RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
****
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace - Work - Fatherland
****
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

AFFECTATION, le PROBLEME DE MARIAGE

Mémoire rédigé en vue de l'obtention du diplôme de professeur des lycées d'Enseignement Secondaire deuxième grade (DI.P.E.S II) en Mathématiques

Par

SONKOUE KENNE Martin

Matricule : CM04-10SCI1687

Licencié en Mathématiques-Informatique

Option: Mathématiques appliquées

Sous la direction de :

Dr TCHANTCHO Hugue

Chargé de Cours

Année académique : 2018-2019

Affectation, le problème de mariage

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de
l'obtention du diplôme de DIPES II
de Mathématiques

par :

SONKOUE KENNE Martin

Matricule : CM04-10SCI1687

Licencié en Mathématiques-Informatique

Option : Mathématiques appliquées

Sous la direction de :

Dr TCHANTCHO Hugue

Grade : chargé de cours

Université de Yaoundé 1, Ecole Normale Supérieure

Yaoundé, Juin 2019

♣ Dédicace ♣

Je dédie ce mémoire à mon papa **DJATSA Etienne**, éducateur exceptionnel, ceci est un hommage minime par rapport à tes oeuvres.

♣ Remerciements ♣

Je rends grâce à Dieu qui m'a permis de parachever ce travail dans la paix. Qu'il me soit permis d'adresser mes sincères remerciements et d'exprimer ma gratitude à tous ceux qui de près comme de loin ont contribué à la réalisation de ce travail. Je pense à :

- Mon directeur de mémoire, le **Dr TCHANTCHO Hugue** qui m'a fait honneur en acceptant de diriger mes travaux dans l'initiation à la recherche et m'a par ailleurs guidé dans le choix de mon thème de recherche. Je ne saurais ignorer sa disponibilité pendant la réalisation de ce pertinent travail.
- Tous les enseignants de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé pour tous les efforts par eux consentis pour ma formation de qualité depuis mon arrivée à l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, en particulier ceux du département de Mathématiques.
- Ma maman Tiaya Odette, femme exemplaire et moderne, ton mérite est au-delà de toute chose.
- Je ne saurais terminer sans rendre hommage à toute ma famille pour son soutien durant les années passées à l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, plus particulièrement Mlle DOUANLA Lauriane, Mme et Mr KEUBOU Blaise pour leur soutien moral, spirituel ainsi que leur tendresse. Je tiens également à remercier Papa Manfouo Armand , Papa MELI Jean-Hubert, Maman TIABOU Marie, Mr POUOMENE Rabelais et Mme, Mr FEUDJIO Rostand et Mme, Mme MELI Marie Gisel, Mr ASSIEMENE Simplice, Mr SONKOUE Martin et Mme, Mr Maffo Jean-Pierre et Mme, Mr TASSIE Désiré et Mme, Mr KENFACK Noel et Mme, et bien d'autres, je vous suis vraiment reconnaissant pour vos efforts respectifs.
- Enfin, j'adresse un vibrant merci à tous mes camarades de promotion qui ont toujours su se mettre au service des autres à travers le travail de groupe et le sens du partage.

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent document est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment recensées et mentionnées en bibliographie.

Signature du candidat

SONKOUE KENNE Martin

♣ Résumé ♣

Dans ce travail, nous présentons de manière précise le problème d'affectation des agents de deux types distincts (enseignants et établissements, par exemple). Lloyold Shapley, co-auteur avec David Gale de l'article fondateur du domaine, propose un algorithme pour atteindre un appariement stable et pareto-optimal pour un type d'agent. Nous faisons également une extension de l'existence des mariages stables dans les groupes de permutations, et c'est ainsi que Check Yeaw K (2011) montre que ce problème est équivalent à la condition de mariages de Hall.

Mots clés : appariement, **stabilité**, **préférences**, **profil de préférence**, **G-mariage**.

♣ Abstract ♣

In this work, we present in a precise way the problem of assigning agents of two different types (teachers and institutions, for example). Lloyold Shapley, co-author with David Gale of the founding article of the domain, proposes an algorithm to achieve stable and pareto-optimal matching for one type of agent. We also extend the existence of marriages in permutation groups, and that's how Check Yeaw K. (2011) shows that this problem is equivalent to the Hall marriage requirement.

Keys words : matching, stability, preference, preference profile, G-marriage

♣ Table des matières ♣

♣ Table des figures ♣

♣ Introduction générale ♣

Certaines relations économiques se fondent sur l'« appariement » d'agents de deux types distincts : élèves et écoles, internes et hôpitaux, donneurs et receveurs d'organes, etc. Qu'est-ce qui caractérise un appariement satisfaisant ? Dans quelle mesure une organisation centralisée peut-elle y parvenir ? Ce sont les questions auxquelles ont répondu Alvin Roth et Lloyd Shapley dans les travaux qui ont été récompensés par le prix de sciences économiques à la mémoire d'Alfred Nobel. Lloyd Shapley, actif depuis le début des années 1950, est un digne successeur de von Neumann et Morgenstern : il a représenté divers marchés économiques sous la forme épurée de jeux, pour lesquels il a conçu des concepts de solution élégants. Compte tenu des circonstances qui nous motivent, nous nous devons d'évoquer d'abord l'article fondateur dans lequel David Gale, et Lloyd Shapley proposent une première propriété désirable des appariements : la « stabilité ». Partis de l'exemple de l'admission des étudiants dans les universités, Gale et Shapley dans leur article publié en 1962 délaissent rapidement les détails de ce marché pour une métaphore : le mariage. Leur modèle se réduit à un ensemble d'hommes et de femmes et aux préférences de chacun sur les individus de sexe opposé. Ils construisent un algorithme (connu sous le nom d'« acceptation différée ») qui se décline en deux versions, suivant que ce sont les hommes qui font des propositions aux femmes ou le contraire, et qui produit des couples « stables » au sens suivant : il n'existe pas un homme et une femme qui seraient plus heureux d'être mariés ensemble, plutôt que de rester chacun avec le conjoint qui leur a été attribué.

Soulignons que la notion de stabilité qui se dégage ici, est exprimée par rapport à la notion de comportement rationnel généralement exigé par les agents économiques ou sociaux. Dans ce sens, un agent est dit rationnel lorsque ses préférences définissent un préordre total sur l'ensemble de ses alternatives.

En mathématiques, le problème de mariage stable consiste à trouver, étant donné n hommes et n femmes, une façon de les mettre en couple. Ce problème se présente de la manière suivante : On dispose de n hommes $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et n femmes $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Chaque homme a un ordre de préférences linéaire sur les femmes et vice-versa. Plus formellement, on se donne deux ensembles X et Y ayant chacun n éléments ; On se donne aussi, pour chaque élément de X et Y , une fonction de préférence, qui classe les éléments de l'autre ensemble. On cherche alors à associer de façon bijective les éléments de X avec ceux de Y, pour qu'il n'existe pas de couples (x, y) et (x', y') tels que x préfère y' à l'élément y qui lui est associé, et y' préfère x à l'élément x' qui lui est associé.
Puisque les hommes et les femmes n'ont pas forcement tous les mêmes préférences, il est difficile de satisfaire tout le monde en formant n couples arbitraires. Néanmoins, on peut chercher à former des couples de telle sorte que personne n'ait envie d'échanger ou de tromper son conjoint : On appellera ce couplage un mariage stable. L'idée dans ce travail n'est pas d'attribuer à chacun son partenaire préféré : ce qui n'est d'ailleurs pas possible dans le cas général, mais de tenir compte des préférences pour proposer un couplage parfait stable.
Ce mémoire comporte trois chapitres : le chapitre 1 présente le modèle de mariage et résout le problème de stabilité dans les mariages à l'aide du théorème de Gale-Shapley. Le deuxième chapitre étudie la structure algébrique de l'ensemble des affectations stables. Le troisième chapitre résout le problème de mariage dans les groupes de permutations. Et à la fin nous donnons l'apport ou l'implication du concept d'affectation stable dans notre système éducatif sur le plan pédagogique.

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

LE PROBLÈME DE MARIAGE

Le modèle du mariage de Gale et Shapley (1962) consiste tout d'abord en un ensemble (fini) de femmes F et un ensemble (fini) d'hommes H, qui définissent les deux types d'individus que l'on veut associer par paire, en l'occurrence , marier. Chaque individu v est caractérisé par une relation de préférence stricte , transitive et complète, P_v, définie sur les individus de sexes opposés et lui-même (cette dernière option décrit la possibilité de rester célibataire).

Exemple 1.0.1. ***(introductif)***

On considère un ensemble de trois hommes $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ et un ensemble de trois femmes $F = \{a, b, c\}$.

Chaque homme a des préférences sur les femmes. De même chaque femme a des préférences sur les hommes.

L'homme h_1 préfère se marier en premier avec la femme a, en deuxième avec b, et restera seul s'il doit se marier avec c.

L'homme h_2 préfère se marier en premier avec b, en deuxième avec c, et en troisième avec a.

L'homme h_3 préfère se marier en premier avec c, en deuxième avec a, et en troisième avec b.

La femme a préfère se marier en premier avec l'homme h_3, en deuxième avec m_2, et restera seule si elle doit se marier avec h_1.

La femme b préfère se marier en premier avec h_2, en deuxième avec h_1, et en troisième avec h_3.

La femme c préfère se marier en premier avec h_1, en deuxième avec h_2, et en troisième avec h_3

Cadre

$H \cup F$ peut être considéré comme une petite "communauté" de six individus en âge de se marier, tous célibataires au départ et envisageant un mariage monogamique. En général, un mariage monogamique est l'union d'une femme et d'un homme en âge de se marier. En revanche, quelque soit son âge, un individu n'a pas toujours la possibilité ou l'obligation de mariage. Ainsi, tout individu en âge de se marier est célibataire ou marié.
Le mariage étant supposé monogamique, chacun des hommes ou chacune des femmes de la communauté $H \cup F$ aura au plus un conjoint.

Exemple 1.0.2. *Dans les résidences universitaires du Cameroun, les étudiants sont deux à deux par chambre. Une enquête menée en milieu estudiantin révèle que les échecs enregistrés au fil des ans, pour les étudiants vivant dans les résidences, pourraient provenir des rapports conflictuels entre les étudiants d'une même chambre.*
Pour remédier à ce problème, nous proposons la réforme suivante :
chaque candidat admis dans une chambre doit en plus des conditions habituelles, fournir une liste de ses préférences sur l'ensemble des candidats admis comme lui à la même résidence (ce qui permettrait au service des oeuvres de répartir ces étudiants selon leur convenance et résoudrait ainsi le problème de ce type d'échecs).
Soit E l'ensemble des étudiants admis à la résidence de l'E.N.S de Yaoundé pour l'année 2018.

Nous pouvons constater qu'il y a une nette similitude entre l'exemple 1.0 .1 et l'exemple 1.0.2. Néanmoins, une distinction apparaît au niveau des ensembles : dans l'exemple 1.0.1, nous avons eu droit à H et F, tandis que l'exemple 1.0.2 fait intervenir un ensemble E. Cependant, on peut passer sans difficulté, d'une forme à l'autre. En effet dans l'exemple 1.0.1, en posant $K = H \cup F$, on se ramène à la forme de l'exemple 1.0.2. D'autre part, en posant F=H=E dans l'exemple 1.0.2 on se ramène à la forme de l'exemple 1.0.1. Par ailleurs en ce qui concerne le cadre de l'épreuve liée à l'exemple 1.0.2, les règles sont les suivantes :
Chaque étudiant dans E est libre de cohabiter avec un autre de son choix et le veut meilleur.
Chacun des étudiants peut rester seul (c'est-à-dire annuler son admission dans la résidence) au lieu de cohabiter avec un autre qu'il ne désire pas.
Une fois de plus, une similitude avec le cadre 1 est évidente. Enfin, une répartition deux par

chambre des étudiants est équivalente à un mariage monogamique souligné plus haut. On peut donc se poser la question de savoir, étant données les préférences des étudiants admis dans la résidence d'un établissement quelconque, s'il existe de mariages souhaitables et si oui, comment les déterminer ?

Dans ce chapitre, nous présentons quelques outils nécessaires pour aborder les problèmes de choix social en général et notre thème en particulier : il s'agit entre autres des notions de relation de préférences, des couplages, et les appariements. Mais avant cela, définissons quelques notions basiques de l'algèbre linéaire nécessaires et sans lesquelles la notion de préférence semble obscure.

1.1 Notion de relations binaires

Soit A un ensemble non vide.

Définition 1.1.1. ***Une relation binaire*** *$\succcurlyeq$ sur A est un ensemble de couples (x, y) où $x \in A$ et $y \in A$, autrement dit $\succcurlyeq$ est une partie du produit cartésien A×A.*

Notation 1.1.1. *On note* ***B(A)*** *l'ensemble des relations binaires sur A.*

Définition 1.1.2. *Soit $\succcurlyeq$ ∈ B(A). $\succcurlyeq$ est dit* ***réflexive*** *si pour tout x appartenant à A, $x \succcurlyeq x$.*

Définition 1.1.3. *La composante symétrique de la relation binaire $\succcurlyeq$ est notée $\sim$ et définie par : pour tout $x \in A$ et $y \in A$, $x \sim y \Longleftrightarrow$ ($x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq x$).*

La composante asymétrique de la relation binaire $\succcurlyeq$ est notée $\succ$ et définie par : pour tout $x \in$ A et $y \in$ A, $x \succ y \Longleftrightarrow (x \succcurlyeq y$ et $\neg(y \succcurlyeq x))$ où $\neg$ est le symbole de négation.
$x \succ y$ se lit : *x est préféré à y".*

Définition 1.1.4. *$\succcurlyeq$ est* ***antisymétrique*** *$\Longleftrightarrow$ (pour tout x,y ∈ A, $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq x \Longrightarrow$ x=y).*

Définition 1.1.5. *$\succcurlyeq$ est* ***transitive*** *$\Longleftrightarrow$ (pour tout $x, y, z \in$ A, $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq z \Longrightarrow x \succcurlyeq z$).*

Définition 1.1.6. *$\succcurlyeq$ est* ***complète*** *$\Longleftrightarrow$ (pour tout $x, y \in$ A, $x \succcurlyeq y$ ou $y \succcurlyeq x$).*

Définition 1.1.7. ***Un préordre*** *$\succcurlyeq$ sur A est une relation binaire réflexive et transitive.*

Définition 1.1.8. ***Un préordre complet*** *est une relation binaire réflexive, transitive et complète.*

Remarque 1.1.1.

Étant donné que la complétude entraine la réflexivité, on dira tout simplement qu'un préordre complet est une relation binaire transitive et complète.

Définition 1.1.9. ***Un ordre linéaire*** *est un préordre complet qui est anti-symétrique.*

Remarque 1.1.2.

- *Comme A est fini, un ordre linéaire est un classement sans ex æquo.*
- *Un ordre linéaire (respectivement un préordre complet) est encore appelé un ordre total (respectivement un préordre total).*

1.2 Notion de préférence

Définition 1.2.1. ***Une préférence (classement)*** *d'un individu $i \in A$ est la donnée d'un préordre complet ou d'un ordre linéaire sur A.*

Notation 1.2.1. *Pour le problème de mariage dans une communauté de n hommes notés $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et n femmes $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, soit $(x, y) \in X \times Y$. On notera par commodité $y_1 \succ_{x_i} y_2$ plutôt que (y_1, y_2) appartient à la relation $\succcurlyeq$ pour dire : x_i préfère y_1 à y_2.*

Ainsi, $h_3 \succ_f h_2 \succ_f f \succ_f h_1$ indique que f préfère être mariée à h_3 plutôt qu'à h_2, marié à h_2 plutôt que de rester célibataire, et rester célibataire plutôt que d'être mariée à h_1. Alternativement, On représente simplement la préférence p_f d'une femme f sous forme d'un classement des hommes et d'elle-même. On écrira ainsi p_f := h_3, h_2, f, h_1... On pourrait imaginer dans le rôle des hommes par exemple des universités (resp. hôpitaux) et dans le rôle des femmes les candidats (resp. les infirmières).

Soient $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$:

Les préférences de l'élément x sur ceux de l'ensemble Y seront notées $p(x)$. On a par exemple $p(x) = a, b, c$ signifiera $a \succ_x b \succ_x c$ pour dire " x préfère se marier en premier avec a, en deuxième avec b, et au pire avec c.

Remarque 1.2.1. *$\forall h_i \in H$ et $\forall f_j \in F$, $\succ_{h_i}$ et $\succ_{f_j}$ sont des relations d'ordre respectivement sur $F \cup \{h_i\}$ et $H \cup \{f_j\}$*

Ainsi, la liste de préférences d'un élément h_i, $p(h_i)$, est une partie totalement ordonnée (par $\succ_{h_i}$) de $H \cup \{h_i\}$ et celle de f_j, $p(f_j)$, est une partie totalement ordonnée (par $\succ_{f_j}$) de $H \cup \{f_j\}$.

L'ensemble de toutes ces préférences défini un **profil de préférences**. Dans toute la suite :

a) (H,F) sera appelé **communauté**

b) l'ensemble $P = \{p(x), x \in H \cup F\}$ des listes de préférences sera appelé un **profil de préférences** lié à ($H \cup F$).

c) (H,F,P) sera appelé une structure de mariage.

Cas de l'exemple 1.0.1

Dans le cas de l'exemple 1.0.1, on peut écrire en utilisant les notations ci-dessus : $p(h_1) = a, b;$ $p(h_2) = b, c, a;$ $p(h_3) = c, a, b;$ $p(a) = h_3, h_2;$ $p(b) = h_2, h_1, h_3;$ $p(c) = h_1, h_2, h_3.$

Notion de Couple

- Un individu x resté célibataire sera noté (x, x).
- On notera (x, y) pour dire que les individus x et y sont mariés.

La notation sous forme de couple ici, ne tient pas compte de l'ordre des termes.
Les couples dans ce contexte sont considérés au sens des paires.

1.3 Le modèle du Mariage

Définition 1.3.1. *Un **mariage** μ est une configuration possible de couples d'individus de sexes opposés (et de célibataires) de la population considérée $H \cup F$. Formellement, un appariement est une fonction $\mu : F \cup H \longrightarrow F \cup H$, qui associe un partenaire $\mu(v)$ à chaque individu v et satisfait les conditions suivantes :*

i. pour chaque femme $f \in F$, $\mu(f) \in H \cup \{f\}$

ii. Pour chaque homme $h \in H$, $\mu(h) \in H \cup \{h\}$

iii. *Pour chaque individu $v \in H \cup F$, $\mu(\mu(v)) = v$.*

Les conditions (i) et (ii) assurent que chaque individu est marié à un individu de sexe opposé ou reste célibataire, tandis que (iii) garantit que les couples sont cohérents (le partenaire μ (v) de v dans l'appariement μ est lui-même apparié à v par μ)

Remarque 1.3.1. *a) Un mariage est un aspect possible des unions (au sens du cadre précédent que l'on peut former ou proposer aux individus de $H\cup$ F.*

b) Un mariage, pour la communauté $H\cup$ F est un sous-ensemble G de $(H \cup F)^2$ tel que :

- $\forall x \in H, \exists! y \in F \cup \{x\}, (x, y) \in G$
- $\forall y \in F, \exists! x \in H \cup \{y\}, (x, y) \in G$

c) $\forall (x, y) \in (H \cup F)^2, (x, y) \in G$, où G est un mariage : c'est-à-dire l'individu x est marié à l'individu y dans G si et seulement si y et marié à x dans G ; en d'autres termes, les couples sont cohérents.

Éléments acceptables et mutuellement acceptables

Définition 1.3.2. *Soit x un élément de $H \cup F$, on appelle élément acceptable par x tout élément y figurant dans la liste des préférences de x. Si un agent y de $H \cup F$ est acceptable par x, on note $y \in p(x)$.*

Définition 1.3.3. *Deux éléments x et y de $H \cup F$ sont mutuellement acceptables si $x \in p(y)$ et $y \in p(x)$.*

Exemple 1.3.1. *Pour les préférences de l'exemple 1.0.1, on a :*
$a \in p(h_1)$ donc a est acceptable par h_1. $h_1 \notin p(a)$ donc h_1 est non acceptable par a ; h_1 et a ne sont pas mutuellement acceptables.
$b \in p(h_2)$ et $h_2 \in p(b)$ donc h_2 et b sont mutuellement acceptables.

Proposition 1.3.1. *Soient (H,F,P) une structure de mariage et G un mariage. Alors G est une application involutive de $H \cup F$ dans $H \cup F$.*

Preuve . – *Si G est un mariage de $H \cup F$, d'après la définition, $G \in (H \cup F)^2$ d'où G est une relation de $H \cup F$ dans $H \cup F$.*

– *De plus G vérifie la propriété b) de la remarque I.3.1 ce qui veut dire que,* $\forall x \in H \cup F$, $\exists ! y \in H \cup F$ *tel que* $(x, y) \in G$*. (Ce qui peut encore s'écrire* xGy*, par notation des relations). Donc G est une application de* $H \cup F$ *dans lui même que nous noterons désormais* μ*.*

– *Pour voir que* μ *est involutive, soit* $x \in H \cup F$*, si* $\mu(x) = x$ *alors* $\mu(\mu(x)) = x$*.*
Si $\mu(x) \neq x$*, alors en utilisant la remarque 1.3.1,* $(x, \mu(x)) \in$ *G avec* $\mu(x) \in$ *F si* $x \in$ *H ou* $\mu(x) \in$ *H si* $x \in$ *F et* $\mu(x)$ *est unique.*
Mais ($\mu(x)$*,* $\mu(\mu(x))$*)* $\in G$ *et par unicité de* $\mu(\mu(x))$*, puisque les couples sont des paires, on a* $\mu(\mu(x)) = x$*, d'où le résultat.*

■

Obstacle 1

Considérons le mariage $G_1 = \{(h_1, c); (h_2, b); (h_3, a)\}$ *de l'exemple.1) qui est une configuration possible des unions dans* $H\cup$ *F.*
On observe que, d'après p(h_1*), l'agent c est non acceptable par* h_1 *qui préfère rester seul au lieu de se marier à c.*
Or h_1 *est libre dans son choix ; par conséquent il n' acceptera pas la proposition faite dans* G_1*.* G_1 *n'est pas souhaitable pour* h_1*.*

Obstacle 2

Considérons le mariage $G_2 = \{(h_1, h_1); (h_2, a); (h_3, b); (c, c)\}$. On observe que d'après p(h_3), h_3 préfère a à b, d'après $p(a)$, a préfère h_3 à h_2.
Notons que (h_3,a) $\notin G_2$. Mais h_3 et a se préfère simultanément à leurs conjoints respectifs b et h_2 de G_2. Or les individus sont libres dans leur choix et le veulent meilleur. h_3 et a en se mariant s'améliorent par rapport au mariage G_2. Par conséquent, G_2 n'est pas souhaitable, du moins pour h_3 et a.

Problème :

Étant données les préférences des individus constituants une communauté quelconque, existe-t-il de mariages souhaitables(stables) ? Si oui comment les déterminer ?

1.4 Le problème de mariage : la stabilité

1.4.1 Mariage souhaitable de (H, F, P)

Soit μ un mariage de (H, F, P). Alors les obstacles 1 et 2 s'écrivent sous la forme suivante :

(I) $\exists\{x, y\} \subset (H \cup F), y = \mu(x)$ et $(y \notin p(x)$ ou $x \notin p(y))$

(II) $\exists(x, y) \in (H \cup F)^2, y \neq \mu(x), x \succ_y \mu(y)$ et $y \succ_x \mu(x)$

- Un mariage μ qui vérifie (I) est non souhaitable.
- Un mariage μ qui vérifie (II) est non souhaitable.
- Un mariage μ qui ne vérifie ni (I) ni (II) est souhaitable.

1.4.2 La notion de mariage

Soient (H, F, P) une structure de mariage, μ un mariage de (H, F, P) et $x, y \in H\cup$ F

Définition 1.4.1. *On dit que le mariage μ est **bloqué** par x si μ vérifie I ou II*

Définition 1.4.2. *On dit que le mariage μ est bloqué par (x, y) si $y \neq \mu(x)$, $x \succ_y \mu(y)$ et $y \succ_x \mu(x)$.*

Définition 1.4.3. *Le mariage μ est individuellement rationnel (IR) si μ ne vérifie pas (I).*

Définition 1.4.4. *Le mariage μ est **collectivement rationnel** (CR) si μ ne vérifie pas (II)*

Remarque 1.4.1.
- *Un mariage μ **est individuellement rationnel** si chaque individu v qui ne reste pas célibataire préfère effectivement être marié avec son partenaire $\mu(v)$, c'est-à-dire $\mu(v) \succ_v v$ ou $\mu(v) = v$.*
- *On dira que le partenaire $\mu(v)$ de chaque individu v doit être acceptable pour v. D'autre part, un couple (h, f) bloque le mariage μ si h et f préfèrent tous deux se marier ensemble que de rester chacun avec son partenaire dans l'appariement μ, c'est-à-dire $h \succ_f \mu(f)$ et $f \succ_h \mu(h)$.*

Définition 1.4.5. *Un mariage μ est **stable** si μ est individuellement rationnel (IR) et collectivement rationnel (CR).*

Interprétation

Un mariage μ est **stable** s'il est individuellement rationnel et s'il n'existe pas de couple qui bloque μ.
NB : Cette forme de stabilité est généralement prise en compte par le concept de "coeur"

Exemple 1.4.1. *Deux hommes $\{h_1, h_2\}$ et deux femmes $\{f_1, f_2\}$. Les deux hommes préfèrent f_1 à f_2. La femme f_1 préfère h_1 à h_2 et f_2 préfère h_2 à h_1. On souhaite affecter à chaque homme exactement une femme et vice-versa.*

L'affectation $\mu = \{(h_1, f_2), (h_2, f_1)\}$ n'est pas raisonnable car l'homme h_1 et la femme f_1 se préfèrent mutuellement et rien ne les empêchent de se mettre ensemble. On dit que cette affectation est **instable**
Dans l'exemple précédent, $\{(h_1, f_1), (h_2, f_2)\}$ est une affectation stable. Se pose ainsi le problème de l'existence d'une affectation stable pour n'importe quel problème de mariage.

Problème

Étant donnée une structure de mariage (H, F, P), existe-t-il des mariages stables ? si oui comment les déterminer ?

1.5 Existence des mariages stables : Théorème de GALE et SHAPLEY (1962)

Théorème 1.5.1. *Pour tout problème de mariage, il existe une affectation stable.*

La preuve est constructive et se présente sous forme d'un algorithme. Elle est illustrée à l'aide de l'exemple suivant (les hommes sont notés h_1, h_2 et h_3 et les femmes f_1, f_2 et f_3).

	f_1	f_2	f_3
h_1	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,3)$
h_2	$(1,3)$	$(3,3)$	$(2,1)$
h_3	$(3,1)$	$(2,2)$	$(1,2)$

Les lignes représentent les hommes et les colonnes, les femmes. $(1, 2)$ indique que l'homme h_1 classe la femme f_1 en première position et que la femme f_1 classe l'homme h_1 en deuxième position.

- **Premier jour :** chaque homme convoite la femme qu'il préfère. Si une femme est convoitée par plus d'un homme, elle choisit celui qu'elle préfère le plus, les autres sont rejetés.

  Dans l'exemple : h_1 et h_2 convoitent f_1, et h_3 convoite f_3 ; f_1 préfère h_1 à h_2. h_2 est donc rejeté.
- **Deuxième jour** : les hommes qui ont été rejetés précédemment vont convoiter leur second choix et ceux qui n'ont pas été rejetés restent en attente. Puis, chaque femme va garder celui qu'elle préfère le plus parmi les nouveaux arrivants et l'ancien convoitant et rejette les autres.

  Dans l'exemple : h_2, l'unique rejeté, va convoiter f_3 ; f_3 qui avait déjà h_3 comme prétendant va changer pour h_2 et rejette h_3.
- L'algorithme continue jusqu'à ce que toute femme soit convoitée au moins une fois. Ceci constitue alors une affectation.

  Dans l'exemple : le troisième jour, h_3 convoite f_2 ; h_1 est en attente chez f_1 et h_2 continue à convoiter f_3, et la procédure s'arrête.

L'algorithme finit toujours en un nombre fini d'étapes. En effet, puisqu'un homme ne peut pas faire une deuxième proposition à une femme qui l'a déjà rejeté une fois dans le passé, toute femme reçoit à un moment ou à un autre au moins une proposition (car lorsqu'une femme retient la proposition d'un homme, celui-ci est juste en attente, puisque rien ne lui garanti qu'il ne sera pas rejeté après d'autres propostions reçues par la femme).

Soit μ l'affectation obtenue suivant la procédure précédente. Alors, μ est stable. En effet, si ce n'était pas le cas, alors il existerait un couple (x, y) tel que x préfère y à $\mu(x)$ et que y préfère x à $\mu(y)$. Mais alors il existe un jour pendant lequel x avait été rejeté par y (car sinon il n'aurait jamais convoité $\mu(x)$). Puisqu'une femme ne rejette que pour obtenir mieux, et nécessairement, par transitivité de la relation de préférence, y préfère $\mu(y)$ à x. Ce qui est contradictoire.

Dans l'exemple, $\{(h_1, f_1), (h_2, f_3), (h_3, f_2)\}$ est une affectation stable.

Exemple 1.5.1. ***(utilisation de l'algorithme de Gale-Shapley (1962))***

Soit (H, F, P) *une structure de mariage avec* ***H***=$\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ *;* $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, \}$ *;*

$$\begin{cases} p(h_1) & = & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ p(h_2) & = & f_4 & f_2 & f_3 & f_1 \\ p(h_3) & = & f_4 & f_3 & f_1 & f_2 \\ p(h_4) & = & f_1 & f_4 & f_3 & f_2 \\ p(h_5) & = & f_1 & f_2 & f_4 & f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(f_1) & = & h_2 & h_3 & h_4 & h_1 & h_5 \\ p(f_2) & = & h_3 & h_1 & h_2 & h_4 & h_5 \\ p(f_3) & = & h_5 & h_4 & h_1 & h_2 & h_3 \\ p(f_4) & = & h_1 & h_4 & h_5 & h_2 & h_3 \end{cases}$$

Étape 1

h_1, h_4, *et* h_5 *sont proposés à leur premier choix* f_1 *;* h_2 *et* h_3 *sont proposés à leur premier choix* f_4.

f_1 *rejette* h_4 *et* h_5 *et retient la proposition de* h_1.

f_4 *rejette* h_3 *et retient* h_2 *qui reste engagé.*

Représentation *:* $(h_1, f_1); (h_2, f_4)$ *;*

$$h_3 \quad h_4 \quad h_5$$

Étape 2

h_3, h_4 *et* h_5 *sont proposés à leur second choix respectif* f_3, f_4 *et* f_2 *;* f_4 *rejette* h_2 *et retient* h_4 *qui reste engagé ;* h_5 *est en attente chez* f_2.

Représentation *:* $(h_1, f_1), (h_3, f_3), (h_4, f_4), (h_5, f_2)$,

$$h_2$$

Étape 3

h_2 *est proposé à son second choix* f_2 *qui rejette* h_5 *et retient* h_2 *engagé.*

Représentation *:*$(h_1, f_1), (h_3, f_3), (h_4, f_4), (h_2, f_2)$,

$$h_5$$

Étape 4

h_5 *est proposé à son troisième choix* f_4 *qui le rejette et continue avec* h_4 *qui reste engagé.*

Et h_5 ayant été rejeté par tous les éléments de sa liste de préférences, restera seul et on obtient un mariage stable $\mu_H = \{(h_1, f_1), (h_2, f_2), (h_3, f_3), (h_4, f_4), (h_5, h_5)\}$. Nous pouvons aisément vérifier que μ_H est un mariage stable pour la structure (H,F,P).

Résolvons alors le problème d'existence de mariage stable dans le cas général par le théorème de Galey-Shapley.

Théorème 1.5.2. *Soit (H,F,P) une structure de mariage telle que :*

i) H et F sont non vides, finis, de même cardinal et disjoints.

ii) Les préférences dans P sont strictes et complètes (c'est-à-dire il n'y a ni ex æquo, ni indifférence ou encore, que tous les individus de chaque type sont classés par tous les membres de l'autre type).

Alors il existe au moins un mariage stable sur (H,F,P)

Preuve . *Soit (H,F,P) une structure de mariage vérifiant (i) et (ii).*
Nous voulons montrer l'existence d'au moins un mariage stable sur (H,F,P). Pour celà, nous allons construire une correspondance μ_0 de $H \times F$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall x \in H \cup F, \exists! y \in F \cup H$ tel que $\mu_0(x) = y$

2) μ_0 est individuellement rationnel (IR)

3) μ_0 est collectivement rationnel (CR)

Cette construction va se faire par utilisation de l'algorithme d'acceptation différée.

Algorithme

Étape 1

Chaque élément de H est proposé à son premier choix suivant P.
Chaque élément de F qui reçoit les propositions retient celle qu'il préfère plus.
Un élément de F qui ne reçoit aucune proposition reste seul et engagé.
Un élément de H qui n'a pas de préférence reste seul.
Les éléments de H retenus à cette étape restent engagés.

Étape 2

Les éléments de H n'ayant pas été retenus à l'étape 1 sont proposés à leur second choix suivant P.
Chaque élément de F qui reçoit une nouvelle proposition compare la plus préférée d'entre

elles à celle retenue à l'étape 1 et retient la meilleure des deux, mais reste engagé.
Les éléments de H (resp. F) qui ne sont pas retenus (resp. qui ne reçoivent pas de propositions) restent seuls et engagés.
Les éléments de H retenus restent provisoirement en couple.
Étape k
Les éléments de H non retenus à l'étape (k-1) sont proposés à leur k^{-ieme} choix suivant P.
Chaque élément de F qui reçoit une nouvelle proposition compare la plus préférée d'entre elles à celle retenue à l'étape (k-1) et retient la meilleure des deux ; mais reste engagé.
Les éléments de H (resp. F) qui ne sont pas retenus (resp. qui ne reçoivent pas de propositions) restent seuls et engagés.
Les éléments de H retenus restent engagés. Montrons que l'algorithme ci-dessus s'arrête après un nombre fini d'itérations (d'étapes).
D'après la description de l'algorithme, à chaque étape, chaque élément x de H est proposé à au plus un élément de sa liste de préférences p(x). Et jamais au même élément deux fois. De même chaque élément de F retient, au plus, un seul élément parmi ceux qui lui sont proposés. Par conséquent aucune étape n'est redondante. De plus, d'après (i), H et F sont finis, donc au bout d'un nombre fini k_0 d'étapes, l'algorithme s'arrête. A cette étape k_0, on a :

1) Les éléments de H (resp F) restés seuls à l'étape (k-1) et non engagés (resp. restés seuls à l'étape (k-1) et non sollicités) à l'étape k_0 restent seuls.*

2) Les éléments de H engagés sont retenus et restent chacun avec l'élément de F correspondant (l'ayant retenu).*

Définissons alors μ_0 par :

- *$\forall h \in H$, $\mu_0(h) = h$ si h est resté seul (voir 1*)*
  $\mu_0(h)$ est l'élément de F ayant retenu h à l'étape k_0 sinon.
- *$\forall f \in F$, $\mu_0(f) = f$ si f est resté seul à l'étape k_0 (voir 1*)*
  $\mu_0(f)$ est l'élément de H ayant retenu f à l'étape k_0 sinon.

- *Ainsi défini, μ_0 est évidement un mariage de (H,F,P) ; d'où 1°)*
- *Soit $x \in H \cup F$, si $\mu_0(x) \neq x$, alors $\mu_0(x)$ est choisi parmi les éléments acceptables par x, et comme x est aussi acceptable par x, alors μ_0 est (IR) ; d'où 2°)*
- *Il reste à montrer que μ_0 est (CR). Pour celà, soit $(h, f) \in (H \cup F)^2$ tel que $f \succ_h$*

$\mu_0(h)$.

Alors h a été proposé à f avant d'être proposé à $\mu_0(h)$. *Comme* $f \succ_h \mu_0(h)$ *alors* $f \neq \mu_0(h)$. μ_0 *est un mariage donc* $f \neq \mu_0(f)$ *entraîne* $h \neq \mu_0(f)$ *: ce qui veut dire que f a rejeté h.*

Les préférences étant strictes, $\mu_0(f) \succ_f h$ *et par conséquent* μ_0 *n'est pas bloqué par* (h, f)*. Ainsi* μ_0 *n'est bloqué par aucun couple* $(x, y) \in (H \cup F)^2$ *; et par conséquent* μ_0 *est (CR) ; d'où 3°).*

Il en résulte que μ_0 *est un mariage stable sur (H,F,P).*

■

Quelques remarques

1°) La condition de finitude des ensembles H et F est nécessaire pour l'existence de mariage stable. Car sinon le nombre d'itérations serait infini et l'on ne se serait jamais arrêté : dans ce cas aucune conclusion n'est possible.

2°) De même la condition $H \cap F = \emptyset$ (disjonction) est indispensable. Pour le voir considérons la structure de mariage de l'exemple 1.2.2 : (E,P) avec E=$\{a, b, c, d\}$, $p(a)$=b, c, d ; $p(b) = c, a, d$; $p(c) = a, b, d$; et $p(d) = a, b, c, d$.
Les mariages (IR) possibles sur (E,P) sont : $\mu_1 = \{(a, d), (b, c)\}$; $\mu_2 = \{(a, b), (d, c)\}$; $\mu_3 = \{(a, c), (b, d)\}$; $\mu_4 = \{(a, a), (b, c), (d, d)\}$; $\mu_5 = \{(a, c), (b, b), (d, d)\}$; $\mu_6 = \{(a, b), (c, c), (d, d)\}$; $\mu_7 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ qui sont respectivement bloqués par : (a, c); (b, c); (a, b); (a, c); (a, b); (b, c) ; et (a, b).

3°) Dans le théorème 1.5.2. précédent, on suppose que les préférences sont strictes. Mais le résultat reste valable lorsque celles-ci ne sont plus strictes. En effet, on se ramène aux préférences strictes en appliquant une procédure de "tie-break" chaque fois que l'indifférence est manifestée.
Un "tie-break" peut être l'ordre lexicographique, le critère d'âge, de taille etc...(ou une combinaison de ces critères)

4°) L'appellation d'acceptation différée vient du fait que, les éléments de H sont proposés à chaque étape k à leur k^{-ieme} choix, et à chaque étape, chaque élément de F qui reçoit des propositions retient la meilleure sans pour autant l'accepter définitivement.

On montr qu'à la fin de cet algorithme, tout le monde est marié.

Preuve . *En effet, il faut noter que lorsqu'une femme reçoit une proposition, elle reste engagée et ceci jusqu'à la fin de l'algorithme (elle peut changer de conjoint au cour de l'algorithme juste pour obtenir mieux). Et comme chaque homme a un classement sur toutes les femmes, le seul moyen pour lequel un homme ne soit pas marié est lorsqu'il ait été rejeté par toutes les femmes.*
Admettons qu'il existe un homme qui ne soit pas marié. Alors il doit exister une femme non mariée. Mais cette dernière doit avoir reçu la proposition de cet homme à une étape de l'algorithme ; et de ce fait elle doit être mariée. Ce qui est contradictoire. Donc tout le monde est marié à la fin de l'algorithme. ■

Théorème 1.5.3. *Lorsque les ensembles H et F sont finis, de même cardinal n, et que les préférences sont strictes et complètes, alors l'algorithme de Gale et Shapley se termine en au plus $n(n-1)+1$ étapes.*

Preuve . *Remarquons que pour chaque étape sauf la dernière, un homme h convoite au plus une femme de sa liste de préférences, et comme tous les hommes sont mariés à la fin, il peut avoir convoité au plus $(n-1)$ femmes. Ainsi il y aura eu au plus $n(n-1)$ étapes, et par conséquent, il y a au total $n(n-1)+1$ étapes.* ■

1.6 Conflits d'intérêts

La notation μ_H utilisée dans l'exemple précédent sert à marquer que le mariage μ_H résulte de l'algorithme d'acceptation différée lorsque les éléments de M sont proposés. Étant donné, d'une part, que les ensembles H et F jouent des rôles symétriques dans la structure des mariages et, d'autre part, qu'ils jouent des rôles différents dans l'algorithme, nous pouvons décrire le même algorithme en inversant les rôles de H et F. Et cela conduira à la détermination d'un mariage stable μ_F. En général, μ_H et μ_F sont différents. Dans l'exemple précédent, μ_F est donné par $\mu_F = \{(h_1, f_4), (h_2, f_1), (h_3, f_2), (h_4, f_3), (h_5, h_5)\}$.

Conflits d'intérêts entre les éléments d'une même classe

Notons dans l'exemple précédent que tous les éléments de M préfèrent μ_H au moins autant que μ_F et que ceux de F préfèrent μ_F au moins autant que μ_H.

De prime à bord, celà paraîtrait naturel qu'une procédure qui traite les deux classes H et F (car $H \cap F = \emptyset$) de manière différente donne lieu à des mariages qui systématiquement favorisent l'une des classes. Mais une seconde réflexion remet en cause une telle idée. Néanmoins, il est clair qu'au moins pour certaines configurations des préférences, les éléments dans chacune des classes sont en compétition entre eux pour la conquête du meilleur conjoint (des individus d'une même classe désirant être mariés à un même prétendant).

Exemple 1.6.1. ***(cas où tous les individus d'une classe préfèrent en premier le même prétendant)***
Soit (H,F,P) une structure de mariage avec $H = \{h_1, h_2, h_3\}$, $F = \{h_1, h_2, h_3\}$ *;*

$$\begin{cases} p(h_1) & = & f_1 \quad f_2 \quad f_3 \\ p(h_2) & = & f_1 \quad f_2 \quad f_3 \\ p(h_3) & = & f_1 \quad f_3 \quad f_2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} p(f_1) & = & h_1 \quad h_2 \quad h_3 \\ p(f_2) & = & h_1 \quad h_3 \quad h_2 \\ p(f_3) & = & h_1 \quad h_2 \quad h_3 \end{cases}$$

Dans cet exemple, f_1 est le premier choix de tous les individus de H et h_1 est le premier choix de tous les individus de F. Ainsi le sens suivant lequel les individus d'une même classe sont en compétition entre eux est assez réel. Deux individus d'une même classe ne pourront s'entendre sur lequel est le meilleur mariage vu que pour chacun, le meilleur mariage est celui qui lui donne son premier choix. Cependant si nous limitons notre attention sur l'ensemble des mariages stables, alors tout mariage qui n'unit pas h_1 à f_1 sera instable car bloqué par (h_1, f_1). Par conséquent, il y a exactement deux mariages stables pour la structure (H,F,P). Ce sont : $\mu_H = \{(h_1, f_1), (h_2, f_2), (h_3, f_3)\}$ et $\mu_F = \{(h_1, f_1), (h_2, f_3), (h_3, f_2)\}$. Ainsi lorsque nous confinons notre attention sur les mariages stables, le désaccord entre les individus d'une même classe disparaît (tous les individus de H (resp. F) préfèrent μ_H (resp. μ_F).

Il y a en général plusieurs mariages stables et il se pose le problème de leur comparabilité.

Dans toute la suite, Les structures de mariages considérées seront supposées munies des préférences strictes (ce qui signifie que chaque individu est en mesure de choisir entre deux partenaires). Dans cet exemple, le meilleur mariage pour les hommes est $\mu_H = \{(h_1, f_1), (h_2, f_2), (h_3, f_3)\}$: c'est celui produit par l'algorithme de Gale et Shapley.

★ ★ CHAPITRE DEUX ★ ★

STRUCTURE DES APPARIEMENTS STABLES ET OPTIMALITÉ

Une analyse plus approfondie de l'algorithme suggère un résultat assez important. Gale et Shapley observent que le choix du type d'individus qui fait des propositions joue un rôle clé dans l'appariement finale produit par l'algorithme.
Le modèle d'appariement suppose seulement que chaque individu a une préférence sur ses partenaires possibles, mais il est très facile d'en déduire les préférences sur les appariements : un individu préfère un appariement μ à un appariement μ' s'il préfère son partenaire dans μ à son partenaire dans μ'. Gale et Shapley montrent que, pour des individus qui font des propositions dans l'algorithme, leur appariement correspond à un élément maximal(au sens de ses préférences induites) de l'ensemble des appariements stables. En d'autres termes, les préférences des individus étant fixées, l'appariement résultant de l'algorithme d'acceptation différée en faveur des hommes est préféré par chaque homme à tout autre appariement stable et c'est le seul appariement stable dans ce cas (il en est de même pour les femmes).
Il faut souligner que la propriété de maximalité précédente, quoique très forte, n'est vraie que relativement aux appariements stables.

Roth montre dans François Forge(2013) que l'appariement de Gale et Shapley en faveur d'un type d'individus est néanmoins faiblement pareto-optimal pour les individus de ce type, c'est-à-dire qu'il n'existe pas, par exemple, d'appariement qui soit préféré strictement par tous les hommes à l'appariement de Gale et Shapley en faveur des hommes. L'existence des appariements stables en faveur des hommes ou des femmes, suggère également que l'ensemble des appariements stables possède une structure mathématique tout à fait particulière que nous examinerons dans la suite.

2.1 Comparaison des mariages et optimalité

Une fois qu'un appariement est établi, il est essentiel de déterminer à quel point cet appariement est acceptable pour la société. Dans cette section, nous utilisons la théorie des jeux pour évaluer les solutions admissibles à un problème de mariage stable.

Notations et définitions

Soit (H, F, P) une structure de mariages.

- On notera par $\mathcal{M}$ l'ensemble de mariages sur (H, F, P).
- On notera par $\mathcal{S}$ l'ensemble des mariages stables de (H, F, P).

Relation de préférence dans $\mathcal{M}$ (ordre partiel dans $\mathcal{M}$)

(H, F, P) étant une structure de mariage, soit $x \in H \cup F$.
On définit la relation $\succ_x$ sur $\mathcal{M}$ par :
$\forall \mu, \mu' \in \mathcal{M}$, $\mu' \succ_x \mu$ signifie que $\mu'(x) \succ_x \mu(x)$ c'est-à-dire x préfère le mariage μ' au moins autant que le mariage μ si et seulement si $\mu'(x)$ est préféré au moins autant que $\mu(x)$ par l'agent x.

Définition 2.1.1. ***(préférence communautaire)***
Soit (H, F, P) une structure de mariage, avec $|H| = |F| = n$. μ, $\mu' \in \mathcal{S}$, et $E \subset (H \cup F)$.
*μ **pareto-domine** μ' sur E si et seulement si $\forall x \in E$ $\mu(x) \succcurlyeq_x \mu'(x)$ et $\exists z \in E$:*
$\mu(z) \succ_z \mu'(z)$.

Un mariage est **pareto-optimal** s'il est stable et n'est pas pareto-dominé sur $H \cup F$.
Un appariement est pareto mâle-optimal (resp. pareto femelle-optimal) s'il est stable et n'est pas pareto-dominé sur H (resp F).

Remarque 2.1.1. *Un mariage stable μ ($\mu \in \mathcal{S}$) est H-optimal (resp. F-optimal) s'il est préféré par tous les éléments de H (resp. F) au moins autant que tout autre mariage stable.*

Définition 2.1.2. *Soient $h \in H$ et $f \in F$, h et f sont dits achevables si et seulement si, il existe un mariage stable μ tel que $\mu(h) = f$: on dit alors que h (resp. f) est un conjoint achevable de f (resp. h)*

Définition 2.1.3. *Soit $x \in H \cup F$, le conjoint achevable de x le plus préféré est appelé le **favori de x**.*

Remarque 2.1.2. *Lorsque les préférences sont strictes, si un individu possède des conjoints achevables, alors il possède un unique favori. Dans ce cas, un mariage H-optimal (resp. F-optimal) donne à chaque élément de H (resp F) son favori.*

Théorème 2.1.1. ***Knuth(1971).*** *Soit (H, F, P) une structure de mariage telle que les préférences soient strictes, alors il existe toujours un mariage H-optimal (resp. F-optimal) sur (H, F, P). On vérifie que ces mariages sont respectivement μ_H et μ_F produits par l'algorithme d'acceptation différée.*

Dans une situation stable, si un individu souhaite divorcer pour un partenaire qu'il préfère, alors ce coup s'effectue au détriment de son partenaire courant. Ces dilemmes sont capturés par le théorème suivant :

Théorème 2.1.2. ***Knuth(1997)*** *Soient μ et μ' deux appariements stables. Si $\mu(x) = y$ et $\mu'(x) \neq y$, alors*

- *soit $\mu'(x) \succ_x \mu(x)$ et $\mu(y) \succ_y \mu'(y)$*
- *soit $\mu(x) \succ_x \mu'(x)$ et $\mu'(y) \succ_y \mu(y)$*

Théorème 2.1.3. ***Roth Oliveira Stomayor(1990)***
Tout appariement stable est un optimum de pareto.

Preuve . *Par absurde, supposons qu'un appariement stable μ n'est pas pareto-optimal. Alors il existe un appariement μ' qui pareto-domine μ sur $(H \cup F)$. En conséquence,*
$\exists z \in H \cup F$ tel que $\mu'(z) \succ_z \mu(z)$ (1)
et $\forall z' \neq z$, $\mu'(z') \succcurlyeq_{z'} \mu(z')$ (2)
Notons $h = \mu(z)$ et $h' = \mu'(z)$. Avec (1), on a $\mu'(z) \succ_z \mu(z)$ et on peut déduire que $h' \succ_z h$. Comme $h \neq z$, grâce à (2), $\mu'(h') \succcurlyeq_{h'} \mu(h')$, donc $z \succcurlyeq_{h'} \mu(h')$. Comme l'ordre considéré est strict et complet et que $\mu(h') \neq z$, on a $z \succ_{h'} \mu(h')$. Donc μ n'est pas stable car (z, h') est bloquant.

■

Une autre propriété très jolie concerne la structure de l'ensemble des affectations stables.

2.2 Fonction d'indication

Si μ et μ' sont deux affectations stables ($\mu, \mu' \in \mathcal{M}$), il sera demandé à tout $h \in H$ (resp $f \in F$) d'indiquer de $\mu(h)$ et $\mu'(h)$ (resp $\mu(f)$ et $\mu'(f)$) lequel il préfère. On définit ainsi une fonction λ (resp ν) qui donne à h (resp f) son meilleur prétendant entre $\mu(h)$ et $\mu'(h)$ (resp $\mu(f)$ et $\mu'(f)$). Plus formellement, nous avons la définition suivante :

2.2.1 Les opérations $\vee_H$ et $\wedge_H$ dans $\mathcal{M}$

Soit (H, F, P) une structure de mariage,

i) On définit $\vee_H$ dans $\mathcal{M}$ par :

$\forall \mu, \mu' \in \mathcal{M}, \lambda = \mu \vee_H \mu' : H \cup F \longrightarrow H \cup F$ est une fonction telle que

$$\forall h \in H, \lambda(h) = \begin{cases} \mu(h) & si \quad \mu(h) \succ_h \mu'(h) \\ \mu'(h) & sinon \end{cases}$$

$$\forall f \in F, \lambda(f) = \begin{cases} \mu(f) & si \quad \mu(f) \succ_f \mu'(f) \\ \mu'(f) & sinon \end{cases}$$

λ est la H-fonction d'indication associée à μ et μ'

ii) De même $\nu = \mu \wedge_H \mu' : H \cup F \longrightarrow H \cup F$ est la fonction telle que :

$$\forall h \in H, \nu(h) = \begin{cases} \mu'(h) & si \quad \mu(h) \succ_h \mu'(h) \\ \mu(h) & sinon \end{cases}$$

$$\forall f \in F, \nu(f) = \begin{cases} \mu'(f) & si \quad \mu(f) \succ_f \mu'(f) \\ \mu(h) & sinon \end{cases}$$

ν est la F-fonction d'indication associée à μ et μ'.

Remarque 2.2.1. *Il y a des aspects sous lesquels λ et ν ne seraient pas des mariages :*

- $\exists \{x, y\} \subset H \cup F$ *telle que* $\lambda(x) = \lambda(y)$ *(resp* $\nu(x) = \nu(y)$*).*
- $\exists (h, f) \in H \times F$ *tel que* $\lambda(h) = f$ *et* $\lambda(f) \neq h$ *(resp* $\nu(h) = f$ *et* $\nu(f) \neq h$*).*

Par ailleurs λ et ν peuvent être des mariages mais ne pas être stables. Cependant lorsque μ et μ' sont stables, il apparaît que λ et ν sont des mariages stables comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.2.1. *Soit (H, F, P) une structure de mariages. Si les préférences des individus sont strictes, alors* $\forall \mu, \mu' \in \mathcal{S}, \mu \vee_H \mu', \quad \mu \wedge_H \mu', \quad \mu \vee_F \mu', \quad \mu \wedge_F \mu'$ *sont des mariages stables.*

Preuve . *Soient* μ *et* $\mu' \in \mathcal{S}$*, on veut montrer que* $\mu \vee_H \mu' \in \mathcal{S}$ *et* $\mu \wedge_H \mu' \in \mathcal{S}$.
Il suffit de monter que $\mu \vee_H \mu' \in \mathcal{S}$ *et par symétrie de* $\vee_H$ *et* $\wedge_H$*, on aura* $\mu \wedge_H \mu' \in \mathcal{S}$.
Montrons que $\mu \vee_H \mu' \in \mathcal{S}$*. Pour celà, on va montrer que :*

a) $\mu \vee_H \mu'$ *est un mariage c'est-à-dire* $\mu \vee_H \mu' \in \mathcal{M}$

b) $\mu \vee_H \mu'$ *est stable c'est-à-dire* $\mu \vee_H \mu' \in \mathcal{S}$.

Montrons d'abord a)

Soit $h \in H$*, alors* $\exists! f \in F$ *tel que* $\mu(h) = f$ *et* $\exists! f' \in F$ *tel que* $\mu'(h) = f'$ *(car tout le monde est marié.)*
Puisque la relation $\succ_h$ *est un ordre total sur F, alors soit* $f \succ_h f'$ *ou* $f' \succ_h f$*. Sans nuire à la généralité, supposons* $f' \succ_h f$*. Alors* $(h, f) \in \mu \vee_H \mu'$*. Par conséquent* $\exists! f' \in F$ *tel que* $\mu \vee_H \mu'(h) = f'$.

Montrons b)

Par l'absurde, supposons qu'il existe $(x, y) \in \mu \vee_H \mu'$ *tel que* $\exists (u, v) \in \mu \vee_H \mu'$ *vérifiant*

$$\begin{cases} x \succ_v y & \qquad\qquad (*) \\ v \succ_x u \end{cases}$$

Mais $(x, y) \in \mu$ *ou* $(x, y) \in \mu'$*, ce qui contredit (*) car les affectations* μ *et* μ' *sont stables. D'où b) est vérifié.*
Il en résulte que $\forall \mu, \mu' \in \mathcal{S}$*,* $\mu \vee_H \mu' \in \mathcal{S}$ *et comme les opérations* $\vee_H$ *et* $\wedge_H$ *jouent des rôles symétriques, l'affectation* $\mu \wedge_H \mu' \in \mathcal{S}$*. On montre de même que* $\forall \mu, \mu' \in \mathcal{S}$*,* $\mu \wedge_F \mu', \mu \vee_F \mu' \in \mathcal{S}$ ■

Définition 2.2.1. ***Un treillis*** *est un ensemble T partiellement ordonné dans lequel toute paire d'éléments* $\{x, y\}$ *a une borne supérieure, notée* $x \vee y$ *et une borne inférieure, notée* $x \wedge y$

Définition 2.2.2. *Un treillis T est **complet** si toute partie X de T admet une borne supérieure et une borne inférieure dans T.*

Corollaire 2.2.1. *Tout treillis complet et non vide T possède un plus petit élément et un plus grand élément.*
Les opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ dans les treillis ont certaines propriétés analogues à celle de la multiplication et de l'addition usuelles. Dans plusieurs treillis, en générale, cette analogie s'observe également sur la distributivité. On dit que l'opérateur "." est distributive par rapport à "+" si $[x.(y+z) = x.y + x.z]$.

Définition 2.2.3. *Un treillis T est **distributif** si et seulement si :*
$\forall x, y, z \in T \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
et $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

2.2.2 Interprétation

- Le théorème 2.2.1 et la définition 2.2.1 ci-dessus, entraînent que $(\mathcal{S}, \vee_H, \wedge_H)$ est un treillis pour la structure de mariage (H, F, P) lorsque les préférences sont strictes.
- En remplaçant H par F, on définit de la même manière que dans la section 2.2.1, les relations $\vee_F, \wedge_F$ et on a :
  $\mu \vee_H \mu' = \mu \wedge_F \mu'$ et $\mu \wedge_H \mu' = \mu \vee_F \mu' \quad \forall \mu, \mu' \in \mathcal{S}$.
  Ainsi $(\mathcal{S}, \vee_F, \wedge_F)$ est un treillis.

Théorème 2.2.2. *Soit (H, F , P) une structure de mariage. Si les préférences sont strictes, alors $(\mathcal{S}, \vee_H, \wedge_H)$ est un treillis distributif.*

Preuve . *Il faut montrer que $\forall \mu, \mu', \mu'' \in \mathcal{S}$ on a :*
i) $\mu \wedge_H (\mu' \vee_H \mu'') = (\mu \wedge_H \mu') \vee_H (\mu \wedge_H \mu'')$
ii) $\mu \vee_H (\mu' \wedge_H \mu'') = (\mu \vee_H \mu') \wedge_H (\mu \vee_H \mu'')$
Cas 1 *Soit $h \in H$,*
Si $\mu(h) = h$, alors $\mu'(h) = \mu''(h)$. (En effet, on admet et on utilise le fait que si un élément est laissé seul par un mariage stable, alors il est seul pour tous les mariages stables de la structure de mariage considérée). D'où
$[\mu \wedge_H (\mu' \vee_H \mu'')](h) = [(\mu \wedge_H \mu') \vee_H (\mu \wedge_H \mu'')](h) = h.$

Sinon posons

$\mu(h) = f_1$, $\mu'(h) = f_2$, *et* $\mu''(h) = f_3$.

* *Si* $f_1 = f_2 = f_3$, *alors l'égalité i) est vérifiée.*
* *Si* $f_1 = h_2$ *et* $f_3 \succ_h f_2$, *on a*

$$\begin{cases} \mu(h) = f_1 \\ (\mu' \vee_M \mu'')(h) = h_3 \end{cases} \Rightarrow \ [\mu \wedge_H (\mu' \vee_H \mu'')] \ (h) = f_1$$

$$\begin{cases} (\mu \wedge_H \mu')(h) = f_1 \\ (\mu' \wedge_H \mu'')(h) = f_1 \end{cases} \Rightarrow \ [(\mu \wedge_H \mu') \vee_H (\mu' \wedge_H \mu'')] \ (h) = f_1$$

et l'égalité est vérifiée.

* *Si* $f_2 \succ_h f_1$ *et* $f_2 = f_3$, *on a*

  $[\mu \wedge_H (\mu' \vee_H \mu'')](h) = f_1 = [(\mu \wedge_H \mu') \vee_H (\mu \wedge_H \mu'')](h)$
* *Enfin si* $f_3 \succ_h f_2$ *et* $f_2 \succ_h f_1$, *on a*

$$\begin{cases} \mu(h) = f_1 \\ (\mu' \vee_H \mu'')(h) = f_3 \end{cases} \Rightarrow \ [\mu \wedge_H (\mu' \vee_H \mu'')] \ (h) = f_1$$

et

$$\begin{cases} (\mu \wedge_H \mu')(h) = f_1 \\ (\mu \wedge_H \mu'')(h) = f_1 \end{cases} \Rightarrow \ [(\mu \wedge_H \mu') \vee_H (\mu \wedge_H \mu'')] \ (h) = f_1$$

Ainsi l'égalité i) est vérifiée pour tout $h \in H$. *Elle est également vérifiée pour tout* $f \in F$ *car les ensembles H et F jouent des rôles symétriques.*

Cas 2 *Le cas ii) se démontre de la même manière.*

■

Définition 2.2.4. ***(Ordre du treillis*** $\mathcal{S}$***)***

Soient μ *et* μ' *deux éléments de* $\mathcal{S}$.

μ *est* ***consécutif*** *à* μ' *si* $\mu \succ_H \mu'$ *et* $\rceil(\exists \mu'' \in \mathcal{S}, \mu \succ_H \mu'' \succ_H \mu')$.

Nous utilisons cet ordre pour construire le diagramme de Hasse du treillis résultant.

2.3 Treillis $(\mathcal{S}, \vee_H, \wedge_H)$ résutant de l'ensemble des mariages stables pour le profil (H, F, P)

2.3.1 Treillis résultant

Soit (H, F, P) une structure de mariage avec $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ et $F = \{f_1, f_2, f_3\}$

$$\left\{\begin{array}{lcllll} p(h_1) & = & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ p(h_2) & = & f_2 & f_1 & f_4 & f_3 \\ p(h_3) & = & f_3 & f_4 & f_1 & f_2 \\ p(h_4) & = & f_4 & f_3 & f_2 & f_1 \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{lcllll} p(f_1) & = & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \\ p(f_2) & = & h_3 & h_4 & h_1 & h_2 \\ p(f_3) & = & h_2 & h_1 & h_4 & h_3 \\ p(f_4) & = & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{array}\right.$$

Il y exactement dix mariage stables dans ce cas. ce sont :

$\mu_1 = \{(h_1, f_1), (h_2, f_2), (h_3, f_3), (h_4, f_4)\}$ $\mu_2 = \{(h_1, f_2), (h_2, f_1), (h_3, f_3), (h_4, f_4)\}$

$\mu_3 = \{(h_1, f_1), (h_2, f_2), (h_3, f_4), (h_4, f_3)\}$ $\mu_4 = \{(h_1, f_2), (h_2, f_1), (h_3, f_4), (h_4, f_3)\}$

$\mu_5 = \{(h_1, f_2), (h_2, f_4), (h_3, f_3), (h_4, f_1)\}$ $\mu_6 = \{(h_1, f_3), (h_2, f_1), (h_3, f_4), (h_4, f_2)\}$

$\mu_7 = \{(h_1, f_3), (h_2, f_4), (h_3, f_1), (h_4, f_2)\}$ $\mu_8 = \{(h_1, f_3), (h_2, f_4), (h_3, f_2), (h_4, f_1)\}$

$\mu_9 = \{(h_1, f_4), (h_2, f_3), (h_3, f_1), (h_4, f_2)\}$ $\mu_{10} = \{(h_1, f_4), (h_2, f_3), (h_3, f_2), (h_4, f_1)\}$

2.3.2 Représentation de treillis

Le diagramme de Hasse des mariages stables pour la structure ci-dessus est le suivant :

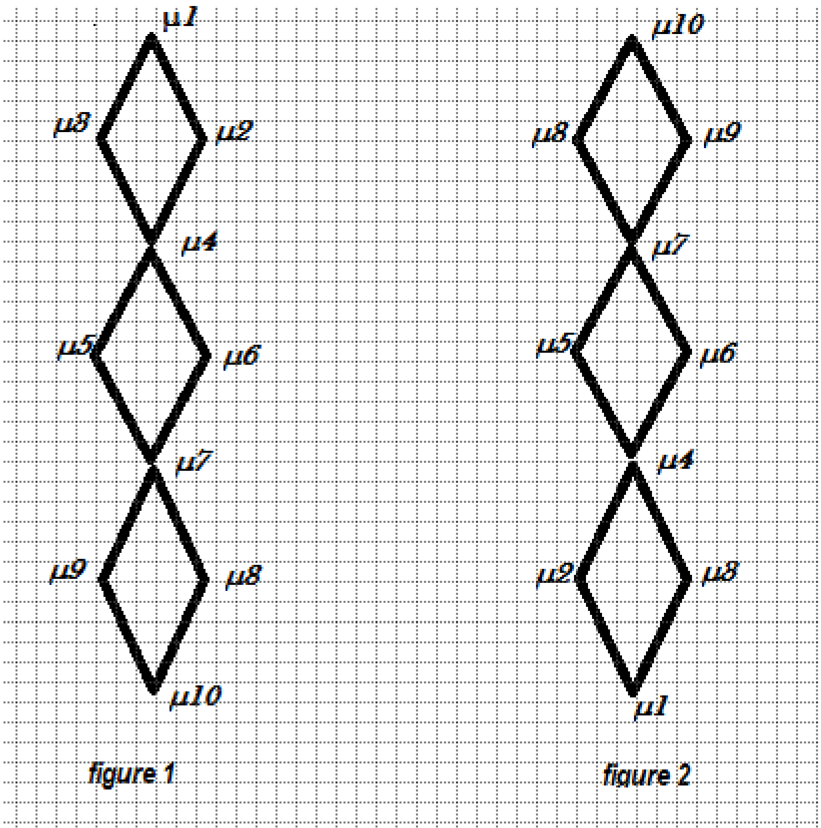


FIGURE 2.1 – Représentation des treillis $(\mathcal{S}, \vee_H, \wedge_H)$ et $(\mathcal{S}, \vee_F, \wedge_F)$

⋆ ⋆ CHAPITRE TROIS ⋆ ⋆

PROBLÈME DE G-MARIAGE

3.1 Théorème de mariage de Hall

Philippe Hall a proposé une condition pour laquelle un appariement est possible dans un graphe biparti. Pour se fixer les idées, on considère la situation suivante :
Supposons qu'on veut apparier N hommes avec N femmes (on admet le fait que chaque femme puisse classer tous les hommes par ordre de préférences car sinon on ne pourra pas envisager un appariement complet en représentant cette situation par les graphes biparti).
Cependant chaque femme donne la liste de ses préférences, qui est un sous ensemble de N hommes. Puisque ces hommes ont aussi chacun sa liste de préférences, certains d'entre-eux peuvent rejeter la proposition faite par les femmes. Cette situation peut être représentée par un graphe biparti, où chaque arête représente le fait qu'une femme spécifique est dans la liste de préférences d'un homme spécifique (il y a liaison entre un homme et une femme si cet homme est dans la liste de préférences de cette femme).
La démonstration du théorème de Hall utilise les graphes, un outil qui permet de décrire un ensemble d'objets et leur relations, c'est-à-dire les liens entre ces objets.

3.1.1 Notion de graphe

Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets et leurs relations avec une representation graphique naturelle. Comme la théorie des graphes utilise un jargon bien particulier, le debut de ce chapitre comporte beaucoup de définitions. C'est un peu embarrassant, mais indispensable pour la suite.

Définition 3.1.1. *Un* ***graphe*** *fini G est défini par deux ensembles :*

$\rightarrow$ *Un ensemble* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *dont les éléments sont appelés les sommets.*

→ *Un ensemble $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, dont les éléments sont appelés les arêtes.*

On le note $G = (X, A)$

Une arête est une paire de sommet (x, y), c'est-à-dire ce qui relie deux sommets entre-eux.

Les sommets x et y sont les extrêmités de l'arête.

*On appelle **ordre** ou **taille** d'un graphe le nombre de sommet de ce graphe.*

*Un **graphe complet** est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres.*

3.1.2 Notion de graphe biparti

Définition 3.1.2. *Un graphe G(X,A) est biparti si l'ensemble des sommets X peut être divisés en deux ensembles V_1 et V_2, de sorte que*

* *Les éléments de V_1 ne sont reliés entre eux par aucune arête ;*
* *Les éléments de V_2 ne sont reliés entre eux par aucune arête.*
* *Les arêtes relient uniquement les éléments de V_1 à des éléments de V_2.*

Remarque 3.1.1. *Il est commun d'utiliser les termes "gauche" et "droite" pour designer les deux ensembles de sommets. Celà est capturé par la définition suivante :*

Définition 3.1.3. *Un graphe biparti est un graphe $G = (V, \mathcal{E})$ dont l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que chaque arête $e \in \mathcal{E}$ a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.*

Définition 3.1.4. *Un appariement dans un graphe G est un sous-graphe de G, tel que tout arête ne partage aucun sommet avec un autre arête. Pour ce fait, chaque sommet dans un appariement M est de degré 1. (Deuxième figure de FIGURE 3.1)*

Définition 3.1.5. *Un appariement est maximal si sa taille est la plus grande possible.*

Remarque 3.1.2. *Pour un graphe donné, il peut exister plusieurs appariements maximal.*

Définition 3.1.6. *Un appariement d'un graphe G est complet s'il contient tous les sommets de G. Nous l'appellerons aussi un mariage parfait.*

Exemple 3.1.1. *La première figure de FIGURE 3.1 ne contient aucun appariement parfait.*

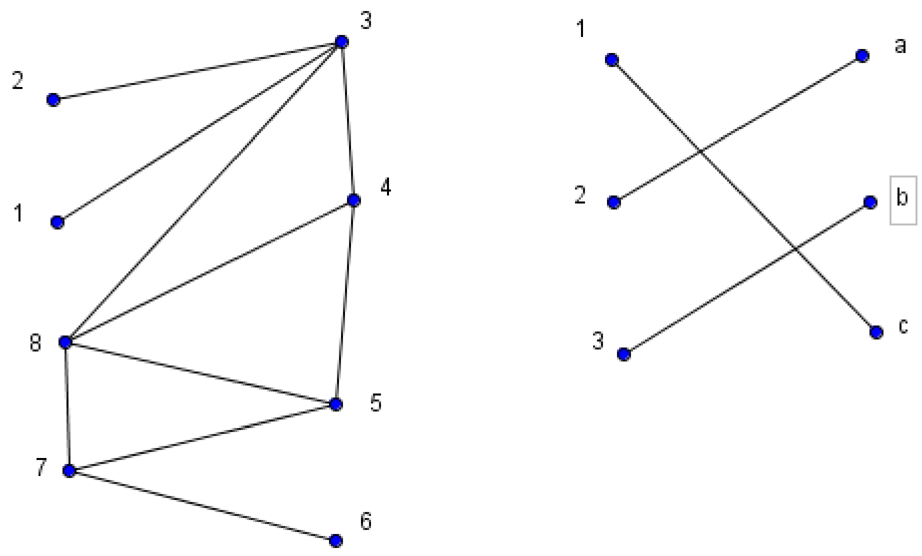
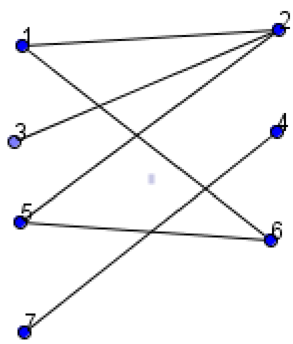


FIGURE 3.1 – Exemple de graphe

On définit un mariage parfait dans un graphe biparti comme étant une application injective $f : V_1 \longrightarrow V_2$ telle que pour tout $x \in V_1$, il existe un arête $e \in \mathcal{E}$ dont les extrémités sont x et $f(x)$

Définition 3.1.7. *Pour tout sous-ensemble $A \subseteq V_1$, on définit ∂A comme étant l'ensemble des sommets $y \in V_2$ dont chaque arête d'extrémité y a une autre extrémité dans A*



Exemple 3.1.2.

FIGURE 3.2 – Exemple de graphe biparti

Théorème de Hall

Le théorème de Hall encore appelé **lemme des mariages** est un résultat combinatoire qui donne une condition nécessaire et suffisante, sur une famille d'ensemble finis, pour qu'il soit possible de choisir des éléments distincts, un par ensemble. Il a été démontré par Philip Hall et a été à l'origine de la théorie du couplage dans les graphes.

Définition 3.1.8. *On appelle condition de Hall la situation selon laquelle dans tout sous-ensemble de r femmes, chaque femme a un ordre de préférence sur au moins r hommes. On considère un certain nombre de fille et de garçons. Chaque fille aime un certain nombre de garçon. La question est de savoir sous quelle condition chaque fille peut-elle être mariée à un garçon qu'elle aime ? Un exemple palpable est le suivant :*

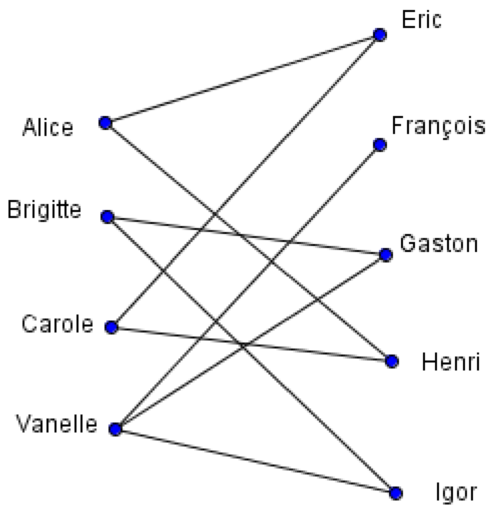


FIGURE 3.3 – Exemple

Théorème 3.1.1 (Théorème de mariage de Hall)**.** *Soit G un graphe biparti d'ensemble de départ V_1, d'ensemble d'arrivée V_2, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des sommets. Il existe un mariage parfait $f : V_1 \longrightarrow V_2$ si et seulement si pour tout sous-ensemble $A \subset V_1$, tel que $|\partial A| \geq |A|$*

Voici une interpretation de ce théorème : V_1 désigne un ensemble de garçons, V_2 désigne un ensemble de filles, chaque garçons ou chaque fille ayant sa liste de préférences. Alors, si pour chaque groupe de garçons, l'ensemble des filles qui leur plait est plus grand que le nombre de garçons de ce sous-groupe, on peut marier chaque garçon à une fille différente qui lui plait. Bien-sûr on peut échanger le rôle des filles et des garçons.

Preuve . *Par induction sur le cardinal de V_1.*

Si $|V_1| = 1$, le résultat est direct.

Supposons que le résultat est vrai si $|V_1| \leq n$, et considérons le graphe biparti G dont l'ensemble des sommets d'entrée V_1 est de cardinal $n + 1$. On peut examiner deux possibilités :

i) soit pour tout sous-ensemble propre A de $V_1 (A \subset V_1)$, le cardinal de ∂A est au moins supérieur au cardinal de A ;

ii) soit il existe un sous-ensemble propre A de V_1 tel que $|\partial A| = |A|$.

***<u>Cas 1</u>**. Choisissons $x \in V_1$ et $y \in \partial\{x\}$ (par hypothèse $\partial\{x\}$ a au moins un élément).*

Désignons par G^* le graphe biparti dont l'ensemble des sommets d'entrée est $V_1^* = V_1 - \{x\}$, l'ensemble des sommets de sortie est $V_2^* = V_2 - \{y\}$, et dont les arêtes sont les mêmes que ceux de G, mais que l'arête incident sur x ou y a été supprimé.

Le graphe biparti G^* satisfait l'hypothèse (i), car dans le cas (i), tous les sous-ensembles A de V_1 sont tels que $|\partial A| \geq |A| + 1$. Ainsi, en supprimant le sommet y dans la frontière ∂A de A, ∂A a au moins $|A|$ sommets.

D'après l'hypothèse de récurrence, il y a un mariage parfait dans G^*. Ce mariage parfait provient de celui du graphe origine G en prenant $f(x) = y$.

***<u>Cas 2</u>**. Soit $A \subset V_1$ tel que $|\partial A| = |A|$. Construisons les graphes bipartis G^* et G^{**} avec pour ensembles d'entrée $V_1^* = A$ et $V_1^{**} = V_1 - A$, et pour ensembles de sortie $V_2^* = \partial A$ et $V_2^{**} = V_2 - \partial A$, et les arêtes héritant du graphe G. Utilisons l'hypothèse de récurrence pour montrer qu'il y a un appariement parfait pour chacun des graphes bipartis G^* et G^{**}. S'il en est ainsi, alors le mariage dans* G *sera obtenu en associant les mariages parfaits dans G^* et G^{**}.*

Remarquons que les cardinaux des ensembles V_1^* et V_1^{**} sont supérieurs à n, car $A = V_1^*$ est sous-ensemble propre de V_1. Ainsi l'hypothèse de récurrence garantira l'existence de mariage parfait dans G^* et G^{**} si l'hypothèse (i) est satisfait dans chacun de ces graphes.

Commençons par le graphe G^* : pour tout sous-ensemble $B \subseteq A = V_1^*$, la frontière $\partial^* B$ dans G^* coïncide avec ∂B dans G. Par conséquent, G^* satisfait (i). Maintenant, pour G^{**} : si on prend un sous-ensemble $B \subseteq V_1^{**} = V_1 - A$ dont la frontière $\partial^{**} B$ dans le graphe G^{**} a moins de $|B|$ éléments, alors dans le graphe G, la frontière $\partial(B \cup A)$ aura au plus $|B \cup A| + 1$ éléments, car $\partial(B \cup A) = \partial^{**} B \cup \partial A$. Ce qui est impossible car le graphe G *satisfait (i). Donc G^{**} satisfait aussi (i).*

Corollaire 3.1.1. *G admet un mariage parfait si et seulement si*
$\forall A \subset V$ *tel que* $A \subset V_1$ *ou* $A \subset V_2$*, on a* $\mid N(A) \mid \geq \mid A \mid$.

Démonstration. Supposons que G admet un couplage parfait $\mathcal{C}$*. Alors, puisque G est biparti on voit que toute arête dans* $\mathcal{C}$ *a une extrémité dans* V_1 *et l'autre dans* V_2*. Ainsi,* $\mathcal{C}$ *est à la fois couplage de* V_1 *et un couplage de* V_2

3.2 Groupes de permutations et G-mariage

La notion de groupe joue un rôle fondamental en mathématiques. D'une part, c'est l'une des principales structures algébriques avec celles d'anneaux, de corps, de modules et d'espaces vectoriels. D'autre part un groupe décrit les transformations possibles d'un objet, ou les manipulations qu'on peut faire sur un objet. Dans cette partie, nous essayons d'étendre le résultat de stabilité dans les groupes de permutations.

3.2.1 Notion de groupes de permutations

Soit G un ensemble non vide.

Définition 3.2.1. *Une permutation sur G est une bijection de G dans G.*

Notation 3.2.1. *L'ensemble des permutations sur G est noté* $S(G)$*, et* $(S(G), \circ)$ *est un groupe.*

Définition 3.2.2. *On dit que G est un groupe de permutation sur N, s'il est un sous-groupe du groupe symétrique* S_n *(lorsque* $G = \{1, 2, ..., n\}$*, on note* S_n *au lieu de* $S(G)$*)*

Théorème 3.2.1. *Tout groupe G de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de* S_n

3.2.2 Notion d'orbite d'un élément j de $[|1; n|]$

Définition 3.2.3. *Pour* $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *et* $s \in S_n$*, on note* $\mathcal{O}_s(j) = \{s^k(j),\ k \in \mathbb{Z}\}$*. On dit que* $\mathcal{O}_s(j)$ *est la* ***s-orbite de j.***

Remarque 3.2.1. *Une s-orbite est une partie de* $\{1, 2, ..., n\}$ *de la forme* $\mathcal{O}_s(j)$ *pour au moins un* $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Définition 3.2.4. *On dit que $s \in S_n$ est un* **cycle** *s'il existe une s-orbite $\mathcal{O}$ telle que card$(\mathcal{O}) \geq 1$ et que cette orbite est unique. Ainsi card$(\mathcal{O})$ est appelé la longueur du cycle et $\mathcal{O}$ est son support.*

Remarque 3.2.2. *Un q-cycle est un cycle de longueur q, avec $q \in \mathbf{N}$ et un 2-cycle est une transposition*

Exemple 3.2.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

est un cycle de longueur 4, de support $\{2, 3, 4, 5\}$. On le note [2 3 4 5]

Définition 3.2.5. *Un sous-groupe G de S_n satisfait la condition de k-orbite, avec $k \in N$ sur $\mathcal{V}$ si pour tout $Y \subseteq N^k$, $Y \neq \emptyset$, on peut trouver $g \in G$ tel que $g(Y) \subseteq \bigcup\limits_{y \in Y} V_y$ où $g(Y) = \{g(y) = (g(y_1), g(y_2), ..., g(y_k) : y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in Y\}$.*

Le problème de G-mariage

Soient G un groupe de permutation sur $N = \{1, 2, ..., n\}$, où $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{V}$ un système de sous-ensembles $V_1, V_2, ..., V_n$ de N. La question qui se pose est la suivante : Existe-t-il un élément $g \in G$ tel que $g(i) \in V_i$ pour chaque $i \in N$?
Si un tel élément g existe, on dit que G a un G-mariage de $\mathcal{V}$. Une condition nécessaire pour ce problème est la condition d'orbite : **Pour tout** $Y \subseteq N$**,** $Y \neq \emptyset$**, il y a un** $g \in G$ **tel que** $g(Y) = \{ \quad g(y) : y \in Y\} \subseteq \bigcup\limits_{y \in Y} V_y$.

On peut donc se poser la question de savoir si cette condition est aussi suffisante ? c'est dans cet optique que Keevash a montré dans le cas où G est un groupe symétrique sur N, que ce problème est équivalent au problème de mariage de Hall, et la condition nécessaire et suffisante est que $|\bigcup\limits_{y \in Y} V_y| = |Y|$ pour tout $Y \subseteq N$, $Y \neq \emptyset$ qui est équivalente à la condition de l'orbite.

Lemme 3.2.1. *i) Si G a un G-mariage de $\mathcal{V}$, alors G satisfait la condition de k-orbite sur $\mathcal{V}$, pour $k = 1, 2, ..., n$.*

ii) Si G satisfait la condition de n-orbite sur $\mathcal{V}$, alors G a un G-mariage d'éléments de $\mathcal{V}$.

iii) Si G satisfait la condition de k-orbite sur $\mathcal{V}$, alors G satisfait la condition de j-orbite sur $\mathcal{V}$, pour $j < k$. C'est ainsi que Check Yeaw K. montre que la condition d'orbite est équivalente au problème de Hall décrit plus haut.

Théorème 3.2.2. *Soit $G = S_n$. Alors G a un G-mariage sur $\mathcal{V}$ si et seulement s'il satisfait la condition d'orbite d'élément sur $\mathcal{V}$.*

Soit $k \in N$, adoptons la notation suivant :

a) $N^k = \underbrace{N \times N \times ... \times N}_{k \quad fois}$

b) Soit $Y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in N^k$ et $g \in G$. Posons $V_Y = V_{y_1} \times V_{y_2} \times ... \times V_{y_k}$ et $g(Y) = (g(y_1), g(y_2), ..., g(y_k))$

Remarque 3.2.3. *Noter que la condition de 1-orbite est juste la condition usuelle d'orbite.*

Notre définition de la condition de k-orbite jusqu'ici motivée, pour k=1, 2,...,n, est évidemment une condition nécessaire pour le problème de G-mariage, il n'est pas aisé de déterminer le plus petit k pour lequel la condition de k-orbite est suffisante. Un exemple illustrateur a été mis sur pied par Keevash, où montre que la condition de 1-orbite n'est pas suffisante par rapport au problème de G-mariage pour les groupes cycliques d'ordre 3.

Proposition 3.2.1. *Soit $\mathcal{V}$ un système de sous-ensemble de $N = \{1, 2, 3\}$ tel que $V_1 = N - \{3\}$, $V_2 = N - \{2\}$, $V_3 = \{1\}$. Alors $G = Alt(N) = C_3$ satisfait la condition de 2-orbite d'éléments de $\mathcal{V}$. Ce pendant ce n'est pas un G-mariage de $\mathcal{V}$*

Lemme 3.2.2. *Soient $Y_1, Y_2 \subseteq N^k$. On suppose qu'on peut trouver un $g \in G$ tel que $g(Y_1) \subseteq \bigcup_{y \in Y_1} V_y$ et $g(Y_2) \subseteq \bigcup_{y \in Y_2} V_y$.*
Alors $g(Y_3) \subseteq \bigcup_{y \in Y_3} V_y$ où $Y_3 = Y_1 \cup Y_2$.

Lemme 3.2.3. *Soit $Y_1 \subseteq N^k$ et $Y_2 = \{(y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, ..., y_{\pi(k)}) : (y_1, y_2, ..., y_k) \in Y_1\}$ pour $\pi \in S_k$. On suppose qu'il existe $g \in G$ tel que $g(Y_1) \subseteq \bigcup_{y \in Y_1} V_y$. Alors $g(Y_2) \subseteq \bigcup_{y \in Y_2} V_y$.*

Nous nous proposons ainsi de donner l'existence des G-mariages pour n'importe quel groupe de permutation G.

Théorème 3.2.3. *Supposons que G est un groupe de permutation sur N. Alors la condition de l'orbite est suffisante pour le problème de G-mariage si et seulement G est un produit direct de groupes symétriques.*

♣ Implication pédagogique ♣

L'opportunité de rédiger ce mémoire nous a offert l'occasion de faire nos premiers pas d'autonomie en termes d'investigations scientifiques et de déploiements de nos aptitudes à comprendre, à construire un raisonnement logique sans oublier la maîtrise indispensable des outils de nouvelles technologies de l'information et de la communication incontournables pour tout enseignant en ces moments où les apprenants sont aspirés par les tablettes, téléphones androïdes, ordinateur portable...

Nous nous proposons de relever dans cette quelques repères de l'impact de ce sujet au plan pédagogique sur le système éducatif.

- Plus particulièrement pour notre thème d'étude, la modélisation et l'analyse nous a permis d'être en mesure de classer, d'associer, d'apparier logiquement et raisonnablement les éléments de deux ensembles finis de même cardinal.
  - ✓ Un exemple concret auquel nous ferons face consiste à classer, à repartir les élèves deux par banc dans une salle de classe ;
  - ✓ un autre exemple consiste à n enseignant d'être affectés dans n établissements selon les préférences simultanées des enseignants et des établissements ;
- A travers ce sujet, nous sommes désormais en mesure de proposer des solutions efficaces et raisonnable à certains problèmes de la vie sociale ayant trait aux affectations, ce qui nous permet de mieux élargir nos horizons sur la question "qu'est-ce que les mathématiques ? et à quoi ça sert ? "
- Enfin pour mener à terme ce travail, il a fallu que nous puisions dans nos compétences la compréhension d'une situation-problème, en proposer un formalisme et d'étudier les propriétés de objets mathématiques obtenus. Par transposition, les documents de travail (mentionnés en bibliographie) sur lesquels sont basées nos recherches peuvent

être perçus comme une ressource pédagogique dont le contenu doit être partagé avec les apprenants. C'est ainsi que nous avons décomposé la ressource pour en donner une reconstitution en termes de chapitres ; par suite de définitions des concepts à étudier et des propriétés qui vérifient ces concepts. En mettant ainsi ces propriétés ensemble, on déduit donc des résultats. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien d'un enseignant de mathématiques que nous aspirons être . Nous pensons notamment à l'élaboration de nos cours futurs à partir des diverses ressources éducatives

♣ Conclusion et perspectives ♣

Au terme de notre travail qui portait sur le problème d'affectations, nous avons à présent un outil permettant de déterminer efficacement un appariement stable dans toute structure de mariage d'ensembles H et F finis et de même cardinal. En effet, l'objectif assigné à ce modeste travail était d'introduire la notion de stabilité d'un mariage, d'établir les conditions d'existences d'un mariage stable, puis de proposer une méthode de détermination de tels mariages, pour les structures sociales particulières dites structures de mariages. Nous avons travaillé tout au long de cette étude comme si l'honnêteté constituait le mot d'ordre de tout individu. Autrement dit, nous avons supposé que chaque individu fournira toujours une liste de préférences reflétant ses vrais goûts. Mais on peut se demander ce qui se passerait si un agent fournit une fausse liste de préférences.

Cependant, le problème de stabilité n'ayant pas été résolu dans les G-mariages dans le présent travail, nous inscrivons celà dans les perspectives auxquelles nous associons également le problème de mariage lorsque les ensembles sont de cardinaux différents d'une part, et lorsque les préférences des joueurs ne sont plus strictes d'autre part.

♣ Bibliographie ♣

[1] CHENG YEAW KU, KOK BIN WONG (2011),The group marriage problem, Journal of combinatorial theory, 672-680

[2] D. Dumont (1989), Les mariages stables, pour la science.

[3] Françoise Forges et Al. (2013), " Appariement : Des modèles de Lloyd Shapley à la conception des marchés d'Alvin Roth", Revue d'économie politique 2013/5, p.663-696.

[4] PATRICIA EVERAERE, MAXIME MORGE (2012), Un comportement d'agent respectant la privacité pour les mariages stables et équitables, revue d'intelligence artificielle- N^o-5/2012, 471-494.

[5] SANDJO Appolinaire (1995), Structure de mariages : modélisation et analyse, mémoire de maitrise de mathématiques appliquées aux sciences sociales, Université de Yaoundé I.

[6] TARMO VESKIOJA (2005), Stable Marriage Problem and College Admission,Thesis on informatics and system engineering.