UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

****

FACULTÉ DES SCIENCES

****

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

****

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

****

FACULTY OF SCIENCES

****

HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

INTRODUCTION À L'AIDE MULTICRITÈRE À LA DÉCISION : MÉTHODES QUANTITATIVES.

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de professeur de l'Enseignement Secondaire Deuxième grade en Mathématiques.

Option : Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales

Par

NZUEGO BELBARON

Titulaire du DI.P.E.S I en Mathématiques.

Matricule : **14Y452**

Sous la direction de :

TCHANTCHO Bertrand

Professeur

Année académique : 2018-2019

INTRODUCTION À L'AIDE MULTICRITÈRE À LA DÉCISION : MÉTHODES QUANTITATIVES

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de DIPES 2 en Mathématiques.

Option : Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales.

Par :

NZUEGO BELBARON

DI.P.E.S I en Mathématiques et Licencié en Mathématiques

Matricule : 14Y452

Sous la direction du

Pr Bertrand TCHANTCHO

Professeur

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

JUIN 2019

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce travail,

À

Ma mère KAMTCHOU Rose celle qui a fait de moi l'homme dont je suis fière d'être aujourd'hui.

✠ Remerciements ✠

Je rends tout d'abord grâce à Dieu le père tout puissant qui m'a donné la force nécessaire pour parachever ce travail dans de bonnes conditions. Ce mémoire voit son accomplissement grâce au soutien multiforme de certaines personnes que j'ai eu la grâce d'avoir à mes côtés durant cette année de travail. Mes remerciements s'adressent,

Au Professeur Bertrand TCHANTCHO qui m'a fait l'honneur de diriger ce mémoire. Par votre grande disponibilité malgré vos multiples responsabilités et surtout votre capacité d'écoute exceptionnelle.

À tous les enseignants du département de mathématiques de l'école normale supérieure de Yaoundé I et particulièrement ceux du laboratoire de MASS pour la riche formation qu'ils m'ont donnée.

À toute l'équipe du laboratoire de MASS pour leurs conseils, leur accompagnement et leurs suggestions. Je pense particulièrement à KALDJOB KALDJOB Paul Alain ; AYIAGNIGNI Mohamed ; ALIHOU et DOGMO Chanceline pour leurs critiques et suggestions importantes lors de la lecture de ce mémoire.

À toute ma grande famille pour le soutien qu'elle a eu à m'apporter pour ma réussite académique. Tout particulièrement à mes parents Gaston et Rose, mes tantes Marie, Phiomène, Angelle et Solange, mes frères et sœurs TONGUI NADEGE, BANKOUE Yanick, FOUNKEU Jaff, NZOUENGO Kelly et NKEUGNO Leonce.

À toute l'équipe de mon voisinage. Tout particulièrement à Bachelard, Odile, Carine,Brady...

À mes grandes mères MBODA et NZOUENGO pour leurs encouragements.

À mes camarades de promotion. Tout particulièrement à NDOHEU Jospin, ZAPOUE Paulin, KAMGA Romaric, OMBOUDOU Thierry, NJOMI Kevin... avec qui j'ai surmonté plusieurs obstacles.

Aux nombreuses personnes que j'omets involontairement et qui de près ou de loin ont contribué à la production de ce travail.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

NZUEGO Belbaron

✠ Résumé ✠

Ce travail est une revue de la littérature sur les méthodes quantitatives d'aide multicritère à la décision(AMCD). Nous résolvons des problèmes d'aide multicritère à la décision à partir des méthodes quantitatives et nous conduisons une étude comparative de ces méthodes. Le modèle de l'intégrale de Choquet 2-additive est un bon compromis entre un modèle simple à comprendre comme la moyenne générale pondérée et un modèle expressif comme l'intégrale de Choquet générale.

Mots-clés : AMCD ; méthodes quantitatives ;moyenne générale pondérée ; intégrale de Choquet 2-additive ; intégrale de Choquet générale.

✠ Abstract ✠

This work is a review of the literature on quantitatives methods of multicriteria aid to the decision(MCDA).We solve problems of multicriteria aid to the decision thank to quantitatives methods and we conduct a comparative study of these methods. The model of 2-additive Choquet integral is a good compromise between a simple model to understand like the general balanced mean and an expressive model like the general Choquet integral.

Keys words : MCDA ; quantitatives methods ; general weighted average ; 2-additive Choquet integral ; general Choquet integral.

✠ Table des matières ✠

✠ Liste des tableaux ✠

✠ Introduction générale ✠

Dans bien des situations de la vie, l'être humain est confronté à des problèmes complexes où son intervention par une prise de décision est plus que nécessaire. Citons par exemple l'achat d'un téléphone en tenant compte du prix, du type de téléphone, de la qualité et de la marque ; la sélection des candidats pour un poste d'ingénieur en se basant sur le niveau d'étude après le baccalauréat, le nombre d'années d'expérience, la note obtenue lors de l'entretien ; le problème de choix d'un tronçon d'une voie ferrée à construire reliant deux villes parmi plusieurs propositions de tracés, on devra désigner ici le meilleur tracé qui prend en compte les aspects écologiques et financiers.

Ainsi, à chaque problème posé, l'homme doit rechercher la "meilleure" solution pour le résoudre. Parfois il se heurte à d'énormes difficultés quant au choix de la "meilleure" solution à cause de l'hétérogénéité de ces solutions. C'est pourquoi en pratique il est préférable de résoudre ces problèmes complexes via un processus scientifique appelé aide à la décision permettant la modélisation mathématique du problème concerné.

Analyser le comportement d'un individu confronté à un problème de choix entre plusieurs alternatives suivant des points de vue souvent contradictoires, lui procurer une aide pour mieux cerner ses préférences et les modéliser sont des enjeux majeurs de l'Aide Multicritère à la Décision (AMCD), une discipline de la recherche opérationnelle née dans les années soixante. Son objectif est donc de faciliter, grâce à un analyste (ou facilitateur), la tâche d'un décideur dans sa recherche d'une "meilleure" alternative parmi plusieurs sur la base de critères de décision.

Le processus d'aide à la décision met en scène deux acteurs : le décideur et l'analyste (ou le facilitateur). Le premier a la responsabilité de décider du choix final de la "meilleure" solution au problème. Il peut intervenir tout le long du processus en donnant ses préférences, ses priorités, en émettant des avis et autres souhaits. L'analyste quant à lui facilite le processus d'aide à la décision par une analyse méthodologique et scientifique du problème, l'apport méthodologique étant plus important que celui scientifique. Il utilise pour cela des formulations claires et des structures rationnelles nécessaires à la modélisation du problème. Il peut aussi interagir avec le décideur à travers des discussions pour requérir son avis ou la modification de certaines données fournies par ce dernier.

Dans la littérature, on retrouve deux grandes approches pour résoudre un problème d'AMCD : Approche qualitative(comparer puis agréger) et l'Approche quantitative(agréger puis comparer). Il est donc question dans ce mémoire, de passer en revue quelques méthodes quantitatives d'AMCD existantes dans la littérature. Pour cela, nous présentons tout d'abord dans le premier chapitre les raisons d'être des méthodes d'AMCD, quelques exemples de problèmes d'AMCD, les problématiques en AMCD et enfin le formalisme. Ensuite, au deuxième chapitre, nous présentons quelques méthodes dites quantitatives (agréger puis comparer) à l'instar des méthodes d'optimisation multicritère, les fonctions max et min, une méthode associée à une fonction d'utilités additives (la moyenne générale pondérée), une méthode associée à une fonction d'utilités non additives (l'intégrale de Choquet). Enfin, le troisième et dernier chapitre quant à lui porte sur l'examen de certaines méthodes à travers quelques propriétés normatives. Ce travail s'achève par une conclusion.

Chapitre Un

PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES PROBLÈMES D'AIDE MULTICRITÈRE À LA DÉCISION

Dans ce chapitre, nous présentons les raisons d'être des méthodes d'AMCD, nous donnons quelques exemples de problèmes d'AMCD et enfin nous présentons le modèle avec les différentes problématiques.

1.1. Les raisons d'être des méthodes multicritères

Les méthodes d'analyse multicritère ou, plus exactement, les méthodes d'aide multicritère à la décision sont des techniques assez récentes et en plein développement. Par leur manière d'intégrer tout type de critères. Avant l'apparition des méthodes d'AMCD, les problèmes de décision se ramenaient le plus souvent à l'optimisation d'une fonction économique. Cette approche avait le mérite de déboucher sur des problèmes mathématiques bien posés mais qui n'étaient pas toujours représentatifs de la réalité car :

- ♣ la comparaison de plusieurs actions possibles se fait rarement suivant un seul critère ;
- ♣ les préférences sur un critère sont, dans bien des cas, difficilement modélisables par une fonction ;
- ♣ lorsqu'il y a plusieurs objectifs, il est impossible de les atteindre tous à la fois (Maystre et al., 1994).

Ainsi, nous pouvons dire que le domaine de réussite de la recherche opérationnelle est constitué de tous les problèmes qu'il est possible d'isoler du processus de gestion du système (ex. : choix du mélange optimal pour des rations alimentaires destinées au bétail). Par complément, le domaine d'échec de la recherche opérationnelle comprend toutes les décisions de gestion qu'on ne peut isoler de leur contexte (ex. : tracé d'une autoroute). Dans tous ces derniers cas, la recherche opérationnelle a déçu car on lui avait fixé un objectif (trop) ambitieux : **désigner, en toutes circonstances, la meilleure décision, l'optimum même quand cette notion pouvait être vide de sens (Schärlig, 1985).**

En effet, cette optimisation se base sur des hypothèses extrêmement lourdes. La première, dite de **globalité**, suppose que, par la recherche d'une décision optimale parmi toutes les actions potentielles, on pourra désigner une action unique comme la meilleure. Cela présume que toutes les actions potentielles comprennent tous les aspects de la question et sont mutuellement exclusives. Or elles sont souvent complémentaires, partielles et rarement globales.

La seconde hypothèse, dite de **stabilité** stipule que l'ensemble des actions potentielles n'est jamais remis en cause lors de l'étude. Or cette dernière fait souvent jaillir de nouvelles idées au cours de son déroulement.

La troisième et dernière hypothèse est celle de **complète comparabilité transitive**. Elle souffre de trois grandes critiques :

→ Elle ne tient pas compte de la situation d'incomparabilité ;

→ Elle ignore le fait que l'indifférence est parfois intransitive ;

→ Elle oublie que la préférence elle-même n'est pas nécessairement transitive.

La première critique intervient par exemple lorsqu'une personne se retrouve face à des alternatives sans qu'elle puisse dire laquelle elle préfère. C'est le cas de celui qui cherche à éclairer une décision mais qui est gêné par l'imperfection des informations dont il dispose. Ce sont des situations embarrassantes mathématiquement mais tellement humaines. Par ailleurs, l'intransitivité de l'indifférence repose aussi sur des considérations humaines. Être indifférent entre a et b puis entre b et c ne signifie pas forcément que l'on est indifférent entre a et c. Pour s'en convaincre, considérons un indice de diversité d'essences forestières, variant de 0 à 1 de façon continue, 1 représentant la diversité maximale. Il est évidemment possible de concevoir des aménagements forestiers donnant lieu à toute une gamme de valeurs de cet indice. De même, un classement de ces aménagements selon cet indice est aisément réalisable. Si on passe de l'aménagement à indice nul à l'aménagement dont l'indice est de 0,1, on peut estimer que cette différence de diversité est négligeable. Idem entre 0,1 et 0,2, et ainsi de suite. Mais il est évident que la préférence remplacera l'indifférence lorsque l'intervalle entre deux indices sera de 0,5 par exemple. On voit donc que l'indifférence n'est pas l'analogue de l'égalité mathématique. Elle recouvre une situation de préférence **faible**, c'est-à-dire d'une préférence qui n'est pas suffisante pour être humainement ressentie et exprimée.

Pour démontrer l'intransitivité de la préférence, considérons le problème du choix d'un seul candidat parmi les trois candidats a, b, et c en utilisant la règle majoritaire. R^i désigne la préférence individuelle du votant i. Les préférences individuelles obtenues sont $R^1 = abc$, $R^2 = cab$ et $R^3 = bca$. Ainsi, suivant la règle majoritaire, $a \succ_{Maj(R)} b$, et $b \succ_{Maj(R)} c$ mais $c \succ_{Maj(R)} a$.

Ce phénomène d'intransitivité des préférences globales résultant de l'agrégation est très bien connu en théorie du vote sous le nom d'**effet Condorcet**.

Outre le postulat de l'existence d'un optimum, on notera que la recherche opérationnelle repose encore sur deux autres postulats, tout aussi contestables, qui portent l'un sur la **décision**, l'autre sur le **modèle**.

La conception classique de l'optimum sous-entend que l'étude conduit à une décision nette, indiscutée, prise une fois pour toutes, à un moment précis et par une personne responsable. En fait, une décision est souvent un processus chaotique, fruit de nombreuses confrontations entre les systèmes de préférences de plusieurs personnes, et fruit de toutes sortes d'interactions et de synergies.

Quant au modèle, il est censé représenter le problème sous une certaine forme mathématique, pour pouvoir ensuite lui appliquer des règles et des procédés mathématiques et en faire sortir ainsi la solution optimale. Encore faut-il être certain que le modèle retenu représente bien la réalité, ce qui n'est pas souvent le cas.

Voila donc pourquoi, dans des problèmes où les hypothèses énoncées ci-avant n'étaient pas vérifiées, la recherche opérationnelle a échoué. Après avoir exposé la misère de l'optimisation, reste à démontrer que la solution réside dans le bonheur du multicritère.

1.2. Démarche à suivre pour résoudre un problème d'AMCD.

En toute généralité, lorsqu'on pose un problème multicritère, compte tenu d'un certain ensemble de critères, on recherche la solution la plus adéquate possible.

Elle peut se faire en **cinq étapes :**

- **Identifier l'objectif global de la démarche et le type de décision.** Les problèmes d'AMCD sont souvent de qualité multiple.
- **Dresser la liste des solutions possibles.** Une solution est une action réelle ou fictive provisoirement jugée réaliste par un acteur au moins ou présumée comme telle par l'homme d'étude en vue de l'aide à la décision.

- ▼ **Dresser la liste des critères à prendre en considération.** Ces critères découlent des conséquences des actions, c'est-à-dire de tout effet ou attribut de l'action susceptible d'interférer avec les objectifs ou avec le système de valeurs d'un acteur du processus de décision, en tant qu'élément primaire à partir duquel il élabore, justifie ou transforme ses préférences (**Roy 1985**).
- ▼ **Établir le tableau des performances.** Ce tableau peut être constitué, en lignes, des critères, et en colonnes, des actions potentielles. Les valeurs qui remplissent ce tableau peuvent être ordinales ou cardinales, d'où l'appellation de performance.
- ▼ **Agréger ces jugements pour désigner la solution qui a les meilleures évaluations.** Il est question ici d'utiliser l'une des méthodes d'analyse multicritère.

Remarque 1.2.1. Dans le cadre de tout ce travail, nous supposons le tableau de performance connu.

1.3. Domaines d'application de l'AMCD.

Plus généralement, voici quelques situations relevant des problèmes d'AMCD :

- ▲ Choix d'un moyen de transport ;
- ▲ Engager du personnel ;
- ▲ Choix d'un site d'aménagement ;
- ▲ Sélection de fournisseurs ;
- ▲ Décision d'investissement ;
- ▲ Choix de l'utilisation d'une technologie ou d'un système d'informatique ;
- ▲ Élaboration du plan de production d'une usine ;
- ▲ Classement des projets soumis à une assemblée.

Nous présentons maintenant quelques exemples détaillés relevant des problèmes d'AMCD.

Exemple 1.3.1. Achat d'un vélo

Un individu veut acheter soit un vélo de course, soit un vélo tout terrain (VTT) suivant les seuls critères prix, robustesse et vitesse.

TABLE 1.1 – Achat d'un vélo

Critères / Alternatives	Prix(en millier de franc)	Robustesse	Vitesse(en km/h)
VTT	25	Très Bonne	20
Vélo de course	32	Moyenne	35

Sachant que les critères robustesse et vitesse sont à maximiser, mais le critère prix à minimiser : **Quel vélo doit-il acheter ?**

Exemple 1.3.2. Achat d'un téléphone

Un individu veut acheter soit un téléphone samsung, soit un téléphone huawei, soit un téléphone tecno suivant les seuls critères Prix, Rom, Batterie et Caméra(arrière).

TABLE 1.2 – Achat d'un téléphone

Critères / Alternatives	Prix(en millier de franc)	Rom(en Go)	Batterie(en mAh)	Caméra(en MP)
Samsung	110	32	2800	16
huawei	95	16	3000	16
tecno	100	16	3200	13

Sachant que les critères Rom , Batterie et Caméra sont à maximiser alors que le critère Prix est à minimiser : **Quel téléphone doit-il acheter ?**

Exemple 1.3.3. Choix d'un territoire

Le responsable d'un établissement scolaire de la ville de yaoundé voudrait choisir un territoire parmi trois T_1; T_2 et T_3 suivant les trois critères que sont : attractivité climatique ; Accessibilité piéton et l'automobile pour effectuer avec ses élèves les entrainements du défilé du 20 mai.

Table 1.3 – Choix d'un territoire

Critères / Alternatives	Attractivité climatique	Accessibilité piéton	Automobile
T_1	6	10	10
T_2	3	12	8
T_3	8	5	15

Sachant qu'il veut maximiser Attractivité climatique ; Accessibilité piéton et minimiser l'automobile :

Quel territoire doit-il choisir ?

1.4. Problématiques en AMCD

Dans l'AMCD la problématique est la manière dont l'aide à la décision doit être envisagée. Dans la littérature nous distinguons trois principales problématiques en AMCD :

- **La problématique du Choix** encore appelée **problématique** α : ici le but est d'éliminer les mauvaises alternatives afin d'obtenir un ensemble de bonnes alternatives qui soit de plus petite cardinalité possible.

  Exemple : l'achat d'un vélo
- **La problématique du Tri** encore appelée **problématique** β : ici le but est de placer les alternatives dans une catégorie jugée parmi des catégories prédéfinies généralement ordonnées.

  Exemple : Catégories de confort pour les offres(tres inconfortable, inconfortable, confortable, tres confortable).
- **La problématique de rangement** encore appelée **problématique** γ : ici le but est d'avoir un préordre partiel ou total sur l'ensemble des alternatives afin de les classer de la meilleure à la moins bonne.

  Exemple : le classement des projets soumis à une assemblée.

1.5. Formalisation

Précisons d'abord qu'un problème d'AMCD implique **deux acteurs principaux** :

- Le **décideur** : celui qui pose le problème et dont les préférences sont censées régir tout le processus décisionnel.

- L'**expert** : celui qui doit aider le décideur sur la base d'arguments scientifiques à prendre une décision. Il joue en effet le rôle de **facilitateur**.

Remarque 1.5.1. On parle volontiers **d'Aide** Multicritère à la Décision pour illustrer que la décision finale appartienne au décideur.

Pour résoudre un problème d'AMCD, les données suivantes sont indispensables pour l'expert.

∗ Un ensemble fini **A** de m **alternatives** possibles, avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$.

∗ Un ensemble fini **N** de n **critères** avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

∗ Une **utilité** de chaque alternative sur chacun des critères, $a_i = u_i(a)$ $\forall a \in A$ $\forall i \in N$, avec $u_i : A \longrightarrow B$ $\forall i \in N$, B étant un ensemble totalement ordonné. Ainsi, $u_i(a)$ est la valeur prise par l'alternative a sur le critère i.

Dans l'**exemple 1.3.1**, on a : $m = 2$ et **A**={VTT ; Vélo de course(VC)}.

$n = 3$ et **N**={ Prix(1) ; Robustesse(2) ; Vitesse(3)}.

u_1 (VTT) = 25 , u_1 (VC) = 32 , u_2(VTT) = Très bonne , u_2 (VC) = Moyenne

u_3 (VTT) = 20 et u_3 (VC) = 35.

Remarque 1.5.2. Certains critères sont souvent **contradictoires** (dans l'**exemple 1.3.1** le décideur souhaite simultanément minimiser le prix et maximiser la vitesse). Par ailleurs certains critères sont souvent exprimés dans des unités différentes (le prix et la vitesse par exemple). Il s'agit de quelques difficultés en décision multicritère.

Définition 1.5.1

- Un critère i est dit **quantitatif** lorsque $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire B est une partie de $\mathbb{R}$.
- Un critère i est dit **qualitatif** lorsqu'il n'est pas quantitatif, c'est-à-dire lorsque B n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.5.1. Le critère **prix** de l'**exemple 1.3.1** est **quantitatif**, pendant que le critère **robustesse** du même exemple est **qualitatif**.

Remarque 1.5.3. ♦ Dans un même problème d'AMCD, il est possible d'avoir simultanément des critères quantitatifs et ceux qualitatifs. Par ailleurs certains peuvent être à minimiser alors que d'autres sont à maximiser : c'est le cas du problème de l'**exemple 1.3.1** .

♦ Les critères quantitatifs évaluent pendant que ceux qualitatifs ordonnent.

♦ Tout critère qualitatif peut être numérisé(en effet pour un critère qualitatif donné, l'ensemble des valeurs prisent sur ce critère est totalement ordonné donc certaines quantités peuvent être établie sur ces valeurs).

Chapitre Deux

QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MULTICRITÈRE

Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques méthodes dites **quantitatives**, la problématique étant d'agréger en un seul critère puis de comparer. Nous supposons dans tout le chapitre, sauf mention du contraire que tous les critères sont numériques et à maximiser et aussi toutes les utilités sont du même unité. Une alternative a pourra être identifiée à un élément $(a_1; a_2; ...; a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

2.1. Méthodes d'optimisation multicritère

Définition 2.1.1

(Distance)

On appelle distance sur A toute application d de $A \times A$ vers $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

- $\forall a, b \in A$, $d(a; b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (Axiome de séparation)
- $\forall a, b \in A$, $d(a; b) = d(b; a)$ (Axiome de symétrie ou de commutativité)
- $\forall a, b, c \in A$, $d(a; b) \leq d(a; c) + d(c; b)$ (Inégalité triangulaire)

Dans la littérature on utilise généralement la distance euclidienne, la distance de Tchebychev ou la distance de Manhattan.

Définition 2.1.2

(Distance euclidienne)

La **distance euclidienne** entre deux alternatives a et b est donnée par :

$d_1(a;b) = \sqrt{\sum_{i\in N}(a_i - b_i)^2}$ où $a = (a_i)_{i\in N}$ et $b = (b_i)_{i\in N}$.

Définition 2.1.3

(Distance de Tchebychev)

La **distance de Tchebychev** entre deux alternatives a et b est donnée par :

$d_\infty(a;b) = \max_{i\in N} |a_i - b_i|$ où $a = (a_i)_{i\in N}$ et $b = (b_i)_{i\in N}$.

Définition 2.1.4

(Distance de Manhattan)

La **distance de Manhattan** entre deux alternatives a et b est donnée par :

$d_2(a;b) = \sum_{i\in N} |a_i - b_i|$ où $a = (a_i)_{i\in N}$ et $b = (b_i)_{i\in N}$.

Le but dans cette partie est de prendre un point particulier qui peut être le point idéal ou le point anti-idéal, puis d'agréger chaque alternative par la distance qui la sépare de ce point particulier.

★**En utilisant le point idéal**

Le **point idéal** est le point qui possède comme valeur sur chacun des critères le maximum du critère. Une alternative sera préférée à une autre si elle se rapproche (au sens d'une distance) la plus du point idéal.

Exemple 2.1.1. On considère le tableau multicritère suivant :

Table 2.1 – tableau de l'exemple 2.1.1

Critères / Alternatives	1	2	3
a	55	30	50
b	40	40	60
c	20	70	35

Le point idéal est $I = (55; 70; 60)$

Relativement à la **distance Euclidienne,** on a : $d_1(a, I) = \sqrt{0^2 + 40^2 + 10^2} = \sqrt{1700} \approx 41,23$, $d_1(b, I) = \sqrt{15^2 + 30^2 + 0^2} = \sqrt{1125} \approx 33,54$ et $d_1(c, I) = \sqrt{35^2 + 0^2 + 25^2} = \sqrt{1750} \approx 41,83$. Ce qui induit le classement total $b > a > c$.

Relativement à la **distance de Tchebychev** on a : $d_\infty(a; I) = max(\ 0; 40; 10) = 40$

$d_\infty(b; I) = max(\ 15; 30; 0) = 30$, et $d_\infty(c; I) = max(\ 35; 0; 25) = 35$. Ce qui induit le classement total $b > c > a$.

Relativement à la **distance de Manhattan,** on a : $d_2(a; I) = 0 + 40 + 10 = 50$,

$d_2(b; I) = 15 + 30 + 0 = 45$ et $d_2(c; I) = 35 + 0 + 25 = 60$. Ce qui induit le classement total $b > a > c$.

★En utilisant le point anti-idéal

Le **point anti-idéal** est le point qui possède comme valeur sur chacun des critères le minimum du critère. Une alternative sera préférée à une autre si elle s'éloigne (au sens d'une distance) la plus du point anti-idéal.

Exemple 2.1.2. Reprenons le tableau multicritère de l'exemple précédent

Table 2.2 – tableau de l'exemple 2.1.2

Critères / Alternatives	1	2	3
a	55	30	50
b	40	40	60
c	20	70	35

Le point anti-idéal est $N = (20; 30; 35)$

Relativement à la **distance Euclidienne,** on a : $d_1(a; N) = \sqrt{35^2 + 0^2 + 15^2} = \sqrt{1450} \approx 38,08$, $d_1(b; N) = \sqrt{20^2 + 10^2 + 25^2} = \sqrt{1125} \approx 33,54$ et $d_1(c; N) = \sqrt{0^2 + 0^2 + 40^2} = 40$. Ce qui induit le classement total $c \succ a \succ b$.

Relativement à la **distance de Tchebychev** on a : $d_\infty(a; N) = max(35; 0; 15) = 35$, $d_\infty(b; N) = max(20; 10; 25) = 25$, et $d_\infty(c; N) = max(0; 40; 0) = 40$; Ce qui induit le classement total $c \succ a \succ b$.

Relativement à la **distance de Manhattan,** on a : $d_2(a; N) = 35 + 0 + 15 = 50$, $d_2(b; N) = 20 + 10 + 25 = 55$ et $d_2(c; N) = 0 + 40 + 0 = 40$. Ce qui induit le classement total $b \succ a \succ c$.

Remarque 2.1.1.

- ♦ En utilisant le point idéal ou le point anti-idéal, on observe que le classement final peut varier en fonction de la distance choisie. En effet, des exemples ci-dessus, en utilisant le point idéal on a le classement $b \succ a \succ c$ relativement à la distance Euclidienne et $b \succ c \succ a$ relativement à la distance de Tchebychev. De même, le point anti-idéal nous induit le classement $c \succ a \succ b$ relativement à la distance de Tchebychev et $b \succ a \succ c$ relativement à la distance de Manhattan.
- ♦ Il est possible que pour un tableau de performance donné, une distance donnée, les deux approches précédentes donnent des résultats différents. En effet,considérons le tableau de l'exemple précédent et la distance Euclidienne. En utilisant le point idéal on a obtenu le classement $b \succ a \succ c$ pourtant en utilisant le point anti-idéal on a le classement $c \succ a \succ b$.

2.2. La fonction minimum et la fonction maximum

Le but ici est de comparer les alternatives en comparant leurs minima ou leurs maxima.

✠La fonction minimum

L'idée est de prendre le minimum de chaque alternative et de les comparer.

Définition 2.2.1

Le minimum d'une alternative a est donné par $min(a) = min_{i \in N}(a_i)$

Définition 2.2.2

Soient x et y deux alternatives :

★x est préférée à y si et seulement si $min(x) > min(y)$

★x et y sont indifférents lorsque $min(x) = min(y)$

Exemple 2.2.1. On considère le tableau multicritère ci-dessous :

TABLE 2.3 – tableau de l'exemple 2.2.1

Critères / Alternatives	1	2	3
a	2	6	9
b	3	4	5
c	1	8	11

Déterminons un classement de ces alternatives en utilisant la fonction minimum.

$min(a) = 2$

$min(b) = 3$

$min(c) = 1$

Relativement à la fonction minimum, nous avons le classement suivant : $b \succ a \succ c$.

✠La fonction maximum

L'idée est de prendre le maximum de chaque alternative et de les comparer.

Définition 2.2.3

Le maximum d'une alternative a est donné par :$max(a) = max_{i \in N}(a_i)$.

Définition 2.2.4

Soient x et y deux alternatives :

★x est préférée à y si et seulement si $max(x) > max(y)$

★x et y sont indifférents lorsque $max(x) = max(y)$

Exemple 2.2.2. Reprenons le tableau de l'exemple précédent :

TABLE 2.4 – tableau de l'exemple 2.2.2

Critères / Alternatives	1	2	3
a	2	6	9
b	3	4	5
c	1	8	11

Déterminons un classement de ces alternatives en utilisant la fonction maximum.

$max(a) = 9$

$max(b) = 5$

$max(c) = 11$

Relativement à la fonction maximum, nous avons le classement suivant : $c > a > b$.

Remarque 2.2.1. En utilisant la fonction minimum ou la fonction maximum, certains critères ayant des valeurs importantes sont négligés. En effet, de l'exemple précédent, en utilisant la fonction minimum l'alternative c est moins préférée aux autres pourtant elle a des valeurs importantes sur les critères 2 et 3.

2.3. Les fonctions d'utilités

Définition 2.3.1

On appelle fonction d'utilité sur A toute fonction $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$

Remarque 2.3.1. Si x est une alternative, alors $u(x)$ représente en effet son utilité.

Définition 2.3.2

Soit R une relation de préférence de partie stricte P et d'indifférence I. Une fonction d'utilité u sur A représente R lorsque, pour toutes alternatives x et y :

* $xPy \Longleftrightarrow u(x) > u(y)$
* $xIy \Longleftrightarrow u(x) = u(y)$

Les fonctions d'utilités sont regroupées en deux grandes classes : les fonctions d'utilités **additives** et les fonctions d'utilités **non additives.**

Les fonctions d'utilités additives

Définition 2.3.3

Une fonction d'utilité u sur A est dite **additive** s'il existe des fonctions d'utilités marginales $u_1, u_2, ..., u_n$ sur A_i telles que : $\forall a \in A, u(a) := \sum_{i=1}^{n} u_i(a_i)$ où $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ et $a = (a_1; a_2; ...; a_n)$.

La principale qu'on rencontre dans la littérature est **la moyenne générale pondérée.**

Définition 2.3.4

Soit $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ un vecteur poids où w_i représente le poids du critère i avec $w_i \in]0; 1]$ $\forall i \in N$, et $\sum_{i \in N} w_i = 1$. La **moyenne générale pondérée (MGP)** relativement à w de l'alternative a est définie par : $MGP_w(a) = \sum_{i=1}^{n} w_i a_i$

Définition 2.3.5

(Relation de préférence)

Soit x et y deux alternatives.

$*$ $xPy \Longleftrightarrow MGP(x) > MGP(y)$

$*$ $xIy \Longleftrightarrow MGP(x) = MGP(y)$

Remarque 2.3.2. La moyenne générale pondérée est effectivement une fonction d'utilité additive, car il suffit de prendre $u_i(a) = w_i a_i \forall i \in N$.

Exemple 2.3.1. On considère le tableau multicritère ci-dessous :

TABLE 2.5 – tableau de l'exemple 2.3.1

Critères / Alternatives	1	2	3	4
a	5	7	2	5
b	8	4	6	2
c	5	8	7	5
d	6	4	5	7

Déterminons un classement de ces alternatives en utilisant la moyenne générale pondérée relativement aux vecteurs poids suivant : $w^1 = (0,4; 0,3; 0,1; 0,2)$; $w^2 = (0,7; 0,1; 0,1; 0,1)$ et $w^3 = (0,4; 0,1; 0,2; 0,3)$.

Relativement à $w^1 = (0,4; 0,3; 0,1; 0,2)$

$MGP_{w^1}(a) = 5 \times 0,4 + 7 \times 0,3 + 2 \times 0,1 + 5 \times 0,2 = 5,3$

$MGP_{w^1}(b) = 8 \times 0,4 + 4 \times 0,3 + 6 \times 0,1 + 2 \times 0,2 = 5,4$

$MGP_{w^1}(c) = 5 \times 0,4 + 8 \times 0,3 + 7 \times 0,1 + 5 \times 0,2 = 6,1$

$MGP_{w^1}(d) = 6 \times 0,4 + 4 \times 0,3 + 5 \times 0,1 + 7 \times 0,2 = 5,5$

ce qui induit le classement total :$c \succ d \succ b \succ a$

Relativement à $w^2 = (0,7; 0,1; 0,1; 0,1)$

$MGP_{w^2}(a) = 5 \times 0,7 + 7 \times 0,1 + 2 \times 0,1 + 5 \times 0,1 = 4,9$

$MGP_{w^2}(b) = 8 \times 0,7 + 4 \times 0,1 + 6 \times 0,1 + 2 \times 0,1 = 6,8$

$MGP_{w^2}(c) = 5 \times 0,7 + 8 \times 0,1 + 7 \times 0,1 + 5 \times 0,1 = 5,5$

$MGP_{w^2}(d) = 6 \times 0,7 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,1 + 7 \times 0,1 = 5,8$

ce qui induit le classement total :$b \succ d \succ c \succ a$

Relativement à $w^3 = (0,4; 0,1; 0,2; 0,3)$

$MGP_{w^3}(a) = 5 \times 0,4 + 7 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 5 \times 0,3 = 4,6$

$MGP_{w^3}(b) = 8 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 6 \times 0,2 + 2 \times 0,3 = 5,4$

$MGP_{w^3}(c) = 5 \times 0,4 + 8 \times 0,1 + 7 \times 0,2 + 5 \times 0,3 = 5,7$

$MGP_{w^3}(d) = 6 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,2 + 7 \times 0,3 = 5,9$

ce qui induit le classement total :$d \succ c \succ b \succ a$

La remarque suivante donne quelques limites de la moyenne générale pondérée

Remarque 2.3.3. Une variation du vecteur poids peut conduire à des résultats totalement différents.

En effet, de l'exemple précédent en considérant le vecteur poids w^1, l'alternative c est préférée aux autres ; en considérant w^2 c'est l'alternative b qui est préférée aux autres et en considérant le vecteur poids w^3 c'est l'alternative d qui est préférée aux autres.

Par ailleurs, quelque soit le vecteur poids choisi, l'alternative a ne sera jamais un élément de la coalition des meilleures alternatives.

En effet, supposons qu'il existe un vecteur poids $w = (\alpha; \beta; \lambda; \gamma)$, avec $\alpha, \beta, \lambda, \gamma \in]0; 1]$ et $\gamma = 1 - \alpha - \beta - \lambda$ tel que l'alternative a soit la meilleure relativement à w. Alors $MGP_w(a) > MGP_w(c)$.

Or $MGP_w(a) = 5 + 2\beta - 3\lambda$ et $MGP_w(c) = 5 + 3\beta + 2\lambda$ ainsi $MGP_w(a) > MGP_w(c)$ entraine $-\beta - 5\lambda > 0$ ce qui est absurde car $\beta, \lambda \in]0; 1]$.

Les fonctions d'utilités non additives

La principale qu'on rencontre dans la littérature est **l'intégrale de Choquet**.

L'intégrale de Choquet est une fonction d'agrégation très utilisée en AMCD lorsqu'il existe des interactions entre des critères. Elle se définit à partir d'une capacité ou mesure floue. La définition qui suit est donnée par **(Soneda ; 1993)**.

Notation 2.3.1. 2^N désigne l'ensemble des parties non vides de N

Définition 2.3.6

Une **mesure floue** ou **capacité** μ sur N est toute application $\mu : 2^N \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(N) = 1$

(iii) $A \subseteq B \subseteq N \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ **(monotonie)**.

Remarque 2.3.4. La notion de capacité est équivalente à celle de jeu monotone en théorie des jeux.

Remarque 2.3.5. La notion de **capacité** généralise celle de **poids**. Pour toute partie S de N, $\mu(S)$ représente le **poids** de S.

Définition 2.3.7

Soit μ une mesure floue sur N. L'**intégrale de Choquet** d'une alternative $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ relativement à μ est définie par : $C_\mu(x) := \sum_{i=1}^{n}[x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}]\mu(X_{\sigma(i)})$ où σ est une permutation sur N telle que $x_{\sigma(0)} := 0$, $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq x_{\sigma(3)} \leq ... \leq x_{\sigma(n)}$ et $X_{\sigma(i)} := \{\sigma(i); \sigma(i+1); ...; \sigma(n)\}$ $\forall i \in \{1; 2; 3; ...; n\}$.

Remarque 2.3.6. l'intégrale de Choquet est une généralisation de la fonction min et de la fonction max.

En effet, en considérant la capacité μ définie par $\mu(S) = \begin{cases} 0 \text{ si } S \subsetneq N \\ 1 \text{ si } S = N \end{cases}$

On a : pour toute alternative x, $C_\mu(x) = x_{\sigma(1)} = \min_{i\in N} x_i = min(x)$; et en considérant la capacité β définie par : $\beta(S) = 1$, $\forall S \subseteq N$,

On a :pour toute alternative x, $C_\beta(x) := \sum_{i=1}^{n}[x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}] = x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(0)} = x_{\sigma(n)} = \max_{i\in N} x_i = max(x)$.

Définition 2.3.8

(Relation de préférence)

Pour toutes alternatives x et y,

$*$ $xPy \iff C_\mu(x) > C_\mu(y)$

$*$ $xIy \iff C_\mu(x) = C_\mu(y)$

Notation 2.3.2. $\forall X \subseteq N$, $\forall i \in N$, nous écrirons $X + i$ au lieu de $X \cup \{i\}$ et $X - i$ au lieu de $X \setminus \{i\}$

Exemple 2.3.2. Considérons le tableau multicritère de l'exemple 1.3.3(Choix d'un territoire) :

TABLE 2.6 – 1^er^ tableau de l'exemple 2.3.2

Critères / Alternatives	Attractivité climatique	Accessibilité piéton	Automobile
T_1	6	10	10
T_2	3	12	8
T_3	8	5	15

Déterminons un classement de ces territoires en utilisant l'intégrale de choquet relativement aux capacités μ et β définies par les tableaux ci-dessous :

TABLE 2.7 – 2^e^ tableau de l'exemple 2.3.2

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1;2\}$	$\{1;3\}$	$\{2;3\}$	N
$\mu(S)$	0	0,2	0,1	0,3	0,45	0,5	0,65	1

TABLE 2.8 – 3^e^ tableau de l'exemple 2.3.2

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1;2\}$	$\{1;3\}$	$\{2;3\}$	N
$\beta(S)$	0	0,35	0,5	0,55	0,7	0,9	0,8	1

Afin d'avoir un résultat cohérent, il est nécessaire de ne considérer que des critères à maximiser. Or le critère Automobile étant à minimiser,une transformation de ces données s'impose alors afin d'obtenir un critère à maximiser. La transformation adéquate est la suivante :

$\forall i \in N, u_i(a) = \max_{i \in N} a_i - a_i \forall a \in A$.

Le tableau multicritère obtenu est le suivant :

TABLE 2.9 – 4e tableau de l'exemple 2.3.2

Critères / Alternatives	Attractivité climatique	Accessibilité piéton	Automobile
T_1	6	10	5
T_2	3	12	7
T_3	8	5	0

Relativement à la capacité μ on a :

$C_\mu(T_1) = (6-0)\mu(N) + (5-5)\mu(\{2;3\}) + (10-5)\mu(\{2\}) = 6 \times 1 + 0 \times 0,65 + 5 \times 0,1 = 6,5$

$C_\mu(T_2) = 3\mu(N) + (7-3)\mu(\{2;3\}) + (12-7)\mu(\{2\}) = 3 \times 1 + 4 \times 0,65 + 5 \times 0,1 = 5,6$

$C_\mu(T_3) = 0\mu(N) + (5-0)\mu(\{1;2\}) + (8-5)\mu(\{1\}) = 0 \times 1 + 5 \times 0,45 + 3 \times 0,2 = 2,85$.

Ce qui induit le classement total : $T_1 \succ T_2 \succ T_3$

Relativement à la capacité β on a :

$C_\beta(T_1) = 6\beta(N) + (5-5)\beta(\{2;3\}) + (10-5)\beta(\{2\}) = 6 \times 1 + 0 \times 0,8 + 5 \times 0,5 = 8,5$

$C_\beta(T_2) = 3\beta(N) + (7-3)\beta(\{2;3\}) + (12-7)\beta(\{2\}) = 3 \times 1 + 4 \times 0,8 + 5 \times 0,5 = 8,7$

$C_\beta(T_3) = 0\beta(N) + (5-0)\beta(\{1;2\}) + (8-5)\beta(\{1\}) = 0 \times 1 + 5 \times 0,7 + 3 \times 0,35 = 4,55$

Ce qui induit le classement total : $T_2 \succ T_1 \succ T_3$

Remarque 2.3.7. L'exemple précédent illustre que le choix de la capacité à utiliser est déterminant. En effet, avec la capacité μ définie plus haut l'alternative T_1 est la meilleure pourtant avec la capacité β c'est l'alternative T_2 qui est la plus préférée.

Comment mesurer la valeur d'un critère ?

Ayant une capacité μ sur N et un problème d'AMCD, il importe de savoir quels sont les critères importants et ceux qui sont négligeables. Ainsi, pour la somme pondérée la notion de poids d'un critère a été définie. Dans le cas de l'intégrale de Choquet, l'on pourrait penser qu'il suffit de prendre $\mu(\{i\})$ comme importance pour le critère i, ce qui serait une erreur. Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant (**Grabish ; 2006**). $N = \{1;2;3\}$

Table 2.10 – mesure de la valeur d'un critère

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1;2\}$	$\{1;3\}$	$\{2;3\}$	N
$\mu(S)$	0	0,2	0	0,2	0,8	0,2	1	1

Puisque $\mu(2) = 0$, on pourrait conclure que le critère 2 est inutile ce qui n'est pas le cas car il apporte une valeur importante dès qu'il est ajouté à un groupe non vide de critère(s) S. Il importe donc de définir un indice d'importance sur les critères.
Shapley a montré qu'une définition possible est : $s_i = \sum_{S \in 2^N :\, i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}[\mu(S) - \mu(S - i)]$ où $s = card(S)$.
L'indice d'importance d'un critère correspond à son indice de Shapley **(Shapley ; 1953)**.
Dans l'exemple précédent, on trouve $s_1 = 0,2$; $s_2 = 0,5$ et $s_3 = 0,3$; donc le critère 2 est paradoxalement le plus important.

Interactions des critères

Si nous reprenons l'exemple ci-dessus, on constate que l'importance des critères 1 et 2 pris individuellement est inférieur à l'importance des deux critères pris ensemble. En effet, on a $\mu(\{1;2\}) > \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ cela traduit le fait que pour le décideur les critères 1 et 2 doivent être satisfaits simultanément pour avoir une bonne alternative , et la satisfaction de seulement l'un des deux ne suffit pas. On parle alors de phénomène de **complémentarité** ou de **synergie** entre deux critères. On peut exprimer cette complémentarité par la quantité positive $\mu(\{1;2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) = 0,6$.
Plus généralement,

Définition 2.3.9

Deux critères i et j sont dits **complémentaires** ou **en synergie** lorsque $\forall S \subseteq N \setminus \{i;j\}$ on a : $\mu(S + i + j) + \mu(S) - \mu(S + i) - \mu(S + j) > 0$.

La situation inverse à la complémentarité pourrait aussi se produire. Dans ce cas, pour deux critères i et j, le décideur estime que la satisfaction de l'un seulement des deux critères suffit pour avoir une bonne alternative , et satisfaire les deux critères n'est pas nécessaire. Ces deux critères sont alors dits **redondants** ou **substituables**.

Formellement :

Définition 2.3.10

Deux critères i et j sont dits **redondants** ou **substituables** lorsque $\forall S \subseteq N \setminus \{i; j\}$ on a : $\mu(S+i+j)+\mu(S)-\mu(S+i)-\mu(S+j)<0$.

Dans ces deux situations, les critères ne sont pas indépendants dans le sens où la satisfaction de l'un influe sur l'utilité de l'autre pour avoir une alternative globalement satisfaisante (nécessaire dans le premier cas, inutile dans le second). On dit qu'il y a interaction entre les critères. Une situation sans interaction entre deux critères i et j est telle que la satisfaction de chaque critère apporte sa propre contribution à la satisfaction globale. La satisfaction du décideur est additive avec de tels critères.

Formellement :

Définition 2.3.11

Deux critères i et j sont dits **indépendants** lorsque $\forall S \subseteq N \setminus \{i; j\}$ on a : $\mu(S+i+j)+\mu(S)-\mu(S+i)-\mu(S+j)=0$.

Il devient donc nécessaire de définir un indice qui mesure l'interaction entre deux critères. La définition suivante a été proposée par (**Murofushi and Soneda ; 1993).**

Définition 2.3.12

L'**indice d'interaction** entre deux critères i et j est défini par :

$$I_{ij} := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i;j\}} \frac{(n-s-2)!s!}{(n-1)!}[\mu(S+i+j)+\mu(S)-\mu(S+i)-\mu(S+j)] \text{ où } s = card(S).$$

Remarque 2.3.8. On a : $I_{ij} > 0$ (respectivement $I_{ij} < 0$, $I_{ij} = 0$) pour les critères complémentaires (respectivement redondants, indépendants)

La définition de cet indice a été étendue par (**Grabisch ; 1997**) à toute coalition de critères.

Définition 2.3.13

L'**indice d'interaction** d'une coalition de critères K est défini par :
$I(K) := \sum_{S\subseteq N\setminus K} \frac{(n-s-k)!s!}{(n-k+1)!} \sum_{L\subseteq K} (-1)^{k-l}\mu(S\cup L)$ où $s = card(S)$, $k = card(K)$ et $l = card(L)$.

On pourra trouver pour plus de détails des axiomatiques de la fonction I (**Grabish and Roubens, 1999**).

Remarque 2.3.9. On a :

$$\begin{aligned}
\forall i,j\in N,\quad I(\{i;j\}) &= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}} \frac{(n-s-2)!s!}{(n-2+1)!} \sum_{L\subseteq\{i,j\}} (-1)^{2-l}\mu(S\cup L)\\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i;j\}} \frac{(n-s-2)!s!}{(n-1)!}[\mu(S)-\mu(S+i)-\mu(S+j)+\mu(S+i+j)]\\
&= I_{ij}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\forall i\in N\ \ I(\{i\}) &= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{(n-1+1)!} \sum_{L\subseteq\{i\}} (-1)^{1-l}\mu(S\cup L)\\
&= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}[-\mu(S)+\mu(S+i)]\\
&= s_i.
\end{aligned}$$

Pour cette raison, la fonction I est appelée **indice d'interaction de Shapley.**

Intégrale de Choquet 2-additive

La définition d'une capacité μ nécessite 2^n-2 coefficients que sont les $\mu(S)$ avec $S\in 2^N\setminus\{N\}$ (car $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(N) = 1$ sont déjà connus). Lorsque n est assez grand, cette détermination devient ardue, c'est la raison pour laquelle le concept de capacité k-additive a été introduit (**Chateauneuf and Jaffray ; 1989**).

Définition 2.3.14

La **transformée de Möbius** d'une capacité μ sur N est une fonction $m : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $m(T) := \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T\setminus S|}\mu(S)\ ,\ \forall T\in 2^N$.

Remarque 2.3.10. On a : $m(\{i\}) = \sum_{S \subseteq \{i\}} (-1)^{|\{i\} \setminus S|} \mu(S) = -\mu(\emptyset) + \mu(\{i\}) = \mu(\{i\})$

La définition suivante donne une expression de l'intégrale de Choquet en fonction de la transformée de Möbius.

Définition 2.3.15

En utilisant cette transformée de Möbius m associée à la capacité μ, l'intégrale de Choquet d'une alternative x peut se réécrire comme :

$C_\mu(x) := \sum_{S \in 2^N} m(S) \min_{i \in S} x_i$

Définition 2.3.16

Une capacité μ est dite **k-additive** avec $(1 \leq k \leq n)$ lorsque :

- Pour tout sous-ensemble T de N tel que $| T |> k$, on a : $m(T) = 0$
- Il existe un sous-ensemble B de N tel que $| B |= k$ et $m(B) \neq 0$

Définition 2.3.17

Une capacité μ est dite **additive** lorsque : $\forall S, T \subseteq N, [S \cap T = \emptyset \Longrightarrow \mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)]$

Remarque 2.3.11.

- Lorsque $k = 1$, la capacité μ est **additive.** Dans ce cas nous avons juste besoin de n $(< 2^n)$ coefficients que sont les $\mu(\{i\})$, $i \in N$, car $\mu(S) = \sum_{i \in S} \mu(\{i\})$, $\forall S \in 2^N$.
- Lorsque $k = 2$, nous avons juste besoin de $C_n^1 + C_n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2} (< 2^n)$ coefficients, une masse de Möbius pour chaque singleton et pour chaque paire.

Exemple 2.3.3. Soit μ une capacité 1-additive telle que $\mu(\{i\}) = 5$ $\forall i \in N$. Considérons le tableau multicritère suivant :

Table 2.11 – tableau de l'exemple 2.3.3

Critères / Alternatives	1	2	3	4	5
x	7	17	14	12	5
y	9	12	12	15	5

Calculons les intégrales de Choquet des alternatives x et y relativement à la capacité μ.
$C_\mu(x) := \sum_{S\subseteq N} m(S) \min_{i\in S} x_i = m(\{1\})x_1+m(\{2\})x_2+m(\{3\})x_3+m(\{4\})x_4+m(\{5\})x_5+ \sum_{S\subseteq N:|S|>1} m(S) \min_{i\in S} x_i$.
Or $\forall S \subseteq N$ tel que $|S| > 1$ on a $m(S) = 0$ (car μ est 1-additive) donc $\sum_{S\subseteq N:|S|>1} m(S) \min_{i\in S} x_i = 0$. De plus $\forall i \in N, m(\{i\}) = \mu(\{i\}) = 5$. Ainsi $C_\mu(x) = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 5(7 + 17 + 14 + 12 + 5) = 275$.

De même $C_\mu(y) := \sum_{S\subseteq N} m(S) \min_{i\in S} y_i = 5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 5(9 + 12 + 12 + 15 + 5) = 265$.
Nous pouvons conclure que relativement à la capacité μ l'alternative x est meilleure que y.

Définition 2.3.18

L'intégrale de Choquet est dite **2-additive** lorsqu'elle est relative à une capacité 2-additive.

Notation 2.3.3. Nous écrirons simplement μ_i au lieu de $\mu(\{i\})$ et μ_{ij} au lieu de $\mu(\{i; j\})$.

La propriété suivante donne le lien entre l'intégrale de Choquet, l'indice d'interaction et l'indice de Shapley. (**Grabisch and Labreuche ; 2008**)

Propriéte 2.3.1

L'intégrale de Choquet 2-additive est donnée par :

$$C_\mu(x) = \sum_{i\in N} s_i x_i - \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\}\subseteq N} I_{ij} \mid x_i - x_j \mid$$

Remarque 2.3.12. Cette propriété montre clairement que l'intégrale de Choquet est une généralisation de la somme pondérée (cas où $I_{ij} = 0$ pour tous i, j). L'intégrale de Choquet 2-additive s'exprime donc comme une somme pondérée pénalisée par une quantité dépendante des indices d'interactions entre deux critères. Par définition de l'indice d'interaction I_{ij} , l'intégrale de Choquet 2-additive ne considère que les interactions entre deux critères, les interactions entre plus de deux critères étant nulles. De plus, cette interaction entre les critères i et j s'exprime simplement par $I_{ij} = \mu_{i,j} - \mu_i - \mu_j$ (**Mayag ; 2016)** , ce qui permet à l'analyste de mieux les interpréter et les expliquer au décideur dans un processus d'aide à la décision. L'intégrale de Choquet 2-additive apparaît comme un bon compromis entre le modèle riche mais complexe de l'intégrale de Choquet et le modèle simple mais pauvre(rudimentaire) de la somme pondérée. Elle tient compte de la richesse d'expressivité de l'intégrale de Choquet et de la lisibilité (facilité de compréhension par le décideur) de la somme pondérée.Il est à noter que l'intégrale de Choquet 2-additive est utilisée dans des applications industrielles telles que l'évaluation du confort en position assise **(Grabisch , Duchêne , Lino and Perny ; 2002)**, la performance des systèmes industriels **(Berrah and Clivillé ; 2007)** et la conception de systèmes complexes (**Pignon and Labreuche ; 2007**). C'est donc pour toutes ces raisons que nous avons choisi de nous intéresser particulièrement à l'intégrale de Choquet 2-additive.

Chapitre Trois

QUELQUES PRINCIPES DE BASE POUR UNE RÈGLE DE DÉCISION.

De nombreuses méthodes naïves (apparemment naturelles mais recelant des propriétés peu souhaitables) sont couramment employées pour des problèmes de choix ou de classement en aide à la décision. Pourtant, en théorie de la décision, de nombreux travaux d'axiomatisation montrent les difficultés théoriques et pratiques que pose l'agrégation de relations de préférences partiellement conflictuelles dans le domaine de l'agrégation ordinale. Il sera question pour nous dans ce chapitre de donner certaines propriétés souhaitables que devrait vérifier une méthode quantitative.

3.1. Principe d'universalité.

Définition 3.1.1

Une méthode quantitative f vérifie le principe d'universalité si pour deux alternatives a et b, $f(a)$ et $f(b)$ sont comparables.

Proposition 3.1.1

Toutes les méthodes quantitatives vérifient le principe d'universalité.

Preuve. Soit f une méthode quantitative. Soient a et b deux alternatives distinctes ; $f(a)$ et $f(b)$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ et puisque $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel $\leqslant$ est une relation d'ordre totale alors $f(a) \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant f(a)$. D'où f vérifie le principe d'universalité. ■

3.2. Idempotence

Définition 3.2.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une méthode quantitative f vérifie l'axiome d'**idempotence** lorsque : si x est une alternative telle que $x_i = a, \forall i \in N$, alors $f(x) = a$.

Proposition 3.2.1

La moyenne générale pondérée (MGP) et les intégrales de choquet vérifient l'axiome **d'idempotence**.

Preuve. ◂ **Cas de la moyenne générale pondérée (MGP)**

Soit $w = (w_1; w_2; ...; w_n)$ le vecteur poids correspondant, avec $w_i > 0$ et $\sum_{i \in N} w_i = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons une alternative x telle que $\forall i \in N$, $x_i = a$, nous voulons prouver que $MGP(x) = a$.

$$\text{Alors on a} \quad MGP(x) = \sum_{i \in N} x_i w_i = \sum_{i \in N} a w_i = a \sum_{i \in N} w_i = a \times 1 = a.$$

Ainsi pour toute famille de poids, la moyenne générale pondérée vérifie l'axiome d'idempotence.

◂ **Cas de l'intégrale de choquet**

Soit $a \in \mathbb{R}$, μ une capacité associée à l'intégrale de Choquet C_μ.

Considérons une alternative x telle que $x_i = a \; \forall i \in N$. Alors l'intégrale de Choquet de x vaut :

$$C_\mu(x) = \sum_{i \in N} [x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}] \mu(X_{\sigma(i)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(0)})\mu(N) + \sum_{i \in N \setminus \{1\}} [x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}]\mu(X_{\sigma(i)}) \\
&= (a - 0) + \sum_{i \in N \setminus \{1\}} (a - a) \times \mu(X_{\sigma(i)}) \\
&= a + \sum_{i \in N \setminus \{1\}} 0 \times \mu(X_{\sigma(i)}) \\
&= a
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve que l'intégrale de Choquet vérifie l'axiome d'idempotence.

Corollaire 3.2.1. *Les fonctions min et max vérifient l'axiome d'idempotence.*

■

Proposition 3.2.2

Les méthodes d'optimisation multicritère violent l'axiome d'idempotence.

Preuve.

◂ **Cas de l'optimisation multicritère en utilisant le point idéal.**

On considère le tableau multicritère ci-dessous :

TABLE 3.1 – 1er tableau de la proposition 3.4.2

Critères / Alternatives	1	2
x	25	25
y	55	10
z	27	35

Le point idéal est $M = (55; 35)$ et $x_1 = x_2 = 25$.

Relativement à la distance de Manhattan, (la démarche étant analogue avec les deux autres distances classiques.) on a : $d(x; M) = \max\{ \mid 55 - 25 \mid ; \mid 35 - 25 \mid \} = max\{30; 10\} = 30 \neq 25$.

Nous déduisons que la méthode d'optimisation multicritère en utilisant le point idéal viole l'axiome d'idempotence.

◂ **Cas de l'optimisation multicritère en utilisant le point anti-idéal.**

Considérons le problème suivant :

TABLE 3.2 – 2^{e} tableau de la proposition 3.4.2

Critères / Alternatives	1	2
x	4	3
y	7	2
z	5	5

Le point anti-idéal est $N = (4; 2)$ et $z_1 = z_2 = 5$.

Relativement à la distance de Tchebychev, (la démarche étant analogue avec les deux autres distances classiques) on a :

$d(z; N) = | 5 - 4 | + | 5 - 2 | = 1 + 3 = 4 \neq 5.$

Nous déduisons que la méthode d'optimisation multicritère en utilisant le point anti-idéal viole l'axiome d'idempotence. ■

3.3. Pareto dominance.

Définition 3.3.1

Une alternative x **Pareto-domine** une alternative y, lorsque : $\forall i \in N$, on a $x_i \geq y_i$, c'est-à-dire x est au moins aussi bonne que y sur tous les critères.

Exemple 3.3.1. Considérons le tableaux multicritère suivant :

TABLE 3.3 – tableau de l'exemple 3.2.1

Critères / Alternatives	1	2	3	4	5
x	7	17	14	12	5
y	9	17	15	15	5

l'alternative y pareto-domine l'alternative x car $\forall i \in N, y_i \geq x_i$

Définition 3.3.2

Soit f une méthode quantitative d'aide multicritère. f vérifie l'axiome de **Pareto dominance** lorsque : si une alternative x Pareto-domine y, alors x est préférée à y suivant la méthode f.

Proposition 3.3.1

Les méthodes d'optimisation multicritère vérifient l'axiome de **Pareto-dominance.**

Preuve. ◂ **Cas de l'optimisation multicritère en utilisant le point idéal**

Ici nous choisissons arbitrairement la distance Euclidienne ; la preuve avec la distance de Manhatan et celle avec la distance de Tchebychev étant similaires à celle-ci.

Considérons le point idéal $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ avec $x_i = \max\limits_{c \in A} c_i \forall i \in N$.

Soient a et b deux alternatives telles que $\forall i \in N$, $a_i \geq b_i$, nous voulons prouver que $d(a; M) \leq d(b; M)$.

$\forall i \in N$, nous avons $a_i \geq b_i$, donc $-a_i \leq -b_i$, en ajoutant x_i à chaque membre de cette inégalité, on obtient, $x_i - a_i \leq x_i - b_i$.

De plus, $a_i \leq x_i$ et $b_i \leq x_i$ car $x_i = \max\limits_{c \in A} c_i$, donc $x_i - a_i \geq 0$ et $x_i - b_i \geq 0$. Ainsi, nous avons $0 \leq x_i - a_i \leq x_i - b_i$, nous pouvons donc élever chaque membre au carré pour obtenir $(x_i - a_i)^2 \leq (x_i - a_i)^2$(car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$), puis par sommation nous avons $\sum\limits_{i \in N}(x_i - a_i)^2 \leq \sum\limits_{i \in N}(x_i - b_i)^2$. La fonction racine carrée étant croissante, nous avons $\sqrt{\sum\limits_{i \in N}(x_i - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i \in N}(x_i - b_i)^2}$, d'où $d(a; M) \leq d(b; M)$.

Ainsi pour la distance euclidienne, la méthode d'optimisation multicritère en utilisant le point idéal vérifie l'axiome de Pareto dominance.

◂ **Cas de l'optimisation multicritère en utilisant le point anti-idéal**

Ici nous choisissons arbitrairement la distance de Manhattan ; la preuve avec la distance Euclidienne et celle avec la distance de Tchebychev étant similaires à celle-ci.

Considérons le point anti-idéal $N(x_1, x_2, ..., x_n)$ avec $x_i = \min\limits_{c \in A} c_i \forall i \in N$.

Soient a et b deux alternatives telles que $\forall i \in N$, $a_i \geq b_i$, nous voulons prouver que

$d(a; N) \geq d(b; N)$.

$\forall i \in N$, nous avons $a_i \geq b_i$, en retranchant x_i à chaque membre de l'inégalité, on obtient, $a_i - x_i \geq b_i - x_i$.

De plus, $\forall i \in N$, on a : $x_i \leq a_i$ et $x_i \leq b_i$ car $x_i = \min\limits_{c \in A} c_i$, donc $a_i - x_i \geq 0$ et $b_i - x_i \geq 0$.

Ainsi, nous avons $a_i - x_i \geq b_i - x_i \geq 0$, ce qui conduit à $| a_i - x_i | \geq | b_i - x_i | \; \forall i \in N$, puis par sommation nous avons $\sum\limits_{i \in N} | a_i - x_i | \geq \sum\limits_{i \in N} | b_i - x_i |$ d'où $d(a; N) \geq d(b; N)$.

Ainsi pour la distance de Manhattan , la méthode d'optimisation multicritère en utilisant le point anti-idéal vérifie l'axiome de Pareto dominance.

■

Proposition 3.3.2

La moyenne générale pondérée vérifie l'axiome de **Pareto-dominance.**

Preuve. Soit $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ un vecteur poids associé. Considérons x et y deux alternatives telles que $\forall i \in N$, $x_i \geq y_i$, nous voulons prouver que $MGP(x) \geq MGP(y)$.

Nous avons $\forall i \in N$, $x_i \geq y_i$, donc en multipliant chaque membre de l'inégalité par w_i, nous obtenons, $w_i x_i \geq w_i y_i \; \forall i \in N$, car $w_i \geq 0$, de sorte qu'en sommant, nous obtenons

$\sum\limits_{i \in N} w_i x_i \geq \sum\limits_{i \in N} w_i y_i$, d'où $MGP(x) \geq MGP(y)$.

Donc pour toute famille de poids, la moyenne générale pondérée vérifie l'axiome de Pareto dominance.

■

Proposition 3.3.3

Les fonctions *min* et *max* vérifient l'axiome de **Pareto-dominance.**

Preuve. ◂ **Cas de la fonction *min***

Considérons x et y deux alternatives telles que $\forall i \in N$, $x_i \geq y_i$, nous voulons prouver que $min(x) \geq min(y)$.

Nous avons $\forall i \in N$, $x_i \geq y_i$, donc $\min\limits_{i \in N} x_i \geq \min\limits_{i \in N} y_i$ d'où $min(x) \geq min(y)$.

Ainsi la fonction *min* vérifie l'axiome de **Pareto-dominance**.

◂ **Cas de la fonction** *max*

Considérons x et y deux alternatives telles que $\forall i \in N$, $x_i \geq y_i$, nous voulons prouver que $max(x) \geq max(y)$.

Nous avons $\forall i \in N$, $x_i \geq y_i$, donc $\max\limits_{i \in N} x_i \geq \max\limits_{i \in N} y_i$ d'où $max(x) \geq max(y)$.

Ainsi la fonction max vérifie l'axiome de **Pareto-dominance**.

De manière générale il est rappelé dans **(Mayag)** que L'intégrale de choquet qui est une généralisation des fonctions min et max vérifie l'axiome de **pareto-dominance**.

■

3.4. Principe d'indépendance préférentielle.

Définition 3.4.1

Le principe **d'indépendance préférentielle** stipule que : la préférence entre deux alternatives a et b ne dépend pas des critères sur lesquels a et b reçoivent la même évaluation.

Définition 3.4.2

Une méthode quantitative f vérifie **le principe d'indépendance préférentielle** si dans un problème multicritère, pour deux alternatives a et b, si a est meilleure que b suivant f alors a est meilleure que b suivant f dans le problème multicritère obtenu par élimination des critères sur lesquels a et b ont la même valeur.

Exemple 3.4.1. Considérons le problème multicritère suivant :

Table 3.4 – 1^er tableau de l'exemple 3.3.1

Critères / Alternatives	1	2	3	4	5
x	7	18	14	17	5
y	9	15	15	17	5

Si pour une méthode quantitative f vérifiant le principe d'indépendance préférentielle, x est préférée à y dans ce problème alors pour f, x est préférée à y dans le problème multicritère ci-dessous :

TABLE 3.5 – 2[e] tableau de l'exemple 3.3.1

Critères / Alternatives	1	2	3
x	7	18	14
y	9	15	15

Proposition 3.4.1

Les méthodes suivantes vérifient le principe **d'indépendance préférentielle** il s'agit de : la moyenne générale pondérée(MGP) ; les méthodes d'optimisation multicritère ; la fonction min et la fonction max.

Preuve. ◄ **Cas de la moyenne générale pondérée (MGP)**

Soit $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ un vecteur poids associé. Soit P un problème multicritère. soient x et y deux alternatives. Notons par P' le problème obtenu de P en supprimant les critères où x et y ont la même valeur. Supposons que $MGP(x) > MGP(y)$ dans le problème P et montrons que $MGP(x) > MGP(y)$ dans le problème P'. Posons $A = \{i \in N$ tels que $x_i = y_i\}$ et supposons que $A \neq \emptyset$. On a : $MGP_w(x) = \sum\limits_{i\in N} w_i x_i = \sum\limits_{i\in A} w_i x_i + \sum\limits_{i\in N\setminus A} w_i x_i$.

De même $MGP_w(y) = \sum\limits_{i\in N} w_i y_i = \sum\limits_{i\in A} w_i y_i + \sum\limits_{i\in N\setminus A} w_i y_i$. Or $\sum\limits_{i\in A} w_i x_i = \sum\limits_{i\in A} w_i y_i$ car $\forall i \in A, x_i = y_i$. Ainsi $MGP(x) > MGP(y)$ dans P entraine que $\sum\limits_{i\in N\setminus A} w_i x_i > \sum\limits_{i\in N\setminus A} w_i y_i$ donc $MGP(x) > MGP(y)$ dans P'. D'où la moyenne générale pondérée vérifie le principe d'indépendance préférentielle.

◄ **Cas des méthodes d'optimisation multicritère.** Ici nous ferons la démonstration en utilisant le point idéal ; la preuve en utilisant le point anti-idéal étant similaire à celle-ci. Considérons un problème multicritère P. Soient a et b deux alternatives. Considérons le problème P' obtenu en supprimant les critères pour lesquels a et b ont la même valeur.

Posons $A = \{i \in N$ tels que $a_i = b_i\}$ et supposons que $A \neq \emptyset$. Soient $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ avec $x_i = \max\limits_{c \in A} c_i \forall i \in N$ le point idéal et d une des distances définie au chapitre deux. Supposons que $d(a, M) > d(b, M)$ dans le problème P on veut montrer que $d(a, M) > d(b, M)$ dans le problème P'.

★ Cas de la distance euclidienne.

$d(a, M) = \sqrt{\sum\limits_{i \in N}(x_i - a_i)^2} = \sqrt{\sum\limits_{i \in A}(x_i - a_i)^2 + \sum\limits_{i \in N \backslash A}(x_i - a_i)^2}$

De même $d(b, M) = \sqrt{\sum\limits_{i \in N}(x_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum\limits_{i \in A}(x_i - b_i)^2 + \sum\limits_{i \in N \backslash A}(x_i - b_i)^2}$.

Or $\sum_{i \in A}(x_i - a_i)^2 = \sum_{i \in A}(x_i - b_i)^2$ car $\forall i \in A, a_i = b_i$. Ainsi $d(a, M) > d(b, M)$ dans le problème P entraine que $\sqrt{\sum\limits_{i \in N \backslash A}(x_i - a_i)^2} > \sqrt{\sum\limits_{i \in N \backslash A}(x_i - b_i)^2}$ d'où $d(a, M) > d(b, M)$ dans le problème P'.

★ Cas de la distance de Manhattan

$d(a, M) = \sum\limits_{i \in N} | a_i - x_i | = \sum\limits_{i \in A} | a_i - x_i | + \sum\limits_{i \in N \backslash A} | a_i - x_i |$.

De même $d(b, M) = \sum\limits_{i \in N} | b_i - x_i | = \sum\limits_{i \in A} | b_i - x_i | + \sum\limits_{i \in N \backslash A} | b_i - x_i |$ Ainsi $d(a, M) > d(b, M)$ dans le problème P entraine que $\sum\limits_{i \in N \backslash A} | a_i - x_i | > \sum\limits_{i \in N \backslash A} | b_i - x_i |$ car $\forall i \in A, a_i = b_i$. D'où $d(a, M) > d(b, M)$ dans le problème P'.

★ Cas de la distance de Tchebychev

$d(a, M) = \max\limits_{i \in N} |a_i - x_i| = \max\{\max\limits_{i \in A} |a_i - x_i|; \max\limits_{i \in N \backslash A} |a_i - x_i|\}$.

De même $d(b, M) = \max\limits_{i \in N} |b_i - x_i| = \max\{\max\limits_{i \in A} |b_i - x_i|; \max\limits_{i \in N \backslash A} |b_i - x_i|\}$.

Si $\max\{\max\limits_{i \in A} |a_i - x_i|; \max\limits_{i \in N \backslash A} |a_i - x_i|\} = \max\limits_{i \in A} |a_i - x_i|$, puisque $d(a, M) \neq d(b, M)$ alors $\max\{\max\limits_{i \in A} |b_i - x_i|; \max\limits_{i \in N \backslash A} |b_i - x_i|\} = \max\limits_{i \in N \backslash A} |b_i - x_i|$ car $\max_{i \in A} |a_i - x_i| = \max_{i \in A} |b_i - x_i|$.

Or $d(a, M) > d(b, M)$ donc $\max_{i \in A} |a_i - x_i| > \max_{i \in N \backslash A} |b_i - x_i| > \max_{i \in A} |b_i - x_i|$ c'est-à-dire $\max_{i \in A} |a_i - x_i| > \max_{i \in A} |a_i - x_i|$ ce qui est absurde.

Donc $\max\{\max\limits_{i \in A} |a_i - x_i|; \max\limits_{i \in N \backslash A} |a_i - x_i|\} = \max\limits_{i \in N \backslash A} |a_i - x_i| > d(b, M) \geqslant \max\limits_{i \in N \backslash A} |b_i - x_i|$. Ainsi $\max_{i \in N \backslash A} |a_i - x_i| > \max_{i \in N \backslash A} |b_i - x_i|$ d'où $d(a, M) > d(b, M)$ dans P'.

Donc pour n'importe quelle des trois distances classiques, les méthodes d'optimisation multicritère vérifient le principe d'indépendance préférentielle.

◂ **Cas de la fonction min.**

Considérons un problème multicritère P. Soient x et y deux alternatives. Considérons le problème P' obtenu en supprimant les critères pour lesquels x et y ont la même valeur. Supposons que $min(x) > min(y)$ dans le problème P. On veut montrer que $min(x) > min(y)$ dans le problème P'. Posons $A = \{i \in N$ tels que $x_i = y_i\}$ et supposons que $A \neq \emptyset$.

On a : $min(x) = min_{i\in N}(x_i) = min\{min_{i\in A}(x_i); min_{i\in N\backslash A}(x_i)\}$.

De même $min(y) = min_{i\in N}(y_i) = min\{min_{i\in A}(y_i); min_{i\in N\backslash A}(y_i)\}$.

★ Si $min(x) = min_{i\in A}(x_i)$, alors $min(y) = min_{i\in N\backslash A}(y_i)$ car $min(x) = min_{i\in A}(x_i) = min_{i\in A}(y_i)$ et $min(x) \neq min(y)$. Or $min(x) > min(y)$ donc $min_{i\in A}(x_i) > min_{i\in N\backslash A}(y_i)$ d'où $min_{i\in N\backslash A}(x_i) > min_{i\in N\backslash A}(y_i)$ car $min_{i\in N\backslash A}(x_i) \geq min_{i\in A}(x_i)$.

★ Si $min(x) = min_{i\in N\backslash A}(x_i)$, supposons que $min(y) = min_{i\in A}(y_i)$. Puisque $min(x) > min(y)$, on a $min_{i\in N\backslash A}(x_i) > min_{i\in A}(y_i) = min_{i\in A}(x_i)$ donc $min_{i\in N\backslash A}(x_i) > min_{i\in A}(x_i)$ ce qui est absurde car $min(x) = min_{i\in N\backslash A}(x_i)$. Ainsi $min(y) = min_{i\in N\backslash A}(y_i)$ d'où $min_{i\in N\backslash A}(x_i) > min_{i\in N\backslash A}(y_i)$ car $min(x) > min(y)$. Dans tous les cas $min(x) > min(y)$ dans le problème P'. Par conséquent la fonction min vérifie le principe d'indépendance préférentielle.

◂ **Cas de la fonction max.**

Considérons un problème multicritère P. Soient x et y deux alternatives. Considérons le problème P' obtenu en supprimant les critères pour lesquels x et y ont la même valeur. Supposons que $max(x) > max(y)$ dans le problème P. On veut montrer que $max(x) > max(y)$ dans le problème P'. Posons $A = \{i \in N$ tels que $x_i = y_i\}$ et supposons que $A \neq \emptyset$.

On a : $max(x) = max_{i\in N}(x_i) = max\{max_{i\in A}(x_i); max_{i\in N\backslash A}(x_i)\}$.

De même $max(y) = max_{i\in N}(y_i) = max\{max_{i\in A}(y_i); max_{i\in N\backslash A}(y_i)\}$.

Si $max(x) = max_{i\in A}(x_i)$, alors $max(y) = max_{i\in N\backslash A}(y_i)$ car $max(x) = max_{i\in A}(x_i) = max_{i\in A}(y_i)$ et $max(x) \neq max(y)$. Or $max(x) > max(y)$ donc $max_{i\in A}(x_i) > max_{i\in N\backslash A}(y_i)$ ce qui entraine que $max_{i\in A}(y_i) > max_{i\in N\backslash A}(y_i)$. Ce qui est absurde car $max(y) = max_{i\in N\backslash A}(y_i)$ donc $max(x) = max_{i\in N\backslash A}(x_i)$ et puisque $max(x) > max(y) \geq max_{i\in N\backslash A}(y_i)$, on a $max_{i\in N\backslash A}(x_i) > max_{i\in N\backslash A}(y_i)$ d'où $max(x) > max(y)$ dans le problème P'. Par conséquent la fonction max vérifie le principe d'indépendance préférentielle.

■

Proposition 3.4.2

L'intégrale de choquet ne vérifie pas le principe d'indépendance préférentielle.

Preuve. Considérons le problème suivant :

TABLE 3.6 – 1[er] tableau de la proposition 3.3.2

Critères / Alternatives	1	2	3
a	7	4	7
b	5	5	7

Considérons la capacité μ donnée par le tableau ci-dessous :

TABLE 3.7 – 2[e] tableau de la proposition 3.3.2

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1;2\}$	$\{1;3\}$	$\{2;3\}$	N
$\mu(S)$	0	0,4	0,4	0,8	0,5	0,8	0,8	1

Relativement à cette capacité on a :

$C_\mu(a) = (4-0)\mu(N) + (7-4)\mu(\{1;3\}) + (7-7)\mu(\{3\}) = 4 \times 1 + 3 \times 0,8 + 0 \times 0,8 = 6,4$

$C_\mu(b) = (5-0)\mu(N) + (5-5)\mu(\{2;3\}) + (7-5)\mu(\{3\}) = 5 \times 1 + 0 \times 0,8 + 2 \times 0,8 = 6,6$

donc $C_\mu(b) > C_\mu(a)$ ainsi $b \succ a$.

Le problème obtenu en supprimant les critères pour lesquels a et b ont la même valeur est :

TABLE 3.8 – 3[e] tableau de la proposition 3.3.2

Critères / Alternatives	1	2
a	7	4
b	5	5

On a : $C_\mu(a) = (4-0)\mu(\{1;2\}) + (7-4)\mu(\{1\}) = 4\times 0,5 + 3\times 0,4 = 3,2$

$C_\mu(b) = (5-0)\mu(\{1;2\}) + (5-5)\mu(\{2\}) = 5\times 0,5 + 0\times 0,4 = 2,5$

$C_\mu(a) > C_\mu(b)$ donc $a > b$. Ainsi a est préférée à b dans ce problème. D'où l'intégrale de choquet ne vérifie pas le principe d'indépendance préférentielle.

■

Tableau récapitulatif :

TABLE 3.9 – tableau récapitulatif

Principes \ Méthodes quantitatives	Moyenne générale pondérée	Intégrale de Choquet	Méthodes d'optimisation	La fonction min	La fonction max
Principe d'universalité	oui	oui	oui	oui	oui
Pareto-monotonie	oui	oui	oui	oui	oui
Principe d'indépendance préférentielle	oui	non	oui	oui	oui
Idempotence	oui	oui	non	oui	oui

✠ IMPLICATION PÉDAGOGIQUE ✠

L'implication pédagogique ou le lien que nous pouvons faire entre ce mémoire et le métier d'enseignement du secondaire, pour lequel nous recevons notre formation est présenté sur deux principaux plans :

Sur le plan Didactique

Ce travail nous a permis de maitriser l'usage de Latex qui est un outil didactique du numérique d'une grande importance pour la pratique enseignante des mathématiques. En ce sens que, l'enseignant se dote de moyens techniques pour s'améliorer dans sa tâche de préparation des cours, proposer une meilleure qualité des épreuves et mieux faire une analyse des données en ce qui concerne les comptes rendus des évaluations scolaires. Ainsi,il facilite ou intensifie la pratique et la transmission de connaissance par l'enseignant à l'apprenant.

Sur le plan pédagogique

Ce travail nous a permis entre autres :

- ◄ D'améliorer la qualité de notre rédactions ce qui nous permettra de concevoir les cours compréhensibles.
- ◄ D'étendre notre champ de connaissance sur l'utilité des mathématiques, ce qui nous sera d'une grande utilité dans la motivation de nos élèves.
- ◄ De développer l'esprit d'initiative et d'innovation. Ceci est très important pour un enseignant car celui-ci doit toujours innover dans la recherche pour être en phase avec les évolutions épistémologiques des savoirs à enseigner.

✠ Conclusion et perspectives ✠

Parvenu au terme de notre travail consacré à une introduction à l'Aide Multicritère à la Décision (AMCD), il était question pour nous de présenter quelques méthodes quantitatives de résolution d'un problème d'aide multicritère à la décision rencontrées dans la littérature, puis de nous intéresser à l'étude de quelques propriétés de ces méthodes. Il découle que toute ces méthodes(méthode d'optimisation multicritère, les fonctions min et max, la moyenne générale pondérée (MGP), et l'intégrale de Choquet) présentent des très grand avantages mais aussi des inconvénients ; toutefois , contrairement au modèle de la moyenne générale pondérée, l'intégrale générale de Choquet est adaptée en présence des critères qui interagissent entre eux. Mieux encore, l'intégrale de Choquet 2-additive est un bon compromis entre un modèle simple comme la moyenne générale pondérée et un modèle expressif tel que l'intégrale de Choquet générale.

L'étude axiomatique des méthodes citée ci-dessus et bien d'autres attireraient notre attention dans les travaux futurs.

✠ Bibliographie ✠

[1] Berrah L. and Clivillé V. Towards an aggregation performance measurement system model in a supply chain context. Computers in Industry, 58(7) : 709-719, 2007.

[2] Chateauneuf A. and Jaffray J.Y. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion. Mathematical Social Sciences, 17 : 263-283, 1989.

[3] Grabisch M. L'utilisation de l'intégrale de Choquet en aide multicritère à la décision. Newsletter of the European Working Group "Multicriteria Aid for Decisions", Vol 3 No 14 : 5-10, Fall 2006.

[4] Grabisch M., Duchêne J., Lino F., and Perny P. Subjective evaluation of discomfort in sitting position. Fuzzy Optimization and Decision Making, 1(3) : 287-312, 2002.

[5] Grabisch M. and Labreuche Ch. A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. 4OR, 6 : 1-44, 2008.

[6] Grabisch M. and Roubens. An axiomatic approach to the concept of interaction among players in cooperative games. Int. Journal of Game Theory, 28 : 547-565, 1999.

[7] Marichal J.L. Aggregation of interacting criteria by means of the discrete Choquet integral. In T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, editors, Aggregation operators : new trends and applications, Studies in Fuzziness and Soft Physica-Verlag, Heidelberg, (97) : 224-244, 2002.

[8] Maystre Ly., Pictet J.and Simo SJ., Méthodes multicritères Electre Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale. Lausanne, Suisse : Presses Polytechniques et universitaires romandes, 323, 1994.

[9] Murofushi T and Soneda S. Techniques for reading fuzzy measures (III) : interaction index. In 9th Fuzzy System Symposium, Sapporo, In Japanese, 693-696, May 1993.

[10] Pignon J.P and Labreuche Ch. A methodological approach for operational and technical experimentation based evaluation of systems of systems architectures. In Int. Conference on Software and Systems Engineering and their Applications (ICSSEA), Paris, France, December 4-6, 2007.

[11] Schärlig A. Décider sur plusieurs critères, panorama de l'aide à la décision multicritère. Lausanne, suisse : Presses Polytechniques et universitaires romandes, 304, 1985.

[12] Shapley L.S. A value for n-person games. In H. W. Kuhn and A. W. Tucker, editors, Contributions to the Theory of Games, Vol. II, number 28 Annals of Mathematics Studies, 307-317, 1953.