^{ie}.

[2] P. BENOIST-GUEUTAL, M. COURBAGE, (1992), *Mathématiques pour la physique (Tome II), Eyrolles*, Paris.

[3] R. DEHEUVELS, (1957), *l'Intégrale de Lebesgue, annales de l'Institut Fourier*, pp. $383-393$.

[4] J. DIEUDONNE, (1986), *Calcul infinitésimal, Hermann*, 2ème édition.

[5] G. B. FOLLAND. (1992), *Fourier analysis and its applications, Wadsworth and Brooks*.

[6] J. HERIVEL, (1980), *Joseph Fourier : face aux objections contre sa théorie de la chaleur, Lettres inédites*, $1808-1816$, *CTHS : Mémoires de la Section des Sciences* 8.

[7] J. LELONG-FERRAND & J.-M. ARNAUDIES, (1977) *Cours de Mathématiques - Classe préparatoires et premier cycle universitaire, Dunod* (tome 2 : analyse, 4ème édition).

[8] J.-P. KAHANE & P.-G. LEMARIÉ-RIEUSSET, (1998), *Séries de Fourier et Ondelettes, Cassini*.

[9] M. REED, B. SIMON, *Functionnal Analysis (4 volumes), Academic press, New York*, (1980).

[10] P. ROMAN, (1975), *Some Modern Mathematics for Physicists and other Outsiders, Pergamon Press Inc*.

[11] T. W. KÖRNER, (1988), *Fourier analysis, Cambridge university press*.

[12] L. SCHWARTZ, (1961), *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann*.

[13] E. T. WHITTAKER, G.N. WATSON, (1946), *A Course of Modern Analysis, Cambridge*.