

UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT LOUIS  
U.F.R des Sciences Appliquées et Technologie  
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI)



**Thèse de Doctorat  
de Mathématiques Appliquées  
Option : Analyse Numérique**

Présentée par :

**Mr Diène NGOM**

**Thème :**

***OBSERVATION ET RÉGULATION DE CERTAINS  
MODÈLES DISCRETS D'ÉCOSYSTÈMES***

Soutenue publiquement le 15 Décembre 2008 devant le jury composé de :

Mr	Gauthier SALLET	Professeur Titulaire	UPV (France)	Président/Rapporteur
Mr	Mary Teuw NIANE	Professeur Titulaire	UGB (Sénégal)	Codirecteur de Thèse
Mr	Jean Luc Gouzé	Directeur de Recherche	INRIA (France)	Rapporteur
Mr	Aliou Diop	Maître de Conférences	UGB (Sénégal)	Examineur
Mr	Abderrahman IGGIDR	Chargé de Recherche	INRIA (France)	Codirecteur de Thèse
Mr	Abdou Sène	Maître de Conférences	UGB (Sénégal)	Examineur
Mr	Abdoulaye Sène	Maître de Conférences	UCAD(Sénégal)	Examineur



# Remerciements

Je ne saurais assez remercier mes deux directeurs de thèse.

Le Docteur Abderrahman IGGIDR pour m'avoir proposé un sujet aussi passionnant et mené ce travail avec toute la rigueur qu'il fallait. Sa disponibilité et son sens aigu du travail bien fait m'ont permis aujourd'hui d'achever cette thèse. Plus qu'un directeur de thèse, il a été pour moi un tuteur durant mes différents séjours à Metz. Je lui en suis très reconnaissant.

Le Professeur Mary Teuw NIANE pour avoir contribué à ma formation depuis ma première année d'université et guidé mes premiers pas dans la recherche en acceptant de m'accueillir au sein du LANI dont il est le directeur. Si j'en suis aujourd'hui à ce stade de la recherche, c'est grâce à sa capacité à orienter ces étudiants vers des disciplines porteuses de projet de développement et à mettre à leur disposition les moyens nécessaires à leur réussite.

J'exprime mes remerciements au Professeur Gauthier Sallet pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury. Merci beaucoup aussi d'avoir accepté de rapporter cette thèse. J'aimerais aussi souligner que son cours d'épidémiologie régulièrement dispensé dans le cadre du D.E.A d'Analyse Numérique a aiguisé mon appétit pour les mathématiques appliquées à la biologie.

Mes sincères remerciements vont aussi à l'endroit des professeurs Aliou Diop, Abdou Sène et Abdoulaye Sène pour avoir accepté de participer à ce jury et pleinement participé à ma formation en étant toujours attentifs à mes questions.

Je remercie aussi vivement le Professeur Jean Luc GOUZE d'avoir consacré lui aussi de son temps pour rapporter cette thèse, pour l'importance qu'il a donné à ce travail ainsi que pour les remarques utiles qui ont permis d'améliorer certains aspects de cette thèse.

J'aimerais aussi faire part de ma reconnaissance au Dr Mamadou SY. Il m'a

---

toujours apporté son soutien pendant les moments difficiles. Ces conseils et encouragements m'ont été d'un grand apport durant ces dernières années de thèse.

J'exprime ma gratitude à tout le personnel enseignant et administratif de l'unité de formation et recherche Sciences Appliquées et Technologie.

Je voudrais aussi remercier très profondément ma famille, la famille KONE à Saint Louis et La famille IGGIDR à Metz.

Je témoigne toute ma reconnaissance à ma femme, je ne saurais assez lui dire merci. Elle a toujours été présente pour me remonter le moral aux moments où j'en avais vraiment besoin. Merci pour tout !

Que tous mes amis et camarades de promotion du réseaux EDP-Contrôle-Modélisation et du laboratoire de Mathématiques et Applications de l'université de Metz avec qui j'ai toujours eu du plaisir à échanger sur des questions diverses trouvent ici mes remerciements et l'expression de mes sentiments distingués.

Je ne saurais terminer sans remercier le **réseau EDP-Contrôle-Modélisation**, **L'Agence Universitaire de la Francophonie**, **l'INRIA** et le **Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'université Paul Verlaine de Metz** pour le soutien financier et matériel qu'ils m'ont apporté durant ces années de thèse.

# Dédicaces

*A mes chers parents*

*A ma femme chérie Ndéo DIOUF*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Rappel sur la stabilité et la synthèse d'observateur des systèmes dynamiques discrets</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Stabilité des systèmes dynamiques discrets . . . . .	13
2.2.1	Point d'équilibre . . . . .	14
2.2.2	Stabilité des systèmes discrets linéaires . . . . .	15
2.2.3	Stabilité des systèmes non linéaires discrets . . . . .	20
2.2.4	Stabilisation des systèmes dynamiques . . . . .	27
2.3	Observateur des systèmes discrets dynamiques . . . . .	28
2.3.1	Observabilité des systèmes discrets dynamiques . . . . .	28
2.3.2	Observateur des systèmes discrets dynamiques : état de l'art . . . . .	31
2.3.3	Observateur des systèmes discrets linéaires déterministes . . . . .	32
2.3.4	Observateur des systèmes linéaires discrets bruités : Filtre de Kalman . . . . .	34
2.3.5	Observateur des systèmes discrets non linéaires . . . . .	39
2.4	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Modèles discrets de la dynamique des stocks d'une population de poissons</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Modèle discret à structure d'âge . . . . .	49
3.2.1	La dynamique de passage d'une classe à la suivante . . . . .	49
3.2.2	Recrutement dans la première classe d'âge . . . . .	50
3.2.3	Calcul des captures en nombre . . . . .	51
3.3	Modèle discret à structure de stade . . . . .	52
3.4	Conclusion . . . . .	53

<b>4 Synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes discrets :Application à des modèles de pêche</b>	<b>55</b>
4.1 Introduction . . . . .	55
4.2 Forme générale de l'observateur . . . . .	56
4.3 Observateur pour un modèle de pêche discret structuré en classe d'âge	62
4.3.1 Motivation . . . . .	63
4.3.2 Synthèse de l' observateur . . . . .	65
4.3.3 Simulations numériques . . . . .	73
4.3.4 Application de l'observateur . . . . .	77
4.4 Observateur pour un modèle de pêche discret structuré en classe de stade . . . . .	81
4.4.1 Observateur de systèmes linéaires discrets à entrées inconnues	83
4.4.2 Observateur du modèle de pêche à structure de stade lorsque l'effort de pêche est constant . . . . .	86
4.4.3 Observateur du modèle de pêche à structure de stade lorsque l'effort de pêche est variable . . . . .	86
4.4.4 Simulations numériques . . . . .	89
4.4.5 Application . . . . .	92
4.5 Conclusion . . . . .	95
<b>5 Observateur numérique intervalle : Application à un modèle de pêche discret structuré en classe d'âge</b>	<b>97</b>
5.1 Introduction . . . . .	97
5.2 Algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle . . . . .	98
5.2.1 Ensemble invariant des états du modèle de pêche . . . . .	98
5.2.2 Algorithme de minimisation de l'erreur d'estimation . . . . .	99
5.2.3 Algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle .	101
5.3 Simulations . . . . .	109
5.4 Conclusion . . . . .	112
<b>6 Stabilité et stabilisation d'un modèle de pêche discret structuré en stade</b>	<b>113</b>
6.1 Introduction . . . . .	113
6.2 Stabilité globale de l'équilibre non nul . . . . .	114
6.2.1 Point d'équilibre . . . . .	114
6.2.2 Analyse de la stabilité du point d'équilibre $x^*$ . . . . .	115
6.3 Stabilisation par retour d'état . . . . .	125
6.4 Conclusion . . . . .	127
<b>7 Conclusion générale et perspectives</b>	<b>129</b>



# Chapitre 1

## Introduction générale

La pêche a été longtemps considérée comme étant une activité pérenne malgré la grande attaque à laquelle les poissons étaient soumis. En raison de la baisse drastique des captures et de l'extinction notée de certaines espèces, il est aujourd'hui prouvé que les ressources halieutiques ne sont pas inépuisables [40]. Face à cette situation, il est urgent pour les décideurs politiques et économiques de se doter de moyens scientifiques d'estimation et de contrôle de la ressource afin d'assurer une gestion pérenne de la pêche dans le temps et dans l'espace. La compréhension de la dynamique des principales espèces pêchées constitue un préalable indispensable à une bonne gestion des ressources halieutiques. La diversité et la complexité des interactions entre les différentes composantes du cycle biologique des poissons et de l'environnement marin dans lequel ils évoluent nécessitent une approche qui permet d'étudier la multiplicité des causes et des effets. Ainsi, Jolivet et Pavé déclarent que : "la modélisation apparaît comme la démarche par excellence conçue pour prendre en compte et traiter ces problèmes" [44].

Les modèles de dynamique des populations de poissons exploitées, lorsqu'ils existent, sont des outils d'aide performants pour la gestion des ressources halieutiques. Ces modèles sont pour la plupart conçus dans le cadre d'une grande collaboration entre mathématiciens et biologistes. Les modèles qui existent dans la littérature ne prétendent pas décrire de façon exacte la dynamique d'une population de poissons, ils donnent juste une représentation formelle d'une partie de la réalité sur la dynamique de la population de certaines espèces pêchées. A travers ces modèles et en usant d'outils bien connus de théorie du contrôle, nous pouvons dans certains cas prétendre à l'étude de l'estimation et du comportement de la taille des stocks de poissons.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude d'une classe de systèmes dyna-

miques qui interviennent dans la modélisation de la dynamique des populations de poissons soumises à l'action de la pêche. Ces modèles peuvent s'écrire sous certaines hypothèses sous la forme d'équations aux différences :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), E(k)) \\ y(k) = h(x(k), E(k)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où :  $x(k)$  représente l'état du système à l'instant  $k$  avec  $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$  puisqu'il s'agit de modèles dynamiques à structure d'âge ou de stade et  $x_i(k)$  est l'effectif de la classe  $i$  à l'instant  $k$ . La variable  $E(k)$  est en général l'action externe, il s'agira dans le cadre de notre étude de l'effort de pêche exercé sur la population de poissons considérée. La variable  $y(k)$  représente les quantités mesurables que sont les captures totales en nombre ou en poids. Les objectifs que nous nous fixons dans cette thèse sont les suivants :

- Observabilité des états du système : il s'agira pour nous de voir si la connaissance de la sortie mesurable  $y(k)$  à tout instant  $k$  est suffisante pour déterminer la solution  $x(k)$  du système (1.1) de façon unique. En d'autres termes il s'agira de se poser la question de savoir si deux états initiaux distincts produiront deux sorties distinctes. Et si cette dernière condition est satisfaite, on se pose la question de savoir s'il est possible d'avoir un moyen d'estimer les états du système (1.1) : on parle de construire un "**observateur**" qui n'est autre qu'un système dynamique auxiliaire :

$$z(k+1) = g(z(k), y(k)) \quad (1.2)$$

qui doit vérifier pour toute condition initiale  $x(0)$  du système (1.1) (qu'on ne connaît pas) et pour toute condition initiale  $z(0)$  du système (1.2) (qu'on peut choisir), la solution  $z(k)$  du système (1.2) converge vers la solution  $x(k)$  du système (1.1). Plus rapide est la convergence, meilleur est l'observateur. Quand la convergence de l'observateur est exponentielle, on parlera "**d'observateur exponentiel**". Le problème est donc de construire la bonne fonction  $g$ .

- Etude de l'existence d'état d'équilibre et du comportement asymptotique des solutions du système (1.1).

- Etude de la stabilisation du système autour d'un état d'équilibre : il s'agira de déterminer s'il est possible d'établir une stratégie d'action de pêche  $E(x(k))$  (feedback en terme de théorie du contrôle) qui soit fonction de l'état du système et qui permet d'emmener le système asymptotiquement vers un état désiré et de le stabiliser au voisinage de cet état.

---

Ces problèmes sont bien connus en théorie du contrôle. Pour les systèmes linéaires, il existe des méthodes bien établies qui permettent de résoudre les problèmes mentionnés ci-dessus. Par contre pour les systèmes non linéaires, il n'y a pas de méthode générale. Il existe cependant une littérature abondante qui aborde ces problèmes pour les systèmes non linéaires continus avec une sortie continue, c'est à dire les valeurs de la sortie sont disponibles à tout instant  $k \in \mathbb{R}^+$ . A l'inverse des systèmes non linéaires continus, il y a fort peu de résultats qui concernent les systèmes non linéaires discrets ou à sorties discrètes. Nous comptons dans le cadre de notre travail développer des outils adaptés à ce genre de systèmes. Notre plan de travail s'établit comme suit :

Le deuxième chapitre est essentiellement consacré aux rappels des notions de stabilité et d'observabilité en théorie du contrôle. Nous y rappelons les résultats de base fondamentaux concernant les équations dynamiques discrètes en rapport avec les objectifs que nous nous sommes fixés dans cette thèse. Les résultats que nous avons tenus à rappeler sont très bien connus et nous avons volontairement omis la preuve de certains de ces résultats. Néanmoins nous avons indiqué des références pour les lecteurs qui souhaiteraient se faire une idée de la preuve de certains résultats énoncés.

Au chapitre 3, nous présentons deux modèles de pêche décrivant la dynamique d'une population de poissons soumise à l'action de la pêche. Ces modèles qui ont été développés dans [26] considèrent une structuration en âge et en stade de la population de poissons, ils vont nous servir de base dans l'étude de l'estimation et du comportement asymptotique de la taille du stock de certaines populations de poissons.

Nous abordons dans le chapitre 4 la question de l'estimation de la taille du stock pour des populations de poissons dont la dynamique est décrite par les modèles discrets à structure d'âge et de stade présentés au chapitre 3. En considérant les mesures des captures en nombre des populations de poissons considérées, nous construisons des observateurs globaux pour les modèles de dynamique de la taille des stocks. En d'autres termes, nous utilisons la sortie des captures en nombre et construisons un système auxiliaire dont les états convergent vers les états des modèles quelle que soit la condition initiale que nous fixerons. Ce problème a été déjà abordé dans [38] mais pas avec la vraie formule des captures. Une partie des travaux effectués dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication [67].

Au chapitre 5 nous proposons une nouvelle approche d'investigation de l'estimation de la taille des stocks d'une population de poissons dont la dynamique est représentée par un modèle de pêche à structure d'âge. Nous adaptions un Algorithme

de synthèse d'observateur intervalle au modèle à structure d'âge. L'algorithme permet d'encadrer les états du modèle par des intervalles. L'algorithme de synthèse de l'observateur intervalle est bien développé dans [28] pour une classe générale de systèmes non linéaires. Les travaux réalisés dans ce chapitre ont aussi fait l'objet d'une publication à paraître [27].

Le dernier chapitre est réservé à l'étude du comportement asymptotique des solutions du modèle à structure de stade en considérant la fonction de recrutement Beverton et Holt. Nous montrons que lorsque l'on considère l'effort de pêche comme étant constant, les états du modèle à structure de stade sont globalement asymptotiquement stables autour du point d'équilibre correspondant. Nous montrons aussi que l'on peut calculer l'effort de pêche en fonction des états du modèle de sorte que son équilibre soit globalement et asymptotiquement stable : on parle dans ce cas précis de stabilisation par retour d'état. Le même type de problème a fait l'objet d'une étude dans [69] pour le modèle à structure d'âge.

# Chapitre 2

## Rappel sur la stabilité et la synthèse d'observateur des systèmes dynamiques discrets

### 2.1 Introduction

Les systèmes d'équations dynamiques discrets sont des outils très prisés dans l'étude de l'évolution au cours du temps de beaucoup de phénomènes de la nature. Ils permettent une représentation mathématique formelle de certains phénomènes en mettant en relation trois variables connues sous les noms d'entrées, sorties et d'états. Ces systèmes peuvent s'écrire sous certaines hypothèses sous la forme d'équations aux différences :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $x(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement les états, les entrées et les sorties mesurables du système (2.1). On suppose que  $f$  et  $h$  sont des fonctions continues. Nous nous intéressons dans ce chapitre aux rappels de quelques notions et résultats de théorie du contrôle liés à l'étude de la stabilité et à la synthèse d'observateurs des systèmes discrets dynamiques du type (2.1).

### 2.2 Stabilité des systèmes dynamiques discrets

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques est un problème important en théorie du contrôle. Il est souvent très difficile de résoudre de façon explicite un système d'équations dynamiques. En effet, les techniques de résolution d'équations

dynamiques connues jusqu'ici se résument au cas des systèmes linéaires et à certaines formes particulières de systèmes non linéaires. On est alors très souvent amené à se restreindre à l'étude du comportement qualitatif des solutions.

### 2.2.1 Point d'équilibre

La notion de point d'équilibre est importante dans l'étude qualitative des systèmes dynamiques. Dans beaucoup de domaines d'application comme en biologie, en économie, en physique et en ingénierie mathématique, on s'intéresse souvent au comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique régissant le fonctionnement d'un système par rapport à son point d'équilibre. Considérons le système :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (2.2)$$

Où  $f$  est une fonction continue et définie dans le domaine  $\Omega \times \mathcal{R}^m$ ,  $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ . Nous donnons les définitions suivantes [20] :

**Définition 2.2.1**  $x^*$  appartenant à  $\Omega$  est un point d'équilibre du système (2.2) si  $x^* = f(x^*, u(k))$  quel que soit  $k \in \mathcal{N}$ .

En d'autre terme, un point d'équilibre du système (2.2) est une solution constante du système (2.2). Nous noterons dans la suite  $x(x_0, k_0, k)$  la solution du système (2.2) à l'instant  $k$  avec comme condition initiale  $x_0$  au temps initial  $k_0$ .

**Définition 2.2.2**  $x^* \in \Omega$  est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour le système (2.2) si :

$\forall \epsilon > 0, \forall k_0 > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon, k_0)$  tel que  $\|x_0 - x^*\| < \eta$  implique que  $\|x(x_0, k_0, k) - x^*\| < \epsilon$  pour tout  $k \geq k_0$ .

On dit que l'équilibre  $x^*$  est uniformément stable si le réel  $\eta$  est indépendamment choisi par rapport à  $k_0$ .

**Définition 2.2.3**  $x^* \in \Omega$  est un point d'équilibre attractif du système (2.2) s'il existe  $\mu(k_0) = \mu$  tel que  $\|x_0 - x^*\| < \mu$  implique que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(x_0, k_0, k) = x^*$ .

On dit que l'équilibre  $x^*$  est uniformément attractif si le réel  $\mu$  est indépendamment choisi par rapport à  $k_0$ . L'équilibre  $x^*$  est globalement attractif pour le système (2.2) si  $\mu = \infty$ .

**Définition 2.2.4**  $x^* \in \Omega$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système (2.2) s'il est stable et attractif pour le système (2.2).

$x^* \in \Omega$  est dit uniformément asymptotiquement stable pour le système (2.2) s'il est uniformément stable et uniformément attractif pour le système (2.2).

**Définition 2.2.5**  $x^* \in \Omega$  est un point d'équilibre exponentiellement stable du système (2.2) si :

$\exists \delta > 0, M > 0, \eta \in ]0, 1[$  tel que  $\|x_0 - x^*\| < \delta$  implique que  $\|x(x_0, k_0, k) - x^*\| < M\|x_0 - x^*\|\eta^{k-k_0}$ .

**Définition 2.2.6** Un point  $x$  est appelé point omega limite dans  $\Omega$  s'il existe une suite  $(x_n)_{n \geq n_0}$  d'éléments de  $\Omega$  telle que  $x_n$  tend vers  $x$  lorsque  $n$  tend vers l'infinie.

L'ensemble des points omega limite est appelé ensemble omega limite.

**Définition 2.2.7** Un ensemble  $A$  est positivement invariant pour le système (2.2) si  $O(x_0) \subset A$  pour tout  $x_0 \in A$ , où  $O(x_0) = \{x(n, 0, x_0) / n \in \mathbb{Z}^+\}$ .

## 2.2.2 Stabilité des systèmes discrets linéaires

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires discrets est bien connue en théorie du contrôle [20, 86]. Nous rappelons ici quelques résultats classiques de stabilité en considérant les systèmes linéaires dynamiques non autonomes et autonomes de formes respectives :

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{2.3}$$

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{2.4}$$

où  $A(k)$  et  $A$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$ . Soit  $x^*$  un point d'équilibre du système (2.3).

Posons le changement de variables  $y(k) = x(k) - x^*$ , on remarque que l'étude de la stabilité du point d'équilibre  $x^*$  du système (2.3) ou (2.4) se ramène à l'étude de la stabilité à l'équilibre zéro. Nous considérerons dans la suite l'équilibre zéro des systèmes (2.3) et (2.4).

Soit  $x(k_0) = x_0$  une condition initiale du système (2.3), la solution du système au temps  $k$  est donnée par :

$$x(k) = A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0)x(k_0)$$

Posons

$$\Phi(k) = A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0)$$

$\Phi(k)$  est appelée la matrice fondamentale du système (2.3). Dans le cas des systèmes autonomes de type (2.4) on a :

$$\Phi(k) = A^{k-k_0}$$

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.2.1** [20]

(i) L'équilibre zéro du système (2.3) est stable si et seulement si il existe une constante positive  $M$  telle que :

$$\|\Phi(k)\| \leq M \quad \text{pour } k \geq k_0 \geq 0.$$

(ii) L'équilibre zéro du système (2.3) est uniformément stable si et seulement si :

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M \quad \text{pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty,$$

où  $\Phi(k_1, k_2) = A(k_2)A(k_2 - 1) \dots A(k_1)$ .

(iii) L'équilibre zéro du système (2.3) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi(k)\| = 0.$$

(iv) L'équilibre zéro du système (2.3) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il existe une constante positive  $M$  et  $\eta \in ]0, 1[$  telles que :

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M\eta^{k_1 - k_2} \quad \text{pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty.$$

**Preuve 2.2.1** (théorème 2.2.1) [20]

(i)

Supposons que

$$\|\Phi(k)\| \leq M \quad \text{pour } k \geq k_0 \geq 0$$

alors on a :

$$\|x(x_0, k_0, k)\| = \|\Phi(k)x_0\| \leq M\|x_0\|$$

Soit  $\epsilon > 0$ , posons  $\eta = \frac{\epsilon}{M}$  et considérons  $\|x_0\| < \eta$ . On a  $\|x(x_0, k_0, k)\| < \epsilon$ , d'où zéro est un équilibre stable.

Inversement supposons que l'équilibre zéro est stable, alors on a pour  $\epsilon > 0$  fixé il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $\|x_0\| < \eta$  on a  $\|x(x_0, k_0, k)\| < \epsilon$ . Par suite on a :

$$\|\Phi(k)\| = \sup_{\|\zeta\| \leq 1} \|\Phi(k)\zeta\| = \frac{1}{\eta} \sup_{\|x_0\| \leq \eta} \|\Phi(k)x_0\| \leq \frac{\epsilon}{\eta} = M$$

(ii)

Supposons que

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M \quad \text{pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty$$

Soit  $\epsilon > 0$ , posons  $\eta = \frac{\epsilon}{M}$  et soit  $\|x_0\| < \eta$ , on a :

$$\|x(x_0, k_0, k)\| = \|\Phi(k)x_0\| \leq \|\Phi(k)\|\|x_0\| \leq M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon \text{ donc l'équilibre zéro est}$$



uniformément stable.

Inversement supposons que zéro est uniformément stable, on a :

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| = \|\Phi(k_1)\Phi(k_2)^{-1}\| \leq \|\Phi(k_1)\| \|\Phi(k_2)^{-1}\|$$

D'après (i),  $\|\Phi(k)\|, k \geq k_0$  est borné, d'où il existe  $M > 0$  tel que

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M, \quad k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty$$

(iii)

On suppose que zéro est asymptotiquement stable, Par définition zéro est alors attractif et il existe dans ce cas  $\eta > 0$  tel que  $\|x_0\| < \eta$  implique que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k)x_0 = 0; \text{ Par suite on a } \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k) = 0$$

Inversement supposons que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k) = 0$  alors  $\|\Phi(k)\|$  est borné et par la suite on a zéro est stable d'après (i). D'autre part  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(k) = 0$  implique que zéro est attractif. D'où zéro est asymptotiquement stable.

(iv)

Supposons qu'il existe  $M > 0$  et  $\eta \in (0, 1)$  tel que

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M\eta^{k_1-k_2} \quad \text{pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty$$

Alors zéro est uniformément stable d'après (ii). D'autre part pour  $\epsilon$  donné,  $0 < \epsilon < M$  posons  $\delta = 1$  et considérons  $N$  tel que  $\eta^N < \frac{\epsilon}{M}$ . Si  $\|x_0\| < 1$  alors

$$\|(x_0, k_0, k)\| = \|\Phi(k)x_0\| \leq M\eta^{k-k_0} < \epsilon \text{ pour } k \geq k_0 + N. \text{ L'équilibre zéro est alors uniformément asymptotiquement stable.}$$

Supposons maintenant que zéro est uniformément asymptotiquement stable, alors il est uniformément stable et d'après (ii) on a :

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M \quad \text{pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty$$

D'autre part zéro est uniformément asymptotiquement stable implique qu'il est uniformément attractif et donc il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $0 < \epsilon < 1$ , il existe  $N$  tel que  $\|\Phi(k, k_0)x_0\| < \epsilon$  pour  $k \geq k_0 + N$  et  $\|x_0\| < \eta$

Donc pour  $k \in [k_0 + mN, k_0 + (m+1)N], m > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\Phi(k, k_0)\| &\leq \|\Phi(k, k_0 + mN)\| \|\Phi(k_0 + mN, k_0 + (m-1)N)\| \dots \|\Phi(k_0 + N, k_0)\| \\ &\leq M\epsilon^m \leq \frac{m}{\epsilon} (\epsilon^{\frac{1}{N}})^{(m+1)N} = \bar{M}\eta^{(m+1)N} \end{aligned}$$

Où  $\bar{M} = \frac{M}{\epsilon}, \eta = \epsilon^{\frac{1}{N}}$ . Donc

$$\|\Phi(k, k_0)\| \leq \bar{M}\eta^{(k-k_0)}, \text{ pour } mN \leq k - k_0 \leq (m+1)N.$$

■

Du théorème (2.2.1) nous avons le corollaire :

**Corollaire 2.2.1**

(i) L'équilibre zéro du système (2.3) est stable si et seulement si toutes les solutions sont bornées.

(ii) L'équilibre zéro du système (2.3) est exponentiellement stable si et seulement si il est uniformément asymptotiquement stable.

**Preuve 2.2.2** (corollaire 2.2.1)

(i)

Supposons que L'équilibre zéro du système (2.3) est stable alors d'après (i) il existe une constante positive  $M$  telle que :

$$\|\Phi(k)\| \leq M \quad \text{pour } k \geq k_0 \geq 0$$

$$\|x(x_0, k_0, k)\| \leq \|\Phi(k)\| \|x_0\| \leq M \|x_0\|$$

D'où toutes les solutions sont bornées.

Supposons maintenant que toutes les solutions du système (2.3) sont bornées, il existe un réel  $M$  positif tel que

$$\|x(x_0, k_0, k)\| \leq M$$

$$\|\Phi(k)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\Phi(k)x\| \leq M$$

d'où zéro est stable.

(ii)

On suppose que zéro est uniformément asymptotiquement stable, alors il existe des constantes positives  $M$  et  $\eta \in (0, 1)$  telles que :

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| \leq M\eta^{k_1-k_2} \quad \text{pour } k_0 \leq k_2 \leq k_1 < \infty$$

$$\|x(x_0, k_0, k)\| = \|\Phi(k)x_0\| \leq M\eta^{k-k_0} \|x_0\|, \quad k \geq k_0$$

Par conséquence zéro est exponentiellement stable.

Inversement supposons que zéro est exponentiellement stable, alors il existe des constantes  $M > 0$  et  $\eta \in (0, 1)$  telles que

$$\|x(x_0, k_0, k)\| = \|\Phi(k)x_0\| \leq M\eta^{k-k_0} \|x_0\|, \quad k \geq k_0,$$

zéro est uniformément stable et uniformément attractif, donc uniformément asymptotiquement stable. ■

Notons par  $a_{ij}(k)$  les composantes de la matrice  $A(k)$  du système (2.3), nous avons le résultat :

**Théorème 2.2.2**

(i) Si  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}(k)| \leq 1, 1 \leq j \leq n, k \geq k_0$  alors l'équilibre zéro du système (2.3) est uniformément stable.

(ii) Si  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}(k)| \leq 1 - \nu, \nu > 0, 1 \leq j \leq n, k \geq k_0$  alors l'équilibre zéro du système (2.3) est uniformément asymptotiquement stable.

**Preuve 2.2.3** (Théorème 2.2.2)

(i)  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}(k)| \leq 1, 1 \leq j \leq n, k \geq k_0$  implique  $\|A(k)\|_1 \leq 1, k \geq n_0$

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| = \left\| \prod_{i=k_2}^{k_1-1} A(i) \right\|_1 \leq \|A(k_1)\|_1 \|A(k_1 - 1)\|_1 \dots \|A(k_2)\|_1 \leq 1$$

D'après (ii) du théorème 1.2.1 zéro est uniformément stable.

(ii)  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}(k)| \leq 1 - \nu, \nu > 0, 1 \leq j \leq n, k \geq k_0$  implique  $\|A(k)\|_1 \leq 1 - \nu, k \geq n_0$

$$\|\Phi(k_1, k_2)\| = \left\| \prod_{i=k_2}^{k_1-1} A(i) \right\|_1 \leq \|A(k_1)\|_1 \|A(k_1 - 1)\|_1 \dots \|A(k_2)\|_1 \leq (1 - \nu)^{k_1 - k_2}$$

D'après (iv) du théorème 1.2.1 zéro est uniformément asymptotiquement stable. ■

Nous donnons maintenant un résultat de stabilité propre aux systèmes linéaires autonomes.  $\rho(A)$  désigne le rayon spectral de la matrice  $A$ .

**Théorème 2.2.3**

(i) L'équilibre zéro du système (2.4) est stable si et seulement si  $\rho(A) \leq 1$  et les valeurs propres dont les modules sont égaux à 1 sont semi-simples.

(ii) L'équilibre zéro du système (2.4) est asymptotiquement stable si et seulement si  $\rho(A) < 1$ .

**Preuve 2.2.4** (Théorème 2.2.3)

(i)

Soit  $A = PJP^{-1}$ , où  $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$  est la forme de Jordan de  $A$  et

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

D'après le théorème (1.2.1), l'équilibre zéro du système (2.4) est stable si et seulement si  $\|A^n\| = \|PJ^nP^{-1}\| \leq M$  ou  $\|J^n\| \leq \tilde{M}$  avec  $\tilde{M} = \frac{M}{\|P\| \|P^{-1}\|}$

Soit maintenant  $J^n = \text{diag}(J_1^n, J_2^n, \dots, J_r^n)$  où

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n}{s_i-1} \lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i^n \end{pmatrix},$$

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (a)  $|\lambda_i| > 1$ .
- (b)  $|\lambda_i| = 1$  et  $J_i$  n'est pas un scalaire.

Alors  $J_i$  n'est pas bornée.

Si  $\rho(A) \leq 1$  et les valeurs propres de  $A$  sont semi-simples, alors  $J^n$  est bornée. Et donc les solutions sont bornées.

(ii)

En utilisant l'expression de  $J^n$  dans (i), on montre que si  $|\lambda_i| < 1$  alors  $J_i^n$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, il suffit de remarquer que :

$$|\lambda_i|^n n^l = n^l e^{(ln|\lambda_i|)n}$$

D'où  $|\lambda_i|^n n^l$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini pour tout entier positif  $l$ . ■

### 2.2.3 Stabilité des systèmes non linéaires discrets

Une vaste littérature existe sur la stabilité des systèmes discrets non linéaires, voir par exemple les références [10, 47, 90, 32, 50]. Notre objectif ici n'est pas de faire un tour d'horizon complet des résultats de stabilité des systèmes discrets non linéaires mais juste de rappeler quelques résultats de base et d'autre que nous aurons à utiliser dans le cadre de notre travail. Nous considérons dans cette partie les systèmes discrets non linéaires de la forme :

$$x(k+1) = f(x(k), k) \tag{2.5}$$

Où  $f$  est une application non linéaire continue de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$

### 2.2.3.1 Stabilité par approximation linéaire

La méthode d'approximation linéaire est l'une des méthodes les plus connues pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. Cette approche consiste à approcher le système non linéaire par son linéarisé autour de son point d'équilibre. On suppose sans perte de généralités dans cette partie que l'équilibre  $x^*$  du système (2.5) est égal à zéro.

On pose  $A(k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, k)$  le jacobien de  $f$  à l'équilibre zéro. Alors nous pouvons écrire le système (2.5) sous la forme :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(x(k), k) \quad (2.6)$$

où  $g$  est telle que  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{g(x, k)}{\|x\|} = 0$ .

Le système :

$$x(k+1) = A(k)x(k) \quad (2.7)$$

est appelé le linéarisé du système (2.6) autour de l'équilibre zéro. Nous énonçons ci-dessous deux lemmes importants que nous utiliserons pour la preuve des résultats de stabilité des systèmes discrets non linéaires.

**Lemme 2.2.1** (*Inégalité de Gronwall discret*) [20]

Soient  $(z(k))_{k \geq k_0}$  et  $(h(k))_{k \geq k_0}$  deux suites réelles. On suppose que  $h(k) \geq 0$  pour tout  $k \geq k_0$ .

Si

$$z(k) \leq M \left[ z(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} h(j)z(j) \right], \text{ pour } M > 0,$$

Alors

$$z(k) \leq z(k_0) \prod_{j=k_0}^{k-1} (1 + Mh(j)), \quad k \geq k_0$$

$$z(k) \leq z(k_0) \exp \left[ \sum_{j=k_0}^{k-1} Mh(j) \right], \quad k \geq k_0$$

**Preuve 2.2.5** (Lemme 2.2.1) Posons :

$$u(k) = M \left[ u(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} h(j)u(j) \right]; \quad u(k_0) = z(k_0).$$

CHAPITRE 2. RAPPEL SUR LA STABILITÉ ET LA SYNTHÈSE  
D'OBSERVATEUR DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

---

puisque  $h(j) \geq 0$  pour tout  $j \geq k_0$ , nous avons que  $z(k) \leq u(k)$  pour tout  $k \geq k_0$ . De l'expression de  $u(k)$ , on montre que :

$$u(k+1) - u(k) = Mh(k)u(k) \text{ ou } u_{k+1} = [1 + Mh(k)]u(k) \forall k \geq k_0.$$

Par suite on obtient :

$$u(k) = \prod_{j=k_0}^{k-1} [1 + Mh(j)]u(k_0) \forall k \geq k_0.$$

Puisque  $z(k) \leq u(k)$  pour tout  $k \geq k_0$  et  $u(k_0) = z(k_0)$  on obtient que

$$z(k) \leq z(k_0) \prod_{j=k_0}^{k-1} (1 + Mh(j)), \quad k \geq 0$$

Notons que  $1 + Mh(j) = \exp(Mh(j))$ , alors d'après la relation  $z(k) \leq z(k_0) \prod_{j=k_0}^{k-1} (1 + Mh(j))$ ,  $k \geq 0$  nous avons :

$$z(k) \leq z(k_0) \exp \left[ \sum_{j=k_0}^{k-1} Mh(j) \right], \quad k \geq k_0$$

■

**Lemme 2.2.2** (Formule de variation de la constante)[20]

Le système

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + g(k) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

admet une unique solution donnée par :

$$x(k, k_0, x_0) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)g(r)$$

**Preuve 2.2.6** (Lemme 2.2.2)

Les solutions du système (2.8) s'écrivent sous la forme :

$$x(k) = \Phi(k, k_0)c + x_p(k)$$

Où  $c$  est convenablement choisie et  $x_p(k)$  est une solution particulière du système (2.8).

On a  $x(k_0) = \Phi(k_0, k_0)c + x_p(k_0)$ , alors  $c = x(k_0)$ .

Soient  $x(k)$  et  $y(k)$  deux solutions du problème (2.8) telles que  $x(k_0) = y(k_0)$ , on a :  
 $x(k) - y(k) = \Phi(k, k_0)(x(k_0) - y(k_0)) = 0$ ,  $x(k) = y(k) \forall k \geq k_0$   
 D'où (2.8) admet une unique solution. Posons :

$$x_p(k) = \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)g(r) \text{ avec } x_p(k_0) = 0$$

On a :

$$x_p(k+1) = \sum_{r=k_0}^k \Phi(k+1, r+1)g(r) = \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)g(r) + \Phi(k+1, k+1)g(k)$$

D'où

$$x_p(k+1) = A(k)x_p(k) + g(k)$$

$x_p(k)$  est donc une solution particulière du problème (2.8). L'unique solution de (2.8) s'écrit alors :

$$x(k, k_0, x_0) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{r=k_0}^{k-1} \Phi(k, r+1)g(r)$$

■

Nous avons le résultat de stabilité suivant :

**Théorème 2.2.4** *Si le système (2.7) est uniformément asymptotiquement stable à l'équilibre zéro alors le système (2.6) est exponentiellement stable en zéro.*

**Preuve 2.2.7** (Théorème 2.2.4)

L'équilibre zéro est uniformément stable pour le système (2.7). Alors d'après le théorème (2.2.1), il existe  $M \geq 1$ ,  $\eta \in ]0, 1[$  tels que :

$$\|\Phi(n, m)\| \leq \eta^{n-m}, \quad n \geq m \geq n_0$$

D'après la formule de variation de la constante, nous avons :

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Phi(n, j+1)g(x(j), j)$$

Alors on a :

$$\|x(n)\| \leq M\eta^{n-n_0}\|x(n_0)\| + M\eta^{-1} \sum_{j=n_0}^{n-1} \eta^{n-j} \|g(x(j), j)\|. \quad (2.9)$$

CHAPITRE 2. RAPPEL SUR LA STABILITÉ ET LA SYNTHÈSE  
D'OBSERVATEUR DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

---

Pour  $\epsilon > 0$  donné, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|g(x(j), j)\| \leq \epsilon \quad \forall \|x\| \leq \delta$

Pour  $\|g(x(j), j)\| \leq \epsilon$ , (2.9) devient :

$$\eta^{-n}\|x(n)\| \leq M[\eta^{-n_0}\|x(n_0)\| + \sum_{j=n_0}^{n-1} \epsilon\eta^{-j-1}\|x(j)\|] \quad (2.10)$$

Posons  $z(n) = \eta^{-n}\|x(n)\|$ . D'après l'inégalité de Gronwall on a :

$$\eta^{-n}\|x(n)\| \leq \eta^{-n_0}\|x(n_0)\| \prod_{j=n_0}^{n-1} (1 + \epsilon\eta^{-1}M) \quad (2.11)$$

D'où

$$\|x(n)\| \leq \|x(n_0)\|(\eta + \epsilon M)^{(n-n_0)}.$$

On choisit  $\epsilon < \frac{1-\eta}{M}$ , alors  $\eta + \epsilon M < 1$ . D'où

$$\|x(n)\| \leq \|x(n_0)\| < \delta \quad \forall n \geq n_0 \geq 0.$$

Par suite (2.10) et (2.11) sont vérifiées et par conséquence  $x(n)$  est exponentiellement stable.

Considérons maintenant le cas particulier des systèmes autonomes :

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (2.12)$$

Supposons que zéro est un équilibre du système (2.12), alors on peut écrire (2.12) sous la forme :

$$x(k+1) = Ax(k) + g(x(k)) \quad (2.13)$$

Où  $A$  est la matrice jacobienne de  $f$  à l'équilibre zéro et  $g$  est telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0.$$

**Théorème 2.2.5**

(i) Si  $\rho(A) < 1$  alors l'équilibre zéro du système (2.13) est exponentiellement stable.

(ii) Si  $\rho(A) > 1$  et  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} g(x) = 0$  alors l'équilibre zéro du système (2.13) est instable.

**Preuve 2.2.8** (Théorème 2.2.5)

(i) Si  $\rho(A) < 1$ , alors d'après le théorème (2.2.3) le système  $x(n+1) = Ax(n)$  est asymptotiquement stable en zéro. D'après le théorème (2.2.4) nous avons (i).

La preuve de (ii) est donnée dans [55].



### 2.2.3.2 Stabilité par la seconde méthode de Lyapunov

En 1982, le mathématicien Russe A. M. Lyapunov a introduit une nouvelle méthode d'investigation de la stabilité des systèmes dynamiques. Connue sous le nom de la seconde méthode de Lyapunov, elle permet de faire une étude qualitative des solutions d'un système dynamique. Nous considérons toujours les systèmes discrets du type (2.5).

Soit  $x^*$  un équilibre du système (2.5) et  $V$  une fonction réelle définie sur un ensemble  $H$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous avons la définition suivante [20] :

**Définition 2.2.8** *On dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov du système (2.5) sur l'ensemble  $H$  si :*

- (i)  $V$  est définie, positive et continue sur  $H$
- (ii)  $V(x^*) = 0$
- (iii)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$  pour tout  $x$  et  $f(x)$  dans  $H$ .

Nous avons le théorème :

#### **Théorème 2.2.6**

*Si  $V$  est une fonction de Lyapunov du système (2.5) dans un voisinage  $W$  de l'équilibre  $x^*$  et  $\Delta V(x) < 0$  pour tout  $x$  et  $f(x)$  dans  $W$ ,  $x \neq x^*$  alors  $x^*$  est asymptotiquement stable.*

*De plus si  $W = \mathbb{R}^n$  et  $V(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$ , alors  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable.*

#### **Preuve 2.2.9** (Théorème 2.2.6)

Soit  $\alpha_1 \geq 0$  tel que  $\mathcal{B}(x^*, \alpha_1) \subset H$ .

D'après la continuité de la fonction  $f$  on a :

$$\exists \alpha_2 > 0, \forall x \in \mathcal{B}(x^*, \alpha_2) \implies f(x) \in \mathcal{B}(x^*, \alpha_1).$$

Soit  $\epsilon$  tel que  $0 < \epsilon \leq \alpha_2$ . On définit

$$\psi(\epsilon) = \min\{V(x)/\epsilon \mid \|x - x^*\| \leq \alpha_1\}$$

Posons  $g(x) = V(x) - \psi(\epsilon)$ , on remarque que  $g$  est continue et  $g(x^*) < 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires on a :

$$\exists \delta, 0 < \delta < \epsilon / \|x - x^*\| < \delta \implies V(x) < \psi(\epsilon)$$

Notons que les solutions  $x(n)$  du système (2.5) sont telles que si  $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \delta)$  alors  $x(n) \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$ . En effet supposons qu'il existe un  $x_0$  dans  $\mathcal{B}(x^*, \delta)$  et un entier  $m$  tels que  $x(r) \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$  pour  $0 \leq r \leq m$  et  $x(m+1) \notin \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$ .

$x(m) \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \subset \mathcal{B}(x^*, \alpha_2)$ , il s'en suit que  $x(m+1) \in \mathcal{B}(x^*, \alpha_1)$  et par conséquent  $V(x(m+1)) \geq \psi(\epsilon)$  (Ceci découle de la définition de  $\psi(\epsilon)$ ). Or on a :

$$V(x(m+1)) \leq V(x(m)) \leq \dots V(x(n_0)) < \psi(\epsilon)$$

D'où  $\psi(\epsilon) < \psi(\epsilon)$ , ce qui est absurde. Donc si  $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \delta)$  alors  $x(n) \in \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$  : L'équilibre  $x^*$  du système (2.5) est alors stable.

Montrons maintenant que l'équilibre  $x^*$  est asymptotiquement stable.

Si  $x(n)$  ne converge pas vers  $x^*$ , il existe une sous suite  $x(n_i)$  qui converge vers  $y \in \mathbb{R}^k$  car la suite  $x(n)$  est bornée. Soit  $E \subset \mathcal{B}(x^*, \alpha_2)$  un voisinage de  $y$  tel que  $x^* \notin E$ . On définit dans  $E$  la fonction  $h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)}$ .

$h$  est bien définie et  $h(x) < 1 \forall x \in E$ . Si  $\eta$  appartient à l'intervalle  $]h(y), 1[$  alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe  $\delta > 0$  tel que  $x \in \mathcal{B}(y, \delta)$  implique que  $h(x) < \eta$ . Pour  $n_i$  suffisamment grand, on a :

$$V(f(x(n_i))) \leq \eta V(x(n_{i-1})) \leq \dots \leq \eta^{n_i} V(x(n_0))$$

D'où la  $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = 0$ . Or on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = V(y)$  donc  $V(y) = 0$  et par la suite  $y = x^*$ .

Pour prouver la stabilité asymptotique globale, il suffit de prouver que toute les solutions sont bornées et faire un raisonnement analogue au précédent. Supposons qu'il existe une solution non bornée  $x(n)$  du système (2.5), alors il existe une sous suite  $x(n_i)$  qui tend vers l'infinie lorsque  $n_i$  tend vers l'infinie ; alors  $V(x(n_i))$  tend vers l'infinie. Ceci est absurde car  $V(x_0) \geq V(x(n_i))$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  ■

**Théorème 2.2.7** *Si  $V$  est une fonction de Lyapunov sur l'ensemble  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| > \alpha > 0\}$  et  $V(x)$  tend vers l'infinie lorsque  $\|x\|$  tend vers l'infinie, alors les solutions du système (2.5) sont bornées.*

**Théorème 2.2.8** (Principe de Lasalle [55])

*Soit  $V$  une fonction de Lyapunov du système (2.5) dans un ensemble  $G$  de  $\mathbb{R}^n$ . On pose :*

$$E = \{x \in \bar{G} / \Delta V(x) = 0\}$$

*Soit  $M$  le plus grand ensemble invariant inclus dans  $E$ .*

*Toutes les solutions qui restent invariantes dans  $G$  sont non bornées ou convergentes vers  $M$ .*

**Preuve 2.2.8 :** (Théorème 2.2.8)

Supposons que  $G$  est borné. Soit  $x(n)$  une solution de (2.5) telle que quel que soit  $n \geq 0$   $x(n)$  est dans  $G$ . Alors  $x(n)$  est bornée et par la suite il existe une sous suite  $x(n_i)$  qui converge vers  $y$  appartenant à  $\bar{G}$ . Puisque la suite  $V(x(n))$  est décroissante et minorée par zéro, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = c$  et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta V(x(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n+1)) - V(x(n)) = 0$ .

Par ailleurs, d'après la continuité de  $\Delta V$ , on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta V(x(n_i)) = \Delta V(y)$ , alors  $\Delta V(y) = 0$  et  $y$  est dans  $E$ .

Soit  $\Omega(x(n))$  l'ensemble des points omega limite de  $x(n)$ , alors on a  $\Omega(x(n))$  est inclus dans  $E$  et  $\Omega(x(n))$  est inclus dans  $M$ . Si  $G$  est non borné, il existe une solution non bornée du système (2.5) telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \infty$ , Ceci n'est possible que si  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) \neq 0$ , ce qui n'est pas le cas ici. ■

**Théorème 2.2.9** *Si  $\Delta V$  est définie positive sur un voisinage de l'origine et il existe une suite  $(a_i)_{i \geq 0}$  telle que  $a_i$  converge vers 0 avec  $V(a_i) > 0$ , alors l'origine est instable pour le système (2.5).*

**Preuve 2.2.10** (Théorème 2.2.9)

Soit  $\Delta V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(0, \eta), \quad x \neq 0$  et  $V(0) = 0$ .

Supposons que 0 est stable pour le système (2.5), alors on a :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \epsilon < \eta \quad \exists \delta > 0 / \|x_0\| < \delta \implies \|x(n, 0, x_0)\| < \epsilon$$

Puisque les  $a_i$  tendent vers 0 lorsque  $i$  tend vers l'infinie, posons  $x_0 = a_j$  pour un certain  $j$  avec  $V(x_0) > 0$  et  $\|x_0\| < \delta$ .

Posons  $O(x_0) = \{x(n, 0, x_0), n \geq 0\}$ , alors on a :  $\bar{O}(x_0) \subset \overline{\mathcal{B}(\eta)} \subset \mathcal{B}(\epsilon)$  et  $O(x_0)$  est fermé borné. Par suite les  $V(x(n))$  sont bornés. D'où  $V(x(n))$  converge vers  $c$  car  $V(x(n))$  est décroissante. D'après le principe de Lasalle, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = 0$ . On a alors  $0 < V(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(n)) = 0$ , ceci est absurde. ■

## 2.2.4 Stabilisation des systèmes dynamiques

Soit le système discret :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$  and  $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^m$ .

Nous supposons que la fonction  $f$  est suffisamment régulière et nous nous posons la question de savoir s'il est possible de contrôler le système dans le but de le stabiliser autour de son point d'équilibre. Il existe deux méthodes pour résoudre ce type de problème. La première méthode consiste à trouver un contrôle  $u$  en fonction du temps  $k$ , cette méthode est appelé *open-loop system*. La seconde méthode consiste à trouver le contrôle  $u(x)$  en fonction des états  $x$  du système 2.14, cette méthode est connue sous le non de *feedback control* ou *closed-loop system*. Pour des raisons liés à la robustesse, nous allons utiliser dans le cadre de cette thèse la seconde méthode pour rendre stable les états de certains modèles de populations de poissons.

Nous dirons que le système 2.14 est stabilisable à l'origine s'il existe un contrôle

$u(x)$  au moins continu par rapport à  $x$  tel que l'origine est asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée :

$$x(k+1) = f(x(k), u(x(k)))$$

[37]. Pour plus de détail sur les résultats et les techniques de stabilisation des systèmes dynamiques discrets, voir les références [6, 58, 84, 14, 45, 59].

## 2.3 Observateur des systèmes discrets dynamiques

Tout au long des travaux menés dans cette thèse, nous nous intéressons à l'estimation des stocks de populations de poissons soumis à l'action de la pêche dont la dynamique est régie par un système d'équations aux différences. Un outil de base très connu en théorie du contrôle pour résoudre ce type de problème est la synthèse d'un observateur. Nous rappelons quelques définitions et propriétés sur l'observabilité et la synthèse d'observateur des systèmes discrets dynamiques. Les systèmes que nous considérons s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.15)$$

Où  $x(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ .  $f$  et  $h$  sont respectivement des fonctions continues de  $\Omega \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

### 2.3.1 Observabilité des systèmes discrets dynamiques

L'observabilité est une propriété très importante qui lie les états d'un système donné et la sortie mesurable correspondante. D'une manière générale, l'observabilité d'un système stipule qu'on est en mesure de reconstruire les états du système à un instant  $k_0$  connaissant sa sortie mesurable à un instant  $k_1 \geq k_0$ .

Nous notons  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles du système (2.15). Pour simplifier les notations, nous poserons dans la suite  $f(x, u) = f_u(x)$ . Nous avons les définitions [1] :

**Définition 2.3.1** *Deux états  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\Omega$  sont indistinguables pour le système (2.15) si pour tout entier  $n$  et pour toute suite de contrôle  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  dans  $U^n$  on a :*

$$h(f_{u_1} \circ f_{u_2} \circ \dots \circ f_{u_n}(x_1)) = h(f_{u_1} \circ f_{u_2} \circ \dots \circ f_{u_n}(x_2))$$

**Définition 2.3.2**  $x_0$  dans  $\Omega$  est dit observable pour le système (2.15) si pour tout  $x$  dans  $\Omega$ ,  $x$  et  $x_0$  sont indistinguables implique que  $x = x_0$ .

Dans la littérature scientifique on écrit souvent que le système (2.15) est observable en  $x_0$  pour dire que  $x_0$  est observable pour le système (2.15).

**Définition 2.3.3**  $x_0$  dans  $\Omega$  est localement faiblement observable pour le système (2.15) s'il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que pour tout  $x$  dans  $W$  tel que  $x$  et  $x_0$  sont indistinguables alors  $x = x_0$ .

**Définition 2.3.4**  $x_0$  dans  $\Omega$  est localement fortement observable pour le système (2.15) s'il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que pour tout  $x_1$  et  $x_2$  dans  $W$  tel que  $x_1$  et  $x_2$  sont indistinguables alors  $x_1 = x_2$ .

**Remarque 2.3.1** Si un point  $x_0$  dans  $\Omega$  est observable alors il est localement faiblement observable. Par contre l'observabilité en  $x_0$  n'implique pas forcément que  $x_0$  est localement fortement observable.

**Définition 2.3.5** Le système (2.15) est observable dans  $\Omega$  s' il est observable en tout point  $x$  de  $\Omega$ .

**Définition 2.3.6** Le système (2.15) est localement faiblement observable (respectivement localement fortement observable) dans  $\Omega$  s'il est localement faiblement observable (respectivement localement fortement observable) en tout point  $x$  de  $\Omega$ .

Posons :

$$\Theta_1 = \{h(\cdot)\}$$

$$\Theta_k = \{h(f_{u_j} \circ f_{u_{j-1}} \circ \dots \circ f_{u_1}(\cdot)) / \forall i = 1, \dots, j \ u_i \in U \text{ et } 1 \leq j \leq k - 1\}$$

$$\Theta = \bigcup_{k \geq 1} \Theta_k$$

Nous avons le théorème :

**Théorème 2.3.1** [1]

- (a) Si  $\dim d\Theta(x_0) = n$  alors le système (2.15) est localement fortement observable en  $x_0$ .
- (b) Si le système (2.15) est localement faiblement observable alors il existe un ouvert  $A \subset \Omega$  tel que  $\dim d\Theta(x) = n \ \forall x \in A$ .

**Preuve 2.3.1** (Théorème 2.3.1)

(a) Supposons que  $\dim d\Theta(x_0) = n$ , alors il existe dans  $\Theta$   $n$  éléments  $H_i(\cdot) = h(f_{u_j^i} \circ f_{u_{j-1}^i} \circ \dots \circ f_{u_1^i}(\cdot))$   $i = 1, \dots, n$  dont les différentielles en  $x_0$  sont linéairement indépendantes. Par continuité ces éléments restent linéairement indépendants dans un voisinage  $W$  de  $x_0$ .

Considérons l'application :

$$A : \Omega \longrightarrow \overbrace{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \dots \times \mathbb{R}^p}^{n \text{ fois}}$$

$$x \longrightarrow (H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x))$$

La restriction de  $A$  sur  $W$  est injective. En effet soit  $x_1$  et  $x_2$  dans  $W$  indistinguables, alors  $\forall i = 1, \dots, n$   $H_i(x_1) = H_i(x_2)$ . Par suite on a  $x_1 = x_2$  car  $A$  est injective.

D'où  $x_0$  est localement fortement observable.

(b) Nous faisons une démonstration par l'absurde.

Supposons que le système est localement observable mais qu'il n'existe pas de sous ensemble de  $\Omega$  où  $\dim d\Theta(x) = n$ . Alors on a :  $\dim \Theta(x) < n$ . Posons  $l = \max_{x \in \Omega} \dim \Theta(x)$  et soit  $x_0$  dans  $\Omega$  tel que  $\dim d\Theta(x_0) = l$ .

Par continuité et par maximalité, il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que  $\dim d\Theta(x) = l \forall x \in W$ . Alors il existe  $H_1(\cdot), \dots, H_l(\cdot)$  dans  $\Theta$  dont les différentielles dans  $W$  sont linéairement indépendantes. On choisie  $H_1(\cdot), \dots, H_l(\cdot)$  comme étant une base de  $\Theta$ . Puisque toutes les fonctions dans  $\Theta$  dépendent uniquement des  $l < n$  premières coordonnées, les points de  $W$  qui diffèrent des  $n - l$  dernières coordonnées ne peuvent être distinguables. Ce qui contredit l'hypothèse de la locale observabilité du système (2.15). Ainsi il existe  $A$  inclus dans  $\Omega$  tel que  $\dim \Theta(n) = n$  pour tout  $x$  dans  $A$  ■

**Proposition 2.3.1** *Considérons le système (2.15) et  $x_0$  un point fixé dans  $\Omega$ . Supposons qu'il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que  $d\Theta$  est de dimension constante. Alors nous avons les équivalences suivantes :*

- (i)  $x_0$  est localement fortement observable.
- (ii)  $x_0$  est localement faiblement observable.
- (iii)  $\dim d\Theta(x_0) = n$ .

**Preuve 2.3.2** (Proposition 2.3.1)

D'après le théorème (2.3.1) on a (iii) implique (i) et (i) implique (ii).

Montrons maintenant que (ii) implique (iii).

Supposons que  $x_0$  est localement faiblement observable et  $\dim d\Theta(x_0) = l < n$ . Puisque  $d\Theta$  est de dimension constante dans le voisinage  $W$  de  $x_0$  alors on a  $\dim d\Theta(x) = l < n$  pour tout  $x$  dans  $W$ . En procédant de façon analogue comme dans la preuve du théorème (1.3.1), on choisit  $l$  fonctions  $H_1(\cdot), \dots, H_l(\cdot)$  dont les différentielles au point  $W$  sont linéairement indépendantes. ■

**Remarque 2.3.2** Pour les systèmes linéaires de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.16)$$

Où  $A$  et  $C$  sont respectivement des matrices  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ , on a :

$$\Theta(x) = \bigcup_{k \geq 0} CA^k x$$

Le système (2.16) est observable si et seulement si  $\dim \bigcup_{k \geq 0} CA^k = n$

### 2.3.2 Observateur des systèmes discrets dynamiques : état de l'art

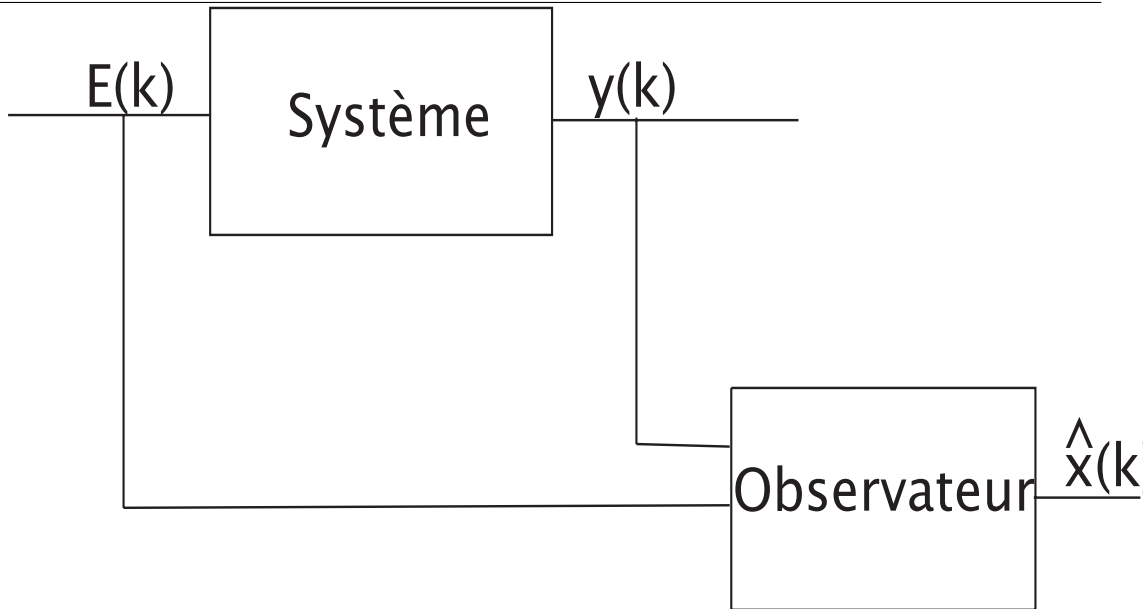
Supposons qu'un phénomène quelconque est modélisé par le système discret dynamique :

$$x(k+1) = f(x(k), E(k)) \quad (2.17)$$

Bien souvent, nous n'avons pas accès totalement aux valeurs des états  $x(k)$  mais on peut faire des prélèvements et avoir une mesure partielle des états  $x(k)$ . On représente alors cette mesure partielle par l'équation :

$$y(k) = h(x(k)) \quad (2.18)$$

appelée la sortie mesurable du système (2.17). Il peut arriver pour une raison ou une autre qu'on ait besoin d'avoir une estimation de la valeur des états  $x(k)$ . Pour cela, on construit un système auxiliaire dont les états  $\hat{x}(k)$  sont des estimateurs des états  $x(k)$  et dont les entrées sont les entrées et les sorties mesurables du système (2.17). Un tel système est appelé un **observateur**. Nous illustrons schématiquement ci-dessous un observateur :



Considérons le système :

$$\hat{x}(k+1) = g(\hat{x}(k), E(k), y(k)) \quad (2.19)$$

On dira que le système (2.19) est un observateur asymptotique local du système (2.17) de sortie mesurable (2.18) s'il existe un voisinage  $V$  de  $x(0)$  tel que pour tout  $\hat{x}(0)$  dans  $V$ , la solution  $\hat{x}(k)$  du système (2.19) tend vers la solution  $x(k)$  du système (2.17) lorsque  $k$  tend vers l'infinie [37].

Si  $V = \Omega$ , on dit que l'observateur est un observateur asymptotique global.

On dira que le système (2.19) est un observateur exponentiel local du système (2.17) de sortie mesurable (2.18) s'il existe un voisinage  $V$  de  $x(0)$ , un réel  $\eta$  compris entre 0 et 1 et un réel positif  $M$  tels que pour tout  $\hat{x}(0)$  dans  $V$  on a  $\|x(k) - \hat{x}(k)\| < M\eta^k$  [37]. Si  $V = \Omega$ , on dit que l'observateur est un observateur global exponentiel.

### 2.3.3 Observateur des systèmes discrets linéaires déterministes

Les observateurs des systèmes dynamiques ont été introduits pour la première fois au milieu des années 1960 par D. Luenberger. Ce dernier a mis au point une technique de synthèse d'observateur connu sous le nom d'observateur de type Luenberger en considérant dans un premier temps les systèmes linéaires continus à temps invariant



du type :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (2.20)$$

La méthode sera généralisée plus tard aux systèmes discrets à temps invariant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (2.21)$$

Où  $x(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in U \subset \mathbb{R}^p$  et  $y(k) \in \mathbb{R}^m$ .

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement des matrices  $n \times n$ ,  $n \times m$  et  $p \times n$  et sont bornées. Un observateur du système (2.21) est entièrement déterminé par la méthode de Luenberger [60]. En effet on pose l'observateur candidat comme étant :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (2.22)$$

Où  $L$  est une matrice de gain. On pose l'erreur d'estimation  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ .

On a :

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ae(k) - L(y(k) - C\hat{x}(k)) = Ae(k) - L(Cx(k) - C\hat{x}(k))$$

$$e(k+1) = Ae(k) + LCe(k) = (A - LC)e(k)$$

Pour que le système (2.22) soit un observateur du système (2.21), il faut choisir les composantes de la matrice  $L$  de sorte que les valeurs propres de la matrice  $W = A - LC$  soient à l'intérieur du disque unité. L'existence de la matrice  $L$  est donnée par le lemme :

**Lemme 2.3.1** (*Placement de pôle*)

La paire  $(C, A)$  est observable si et seulement si pour tout ensemble  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , il existe une matrice  $L$  telle que  $\Lambda$  est l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A - LC$ .

Une preuve détaillée de ce lemme est donnée dans [88].

Considérons maintenant le système à temps variable de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) \end{cases} \quad (2.23)$$

En utilisant la technique de Luenberger, on pose l'observateur comme étant :

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + L_k(y(k) - C(k)\hat{x}(k)) \quad (2.24)$$

Comme dans le cas des systèmes discrets linéaires à temps invariant, on montre que l'erreur d'estimation est :  $e(k+1) = (A(k) - L_k C(k))e(k)$ .

Pour que le système (2.24) soit un observateur du système (2.23), il faut choisir les matrices  $L_k$ ,  $k \in N$  de sorte que les normes des matrices  $A(k) - L_k C(k)$  soient inférieures à 1. Puisque les matrices  $A(k)$  et  $C(k)$  varient en fonction du temps, le calcul du gain  $L_k$  devient très complexe. Nous sommes alors emmenés à faire appel à d'autres techniques propres aux systèmes linéaires à temps variable [13, 5, 2, 48].

### 2.3.4 Observateur des systèmes linéaires discrets bruités : Filtre de Kalman

En 1960, bien avant la publication des travaux de D. Luenberger sur la construction des observateurs des systèmes linéaires déterministes, R. E. Kalman publie un papier sur l'estimation des états des systèmes linéaires bruités connu sous le nom de filtre de Kalman. Le filtre de Kalman est un ensemble d'équations mathématiques qui implémente un estimateur prédicteur-correcteur d'un système dynamique [46]. Plusieurs auteurs se sont par la suite inspirés du filtre de kalman pour proposer des observateurs de systèmes linéaires bruités [39, 80, 25, 57]. Lorsque l'on considère le critère de l'erreur quadratique moyenne, le filtre de Kalman est un estimateur optimal. Avant de donner la synthèse du filtre de Kalman, nous rappelons quelques définitions et résultats de probabilité pour bien cerner notre cadre de travail. Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs aléatoires de dimensions respectives  $m$  et  $d$ .

**Définition 2.3.7** Une variable aléatoire  $z$  de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma$  est gaussienne si sa fonction caractéristique est :

$$E[e^{i\pi\tau z}] = e^{i\pi\tau m - i\pi\sigma^2\tau^2}$$

**Définition 2.3.8** Un vecteur aléatoire est gaussien si les combinaisons linéaires de ses composantes sont des variables aléatoires gaussiennes.

**Définition 2.3.9** Un estimateur de  $X$  à partir de l'observation  $Y$  est un vecteur aléatoire  $\psi(Y)$  de dimension  $m$ , où  $\psi$  est une application de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.3.10** On appelle estimateur du minimum d'erreur quadratique moyenne de  $X$  sachant  $Y$  un estimateur  $\hat{X}(Y)$  tel que :

$$E[||X - \hat{X}(Y)||] \leq E[||X - \psi(Y)||]$$

pour tout estimateur  $\psi(Y)$ .

$E(X)$  désigne l'espérance mathématique du vecteur aléatoire  $X$ . Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 2.3.2** *L'estimateur du minimum d'erreur quadratique moyenne de  $X$  sachant  $Y$  est la moyenne conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$  i.e*

$$\hat{X}(Y) = E[X/Y = y] = \int_{\mathbb{R}^n} x P_{X/Y=y} dx.$$

**Preuve 2.3.3** (Proposition 2.3.2)

Soit  $\psi(Y)$  un estimateur quelconque de  $X$  sachant  $Y$ , on a :

$$E[|X - \psi(Y)|^2] = E[|X - \hat{X}(Y)|^2] + 2E[(\hat{X}(Y) - \psi(Y))^*(X - \hat{X}(Y))] + E[|\hat{X}(Y) - \psi(Y)|^2]$$

Notons que :

$$\begin{aligned} E[(\hat{X}(Y) - \psi(Y))^*(X - \hat{X}(Y))] &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{X}(y) - \psi(y))(x - \hat{X}(y)) P_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} (\hat{X}(y) - \psi(y))^* \left( \int_{\mathbb{R}^d} x - \hat{X}(y) P_{X/Y}(x) dx \right) P_Y(y) dy = 0 \end{aligned}$$

par définition de  $\hat{X}(Y)$ .

On a donc

$$E[|X - \psi(Y)|^2] = E[|X - \hat{X}(Y)|^2] + \int_{\mathbb{R}^p} (\hat{X}(y) - \psi(y))^2 P_Y(y) dy,$$

et le vecteur  $\psi(Y)$  qui minimise cette expression est  $\psi(Y) = \hat{X}(Y)$  ■

Dans le cas des vecteurs aléatoires gaussiens, la proposition (2.3.2) peut être donnée de façon plus précise :

**Proposition 2.3.3** *Soit  $Z = (X, Y)$  un vecteur aléatoire gaussien de dimension  $m + d$ , de moyenne et de matrice de covariance  $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} Q_X & Q_{XY} \\ Q_{YX} & Q_Y \end{pmatrix}$  respectivement. Si  $Q_X$  est inversible alors la densité conditionnelle  $P(X/Y = y)$  du vecteur  $X$  sachant  $Y = y$  est une densité gaussienne de moyenne  $\hat{X}(y) = \bar{X} + Q_{XY} Q_Y^{-1} (y - \bar{Y})$  et de matrice de covariance  $R = Q_X - Q_{XY} Q_Y^{-1} Q_{YX}$*

**Preuve 2.3.4** (Proposition 2.3.3)

Dans le cas où la matrice  $Q_Z$  n'est pas nécessairement inversible, on montre que la fonction caractéristique de la loi conditionnelle du vecteur aléatoire  $X$  sachant  $Y = y$  est égale à :

$$\exp\{iu^* \hat{X}(y) - \frac{1}{2} u^* R u\}$$

c'est à dire que la loi conditionnelle du vecteur aléatoire  $X$  sachant  $Y = y$  est une loi gaussienne de moyenne  $\hat{X}(y)$  et de matrice de covariance  $R$ . Par définition

$$\Phi_{X,Y}(u, v) = E[e^{iu^* X + iv^* Y}] = E[e^{iv^* Y} E[e^{iu^* X} | Y]]$$

$$= E[e^{iv^*Y} \Phi_{X|Y}(u)] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iv^*y} \Phi_{X|Y=y}(u) P_Y(y) dy$$

et on vérifie d'autre part que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} e^{iv^*y} \exp\{iu^* \hat{X}(y) - \frac{1}{2}u^* Ru\} P_Y(y) dy \\ &= \exp\{iu^* \bar{X} - iu^* Q_{XY} Q_Y^{-1} \bar{Y} - \frac{1}{2}u^* Ru\} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iv^*y} \exp\{iu^* Q_{XY} Q_Y^{-1} y\} P_Y(y) dy \\ &= \exp\{iu^* \bar{X} - iu^* Q_{XY} Q_Y^{-1} \bar{Y} - \frac{1}{2}u^* Ru\} \Phi_Y(v + Q_Y^{-1} Q_{XY} u) \\ &= \exp\{iu^* \bar{X} - iu^* Q_{XY} Q_Y^{-1} \bar{Y} - \frac{1}{2}u^* Q_X u + \frac{1}{2}u^* Q_{XY} Q_Y^{-1} Q_{YX} u + i(v^* + u^* Q_{XY} Q_Y^{-1}) \bar{Y} \\ &\quad - \frac{1}{2}(v^* + u^* Q_{XY} Q_Y^{-1}) Q_Y (v + Q_Y^{-1} Q_{YX} u)\} \\ &\exp\{iu^* \bar{X} - iv^* \bar{Y} - \frac{1}{2}u^* Q_X u - u^* Q_{XY} v - \frac{1}{2}v^* Q_Y v\} = \Phi_{X,Y}(u, v) \end{aligned}$$

par injectivité de la transformation de Fourier on obtient

$$\Phi_{X|Y=y}(u) = \exp\{iu^* \hat{X}(y) - \frac{1}{2}u^* Ru\}$$

■

**Proposition 2.3.4** *Si  $\{X_k\}$  et  $\{Y_k\}$  sont deux processus aléatoires gaussiens alors le processus  $\{X_k, Y_k\}$  est gaussien de moyenne et de matrice de covariance :*

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_k \\ \bar{Y}_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} Q_k^X & Q_k^{XY} \\ Q_k^{YX} & Q_k^Y \end{pmatrix}$$

Considérons à présent le système linéaire bruité correspondant au système (2.23) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases} \quad (2.25)$$

Ici  $x_k$  et  $y_k$  sont des vecteurs aléatoires dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  respectivement. On suppose que :

- La condition initiale  $x_0$  est gaussienne de moyenne  $\bar{x}_0$  de covariance  $Q_0^x$ .
- La suite  $\{w_k\}$  est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance  $Q_k^w$ .
- La suite  $\{v_k\}$  est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance  $Q_k^v$ .
- Les suites  $\{w_k\}$  et  $\{v_k\}$  sont mutuellement indépendantes.

On veut estimer le vecteur aléatoire  $x(k)$  à partir de l'observation  $y_{0,k} = (y_0, y_1, \dots, y_k)$ .

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.3.2** (*Filtre de Kalman*)

Si on suppose que la matrice de covariance  $Q_k^v$  est inversible pour tout  $k$ , alors l'estimateur du minimum d'erreur quadratique moyenne  $\hat{x}_k$  de  $x_k$  sachant  $y_{0:k}$  est défini par :

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k \\ P_k^- &= A_k P_{k-1} A_k^* + Q_k^w \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k [y_k - C_k \hat{x}_k^-] \\ P_k &= [I - K_k C_k] P_k^-\end{aligned}$$

où la matrice  $K_k = P_k^- C_k^* [C_k P_k^- C_k^* + Q_k^v]^{-1}$  est appelée le gain de Kalman, et avec les initialisations :

$$\hat{x}_0^- = \bar{x}_0 = E[x_0], \quad P_0^- = Q_0^x = cov(x_0)$$

**Preuve 2.3.5** (Théorème 2.3.2)

$\hat{x}_0$  et  $P_0$  en fonction de  $\hat{x}_0^-$  et  $P_0^-$

le vecteur aléatoire  $(x_0, y_0)$  est gaussien, de moyenne et de matrice de covariance respectives :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ H_0 \bar{x}_0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q_0^x & Q_0^x H_0^* \\ H_0 Q_0^x & H_0 Q_0^x H_0^* + Q_0^v \end{pmatrix}$$

D'après la proposition (2.3.3), la loi conditionnelle de  $x_0$  sachant  $y_0$  est gaussienne de moyenne

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0 + Q_0^x H_0^* [H_0 Q_0^x H_0^* + Q_0^v]^{-1} [y_0 - (H_0 \bar{x}_0)],$$

et de matrice de covariance

$$P_0 = Q_0^x - Q_0^x H_0^* [H_0 Q_0^x H_0^* + Q_0^v]^{-1} H_0 Q_0^x.$$

$\hat{x}_k^-$  et  $P_k^-$  en fonction de  $\hat{x}_{k-1}$  et  $P_{k-1}$

Le vecteur  $(x_k, y_0, \dots, y_{k-1})$  est gaussien et d'après la proposition (2.3.3), la loi de  $x_k$  sachant  $y_{0:k-1}$  est gaussienne de moyenne  $\hat{x}_k^-$  et de matrice de covariance  $P_k^-$ .

D'après l'équation (2.25), on a :

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= E[x_k | y_{0:k-1}] \\ &= A_k E[x_{k-1} | y_{0:k-1}] + B_k u_k + E[w_k | y_{0:k-1}] \\ &= A_k \hat{x}_{k-1}^- + B_k u_k\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que  $w_k$  et  $y_{k-1}$  sont indépendants. Par différence on a :

$$x_k - \hat{x}_k^- = A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-) + w_k,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}P_k^- &= E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^*] \\ &= E[(A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-) + w_k)(A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-) + w_k)^*] \\ &= A_k E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-)(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-)^*] A_k^* + E[w_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-)^*] A_k^* \\ &\quad + A_k E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-)w_k^*] + E[w_k w_k^*] \\ &= A_k P_{k-1}^- A_k^* + Q_k^w\end{aligned}$$

De cette dernière égalité, on utilise le fait que  $(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-)$  est indépendant de  $w_k$ , donc  $E[(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^-)w_k] = 0$ .

### $\hat{x}_k$ et $P_k$ en fonction de $\hat{x}_k^-$ et $P_k^-$

Posons  $I_k = y_k - E[y_k | y_{0:k-1}]$ , alors on a :

$$I_k = y_k - (C_k E[x_k | y_{0:k-1}] + E[v_k | y_{0:k-1}]) = y_k - C_k \hat{x}_k^- - v_k$$

car les  $v_k$  et  $y_k$  sont indépendants. Nous avons le lemme :

**Lemme 2.3.2** *Le processus  $I_k$  est un processus gaussien. En particulier  $I_k$  est un processus gaussien indépendant de  $y_{0:k-1}$  de moyenne nulle et de matrice de covariance*

$$Q_k^I = C_k P_k^- C_k^* + Q_k^v$$

Le vecteur aléatoire  $(x_k, y_0, \dots, y_k)$  est gaussien, d'après la proposition 2.3.3, la loi de  $x_k$  sachant  $y_{0:k}$  est gaussienne de moyenne  $\hat{x}_k$  et de matrice de covariance déterministe  $P_k$ . D'après le lemme 2.3.2

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= E[x_k | y_{0:k}] \\ &= \hat{x}_k^- + E[x_k - \hat{x}_k^- | y_{0:k}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{x}_k^- + E[x_k - \hat{x}_k^- | y_{0:k-1}, I_k] \\ &= \hat{x}_k^- + E[x_k - \hat{x}_k^- | I_k] \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} P_k &= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^*] \\ &= E[((x_k - \hat{x}_k^-) - E[x_k - \hat{x}_k^- | I_k])((x_k - \hat{x}_k^- - E[x_k - \hat{x}_k^- | I_k])^*)] \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer la moyenne conditionnelle et la matrice de covariance conditionnelle du vecteur aléatoire  $(x_k - \hat{x}_k^-)$  sachant  $I_k$ . Le vecteur aléatoire  $(x_k - \hat{x}_k^-, I_k)$  est un vecteur gaussien, de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} P_k^- & P_k^- C_k^* \\ C_k P_k^- & C_k P_k^- C_k^* + Q_k^v \end{pmatrix}$$

Si la matrice  $Q_k^v$  est inversible, alors à fortiori la matrice  $Q_k^I = C_k P_k^- C_k^* + Q_k^v$  est inversible, et d'après la proposition 2.3.3 on a immédiatement

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + P_k^- C_k^* [C_k P_k^- C_k^* + Q_k^v]^{-1} I_k$$

et

$$P_k = P_k^- - P_k^- C_k^* [C_k P_k^- C_k^* + Q_k^v]^{-1} C_k P_k^-,$$

■

### 2.3.5 Observateur des systèmes discrets non linéaires

A l'inverse des systèmes linéaires, l'étude de la synthèse d'observateur des systèmes non linéaires est un domaine où la recherche est encore très active. Plusieurs méthodes ont été développées pour le cas des systèmes non linéaires continus [53, 54, 66, 52, 91, 24]. Cette liste n'est pas exhaustive car on retrouve dans la littérature plus de 339 références dans MathScinet dans ce domaine. Très peu de résultats sur les observateurs des systèmes discrets non linéaires existent et la plupart d'entre ces résultats ne concernent qu'une classe très restreinte de systèmes non linéaires [16, 31, 65, 49, 89, 4]. Une des techniques les plus utilisées pour la synthèse d'observateur des systèmes non linéaires est de linéariser le système autour d'un point d'équilibre par un difféomorphisme, un retour d'état ou une injection de sortie avant de procéder à la synthèse de l'observateur. Toutefois il faut noter que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit linéarisable sont très restrictives et les résultats obtenus sont souvent peu satisfaisants. Nous rappelons ci-après quelques résultats sur la synthèse d'observateur des systèmes non linéaires discrets. Nous considérons le système :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.26)$$

Où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ .

### 2.3.5.1 Observateur par la technique de linéarisation de l'erreur

Nous présentons ici une méthode de synthèse d'observateur qui consiste à transformer un système sous une forme linéaire avec injection de sortie avant de procéder à la synthèse de l'observateur. Considérons le système (2.26).

L'idée ici consiste à trouver une transformation  $\Phi$  telle qu'en posant le changement de variable :

$$z(k) = \Phi(x(k))$$

on transforme le système (2.26) sous la forme :

$$\begin{cases} z(k+1) = Az(k) + G(y(k), u(k)) \\ y(k) = Cz(k) \end{cases} \quad (2.27)$$

Si la transformation  $\Phi$  existe, on pose l'observateur comme étant :

$$\hat{z}(k+1) = A\hat{z}(k) + G(y(k), u(k)) + L(C\hat{z}(k) - y(k))$$

Et on montre que l'erreur  $e(k) = \hat{z}(k) - z(k)$  vérifie :

$$e(k+1) = (A - LC)e(k)$$

L'observabilité de la paire  $(A, C)$  suffit à choisir  $L$  tel que l'erreur  $e(k)$  converge vers zéro. Dans [56], W. Lee et K. Nam donnent une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la transformation  $\Phi$  dans le cas des systèmes discrets non linéaires autonomes. On considère le système autonome :

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \end{cases} \quad (2.28)$$

On suppose que  $F$  est un difféomorphisme sur un voisinage d'un point d'équilibre  $x_e$  des états du système (2.28). Posons :

$$Ad_\sigma X(p) = D_\sigma|_{\sigma^{-1}X}(\sigma^{-1}(p))$$

où  $D_\sigma$  est le jacobien de  $\sigma$ . W. Lee et K. Nam ont établi les résultats suivants :



**Lemme 2.3.3** *Le système (2.28) est transformable sous la forme (2.27) si et seulement si il existe des entiers  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ,  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$  et  $\sum_{i=1}^m k_i = n$  tels que :*

(i) L'ensemble

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{\partial h^i \circ F^j}{\partial x}(x) : 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq k_i - 1 \right\}$$

*engendre un espace vectoriel de dimension  $n$  dans un voisinage de  $x_e$ .*

(ii) En définissant :

$$\mathcal{Q}_i = \left\{ \frac{\partial h^j \circ F^k}{\partial x}(x) : 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq k_i - 1 \right\} - \left\{ \frac{\partial h^i \circ F^{k_i - 1}}{\partial x}(x) \right\}$$

*alors  $\text{Vect}\{\mathcal{Q}_i\} = \text{Vect}\{\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_i\}$ ,  $1 \leq i \leq m$*

**Proposition 2.3.5** *Le système (2.28) est transformable sous la forme (2.27) si et seulement si :*

(a) *Les conditions (i) et (ii) du lemme (2.3.3) sont satisfaites.*

(b) *Pour  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ ,  $1 \leq l \leq m$ , les vecteurs  $g^1, \dots, g^m$  définis par*

$$\left\langle \frac{\partial (h^l \circ F^{j-1})}{\partial x}(x), g^i \right\rangle = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } i = l, j = k_i \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$$

*vérifient :*

$$[Ad_F^p g^i, Ad_F^q g^j] = 0$$

*pour  $0 \leq p \leq k_i - 1$ ,  $0 \leq q \leq k_j - 1$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ .*

### 2.3.5.2 Observateur basé sur l'algorithme de Newton

Nous présentons dans cette partie une méthode de synthèse d'observateur qui consiste à résoudre simultanément un ensemble d'équations non linéaires en utilisant l'algorithme de Newton [31]. Nous considérons toujours le système :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k), u(k)) \end{cases} \quad (2.29)$$

Pour tout  $N$  entier naturel, on pose :

$$Y_{[k-N+1, k]} = \begin{bmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad U_{[k-N+1, k]} = \begin{bmatrix} u(k-N+1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix}$$

et

$$H(x(k-N+1), U_{[k-N+1, k]}) = \begin{bmatrix} h^{u(k-N+1)}(x(k-N+1)) \\ h^{u(k-N+2)} \circ f^{u(k-N+1)}(x(k-N+1)) \\ \vdots \\ h^{u(k)} \circ f^{u(k-1)} \circ \dots \circ f^{u(k-N+1)}(x(k-N+1)) \end{bmatrix}$$

avec  $h^u(x) = h(x, u)$ .

On suppose que le système (2.29) est N-observable, alors l'équation

$$Y_{[k-N+1, k]} - H(x(k-N+1), U_{[k-N+1, k]}) = 0 \quad (2.30)$$

d'inconnues  $x(k-N+1)$  admet une unique solution. Le principe de l'observateur de Newton est basé sur la résolution de l'équation (2.30) en utilisant l'algorithme de Newton. L'algorithme de Newton du système (2.30) est donné par :

$$\psi^{i+1} = \psi^i + \left[ \frac{\partial H}{\partial x}(\psi^i, U_{[k-N+1, k]}) \right]^{-1} \left( Y_{[k-N+1, k]} - H(\psi^i, U_{[k-N+1, k]}) \right) \quad (2.31)$$

Où  $\left[ \frac{\partial H}{\partial x}(\psi^i, U_{[k-N+1, k]}) \right]^{-1}$  est le pseudo inverse de  $\left[ \frac{\partial H}{\partial x}(\psi^i, U_{[k-N+1, k]}) \right]$ .

On définit :

$$\Theta^{Y_k, U_k}(\psi) = \psi + \left[ \frac{\partial H}{\partial x}(\psi, U_k) \right]^{-1} \left( Y_k - H(\psi, U_k) \right)$$

J. W. Grizzle et P. E. Moraal ont établi dans [31] le résultat suivant :

**Théorème 2.3.3** *Supposons que :*

(i) *Les fonctions  $f$  et  $h$  définies en (2.29) sont au moins trois fois différentiables par rapport à  $x$ .*

(ii) *Il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^n$  et un sous ensemble compact  $\nu$  de  $\mathbb{R}^m$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{O}$  il existe  $u \in \nu$  tel que  $f(x, u) \in \mathcal{O}$ .*

(iii) *Il existe un entier  $N$ ,  $1 \leq N \leq n$  tel que les équations définies en (2.30) ont autant d'inconnues que d'équations, sont uniformément observables et de matrice d'observabilité de rang plein par rapport à  $\mathcal{O}$  et  $\nu^N$ .*

*Alors il existe un entier  $d \geq 1$  tel que le système :*

$$\begin{cases} z(k+1) &= (\Theta^{Y_k, U_k})^{(d)}(f(z(k), u(k-N))) \\ \hat{x}(k) &= f^{u(k-1)} \circ f^{u(k-2)} \circ \dots \circ f^{u(k-N)}(z(k)) \end{cases} \quad (2.32)$$

est un observateur exponentiel quasi-local au sens que :

- (a) Si  $x_1 \in O$  et  $z_{N+1} = x_1$  alors  $\hat{x}(k) = x(k)$  pour tout  $k \geq N + 1$ .  
 (b) Il existe  $\delta > 0$  tel que si  $x_1 \in O$ ,  $|z_{N+1} - x_1| < \delta$  et  $\forall k \geq 0$ , on a  $\text{dist}(x(k), O^c) \geq \epsilon$ , alors  $|\hat{x}(k+1) - x(k+1)| \leq \frac{1}{2}|\hat{x}(k) - x(k)|$ .

### 2.3.5.3 Observateur du filtre de Kalman linéarisé

On considère le système non linéaire bruité :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ y_k &= h(x_k, u_k) + v_k \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $x_k$ ,  $y_k$  et  $u_k$  sont respectivement à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^m$ .  $w_k$  et  $v_k$  sont des bruits blancs gaussiens respectivement dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  de matrice de covariance respectives  $Q_k^w$  et  $Q_k^v$ . On suppose que les fonctions  $f$  et  $h$  sont dérivables par rapport à leurs premières variables.

On se donne une suite  $\{\bar{x}_k\}$  de variables déterministes dans  $\mathbb{R}^n$  appelée trajectoire nominale et on linéarise les fonctions  $f$  et  $h$  respectivement autour de  $\bar{x}_{k-1}$  et  $\bar{x}_k$ , i.e :

$$\begin{aligned} f(x, u_k) &\simeq f(\bar{x}_{k-1}, u_k) + \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}_{k-1}, u_k)(x - \bar{x}_{k-1}) \\ h(x, u_k) &\simeq h(\bar{x}_k, u_k) + \frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k)(x - \bar{x}_k) \end{aligned}$$

On remplace le système (2.33) par le système linéarisé :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= F_k(x_{k-1} - \bar{x}_{k-1}) + f_k + w_k \\ y_k &= H_k(x_k - \bar{x}_k) + v_k \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $F_k \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}_{k-1}, u_k)$ ,  $f_k \equiv f(\bar{x}_{k-1}, u_k)$ ,  $H_k \equiv \frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k)$  et  $h_k \equiv h(\bar{x}_k, u_k)$ . On applique le filtre de Kalma-Bucy au système linéaire et on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= f_k(\bar{x}_{k-1}) + \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}_{k-1}, u_k)(\hat{x}_{k-1} - \bar{x}_{k-1}) \\ P_k^- &= \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}_{k-1}, u_k) P_{k-1} [\frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}_{k-1}, u_k)]^* + Q_k^w \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k [y_k - (\frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k)(\hat{x}_k^- - \bar{x}_k) + h(\bar{x}_k, u_k))], \\ P_k &= [I - K_k \frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k)] P_k^-, \\ K_k &= P_k^- \frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k)^* [\frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k) P_k^- (\frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k))^* + Q_k^v]^{-1} \end{aligned}$$

Notons que :

$$f(\hat{x}_{k-1}, u_k) = f_k(\bar{x}_{k-1}) + \frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x}_{k-1}, u_k)(\hat{x}_{k-1} - \bar{x}_{k-1})$$

et

$$h(\hat{x}_k^-) = \frac{\partial}{\partial x} h(\bar{x}_k, u_k)(\hat{x}_k^- - \bar{x}_k) + h(\bar{x}_k, u_k)$$

D'où nous avons l'estimateur du filtre de Kalman linéarisé :

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}, u_k) \\ P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^* + Q_k^w \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h(\hat{x}_k^-)], \\ P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-, \\ K_k &= P_k^- H_k^* [H_k P_k^- H_k^* + Q_k^v]^{-1} \end{aligned}$$

### 2.3.5.4 Observateur du filtre de Kalman étendu

On considère toujours le système bruité (2.33). Au lieu d'utiliser des trajectoires nominales déterministes pour générer le filtre de Kalman, nous utilisons l'estimateur courant. La méthode consiste à linéariser les fonctions  $f$  et  $h$  respectivement autour de  $\hat{x}_{k-1}$  et  $\hat{x}_k^-$ . On obtient les linéarisés :

$$f(x, u_k) \simeq f(\hat{x}_{k-1}, u_k) + \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}_{k-1}, u_k)(x - \hat{x}_{k-1})$$

$$h(x, u_k) \simeq h(\hat{x}_k^-, u_k) + \frac{\partial}{\partial x} h(\hat{x}_k^-, u_k)(x - \hat{x}_k^-)$$

On remplace le système (2.33) par le système linéarisé :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= F_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + f_k + w_k \\ y_k &= H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k \end{cases} \quad (2.35)$$

où  $F_k \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(\hat{x}_{k-1}, u_k)$ ,  $f_k \equiv f(\hat{x}_{k-1}, u_k)$ ,  $H_k \equiv \frac{\partial}{\partial x} h(\hat{x}_k^-, u_k)$  et  $h_k \equiv h(\hat{x}_k^-, u_k)$ .

On applique le filtre de Kalman-Bucy au système linéaire et on obtient l'estimateur

du filtre de Kalman :

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}, u_k) \\
 P_k^- &= F_k P_{k-1} F_k^* + Q_k^w \\
 \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h(\hat{x}_k^-)], \\
 P_k &= [I - K_k H_k] P_k^-, \\
 K_k &= P_k^- H_k^* [H_k P_k^- H_k^* + Q_k^v]^{-1}
 \end{aligned}$$

Quelques extensions du filtre de Kalman aux systèmes non linéaires sont développées dans [79, 12, 42].

## 2.4 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre quelques résultats de stabilité des points d'équilibre et de synthèse d'observateur des systèmes discrets existant dans la littérature. Dans le cadre de notre travail, nous aurons à utiliser quelques uns des résultats de stabilité énoncés dans ce chapitre pour étudier la stabilité des modèles de populations de poissons. Pour les résultats de synthèse des observateurs, nous ne les utiliserons pas, mais nous avons tenu à les rappeler aux lecteurs pour pouvoir les comparer aux techniques que nous utilisons dans la construction d'observateurs des modèles de pêche que nous considérerons.

*CHAPITRE 2. RAPPEL SUR LA STABILITÉ ET LA SYNTHÈSE  
D'OBSERVATEUR DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS*

---

# Chapitre 3

## Modèles discrets de la dynamique des stocks d'une population de poissons

### 3.1 Introduction

Le suivi de la dynamique de la taille du stock des populations de poissons est un problème très pointu dû en partie à la complexité de la structure des océans et des incertitudes qui entourent l'évolution des écosystèmes biologiques . Durant cette dernière décennie, une vaste collaboration entre les mathématiciens et les biologistes à permis de mettre au point des modèles mathématiques permettant de décrire la dynamique de certaines populations de poissons [26, 82, 83, 19, 75, 70]. Un modèle mathématique peut être défini comme étant une entité mathématique que l'on substitue à une partie de la réalité pour rendre celle-ci plus maniable. Les modèles mathématiques occupent aujourd'hui une place centrale dans la gestion des ressources halieutiques car les techniques actuelles d'estimation de la taille des stocks telles que l'utilisation d'indices dont la variation est liée à l'abondance (par exemple les données des captures de pêches expérimentales ou professionnelles) et les méthodes directes de comptage [17, 51, 63, 64] nécessitent des moyens colossaux qui ne sont pas souvent à la portée des pays sous développés. Chacun des modèles mathématiques existant propose une approche de description de la dynamique d'une population suivant certaines hypothèses. C'est ainsi que pour une même population de poissons, on peut trouver plusieurs modèles mathématiques qui décrivent la dynamique de la taille du stock. On retrouve dans la littérature deux catégories de modèles en halieutique : les modèles globaux et les modèles structuraux.

Les modèles globaux font une analyse globale de la dynamique de la taille to-

tale du stock de poissons. Ces modèles ne tiennent pas compte de la structure démographique de la population à étudier. Le modèle global classique le plus connu est le "modèle global généralisé" de Pella et Tomlinson [71] décrit par :

$$\frac{1}{B_t} \frac{dB_t}{dt} = H.(B_t^{m-1} - B_v^{m-1}).q.f_t$$

où :

$B_t$  est la biomasse totale au temps  $t$ .

$f_t$  est l'effort de pêche instantané déployé au temps  $t$ . L'effort de pêche correspond au nombre de navires qui pêchent, au nombre de jours, de prises, d'heure de pêche etc..pendant l'année.

$q$  est la capturabilité i.e la probabilité qu'une biomasse soit capturée lorsqu'une unité d'effort est déployée.

$B_v$  est la biomasse vierge, c'est à dire il n'y a pas d'effort de pêche et  $H$  et  $m$  sont des constantes.

Lorsque  $m = 2$ , on obtient l'expression du modèle de Graham Shaeffer [30, 76, 77] et lorsque  $m = 1$  on obtient le modèle logarithmique [23].

Ces modèles globaux dans leur majorité permettent de définir un niveau optimal d'exploitation du stock. Cependant leur utilisation se heurte aux problèmes des séries chronologiques sur plusieurs années de la production et de l'effort de pêche. Un autre problème que l'on rencontre avec ces modèles est l'impossibilité de ventiler de manière vraisemblable l'effort de pêche entre les diverses espèces capturées.

Contrairement aux modèles globaux, les modèles structuraux requièrent une discrétisation de la taille du stock en classe d'âge ou de stade. Les modèles structuraux sont des outils très puissants souvent plus précis dans leur approche mais requièrent des données complexes relatives aux espèces à étudier. Ces modèles sont souvent plus difficiles à étudier car elle tiennent compte des facteurs externes qui interviennent dans l'évolution du stock. Les modèles structuraux offrent plus d'information sur les stocks de poissons car ils nous permettent de faire des prédictions sur l'état du stock en faisant varier des paramètres que nous pouvons contrôler telle que le maillage des filets. L'approche structurale des modèles de pêche est due à Beverton et Holt [8]. Dans le cadre de notre thèse, nous détaillons ci dessous des modèles structuraux développés par W. M. Getz et R. G. Haight [26]. Ces modèles nous serviront de base sur l'estimation et la régulation des stocks de poissons que nous allons mener dans cette thèse.



## 3.2 Modèle discret à structure d'âge

Nous présentons ici un modèle de dynamique d'une population de poisson structurée en classe d'âge. Le modèle est basé sur la poursuite d'une cohorte. On appelle cohorte un ensemble d'individus d'une population de poissons nés pendant une même période. Pour les besoins de la modélisation de la dynamique de la cohorte, nous faisons les hypothèses suivantes :

- a) les processus de mortalité naturelle et de fécondité ne dépendent pas de la densité de la population et du temps.
- b) la reproduction des femelles est indépendante du nombre de mâle dans la population de poissons considérée.

En réalité, les taux de mortalité et de fécondité d'une population de poissons varient en fonction du temps, des conditions environnementales et de la densité de la population. Les hypothèses a) et b) sont donc données pour des raisons de simplification et peuvent pour certains apparaître comme une limite du modèle. De telles limites sont inhérentes à tout modèle. Nous considérons que la population de poissons est divisée en  $n$  classes d'âge ( $n > 1$ ) et donc nous disposons de  $n$  classes d'âge indicées par une variable  $i$  allant de 1 à  $n$ . Nous posons :

$x_i(k)$  le nombre d'individus de la classe d'âge  $i$  au temps  $k$ .

$M_i$  la mortalité naturelle des individus de la classe d'âge  $i$ .

$q_i$  la capturabilité des individus de la classe d'âge  $i$ .

$E(k)$  l'effort de pêche au temps  $k$  et  $\tau$  le temps de pêche.

La mortalité instantanée due à la pêche des individus de la classe d'âge  $i$  est définie par  $q_i E(k) \tau$ .

### 3.2.1 La dynamique de passage d'une classe à la suivante

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la dynamique de passage d'une classe à la suivante d'une population de poissons soumis à l'action de la pêche. A un instant  $k$  donné, on représente l'abondance de la population de poisson par le vecteur  $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ . Puisque les individus d'une population de poissons peuvent vivre pendant plusieurs années, nous pouvons faire une discrétisation du temps en prenant un pas d'une année (ce choix est arbitraire). Nous supposons en outre que la pêche ne dure pas tout le temps sur l'intervalle de temps annuelle  $[k, k + 1[$  i.e on a  $0 < \tau < 1$  et que l'effort de pêche est constant sur l'intervalle de temps  $[k, k + 1[$ . Avec les hypothèses ci-dessus, nous avons pour une classe  $i$  donnée la variation de l'abondance de la taille du stock sur l'intervalle de temps  $[k, k + 1[$  qui vérifie l'équation différentielle :[26]

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \begin{cases} -(M_i + q_i E(k) \tau) x_i(t) & k \leq t \leq k + \tau \\ -M_i x_i(t) & k + \tau \leq t \leq k + 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous intégrons l'équation différentielle (3.1) sur l'intervalle de temps  $[k, k + 1[$  en faisant l'hypothèse selon laquelle après l'écoulement de l'intervalle de temps  $[k, k + 1[$ , tous les individus de la classe  $i$  passent à la classe  $i + 1$ . Nous obtenons alors :

$$x_{i+1}(k + 1) = x_i(k)e^{-M_i - q_i E(k)\tau} \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (3.2)$$

La structure de passage à la dernière classe est un peu différente de celle des autres. En effet on suppose que la dernière classe contient tous les individus d'âges supérieurs à  $n$ . Ainsi en évaluant l'abondance de la population dans la dernière classe  $n$  après l'intervalle de temps de  $[k, k + 1[$ , en plus des individus qui viennent de la classe  $n - 1$ , il faut aussi tenir compte des individus qui avaient déjà atteint l'âge  $n$  et qui ont survécu après l'intervalle de temps  $[k, k + 1[$ . La dynamique de l'abondance de la dernière classe est alors donnée par :

$$x_n(k + 1) = x_{n-1}(k)e^{-m_{n-1} - q_i E(k)\tau} + x_n(k)e^{-m_n - q_i E(k)\tau} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Recrutement dans la première classe d'âge

Le recrutement dans la première classe d'âge est la proportion des juvéniles qui s'intègrent pour la première fois dans la phase exploitable. Cette phase correspond à la partie la plus difficile de la modélisation en halieutique. Les juvéniles sont très vulnérables aux nombreux facteurs extérieurs (température de l'eau, vitesse du vent, prédation, compétition pour la nourriture) qui peuvent à tout moment perturber leur croissance. Pourtant il est fondamental de bien cerner l'aspect du recrutement dans la modélisation car c'est cette phase qui assure la régénération du stock. Toutefois il faut reconnaître qu'il est quasi impossible de modéliser le recrutement avec une prise en compte totale des facteurs qui interagissent dans la croissance des juvéniles. On suppose qu'il y a suffisamment de mâles dans la population pour assurer la reproduction des femelles. Rappelons que nous avons noté  $b_i$  le taux de fécondité des individus de la classe  $i$ , alors en notant  $x_0(k)$  le nombre de nouveaux nés à l'instant  $k$ , on a :

$$x_0(k) = \sum_{i=1}^n b_i x_i(k) \quad (3.4)$$

Soit  $s_0$  le coefficient de survie des nouveaux nés qui atteignent l'âge du recrutement. En supposant que la croissance des juvéniles n'est affectée par aucune perturbation extérieure et en excluant les termes de compétition et de cannibalisme, on exprime le recrutement dans la première classe d'âge par :

$$x_1(k + 1) = s_0 \sum_{i=1}^n b_i x_i(k) \quad (3.5)$$

Comme nous le mentionnons précédemment plusieurs facteurs externes interviennent de façon aléatoire dans la croissance des juvéniles. Il apparaît donc claire que le recrutement ne peut être une fonction linéaire du stock fécond, on représente l'influence des facteurs externes sur le recrutement des juvéniles par une fonction non linéaire  $h(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k))$ . Nous avons donc l'équation de la première classe d'âge qui est donné par :

$$x_1(k+1) = s_0 f\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right) = s_0 \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right) h\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right). \quad (3.6)$$

Dans la littérature des pêcheries,  $f$  est appelée une fonction de recrutement. Plusieurs fonctions de recrutement existent dont les plus connues sont [26, 8, 61, 78, 73] :

$$\begin{aligned} \text{Beverton et Holt} & f(x_0) = \alpha x_0 / (1 + \beta x_0) ; \\ \text{Ricker} & f(x_0) = \alpha x_0 e^{-\beta x_0} ; \\ \text{Power function} & f(x_0) = \alpha x_0^{1-\beta} ; \\ \text{Shepherd} & f(x_0) = \alpha x_0 / (1 + \beta x_0^c) , (c > 0). \\ \text{Deriso - Schnute} & f(x_0) = \alpha x_0 (1 - \beta x_0)^{1/\gamma} ; \\ \text{Saila - Lorda} & f(x_0) = \alpha x_0^\gamma e^{-\beta x_0}. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Calcul des captures en nombre

La quantification des captures est un aspect très important de la modélisation en halieutique. Dans la plupart des pêcheries, on utilise les captures sur une zone de pêche pour avoir une idée de l'abondance des poissons. Nous décrivons ci-après un modèle décrivant les captures en nombre pour une population de poissons dont la dynamique est celle décrite par le modèle à structure d'âge décrit par les équations (3.2) (3.3) et (3.6). Considérons l'intervalle de temps  $[k, k+1[$  et faisons les hypothèses suivantes :

- i*) la reproduction des femelles se fait au début de l'intervalle de temps  $[k, k+1[$ .
- ii*) la pêche commence au début de l'intervalle de temps  $[k, k+1[$  avec une intensité  $E(k)$  qui reste constant durant tout le temps  $\tau$  que dure la pêche.

Rappelons que nous avons noté par  $q_i$  la capturabilité des individus de la classe  $i$ , alors la mortalité instantanée due à la pêche des individus de la classe  $i$  est déterminée par  $q_i E(k) \tau$ . Les captures en nombre de la classe  $i$  pendant l'intervalle de temps  $[k, k+1[$  sont alors déterminées par :

$$y_i(k) = \int_k^{k+1} q_i E(k) \tau x_i(t) dt \quad (3.7)$$

En calculant on établie que :

$$y_i(k) = \frac{q_i E(k)\tau}{q_i E(k)\tau + M_i} \left(1 - \exp(-M_i - q_i E(k)\tau)\right) x_i(k) \quad (3.8)$$

alors on obtient l'expression des captures totales en nombre :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i E(k)\tau}{q_i E(k)\tau + M_i} \left(1 - \exp(-M_i - q_i E(k)\tau)\right) x_i(k) \quad (3.9)$$

Si on note par  $w_i$  le poids individuel des poissons de la classe  $i$ , l'expression des captures totales en poids est donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i E(k)\tau}{q_i E(k)\tau + M_i} \left(1 - \exp(-M_i - q_i E(k)\tau)\right) w_i x_i(k) \quad (3.10)$$

,

### 3.3 Modèle discret à structure de stade

Nous présentons dans ce paragraphe un modèle de pêche structuré en classe de stade. Pour certaines populations, l'âge des individus peut être très difficile à déterminer et d'autres quantités proportionnelles à l'âge telles que le poids ou la longueur peuvent être plus accessibles en terme de mesure. Ces quantités peuvent être utilisées pour structurer la population en classe de stade. Nous supposons que les classes de stade sont ordonnées de telle sorte que pour un intervalle de temps assez petit, les individus d'une classe de stade passent à la classe suivante ou restent dans la même classe. Si la croissance des individus est monotone, ce qui est très souvent le cas alors la structuration en classe de poids ou de taille vérifie nos hypothèses. Notons  $p_i$  la proportion d'individus ( $i = 1, \dots, n$ ) de la classe  $i$  qui arrive dans la classe  $i + 1$  après écoulement de l'intervalle de temps  $[k, k + 1]$ . Alors  $1 - p_i$  est la proportion d'individu de la classe  $i$  qui n'atteint pas le stade de classe  $i + 1$ . Par définition des  $p_i$  on a  $p_n = 0$  car les individus qui atteignent le stade  $n$  y demeurent jusqu'à leur mort naturelle ou jusqu'à ce qu'ils soient capturés. Comme dans le modèle à structure d'âge on note  $e^{-M_i - q_i E(k)\tau}$  les taux de survies des individus de la classe  $i$ , la dynamique de la classe de stade  $i$ ,  $i = 2, \dots, n$  est alors décrite par :

$$x_i(k + 1) = (1 - p_i) e^{-M_i - q_i E(k)\tau} x_i(k) + p_{i-1} e^{-m_{i-1} - q_{i-1} E(k)\tau} x_{i-1}(k)$$

On considère les mêmes hypothèses sur le processus de recrutement du modèle à structure d'âge. Toutefois il faut noter que tous les poissons recrutés au temps  $k$

n'atteignent pas le stade 2 au temps  $k + 1$  et on modélise alors le processus du recrutement par :

$$x_1(k + 1) = (1 - p_1)e^{-m_1 - q_1 E(k)\tau} x_1(k) + s_0 f\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right)$$

### 3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux modèles structuraux de dynamique de la taille du stock d'une population de poissons exploités : un modèle à structure d'âge et un modèle à structure de stade. On peut remarquer que ce modèle à structure de stade est une généralisation du modèle à structure d'âge. En effet lorsqu'on suppose dans le modèle à structure de stade qu'après l'intervalle de temps  $[k, k+1[$ , l'ensemble des individus d'une classe atteint le stade de la classe suivante i.e  $p_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$  on retrouve exactement le modèle à structure d'âge. Nous utiliserons dans la suite ces modèles pour l'estimation et l'analyse du comportement asymptotique des stocks des population de poissons.

*CHAPITRE 3. MODÈLES DISCRETS DE LA DYNAMIQUE DES STOCKS  
D'UNE POPULATION DE POISSONS*

---

# Chapitre 4

## Synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes discrets : Application à des modèles de pêche

### 4.1 Introduction

La construction d'un observateur n'est pas un exercice facile. La plupart des techniques utilisées pour la synthèse d'un observateur se limitent aux cas très restreint des systèmes linéaires continus ou discrets et à des formes particulières de systèmes non linéaires continus. En outre, la plupart des résultats de synthèse d'un observateur pour des systèmes non linéaires qui existent dans la littérature utilisent des techniques de linéarisation autour d'un point d'équilibre et donc génèrent des observateurs locaux autour de l'équilibre. Nous nous intéressons dans ce chapitre à la synthèse d'observateurs globaux de systèmes non linéaires discrets de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + F(x(k), u(k)) \\ y(k) = C(k)x(k) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où

$x(k)$  est un vecteur d'état dans  $\mathbb{R}^n$

$u(k)$  est un terme de contrôle à valeur réelle

$y(k)$  est une sortie à valeur réelle

$A(k)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à temps variable

$F$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

## 4.2 Forme générale de l'observateur

Nous proposons dans cette partie une méthode simple de synthèse d'un observateur pour un système discret non linéaire de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = f(x_1(k), x_2(k), x_3(k), \dots, x_n(k)) \\ x_2(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(k)x_j(k) \\ x_3(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{2j}(k)x_j(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{n-1j}(k)x_j(k) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i(k)x_i(k), \quad (4.3)$$

où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  et les  $a_{ij}(k)$  sont des réels.

On pose :

$$i_0 = \min\{i = 1, \dots, n / c_i(k) \neq 0 \forall k \geq 0\}$$

**Cas 1 :**  $i_0 = 1$

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^n c_i(k+1)x_i(k+1)$$

$$y(k+1) = c_1(k+1)x_1(k+1) + \sum_{i=2}^n c_i(k+1)x_i(k+1)$$

$$y(k+1) = c_1(k+1)x_1(k+1) + \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}(k+1)x_{i+1}(k+1)$$

Or  $\forall i \geq 1$  nous avons :



$$\begin{aligned}
 x_{i+1}(k+1) &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}(k)x_j(k) \\
 y(k+1) &= c_1(k+1)x_1(k+1) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n c_{i+1}(k+1)a_{i,j}x_i(k) \\
 x_1(k+1) &= \frac{1}{c_1(k+1)} \left( y(k+1) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n c_{i+1}(k+1)a_{i,j}x_i(k) \right)
 \end{aligned}$$

Nous considérons maintenant le système :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \hat{x}_1(k+1) = \frac{1}{c_1(k+1)} \left( y(k+1) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n c_{i+1}(k+1)a_{i,j}(k)\hat{x}_j(k) \right) \\
 \hat{x}_2(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(k)\hat{x}_j(k) \\
 \hat{x}_3(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{2j}(k)\hat{x}_j(k) \\
 \vdots \\
 \hat{x}_n(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{n-1j}(k)\hat{x}_j(k)
 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Posons  $\alpha_j(k) = -\frac{1}{c_1(k+1)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}(k+1)a_{ij}(k) \right)$  pour  $j = 1, \dots, n$  et

$$\mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix}
 \alpha_1(k) & \alpha_2(k) & \alpha_3(k) & \dots & \alpha_n(k) \\
 a_{11}(k) & a_{12}(k) & a_{13}(k) & \dots & a_{1n}(k) \\
 a_{21}(k) & a_{22}(k) & a_{23}(k) & \dots & a_{2n}(k) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{n-1\ 1}(k) & a_{n-1\ 2}(k) & a_{n-1\ 3}(k) & \dots & a_{n-1\ n}(k)
 \end{pmatrix},$$

nous avons la proposition suivante :

**Proposition 4.2.1** *Une condition suffisante pour que (4.4) soit un observateur global de (4.2) est qu'il existe un réel  $\beta$  compris entre 0 et 1 tel que  $\|\mathcal{A}(k)\| < \beta$ .*

**Preuve 4.2.1**

Posons  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$

Ainsi donc on a :

$$\begin{aligned} e_1(k+1) &= x_1(k+1) - \hat{x}_1(k+1) \\ &= -\frac{1}{c_1(k+1)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n c_{i+1}(k+1) a_{i,j}(k) (x_j(k) - \hat{x}_j(k)) \right) \\ e_1(k+1) &= -\frac{1}{c_1(k+1)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n c_{i+1}(k+1) a_{i,j}(k) e_j(k) \right) \end{aligned}$$

Pour  $i = 2, \dots, n$

$$e_i(k+1) = x_i(k+1) - \hat{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{i-1,j}(k) (x_j(k) - \hat{x}_j(k)) = \sum_{j=1}^n a_{i-1,j}(k) e_j(k)$$

L'erreur s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(k+1) = -\frac{1}{c_1(k+1)} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1}(k+1) a_{i,j}(k) \right) e_j(k) \\ e_2(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(k) e_j(k) \\ e_3(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{2j}(k) e_j(k) \\ \vdots \\ e_n(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{n-1,j}(k) e_j(k) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

L'erreur peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$e(k+1) = \mathcal{A}(k)e(k)$$

si  $\|\mathcal{A}(k)\| \leq \beta < 1$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$  (2.2.2) ■

**Cas 2 :  $i_0 > 1$**

Nous avons :

$$y(k+1) = \sum_{i=i_0}^n c_i(k+1)x_i(k+1)$$

$$y(k+1) = c_{i_0}(k+1)x_{i_0}(k+1) + \sum_{i=i_0+1}^n c_i(k+1)x_i(k+1)$$

$$y(k+2) = c_{i_0}(k+2)x_{i_0}(k+2) + \sum_{i=i_0+1}^n c_i(k+2)x_i(k+2)$$

Or pour  $i > 1$ ,

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{i-1 j}(k)x_j(k)$$

Par suite :

$$y(k+2) = c_{i_0}(k+2) \sum_{j=1}^n a_{i_0-1 j}(k+1)x_j(k+1)$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^n c_i(k+2) \sum_{j=1}^n a_{i-1 j}(k+1)x_j(k+1)$$

$$y(k+2) = c_{i_0}(k+2)a_{i_0-1 1}(k+1)x_1(k+1) + c_{i_0}(k+2) \sum_{j=2}^n a_{i_0-1 j}(k+1)x_j(k+1)$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^n c_i(k+2)a_{i-1 1}(k+1)x_1(k+1)$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1 j}(k+1)x_j(k+1)$$

Nous savons par ailleurs que si  $j > 1$ , on a :

$$x_j(k+1) = \sum_{l=1}^n a_{j-1 l}(k)x_l(k)$$

$$y(k+2) = c_{i_0}(k+2)a_{i_0-1 1}(k+1)x_1(k+1)$$

$$+ c_{i_0}(k+2) \sum_{j=2}^n a_{i_0-1 j}(k+1) \sum_{l=1}^n a_{j-1 l}(k)x_l(k)$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^n c_i(k+2)a_{i-1 1}(k+1)x_1(k+1)$$

$$+ \sum_{i=i_0+1}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1 j}(k+1) \sum_{l=1}^n a_{j-1 l}(k)x_l(k)$$

$$\begin{aligned}
 y(k+2) &= \sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1\ 1}(k+1)x_1(k+1) \\
 &+ \sum_{l=1}^n \sum_{j=2}^n c_{i_0}(k+2)a_{i_0-1\ j}(k+1)a_{j-1\ l}(k)x_l(k) \\
 &+ \sum_{l=1}^n \sum_{i=i_0+1}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1\ j}(k+1)a_{j-1\ l}(k)x_l(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(k+2) &= \sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1\ 1}(k+1)x_1(k+1) + \sum_{l=1}^n \left( \sum_{j=2}^n c_{i_0}(k+2)a_{i_0-1\ j}(k+1)a_{j-1\ l}(k) \right. \\
 &\left. + \sum_{i=i_0+1}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1\ j}(k+1)a_{j-1\ l}(k) \right) x_l(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(k+2) &= \sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1\ 1}(k+1)x_1(k+1) \\
 &+ \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=i_0}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1\ j}(k+1)a_{j-1\ l}(k) \right) x_l(k)
 \end{aligned}$$

Supposons que :  $\sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1\ 1}(k+1) \neq 0$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= \frac{1}{\sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1\ 1}(k+1)} \times \\
 &\left( y(k+2) - \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=i_0}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1\ j}(k+1)a_{j-1\ l}(k) \right) x_l(k) \right)
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1(k+1) = \frac{1}{\sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1,1}(k+1)} \left( y(k+2) - \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=i_0}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1,j}(k+1)a_{j-1,l}(k) \right) \hat{x}_l(k) \right) \\ \hat{x}_2(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{1,j}(k)\hat{x}_j(k) \\ \hat{x}_3(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{2,j}(k)\hat{x}_j(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{n-1,j}(k)\hat{x}_j(k) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

on définit  $l = 1 \dots n$  :

$$\beta_l = -\frac{1}{\sum_{i=i_0}^n c_i(k+2)a_{i-1,1}(k+1)} \left( \sum_{i=i_0}^n \sum_{j=2}^n c_i(k+2)a_{i-1,j}(k+1)a_{j-1,l}(k) \right)$$

et

$$\mathcal{B}(k) = \begin{pmatrix} \beta_1(k) & \beta_2(k) & \beta_3(k) & \dots & \beta_n(k) \\ a_{1,1}(k) & a_{1,2}(k) & a_{1,3}(k) & \dots & a_{1,n}(k) \\ a_{2,1}(k) & a_{2,2}(k) & a_{2,3}(k) & \dots & a_{2,n}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}(k) & a_{n-1,2}(k) & a_{n-1,3}(k) & \dots & a_{n-1,n}(k) \end{pmatrix}$$

nous avons la proposition :

**Proposition 4.2.2** *Une condition suffisante pour que (4.6) soit un observateur global de (4.2) est qu'il existe un réel  $\beta_0$  compris entre 0 et 1 tel que  $\|\mathcal{B}(k)\| < \beta_0$ .*

**Preuve 4.2.2** On écrit l'erreur sous la forme matricielle :

$$e(t+1) = \mathcal{B}(k)e(t)$$

Comme au cas 1, s'il existe  $\beta_0$  compris entre 0 et 1 tel que  $\|\mathcal{B}(k)\| < \beta$  alors (4.6) est un observateur global de (4.2) ■



### 4.3.1 Motivation

Pour fixer les idées, nous considérons un cas particulier du modèle à structure d'âge avec 3 classes d'âge et la fonction de recrutement de dépenstation suivante :

$$f(x_0) = \frac{x_0^2}{1 + \beta x_0^2}$$

Le modèle est alors :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f\left(\sum_{i=1}^3 b_i x_i(k)\right) = \frac{(\sum_{i=1}^3 b_i x_i(k))^2}{1 + \beta(\sum_{i=1}^3 b_i x_i(k))^2} \\ x_2(k+1) = x_1(k)e^{-m_1 - q_1 \tau E(k)} \\ x_3(k+1) = x_2(k)e^{-m_2 - q_2 \tau E(k)} + x_3(k)e^{-m_3 - q_3 \tau E(k)} \end{cases} \quad (4.9)$$

avec les paramètres suivants :

Paramètre de la fonction de recrutement de dépenstation	$\beta = 0.6,$
Taux de fécondité	$b = [2 \ 3 \ 3],$
Coefficients de capturabilité	$q = [0.12 \ 0.24 \ 1],$
Taux de mortalité naturelle	$m = [0.8 \ 0.8 \ 0.8],$
Temps de pêche	$\tau = 1,$
Effort de pêche	$E(k) = 10.$

La variable  $x_i(k)$  représente le nombre d'individus (en million) de la classe  $i$  au temps  $k$ . Si nous sommes en mesure de mesurer les états du système (4.9) à un instant  $k_0$ , alors l'équation (4.9) nous permet de calculer les états  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  et  $x_3(k)$  à tout instant  $k \geq k_0$ . Supposons que les états réels des stocks à l'instant  $k = 0$  sont connus et donnés par  $x_1(0) = 0.181$ ,  $x_2(0) = 0.021$  et  $x_3(0) = 0.015$  (en million d'individu) ; alors d'après (4.9) les états du stock à l'instant  $k = 19$  sont donnés par :

$$x_1(19) = 27.1 \times 10^{-3}, \quad x_2(19) = 8.37 \times 10^{-3}, \quad \text{et} \quad x_3(19) = 0.55 \times 10^{-3}.$$

Nous pouvons voir que la condition initiale ci-dessus de l'état du stock conduit inévitablement à l'extinction du stock de la population de poissons considérés, c'est à dire  $x_i(k)$  tend vers zéros lorsque  $k$  tend vers l'infini, en pratique le stock devient nul si  $k$  est supérieur à 20. Cependant il faut noter que nous avons pas toujours accès aux valeurs  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  and  $x_3(0)$ . Tout ce dont nous disposons comme mesures sont les sorties du système représentées ici par les valeurs des captures en nombre. Pour le système (4.9) associé aux valeurs des paramètres ci-dessus, la formule des captures est donnée par :

$$y(k) = 0.518799 x_1(k) + 0.719428 x_2(k) + 0.925907 x_3(k).$$

*CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE  
SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE*

---

Ainsi, au temps  $k = 0$  nous savons que  $y(0) = 0.122899$ . Cette valeur de  $y(0)$  est la sortie correspondant aux états initiaux réels du système, elle peut aussi correspondre aux états initiaux suivants :  $\bar{x}_1(0) = 0.16$ ,  $\bar{x}_2(0) = 0.05$ ,  $\bar{x}_3(0) = 0.0042336$  car  $0.518799 \times 0.16 + 0.719428 \times 0.05 + 0.925907 \times 0.0042336 = 0.122899$ . Donc quelqu'un d'autre peut considérer  $(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \bar{x}_3(0))$  comme une condition initiale du système (4.9), et donc dans ce cas les états du stock à l'instant  $k = 19$  seront :

$$\bar{x}_1(19) = 1474 \times 10^{-3}, \quad \bar{x}_2(19) = 199 \times 10^{-3}, \quad \text{and} \quad \bar{x}_3(19) = 8.13 \times 10^{-3}.$$

Ces valeurs sont différentes des valeurs obtenues par les supposées vraies valeurs des conditions initiales. Cependant, les simulations montrent que les solutions du système (4.9) correspondant aux conditions initiales  $(\bar{x}_1(0), \bar{x}_2(0), \bar{x}_3(0))$  convergent vers un état d'équilibre positif dont les coordonnées sont :  $(1.474, 0.199, 0.008)$  alors que les états réels convergent vers  $(0, 0, 0)$ .

Du tableau 4.1, on remarque que les états de l'observateur convergent rapidement vers les états réels du système (issus des supposés états réels initiaux  $x(0) = (0.181, 0.021, 0.015)$ ) même en considérant un faux état initial  $\bar{x}(0) = (0.16, 0.05, 0.0042336)$  pour l'observateur.

Les résultats de la simulation sont rapportés dans le tableau 4.1 qui compare les valeurs obtenues aux différents temps du système (4.9) initialisé avec la vraie condition initiale  $x(0)$  et la fausse condition initiale  $\bar{x}(0)$  et les valeurs de l'observateur initialisé avec la fausse condition initiale  $\bar{x}(0)$ . Nous avons choisi de représenter uniquement les valeurs des états de la première composante dans le tableau 4.1 mais les mêmes observations sont notées dans la seconde et troisième classe. On peut noter que les valeurs des états de l'observateur sont pratiquement égales aux valeurs des états réels dès que le temps  $k$  est supérieur à 3.



4.3. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

---

TABLE 4.1 – Valeurs des simulations du système 4.9.

k	$x_1(k) \times 10^3$	$\bar{x}_1(k) \times 10^3$	$\hat{x}_1(k) \times 10^3$
0	181.0000	160.0000	160.0000
1	195.0483	204.4220	196.8801
2	192.2349	202.3581	192.0978
3	192.6023	210.1368	192.6010
4	192.4746	221.8007	192.4745
10	189.0404	990.8104	189.0404
15	152.3006	1471.1720	152.3006
17	99.0640	1473.7021	99.0640
19	27.1224	1473.9699	27.1224
20	6.5337	1473.9912	6.5337
21	0.6299	1473.9981	0.6299
24	0.0000	1474.0014	0.0000

### 4.3.2 Synthèse de l'observateur

Considérons les captures en nombre au temps  $k + 1$ , alors d'après la relation (4.8), on a :

$$y(k + 1) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i E(k + 1)\tau}{m_i + q_i E(k + 1)\tau} (1 - v_i(k + 1))x_i(k + 1)$$

Où

$$v_i(k) = \exp(-m_i - q_i E(k)\tau)$$

$$\begin{aligned} y(k + 1) &= \frac{q_1 E(k + 1)\tau}{m_1 + q_1 E(k + 1)\tau} (1 - v_1(k + 1))x_1(k + 1) \\ &+ \sum_{i=2}^n \frac{q_i E(k + 1)\tau}{m_i + q_i E(k + 1)\tau} (1 - v_i(k + 1))x_i(k + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(k + 1) &= \frac{q_1 E(k + 1)\tau}{m_1 + q_1 E(k + 1)\tau} (1 - v_1(k + 1))x_1(k + 1) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{i+1} E(k + 1)\tau}{m_{i+1} + q_{i+1} E(k + 1)\tau} (1 - v_{i+1}(k + 1))x_{i+1}(k + 1) \end{aligned}$$

Pour  $i = 2, \dots, n - 1$  on a :

$$x_i(k + 1) = x_i(k)v_i(k) \text{ et } x_n(k + 1) = x_{n-1}(k)v_{n-1}(k) + x_n(k)v_n(k)$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned}
 y(k+1) &= \frac{q_1 E(k+1)\tau}{m_1 + q_1 E(k+1)\tau} (1 - v_1(k+1))x_1(k+1) \\
 &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{i+1} E(k+1)\tau}{m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau} (1 - v_{i+1}(k+1))v_i(k)x_i(k) \\
 &+ \frac{q_n E(k+1)\tau}{m_n + q_n E(k+1)\tau} (1 - v_n(k+1))v_n(k)x_n(k)
 \end{aligned}$$

Posons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \hat{x}_1(k+1) = \frac{y(k+1)(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)}{q_1 E(k+1)\tau(1 - v_1(k+1))} \\
 \quad - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{i+1}(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_{i+1}(k+1))v_i(k)\hat{x}_i(k)}{q_1(m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} \\
 \quad - \frac{q_n(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_n(k+1))v_n(k)\hat{x}_n(k)}{q_1(m_n + q_n E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} \\
 \hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_1(k)v_1(k) \\
 \quad \vdots \\
 \hat{x}_n(k+1) = \hat{x}_{n-1}(k)v_{n-1}(k) + \hat{x}_n(k)v_n(k)
 \end{array} \right. \tag{4.10}$$

Soient :

$$E_m \leq E(k) \leq E_M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$q_m \leq q_i \leq q_M \quad \text{pour } i = 1 \dots n$$

$$m \leq m_i \leq M \quad \text{pour } i = 1 \dots n$$

Nous donnons la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1** *Supposons que  $q_1 \leq q_i \forall i = 2, \dots, n$ .*

*Alors il existe  $\eta$  tel que si  $E_m > \eta$ , le système (4.10) est un observateur global du système (4.7).*

**Preuve 4.3.1** Posons :

$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  comme étant l'erreur entre l'état réel et l'état estimé à l'instant  $k$ .

Nous allons montrer que la dynamique de l'erreur s'écrit sous la forme

4.3. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

$e(k+1) = A(k)e(k)$  et qu'il existe un effort de pêche minimal  $E_m$  pour lequel on a  $\|A(k)\| < 1$ .

$$e_1(k+1) = x_1(k+1) - \hat{x}_1(k+1) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{i+1}(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_{i+1}(k+1))}{q_1(m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} v_i(k) e_i(k) - \frac{q_n(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_n(k+1))}{q_1(m_n + q_n E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} v_n(k) e_n(k)$$

Pour  $i = 2 \dots n-1$ , on a :

$$e_i(k+1) = v_i(k)x_i(k) - v_i(k)\hat{x}_i(k) = v_i(k)(x_i(k) - \hat{x}_i(k)) = v_i(k)e_i(k)$$

$$e_n(k+1) = v_{n-1}(k)x_{n-1}(k) + v_n(k)x_n(k) - v_{n-1}(k)\hat{x}_{n-1}(k) - v_n(k)\hat{x}_n(k)$$

$$e_n(k+1) = v_{n-1}(k)e_{n-1}(k) + v_n(k)e_n(k)$$

L'erreur peut alors s'écrire sous la forme du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(k+1) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{i+1}(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_{i+1}(k+1))}{q_1(m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} v_i(k) e_i(k) \\ \quad - \frac{q_n(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_n(k+1))}{q_1(m_n + q_n E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} v_n(k) e_n(k) \\ e_2(k+1) = v_1(k) e_1(k) \\ \quad \vdots \\ e_n(k+1) = v_{n-1}(k) e_{n-1}(k) + v_n(k) e_n(k) \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Soient :

$$\alpha_i(k) = - \frac{q_{i+1}(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_{i+1}(k+1))}{q_1(m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} v_i(k)$$

et

$$\alpha_n(k) = - \frac{q_n(m_1 + q_1 E(k+1)\tau)(1 - v_n(k+1))}{q_1(m_n + q_n E(k+1)\tau)(1 - v_1(k+1))} v_n(k)$$

Alors on peut écrire l'erreur sous la forme matricielle :

$$e(k+1) = A(k)e(k)$$

Où

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_1(k) & \alpha_2(k) & \alpha_3(k) & \dots & \alpha_n(k) \\ v_1(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2(k) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{n-1}(k) & v_n(k) \end{pmatrix},$$

Pour  $i = 1 \dots n$ , posons :  $s_i(k) = |\alpha_i(k)|$

Pour  $i = 1 \dots n - 1$ , on a :

$$s_i(k) = \frac{m_1 q_{i+1} (1 - v_{i+1}(k+1))}{q_1 (m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau) (1 - v_1(k+1))} + \frac{q_{i+1} q_1 E(k+1)\tau (1 - v_{i+1}(k+1))}{q_1 (m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau) (1 - v_1(k+1))}$$

On a :

$$\frac{q_1 E(k+1)\tau}{m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau} < 1$$

Donc

$$s_i(k) \leq \frac{m_1 q_{i+1} (1 - v_{i+1}(k+1))}{q_1 (m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau) (1 - v_1(k+1))} + \frac{1 - v_{i+1}(k+1)}{q_1 (1 - v_1(k+1))} q_{i+1}$$

La fonction  $f(x) = \frac{1 - \exp(-x)}{x}$  est une fonction décroissante, donc on a :

$$\frac{1 - v_{i+1}(k+1)}{m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau} = \frac{1 - \exp(-m_{i+1} - q_{i+1} E(k+1))}{m_{i+1} + q_{i+1} E(k+1)\tau} \leq \frac{1 - \exp(-m - q_m E(k+1))}{m + q_m E(k+1)\tau}$$

D'où

$$s_i(k) \leq \frac{M q_M (1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))}{q_1} \frac{1}{m + q_m E_m \tau} \frac{1}{1 - v_1(k+1)} + \frac{q_M}{q_1 (1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))}$$

Avec  $s_n(k) = \frac{q_n (m_1 + q_1 E(k+1)\tau) (1 - v_n(k+1))}{q_1 (m_n + q_n E(k+1)\tau) (1 - v_1(k+1))}$  et pour les mêmes raisons que ci-dessus on a :

$$s_n(k) \leq \frac{M q_M (1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))}{q_1} \frac{1}{m + q_m E_m \tau} \frac{1}{1 - v_1(k+1)} + \frac{q_M}{q_1 (1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))}$$

4.3. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

D'autre part la fonction  $g(x) = \frac{1}{1 - \exp(-x)}$  est une fonction décroissante et par conséquence on a :

$$\frac{1}{1 - \exp(v_1(k+1))} \leq \frac{1}{1 - \exp(-m - q_m E_m \tau)}$$

Et donc  $\forall i = 1, \dots, n$ , on a :

$$\begin{aligned} s_i(k) &\leq \frac{Mq_M}{q_1} \frac{1}{m + q_m E_m \tau} + \frac{q_M}{q_1(1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))} \\ |\alpha_i(k)| + |v_i(k)| &= s_i(k)v_i(k) + v_i(k) = (s_i + 1)v_i(k) \\ |\alpha_i(k)| + |v_i(k)| &\leq \left( \frac{Mq_M}{q_1} \frac{1}{m + q_m E_m \tau} + \frac{q_M}{q_1(1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))} + 1 \right) \exp(-m - q_m E_m \tau) \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \beta &= \left( \frac{Mq_M}{q_1} \frac{1}{m + q_m E_m \tau} + \frac{q_M}{q_1(1 - \exp(-m - q_m E_m \tau))} + 1 \right) \exp(-m - q_m E_m \tau) \\ X &= \exp(-m - q_m E_m \tau) \end{aligned}$$

et

$$P(X) = -\frac{Mq_M X}{q_m \log(X)} + \frac{q_M X}{q_1(1 - X)} + X - 1$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} P(X) = -1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} P(X) = +\infty$$

Donc il existe  $x_1 \in ]0, 1[$  tel que  $P(x_1) = 0$

Posons  $x^* = \inf\{x \in ]0, 1[ / P(x) = 0\}$

Pour  $0 < X < x^*$  on a  $P(X) < 0$

Nous avons posé  $X = \exp(-m - q_m E_m \tau)$  donc :

$$0 < X < x^* \text{ est équivalent à } 0 < \exp(-m - q_m E_m \tau) < x^* \text{ ou } E_m > \frac{-\ln(x^*) - m}{q_m \tau}$$

Il suffit alors de poser  $\eta = \frac{-\ln(x^*) - m}{q_m \tau}$  et on obtient :

$$\forall E_m > \eta \quad P(X) = P(\exp(-m - q_m E_m \tau)) < 0$$

Ce qui implique  $\beta < 1$

Donc considérant la norme matricielle :

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

On a :

$$\begin{aligned} \|e(k+1)\| &\leq \|A\| \|e(k)\| < \beta \|e(k)\| \\ \beta < 1 &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0 \end{aligned}$$

■.

**Remarque 4.3.1** *L'hypothèse  $q_1 \leq q_i \forall i = 2, \dots, n$  dans l'énoncé de la proposition ci-dessus a bien un sens biologique. En effet elle traduit que l'intensité de la pêche exercée sur les poissons de la première classe d'âge est inférieure à celle exercée sur les poissons des autres classes d'âge. Des décisions allant dans ce sens sont souvent prises dans beaucoup de pays pour participer à la sauvegarde de certaines espèces marines. On note que notre observateur a la particularité de ne pas utiliser la fonction de recrutement qui, du reste est difficile à modéliser. En effet plusieurs facteurs telles que la vitesse du vent, la température de l'eau peuvent intervenir et perturber la survie des juvéniles.*

**Remarque 4.3.2** *Lorsque nous supposons que la mortalité naturelle est la même pour toutes les classes d'âge, on obtient une nouvelle condition sur l'effort de pêche qui garantit la convergence de l'observateur vers les états du système (4.7). En effet nous avons le résultat suivant :*

**Proposition 4.3.2** *Supposons que  $q_1 \leq q_i \forall i = 2, \dots, n$  et  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ , alors le système (4.10) est un observateur global du système (4.7) si :*

$$E_m > \frac{1}{q_1 \tau} \left( \text{Log} \left[ \frac{q_{max}}{q_1} + 1 \right] - m \right).$$

**Preuve 4.3.2** Nous savons que

$$\begin{aligned} |\alpha_i(k)| + |v_i(k)| &= \\ &\left( \frac{q_{i+1} \left( M_1 + q_1 \tau E(k+1) \right) \left( 1 - e^{-M_{i+1} - q_{i+1} \tau E(k+1)} \right)}{q_1 \left( M_{i+1} + q_{i+1} \tau E(k+1) \right) \left( 1 - e^{-M_1 - q_1 \tau E(k+1)} \right)} + 1 \right) e^{-m_i - q_i \tau E(k)} \\ &= \left( \frac{q_{i+1} \left( m + q_1 \tau E(k+1) \right) \left( 1 - e^{-m - q_{i+1} \tau E(k+1)} \right)}{q_1 \left( m + q_{i+1} \tau E(k+1) \right) \left( 1 - e^{-m - q_1 \tau E(k+1)} \right)} + 1 \right) e^{-m - q_i \tau E(k)} \\ &= \left( \frac{\frac{q_{i+1}}{q_1} \frac{1 - e^{-m - q_{i+1} \tau E(k+1)}}{m + q_{i+1} \tau E(k+1)}}{\frac{1 - e^{-m - q_1 \tau E(k+1)}}{m + q_1 \tau E(k+1)}} + 1 \right) e^{-m - q_i \tau E(k)}. \end{aligned}$$

Puisque  $q_1 \leq q_i$ , nous avons

$$m + q_1 \tau E(k+1) \leq m + q_{i+1} \tau E(k+1),$$

4.3. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

et en utilisant le fait que  $x \mapsto \frac{1}{1 - e^{-x}}$  est décroissante, nous obtenons

$$\frac{1 - e^{-m - q_{i+1}\tau E(k+1)}}{m + q_{i+1}\tau E(k+1)} \leq \frac{1 - e^{-m - q_1\tau E(k+1)}}{m + q_1\tau E(k+1)}.$$

Ainsi on a :  $|\alpha_i(k)| + |v_i(k)| \leq \left(\frac{q_{i+1}}{q_1} + 1\right) e^{-m - q_i\tau E(k)} \leq \left(\frac{q_{i+1}}{q_1} + 1\right) e^{-m - q_1\tau E(k)}$ . Il s'en suit que

$$\|A(k)\|_1 \leq \left(\frac{q_{i+1}}{q_1} + 1\right) e^{-m - q_1\tau E(k)}.$$

Et par conséquence,  $\|A(k)\|_1 < 1$  if  $E_m > \frac{1}{q_1\tau} \left(\text{Log} \left[\frac{q_{max}}{q_1} + 1\right] - m\right)$ . ■

**Remarque 4.3.3** Nous supposons qu'on dispose des captures de la première classe d'âge pour une population de poissons dont la dynamique est décrite par le système (4.4). Nous écrivons alors l'observateur sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k+1) = \frac{m_1 + q_1 E(k+1)\tau}{q_1 E(k+1)\tau(1 - v_1(k+1))} y_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_1(k)v_1(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n(k+1) = \hat{x}_{n-1}(k)v_{n-1}(k) + \hat{x}_n(k)v_n(k) \end{cases} \quad (4.12)$$

Où  $y_1(k)$  est la capture en nombre de poissons de la première classe d'âge à l'instant  $k$ . Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 4.3.3** Quelle que soit la valeur de l'effort de pêche minimal, le système (4.12) est un observateur global du système (4.7).

**Preuve 4.3.3** les captures en nombre de la première classe d'âge à l'instant  $k+1$  sont données par :

$$y_1(k+1) = \frac{q_1 E(k+1)\tau}{m_1 + q_1 E(k+1)\tau} (1 - v_1(k+1)) x_1(k+1)$$

Soit  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ,

On a :

$$e_1(k+1) = x_1(k+1) - \hat{x}_1(k+1) = 0$$

$$e_i(k+1) = x_i(k+1) - \hat{x}_i(k+1) = v_i(k)x_i(k) - v_i(k)\hat{x}_i(k) = v_i(k)e_i(k), \quad i = 2, \dots, n-1$$

CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE  
SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE

$$e_n(k+1) = v_{n-1}(k)x_{n-1}(k) - v_{n-1}(k)\hat{x}_{n-1}(k) + v_n(k)x_n(k) - v_n(k)\hat{x}_n(k) = v_{n-1}(k)e_{n-1}(k)$$

En écrivant l'erreur sous forme matricielle, on a :

$$e(k+1) = \mathcal{A}_1(k)e(k)$$

Où

$$\mathcal{A}_1(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_1(k) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2(k) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{n-1}(k) & v_n(k) \end{pmatrix},$$

En considérant la norme :  $\|\mathcal{A}\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ , on a  $\|e(k)\|$  qui tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini car  $|v_i(k)| < 1$ . ■

**Remarque 4.3.4** *En général dans la littérature des pêcheries, on donne la mortalité par pêche en lieu et place de la capturabilité par classe d'âge. De plus, les données des captures ne sont pas aussi souvent exprimées en nombre mais plutôt en terme de poids. Ainsi nous pouvons considérer les captures en masse pour la synthèse de l'observateur. Si nous notons par  $w_i$  le poids moyen individuel des poissons de la classe d'âge  $i$ , alors on exprime la biomasse totale  $Y(k)$  comme étant :*

$$Y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \tau E(k)}{m_i + q_i \tau E(k)} (1 - e^{-m_i - q_i \tau E(k)}) w_i x_i(k). \quad (4.13)$$

Soit  $\varphi_i(k) = q_i \tau E(k)$  la mortalité par pêche de la classe d'âge  $i$ , alors on a :

$$Y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(k)}{m_i + \varphi_i(k)} (1 - e^{-m_i - \varphi_i(k)}) w_i x_i(k).$$

On pose :  $v_i(k) = e^{-m_i - \varphi_i(k)}$ .

Avec ces notations, l'observateur du système (4.7) dont les sorties mesurables sont



les captures en poids  $Y(k)$  peut être écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1(k+1) = \frac{Y(k+1)(M_1 + \varphi_1(k+1))}{\varphi_1(k+1)(1 - v_1(k+1))w_1} \\ \quad - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varphi_{i+1}(k+1)(M_1 + \varphi_1(k+1))(1 - v_{i+1}(k+1))v_i(k)w_i\hat{x}_i(k)}{\varphi_1(k+1)(M_{i+1} + \varphi_{i+1}(k+1))(1 - v_1(k+1))w_1} \\ \quad - \frac{\varphi_n(k+1)(M_1 + \varphi_1(k+1))(1 - v_n(k+1))v_n(k)w_n\hat{x}_n(k)}{\varphi_1(k+1)(M_n + \varphi_n(k+1))(1 - v_1(k+1))w_1}, \\ \hat{x}_2(k+1) = v_1(k)\hat{x}_1(k), \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}(k+1) = v_{n-2}(k)\hat{x}_{n-2}(k), \\ \hat{x}_n(k+1) = v_{n-1}(k)\hat{x}_{n-1}(k) + v_n(k)\hat{x}_n(k). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Simulations numériques

Nous donnons ci-dessous quelques simulations numériques de l'observateur avec un effort de pêche constant. Nous considérons deux cas dans les simulations, un premier cas avec la fonction de recrutement de Beverton et Holt et un autre cas avec la fonction de recrutement de Ricker où les trajectoires du système présentent des oscillations.

#### Cas de la fonction de recrutement de Beverton et Holt

Beverton et Holt dans leurs travaux définissent la fonction de recrutement comme étant :  $h(x_0) = \frac{1}{1 + \beta x_0}$  où  $\beta$  est un paramètre positif.

Nous considérons les paramètres suivants :

Paramètres de Beverton et Holt	$\alpha = 1, \beta = 0.0015,$
Coefficients de fécondité	$b = [0.8 \ 0.8 \ 1],$
Coefficients de capturabilité	$q = [0.12 \ 0.24 \ 0.36],$
Taux de mortalité naturelle	$M = [0.2 \ 0.2 \ 0.2],$
Temps de pêche	$\tau = 2/3,$
Effort de pêche	$E(k) = 4$

*CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE  
SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE*

---

Les vecteurs des états initiaux sont :  $x(0) = [1 \ 5 \ 20]$  et  $\hat{x}(0) = [10 \ 30 \ 60]$   
Les courbes des trajectoires de l'observateur et du modèle de pêche sont représentées dans à la figure (4.1).

**Cas de la fonction de recrutement de Ricker**

On considère la fonction de recrutement de Ricker :  $h(x) = e^{-\beta x}$  avec les paramètres du modèle suivants :

Paramètre de Ricker	$\alpha = 1, \beta = 0.0015,$
Coefficients de fécondité	$b = [15 \ 20 \ 20],$
Coefficients de capturabilité	$q = [0.24 \ 0.36 \ 0.42],$
Taux de mortalité naturelle	$M = [0.2 \ 0.2 \ 0.2],$
Temps de pêche	$\tau = 2/3,$
Effort de pêche	$E(k) = 4$

On donne les états initiaux  $x_0$  et  $\hat{x}_0$  respectifs du système et de l'observateur :

$$x(0) = [60 \ 45 \ 70] \text{ et } \hat{x}(0) = [10 \ 12 \ 14]$$

Les courbes des trajectoires de l'observateur et du modèle de pêche (4.7) sont représentées à la figure (4.2).

### 4.3. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

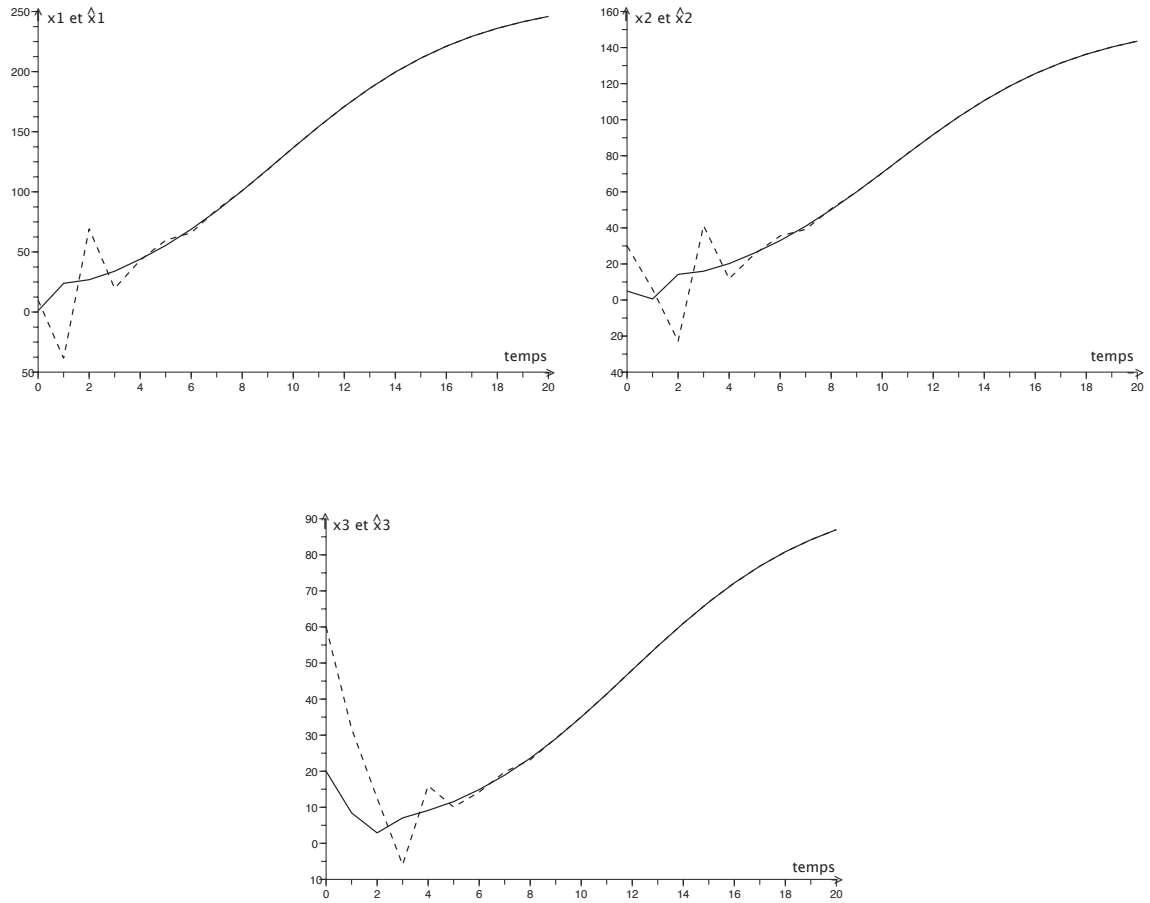


FIGURE 4.1 – Exemples de trajectoires des états de l'observateur (en pointillé) et du modèle de pêche (4.7) (en trait plein) pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.

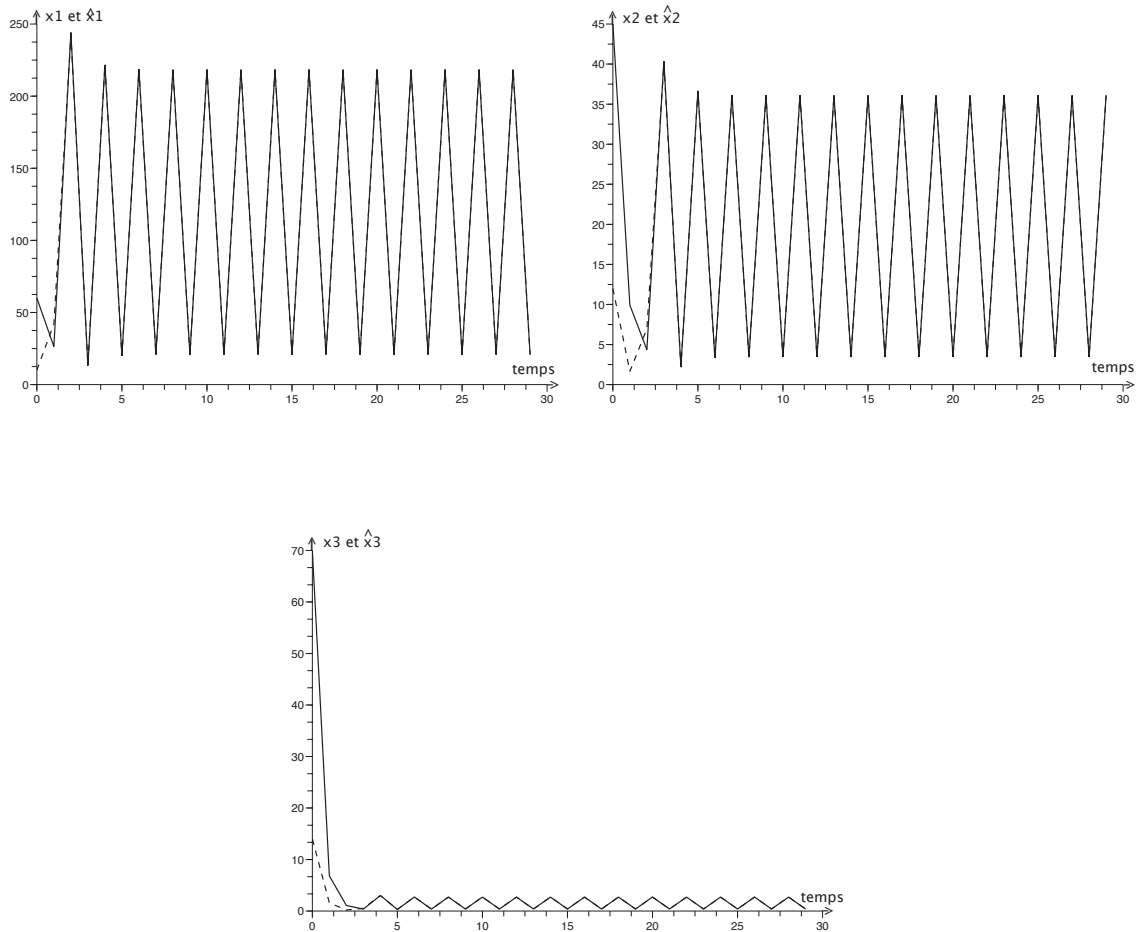


FIGURE 4.2 – Exemples de trajectoires des états de l'observateur (en pointillé) et du modèle de pêche (4.7) (en trait plein) pour la fonction de recrutement de Ricker.

#### 4.3.4 Application de l'observateur

Nous mettons en application l'observateur en utilisant des données de la FAO extraites du rapport du deuxième groupe de travail ad hoc sur les chinchards et les maquereaux de la zone nord du COPACE (Comité des Pêches pour l'Atlantique Centre -Est)[21]. La population de poissons considérés est le trachurus spp. La population est divisée en huit classes d'âge et des estimations de la biomasse, de la mortalité par pêche et les captures annuelles en nombre et par classe d'âge ont été établies entre l'année 1972 et l'année 1985. La mortalité naturelle de la population est fixée à 0.5. Pour construire l'observateur nous avons besoins des captures en nombre aux différents temps  $k$  (tableau 1), des taux de mortalité naturelles  $m_i$  qui valent ici 0.5 et des taux de mortalité par pêche  $q_i E(k)\tau$  aux différents temps  $k$  (tableau 2). Nous ne donnons pas l'effort de pêche minimal car son calcul nécessite la connaissance de la capturabilité  $q_1$  de la classe 1, de la capturabilité maximale  $q_M$  et du temps de pêche  $\tau$  qui ne sont spécifiés dans les données. Il faut noter que la condition sur l'effort de pêche est une condition suffisante mais pas nécessaire pour la convergence de l'observateur. Nous implémentons l'observateur à partir de la donnée des captures par année pour donner à notre tour des estimations de la biomasse en nombre de la population de trachurus spp dans la zone d'étude considérée. L'état initial de l'observateur est choisi au hasard car l'observateur est un observateur global. Les résultats de notre simulation sont donnés dans la figure ci-après.

Nous remarquons avec les simulations que même en considérant des conditions initiales très éloignées de la condition initiale des estimations de la FAO, l'observateur converge vers les estimations de la FAO après un certain temps. En considérant deux conditions initiales de l'observateur, nous notons aussi que les états de l'observateur convergent presque simultanément vers les estimations de la FAO. Ce résultat nous permet de dire qu'en l'absence des estimations de la FAO de l'abondance de la population de poissons, nous pouvons les retrouver à partir du moment où deux trajectoires de l'observateur convergent l'un vers l'autre.

**CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE**

Tableau 1 :Trachurus spp. : Capture en millions d'individus par classe d'âge (divisions 34.1.3. et 34.3.1) et capture totale en milliers de tonnes.

	AGE								Cap- tures (10 <sup>6</sup> indi- vi- dus)	Capture (1000 t)
	0+	1	2	3	4	5	6	7+		
1972	0,00	1492,00	798,10	403,90	188,00	106,40	52,00	18,50	3058.9	390,123
1973	0,00	2457,00	680,90	250,90	114,50	60,30	43,20	48,50	3625.3	383,052
1974	982,00	3273,20	947,30	240,40	44,90	26,20	12,30	11,80	4562.8	414,632
1975	964,30	2078,10	493,60	152,30	48,90	7,70	4,80	2,60	2803.9	302,317
1976	3153,20	3202,30	685,60	97,40	35,60	16,30	4,60	1,10	4060.3	394,145
1977	36,20	2927,20	1391,20	380,30	52,10	12,00	6,30	1,40	4787.6	392,572
1978	60,00	1650,40	1162,80	338,70	78,20	16,50	3,00	0,50	3268.1	294,151
1979	0,00	1323,30	534,70	231,00	99,00	29,60	10,00	0,80	2246.1	223,165
1980	0,00	150,20	676,60	582,10	799,60	306,60	86,00	11,40	2619.6	503,081
1981	0,00	230,40	415,20	462,20	357,90	207,20	72,60	14,10	1764.0	357,935
1982	0,00	310,50	840,40	542,40	254,10	71,50	8,10	1,10	2045.5	310,464
1983	0,00	591,10	727,30	262,90	135,90	88,40	62,50	31,80	1886.6	280,000*
1984	807,70	424,60	621,40	274,90	167,10	105,70	68,40	41,90	1680.6	300,000*
1985	0,00	145,60	800,10	360,30	109,80	126,40	48,70	2,50	1609.4	320,000**

\* : valeurs estimées

Tableau 2 : Trachurus spp. : Mortalité par pêche (divisions 34.1.3 et 34.3.1).  
(P = poids moyen)

	AGE								F PON- DERE 1-5
	0+	1	2	3	4	5	6	7+	
1972	0,000000	0,511725	0,788882	0,841723	0,767820	0,616278	0,322343	0,705246	0,705287
1973	0,000000	0,710480	0,691405	0,962460	0,953076	0,933614	0,833445	0,850099	0,850218
1974	0,082420	0,911205	1,462620	0,858620	0,660721	0,921245	0,740458	0,879356	0,879611
1975	0,057783	0,351619	0,472105	0,686220	0,617037	0,312602	0,620453	0,488036	0,487918
1976	0,139428	0,387599	0,261425	0,221046	0,483193	0,632487	0,445506	0,397193	0,397150
1977	0,002260	0,258610	0,413621	0,318220	0,245832	0,424763	0,816728	0,332598	0,332224
1978	0,005763	0,184893	0,215220	0,232136	0,136975	0,167873	0,248101	0,185781	0,185410
1979	0,000000	0,233446	0,115179	0,082385	0,135158	0,096253	0,187148	0,132838	0,132484
1980	0,000000	0,030647	0,250393	0,245816	0,651817	1,229370	0,641243	0,481579	0,481609
1981	0,000000	0,045911	0,152152	0,383773	0,330540	0,502452	2,385422	0,283060	0,282977

### 4.3. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

1982	0,000000	0,098016	0,327470	0,430687	0,546851	0,139337	0,043822	0,308936	0,308472
1983	0,000000	0,168887	0,496638	0,224000	0,253589	0,540531	0,241525	0,337494	0,336677
1984	0,186031	0,134262	0,380006	0,511330	0,341390	0,457392	0,010983	0,357427	0,357427
1985	0,040390	0,063021	0,577001	0,577000	0,577000	0,577000	0,577000	0,530840	0,530840
M	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	
pig	19,00	65,00	99,00	175,00	274,00	401,00	483,00	563,00	

Tableau 3 : Trachurus spp. : Abondance en millions d'individus par classe d'âge (divisions 34.1.3 et 34.3.1) et biomasse totale en milliers de tonnes.

	AGE								BIO- MASS 0-7+
	0+	1	2	3	4	5	6	7+	
1972	9836,60	4635,10	1800,00	871,700	432,000	286,600	236,600	45,1000	1191,90
1973	11053,1	5966,20	1685,30	496,000	227,900	121,600	93,9000	104,000	1066,50
1974	15718,7	674,100	1779,00	512,000	114,900	53,3000	29,0000	24,7000	1080,90
1975	21772,0	8779,60	1634,80	379,000	131,600	36,0000	12,9000	8,40000	1273,90
1976	30610,6	12463,9	3746,50	618,400	115,700	43,1000	16,0000	4,20000	1929,90
1977	20373,3	16140,9	5130,70	1749,60	300,700	43,3000	13,9000	6,20000	2360,90
1978	13264,6	12329,1	7563,30	2057,80	771,900	142,600	17,2000	3,70000	2441,40
1979	10411,7	7999,20	6215,70	3699,10	989,500	408,200	73,9000	8,10000	2455,60
1980	10737,7	6315,00	3841,60	3359,80	2066,20	524,300	224,900	37,2000	2488,70
1981	6939,10	6512,70	3714,70	1813,90	1593,70	653,000	93,0000	71,8000	2024,30
1982	7913,90	4208,80	3772,90	1935,00	749,600	694,500	239,700	5,20000	1738,60
1983	7041,20	4800,00	2314,40	1649,30	763,000	263,100	366,500	139,100	1533,40
1984	6000,00	4270,70	2458,90	854,500	799,600	359,100	93,0000	174,600	1290,90
1985	7300,00	3021,40	2264,90	1019,90	310,800	357,800	137,900	7,50000	1037,30

## CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DISCRETS : APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE

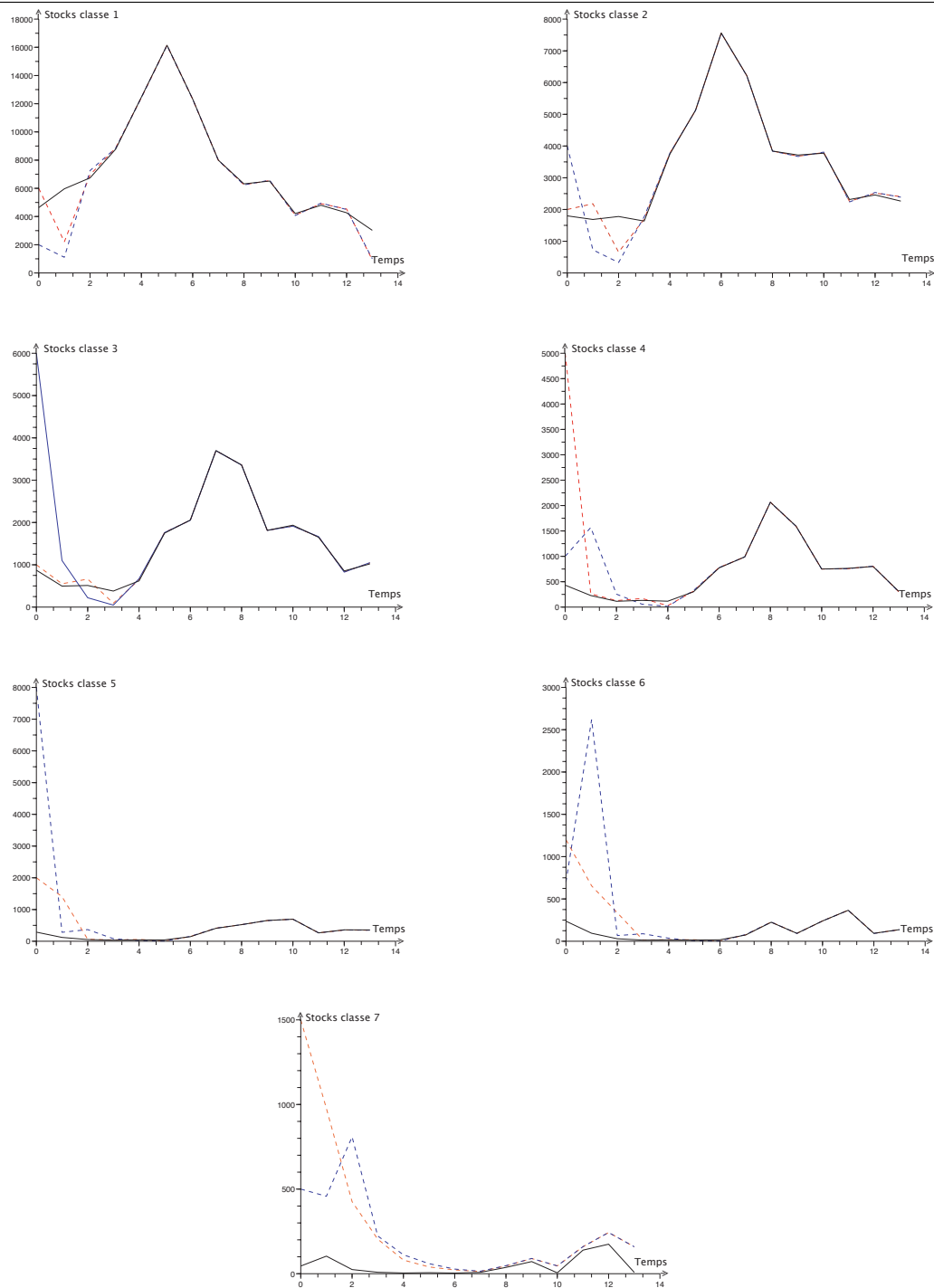


FIGURE 4.3 – Estimation des stocks de la FAO (en trait plein) et de l’observateur (en pointillé) par classe d’âge du *Trachurus* spp dans les divisions 34.1.3. and 34.3.1.



Nous avons pris des conditions initiales différentes de l'observateur et ce dernier converge vers les estimations de la FAO quel que soit la valeur de la condition initiale. Nous avons ainsi estimé les stocks sur la base uniquement des captures.

## 4.4 Observateur pour un modèle de pêche discret structuré en classe de stade

Nous venons de construire un observateur pour l'estimation des stocks de poissons suivant un modèle de pêche à structure d'âge. En pratique, il peut paraître délicat de structurer une population de poissons suivant leurs âges ; d'autres facteurs proportionnels à l'âge tels que le poids ou la longueur peuvent parfois être plus faciles à déterminer pour une population de poissons. Un modèle de pêche basé sur une structuration en stade (3.3) peut alors paraître plus réaliste qu'un modèle basé sur une structuration en âge. Nous voulons maintenant construire un observateur pour l'estimation des états d'une population de poissons dont la dynamique de l'évolution du stock est régie par le modèle à structure de stade suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = (1-p_1)s_1(k)x_1(k) + s_0 f\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right) \\ x_2(k+1) = p_1 s_1(k)x_1(k) + (1-p_2)s_2(k)x_2(k) \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = p_{n-2}s_{n-2}(k)x_{n-2}(k) + (1-p_{n-1})s_{n-1}(k)x_{n-1}(k) \\ x_n(k+1) = p_{n-1}s_{n-1}(k)x_{n-1}(k) + s_n(k)x_n(k) \end{array} \right. \quad (4.15)$$

avec

$$s_i(k) = e^{-m_i - q_i \tau E(k)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Comme nous le mentionnions dans la description du modèle au chapitre 2, la fonction de recrutement n'est pas bien connue dans le modèle (4.15). Toutes les fonctions de recrutement proposées jusqu'ici ne sont valides que suivant des hypothèses très restreintes. Par exemple Beverton et Holt [8] justifient le choix de leur fonction de recrutement en se fondant sur des hypothèses de compétition sur la nourriture tandis que Ricker [73] justifie sa fonction de recrutement en se fondant sur des hypothèses de prédation des juvéniles. Il va de soi donc que cette fonction de recrutement n'est pas bien connue et peut à la limite être considérée comme une entrée inconnue du

système (4.15). On réécrit le système (4.15) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = A(k) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(x(k)) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Où

$$A(k) = \begin{pmatrix} (1-p_1)s_1(k) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1s_1(k) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & p_2s_2(k) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (1-p_{n-1})s_{n-1}(k) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_{n-1}s_{n-1}(k) & s_n(k) \end{pmatrix},$$

$r(x(k)) = s_0 f\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right)$  est une entrée inconnue

Nous considérerons la sortie du système comme étant les captures à la fin de l'intervalle de temps  $[k, k+1[$  données par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \tau E(k)}{q_i \tau E(k) + m_i} (1 - e^{-m_i - q_i \tau E(k)}) x_i(k)$$

posons :

$$C_i(k) = \frac{q_i \tau E(k)}{q_i \tau E(k) + m_i} (1 - e^{-m_i - q_i \tau E(k)})$$

et

$$y(k) = \sum_{i=1}^n C_i(k) x_i(k) \quad (4.17)$$

Nous avons donc à construire un observateur pour un système discret linéaire à temps variable et à entrée inconnue  $r(x)$  de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) & = A(k)x(k) + Dr(x) \\ y(k) & = C(k)x(k) \end{cases} \quad (4.18)$$

4.4. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE DE STADE

où  $A(k)$  est définie ci avant,  $D = (1, 0, \dots, 0)^t$  et  $C(k) = (C_1(k), \dots, C_n(k))$ . Quelques techniques de synthèse d'observateur des systèmes linéaires à entrée inconnue ont été proposés dans le passé [9, 36, 81, 74, 43, 85, 18, 68]. La plupart des résultats de synthèse d'observateurs considèrent des systèmes linéaires à temps invariant. Nous proposerons un observateur pour un système discret linéaire à entrée inconnue en adaptant l'observateur proposé dans [35] concernant les systèmes linéaires continus à temps invariant. En effet, M. Hou and P. C. Müller considèrent les systèmes continus à entrées inconnues de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Ed \\ y(k) &= Cx + Fd \end{cases} \quad (4.19)$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^q$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , les matrices  $A$ ,  $E$ ,  $C$  et  $F$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Soit  $F^-$  telle que  $FF^-F = F$ , on pose :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (I_n - \bar{B}\bar{C})(A - EF^-C) \\ \bar{C} &= (I_m - FF^-)C, \\ \text{et } \bar{B} &= E(I_q - F^-F[\bar{C}E(I_q - F^-F)]^- \end{aligned}$$

On suppose que  $(I_n - \bar{B}\bar{C})E(I_q - FF^-) = 0$  et que la paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  est détectable, l'observateur candidat est alors :

$$\begin{cases} \dot{z} &= (\bar{A} - L\bar{C})z + [(I_n - \bar{B}\bar{C})EF^- + L(I_m - FF^-) + (\bar{A} - L\bar{C})\bar{B}(I_m - FF^-)]y \\ \hat{x} &= z + \bar{B}(I_m - FF^-)y \end{cases} \quad (4.20)$$

On pose l'erreur  $e = x - \hat{x}$  et on établit que  $\dot{e} = (\bar{A} - L\bar{C})e$ . La paire  $(\bar{A}, \bar{C})$  est détectable alors on peut choisir la matrice de gain  $L$  tel que  $e$  converge vers zéro.

#### 4.4.1 Observateur de systèmes linéaires discrets à entrées inconnues

Considérons le système :

$$\begin{cases} x(k+1) &= \mathcal{A}(k)x(k) + \mathcal{E}d \\ y(k) &= \mathcal{C}(k)x(k) + \mathcal{F}d \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $\mathcal{A}(k)$  et  $\mathcal{C}(k)$  sont respectivement des matrices  $n \times n$  et  $m \times n$  qui dépendent du temps  $k$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont respectivement des matrices  $n \times q$  et  $m \times q$  constantes et  $d$  est une matrice  $q \times 1$  des entrées inconnues.

On a :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \mathcal{C}(k+1)x(k+1) + \mathcal{F}d \\ &= \mathcal{C}(k+1)(\mathcal{A}(k)x(k) + \mathcal{E}d) + \mathcal{F}d \\ &= \mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k)x(k) + (\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})d \end{aligned}$$

Nous supposons que  $\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F}$  est inversible  $\forall k \geq 0$ , Nous avons alors :

$$d = (\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}(y(k+1) - \mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k)x(k))$$

Et nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathcal{A}(k)x(k) + \mathcal{E}d \\ &= \mathcal{A}(k)x(k) + \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}(y(k+1) - \mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k)x(k)) \\ &= \mathcal{A}(k)x(k) + \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}y(k+1) \\ &\quad - \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}\mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k)x(k) \\ &= (\mathcal{A}(k) - \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}\mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k))x(k) \\ &\quad + \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}y(k+1) \\ &= (I_{n \times n} - \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}\mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k))\mathcal{A}(k)x(k) \\ &\quad + \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}y(k+1) \end{aligned}$$

On définit :

$$\bar{\mathcal{A}}(k) = (I_{n \times n} - \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}\mathcal{C}(k+1)\mathcal{A}(k))\mathcal{A}(k)$$

et

$$\bar{\mathcal{B}}(k) = \mathcal{E}(\mathcal{C}(k+1)\mathcal{E} + \mathcal{F})^{-1}$$

D'où nous avons :

$$x(k+1) = \bar{\mathcal{A}}(k)x(k) + \bar{\mathcal{B}}(k)y(k+1)$$

4.4. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE DE STADE

---

On pose l'observateur comme étant :

$$\begin{cases} z(k+1) &= (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))z(k) + (L(k) + (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))\bar{\mathcal{B}}(k-1))y(k) \\ \hat{x}(k) &= z(k) + \bar{\mathcal{B}}(k-1)y(k) \end{cases} \quad (4.22)$$

Soit  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= \bar{\mathcal{A}}(k)x(k) + \bar{\mathcal{B}}(k)y(k+1) - z(k+1) - \bar{\mathcal{B}}(k)y(k+1) \\ &= \bar{\mathcal{A}}(k)x(k) - (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))z(k) \\ &\quad - (L(k) + (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))\bar{\mathcal{B}}(k-1))y(k) \\ &= (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))x(k) - (\bar{\mathcal{A}}(k) \\ &\quad - L(k)\mathcal{C}(k))z(k) - (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))\bar{\mathcal{B}}(k-1)y(k) \\ &= (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))(x(k) - \hat{x}(k)) \\ e(k+1) &= (\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k))e(k) \end{aligned}$$

Si la paire  $(\bar{\mathcal{A}}(k), \mathcal{C}(k))$  est uniformément observable pour tout  $k \geq 0$ , alors on peut choisir la matrice de gain  $L(k)$  de sorte que la matrice de l'erreur  $\bar{\mathcal{A}}(k) - L(k)\mathcal{C}(k)$  soit stable pour tout  $k$  positif.

**Remarque 4.4.1** *Si nous supposons que les matrices  $\mathcal{A}(k)$  et  $\mathcal{C}(k)$  sont constantes i.e  $\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}$ , nous obtenons le système à temps invariant :*

$$\begin{cases} x(k+1) &= \mathcal{A}x(k) + \mathcal{E}d \\ y(k) &= \mathcal{C}x(k) + \mathcal{F}d \end{cases} \quad (4.23)$$

L'observateur s'écrit dans ce cas :

$$\begin{cases} z(k+1) &= (\bar{\mathcal{A}} - L\mathcal{C})z(k) + (L + (\bar{\mathcal{A}} - L\mathcal{C})\bar{\mathcal{B}})y(k) \\ \hat{x}(k) &= z(k) + \bar{\mathcal{B}}y(k) \end{cases} \quad (4.24)$$

La dynamique de l'erreur est  $e(k+1) = (\bar{\mathcal{A}} - L\mathcal{C})e(k)$  et il suffit que la paire  $(\bar{\mathcal{A}}, \mathcal{C})$  soit détectable pour choisir le gain  $L$  telle que la matrice  $\bar{\mathcal{A}} - L\mathcal{C}$  soit stable.

### 4.4.2 Observateur du modèle de pêche à structure de stade lorsque l'effort de pêche est constant

Nous considérons le modèle à structure de stade (4.18) avec comme effort de pêche constant  $E(k) = E_0$ . Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_0x(k) + Dr(x) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \quad (4.25)$$

où  $A_0$  et  $C$  sont respectivement les matrices  $A(k)$  et  $C(k)$  dans lesquelles on a :  $s_i(k) = s_i = e^{-m_i - q_i E_0 \tau}$ . Le modèle (4.25) a la même forme que le système (4.23), on pose alors l'observateur candidat :

$$\begin{cases} z(k+1) &= (\bar{A} - LC)z(k) + (L + (\bar{A} - LC)\bar{B})y(k) \\ \hat{x}(k) &= z(k) + \bar{B}y(k) \end{cases} \quad (4.26)$$

où

$$\bar{A} = (I_{n \times n} - D(CD)^{-1}C)A \text{ et } \bar{B} = D(CD)^{-1}$$

On a l'erreur qui vérifie :  $e(k+1) = (\bar{A} - LC)e(k)$ . On a :

$$C\bar{A} = C(I_{n \times n} - D(CD)^{-1}C)A = 0$$

La paire  $(C, \bar{A})$  n'est donc pas observable, le placement de pôle que nous avons introduit ne nous permet donc pas de calculer le gain  $L$  pour que la matrice  $\bar{A} - LC$  soit stable. Toutefois en posant  $L = 0$ , il suffit que la norme de  $\bar{A}$  soit inférieure à 1 pour que notre observateur converge. C'est cette dernière stratégie que nous allons adopter pour proposer un observateur du modèle de pêche à structure de stade avec un effort de pêche variable.

### 4.4.3 Observateur du modèle de pêche à structure de stade lorsque l'effort de pêche est variable

Nous envisageons dans cette partie de construire un observateur du modèle de pêche à structure de stade avec un effort de pêche variable suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= A(k)x(k) + Dr(x) \\ y(k) &= C(k)x(k) \end{cases} \quad (4.27)$$

4.4. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE DE STADE

---

Considérons les notations suivantes :

$$E_m \leq E(k) \leq E_{max} \quad \forall k \geq 0,$$

$$q_{min} \leq q_i \leq q_{max} \quad \text{pour } i = 1 \dots n,$$

$$m \leq m_i \leq M \quad \text{pour } i = 1 \dots n,$$

$$p_{min} \leq p_i \leq p_{max} \quad \text{pour } i = 1 \dots n,$$

et supposons que  $q_1 \neq 0$ .

Le modèle (4.27) peut s'écrire sous la forme du système (4.21) avec :

$$\mathcal{A}(k) = A(k), \quad \mathcal{E} = D, \quad \mathcal{C}(k) = C(k) \quad \text{and} \quad \mathcal{F} = 0$$

Puisque nous avons supposé que  $q_1$  est différent de zéro, on a :

$C(k+1)\mathcal{E} + F = C(k+1)D$  est inversible pour tout  $k \geq 0$  puisque

$C(k+1)D = C_1(k+1) = \frac{q_1 \tau E(k+1)}{q_1 \tau E(k+1) + M_1} (1 - e^{-M_1 - q_1 \tau E(k+1)})$  est toujours non nulle.

On pose

$$\bar{A}(k) = \left( I_{n \times n} - \frac{1}{C_1(k+1)} D C(k+1) \right) A(k)$$

et

$$\bar{B}(k) = \frac{1}{C_1(k+1)} D$$

L'observateur candidat du système (4.27) est alors :

$$\begin{cases} z(k+1) &= \bar{A}(k) z(k) + \bar{A}(k) \bar{B}(k-1) y(k) \\ \hat{x}(k) &= z(k) + \bar{B}(k-1) y(k) \end{cases} \quad (4.28)$$

Nous pouvons réécrire l'observateur candidat (4.28) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 z_1(k+1) = -\frac{C_2(k+1)p_1s_1(k)}{C_1(k+1)}z_1(k) \\
 \quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left( p_i s_i(k) \frac{C_{i+1}(k+1)}{C_1(k+1)} + (1-p_i)s_i(k) \frac{C_i(k+1)}{C_1(k+1)} \right) z_i(k) \\
 \\
 z_2(k+1) = p_1s_1(k)z_1(k) + (1-p_2)s_2z_2(k) + \frac{p_1s_1}{C_1(k)}y(k), \\
 \vdots \\
 z_{n-1}(k+1) = p_{n-2}s_{n-2}(k)z_{n-2}(k) + (1-p_{n-1})s_{n-1}(k)z_{n-1}(k), \\
 z_n(k+1) = p_{n-1}s_{n-1}(k)z_{n-1}(k) + s_n(k)z_n(k), \\
 \\
 \hat{x}_1(k) = z_1(k) + \frac{1}{C_1(k)}y(k), \\
 \hat{x}_i(k) = z_i(k) \text{ for } i = 2, \dots, n.
 \end{array} \right. \tag{4.29}$$

Nous avons le résultat suivant :

**Proposition 4.4.1** *Supposons que  $0 < q_1 \leq q_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ .*

*Il existe  $\eta > 0$  tel que si  $E_m > \eta$ , alors le système (4.28) (ou le système (4.29)) est un observateur global exponentiel du système (4.27).*

**Preuve 4.4.1** Soit  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  l'erreur d'estimation, sa dynamique est donnée par :  $e(k+1) = \bar{A}(k)e(k)$

Considérons la norme matricielle :  $\|\bar{A}(k)\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |\bar{a}_{ij}(k)|$ . Pour prouver que le système (4.28) est un observateur exponentiel du système (4.27), il suffit de prouver que  $\|\bar{A}(k)\|_1 \leq \delta < 1$ .

Nous avons  $\|\bar{A}(k)\|_1 \leq \|I_{n \times n} - \frac{1}{C_1(k+1)}DC(k+1)\|_1 \|A(k)\|_1$ . On vérifie que :

$$\|I_{n \times n} - \frac{1}{C_1(k+1)}DC(k+1)\|_1 = \max_i \left( \frac{C_i(k+1)}{C_1(k+1)} + 1 \right), \text{ et } \|A(k)\|_1 = \max_i s_i(k).$$

D'où

$$\|\bar{A}(k)\|_1 \leq \max_i \left( \frac{C_i(k+1)}{C_1(k+1)} + 1 \right) \max_i s_i(k).$$



#### 4.4. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE DE STADE

Pour  $i = 1 \dots n$ , on pose :  $\gamma_i(k) = \frac{C_i(k+1)}{C_1(k+1)}$ . Nous avons :

$$\gamma_i(k) = \frac{q_i E(k+1) \tau (1 - e^{-m_i - q_i E(k+1) \tau})}{m_i + q_i \tau E(k+1)} \frac{M_1 + q_1 \tau E(k+1)}{q_1 E(k+1) \tau (1 - e^{-M_1 - q_1 E(k+1) \tau})}$$

Nous avons établi dans la preuve de la proposition (4.3.1) que

$$\gamma_i(k) \leq \frac{M q_{max}}{q_1} \frac{1}{m + q_{min} \tau E_m} + \frac{1}{1 - e^{-m - q_{min} \tau E_m}}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

D'autre part  $s_i(k) \leq e^{-m - q_{min} \tau E_m}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

D'où nous avons :

$$\|\bar{A}(k)\|_1 \leq \left( \frac{M q_{max}}{q_1} \frac{1}{m + q_{min} \tau E_m} + \frac{1}{1 - e^{-m - q_{min} \tau E_m}} + 1 \right) e^{-m - q_{min} \tau E_m}$$

On pose :

$$\delta(E_m) = \left( \frac{M q_{max}}{q_1} \frac{1}{m + q_{min} \tau E_m} + \frac{1}{1 - e^{-m - q_{min} \tau E_m}} + 1 \right) e^{-m - q_{min} \tau E_m}$$

Nous allons montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que si  $E_m > \eta$  alors  $\delta(E_m) < 1$ .

Soit  $X = e^{-m - q_{min} \tau E_m}$  et considérons le polynôme :

$$P(X) = -\frac{M q_{max} X}{q_1 \text{Log}(X)} + \frac{X}{1 - X} + X - 1.$$

On remarque que  $P(X) = \delta(E_m) - 1$ . On a :  $\lim_{X \rightarrow 0} P(X) = -1$  et  $\lim_{X \rightarrow 1} P(X) = +\infty$ . Donc il existe  $x_1 \in ]0, 1[$  tel que  $P(x_1) = 0$ . Soit  $x^* = \inf\{x \in ]0, 1[ / P(x) = 0\}$  alors on a  $P(X) < 0$  pour tout  $X$  satisfaisant  $0 < X < x^*$ .  $0 < X < x^*$  est équivalent à  $E_m > \frac{-\text{Log}(x^*) - m}{q_{min} \tau}$  puisque  $X = e^{-m - q_{min} \tau E_m}$ . Il suffit de choisir

$\eta = \frac{-\text{Log}(x^*) - m}{q_{min} \tau}$  et ainsi s'achève la preuve de la Proposition 4.4.1. ■

#### 4.4.4 Simulations numériques

Nous donnons une illustration numérique de l'observateur en dimension 3. Nous considérons la fonction de recrutement de Beverton et Holt et un effort de pêche variable. On se donne les paramètres :

Paramètres de Beverton et Holt	$\alpha = 1, \beta = 0.0015,$
Coefficients de fécondité	$b = [2 \ 5 \ 7],$
Coefficients de capturabilité	$q = [0.24 \ 0.36 \ 0.42],$
Taux de mortalité naturelle	$M = [0.2 \ 0.2 \ 0.2],$
Taux de passage d'une classe à une autre	$p = [0.2 \ 0.3 \ 1],$
Temps de pêche	$\tau = 1/2,$
Effort de pêche	$E(k) = 3 + \sin(k)$

*CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE  
SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE*

---

Les courbes des trajectoires de l'observateur et du modèle de pêche sont représentés à la figure 4.4.

#### 4.4. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE DE STADE

---

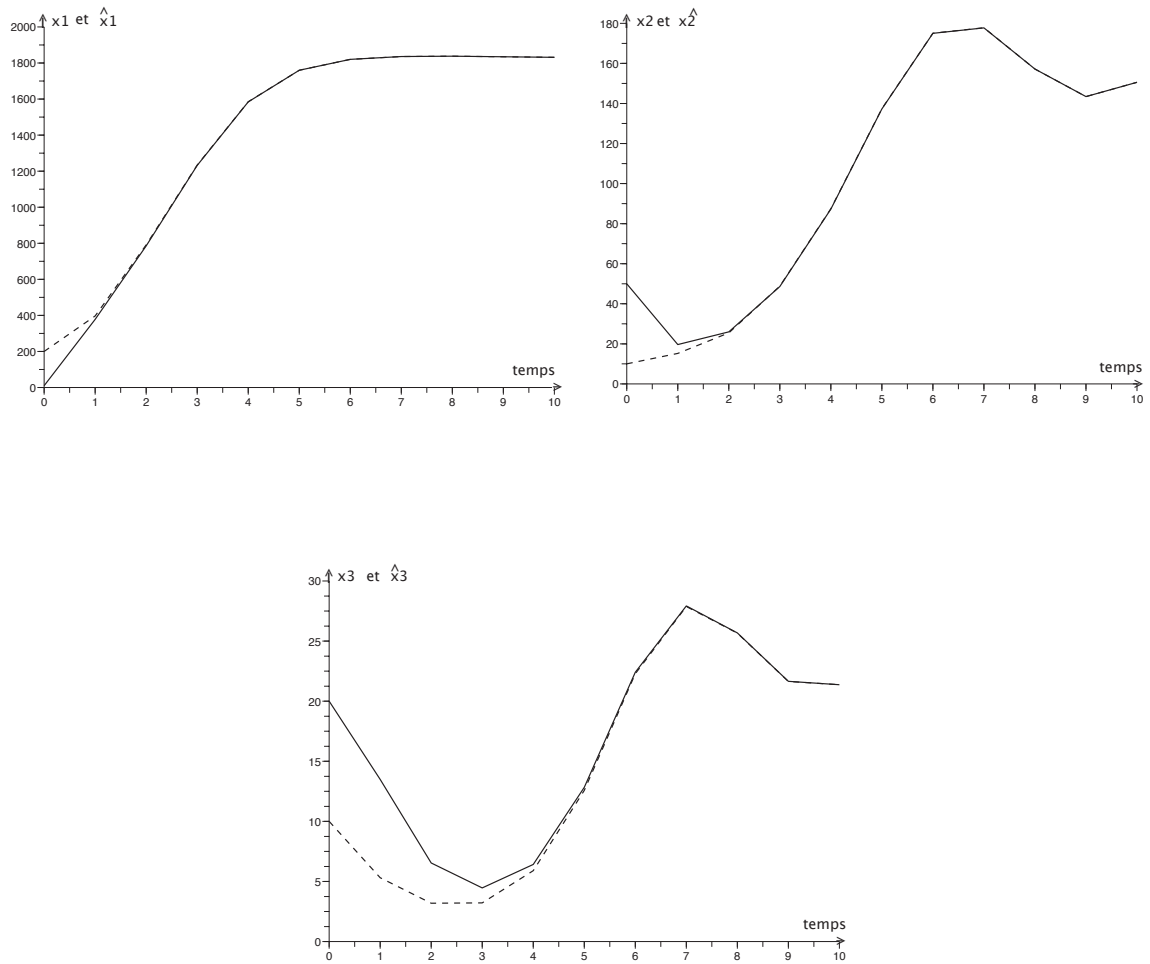


FIGURE 4.4 – Exemple de trajectoires des états de l’observateur (en pointillé) et du modèle de pêche (en trait plein) pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.

#### 4.4.5 Application

Nous essayons maintenant d'illustrer l'observateur du modèle de pêche à structure de stade avec des données réelles. Une estimation de la biomasse des matures et des immatures du Arctid cod dans le Nord Est est donnée dans le rapport de "ICES Advisory Committee on fisheries Management" [3]. Nous faisons abstraction des techniques utilisées pour estimer la biomasse, notre but étant seulement d'utiliser leurs captures et leurs paramètres pour estimer à notre tour la biomasse avec l'observateur que nous avons eu à construire. Dans [3], les captures en tonne à chaque pas de temps et les paramètres utilisés dans l'observateur sont tous donnés à l'exception du taux de passage  $p$  de la classe des immatures à la classe des matures. Les estimations de la biomasse, les captures et les paramètres dans cette étude sont récapitulés dans le tableau 4.4.5 ci-après. Dans [87], A. Wikan et A. Eide utilisent les données du tableau 4 pour donner une estimation du taux de passage  $p$  de la classe des immatures à la classe des matures. En supposant que le taux de mortalité naturelle est égal à 0.2 pour toutes les classes, ils obtiennent à travers leurs estimations et leur modèle que le paramètre  $p$  est égal à 0.0444.

Pour chacune des classes, nous représentons sur une même figure les estimations de la biomasse faites dans le rapport de "ICES Advisory Committee on fisheries Management" (Anon, 2001) et les estimations de l'observateur du modèle de pêche à structure de stade.

4.4. OBSERVATEUR POUR UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET  
STRUCTURÉ EN CLASSE DE STADE

Tableau 4 :Biomasse et captures en million de tonnes du Arctic cod dans le Nord Est entre 1946 et 2000. Les données sont extraites de "ICES Advisory Committee on Fisheries Management" (Anon, 2001), tableau 3.7 (captures), tableau 3.19 (biomasse) et tableau 3.23 (maturité).

Biomasse (million de tonnes)			Captures (million de tonnes)		Taux de mortalité par pêche	
Année (t)	Immature ( $x_1$ )	Mature ( $x_2$ )	Immature ( $C_1$ )	Mature ( $C_2$ )	Immature ( $f_1$ )	Mature ( $f_2$ )
1946	3.3866	1.1206	0.4222	0.2633	0.1247	0.2350
1947	2.7283	1.1740	0.4959	0.4688	0.1818	0.3993
1948	2.8562	1.0264	0.5176	0.3510	0.1812	0.3420
1949	2.5528	0.7360	0.5503	0.2563	0.2156	0.3482
1950	2.5292	0.6206	0.4284	0.2444	0.1694	0.3938
1951	3.0474	0.5741	0.5263	0.1940	0.1727	0.3379
1952	3.4114	0.5271	0.6951	0.2428	0.2038	0.4606
1953	3.8533	0.4010	0.5209	0.1425	0.1352	0.3554
1954	3.9139	0.4350	0.7196	0.1691	0.1839	0.3887
1955	3.2905	0.3512	0.9268	0.1526	0.2817	0.4345
1956	3.1074	0.3034	1.1425	0.1421	0.3677	0.4684
1957	2.6487	0.2103	0.7023	0.0900	0.2651	0.4280
1958	2.1979	0.1978	0.6019	0.0830	0.2739	0.4196
1959	2.2912	0.4382	0.6197	0.1806	0.2705	0.4121
1960	2.0169	0.3890	0.4343	0.1629	0.2153	0.4188
1961	2.1368	0.4104	0.5113	0.2026	0.2393	0.4937
1962	1.9697	0.3167	0.5785	0.1574	0.2937	0.4970
1963	1.7560	0.2118	0.6335	0.1257	0.3608	0.5935
1964	1.3421	0.1892	0.3270	0.0989	0.2436	0.5227
1965	1.6769	0.1036	0.2991	0.0458	0.1784	0.4421
1966	2.7595	0.1224	0.3425	0.0499	0.1241	0.4077
1967	3.2925	0.1318	0.4620	0.0628	0.1403	0.4765
1968	3.2669	0.2306	0.9045	0.0914	0.2769	0.3964
1969	2.7351	0.1546	1.0495	0.0886	0.3837	0.5731
1970	1.9394	0.2281	0.7180	0.1175	0.3702	0.5151

*CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE  
SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE*

1971	1.4845	0.3167	0.4008	0.1546	0.2700	0.4882
1972	1.7130	0.3523	0.2886	0.1895	0.1685	0.5379
1973	2.8488	0.3380	0.4363	0.1733	0.1532	0.5127
1974	2.3150	0.1669	0.7231	0.0839	0.3124	0.5027
1975	2.1793	0.1440	0.6522	0.0678	0.2993	0.4708
1976	2.0396	0.1738	0.6082	0.0755	0.2982	0.4344
1977	1.7767	0.3473	0.6734	0.1740	0.3790	0.5010
1978	1.6184	0.2460	0.4947	0.1469	0.3057	0.5972
1979	1.0343	0.1778	0.2649	0.0980	0.2561	0.5512
1980	0.8233	0.1102	0.2400	0.0590	0.2915	0.5354
1981	0.8910	0.1699	0.2437	0.0942	0.2735	0.5544
1982	0.4938	0.3315	0.1283	0.1622	0.2598	0.4893
1983	0.4865	0.3328	0.1323	0.1916	0.2719	0.5757
1984	0.7402	0.2556	0.1484	0.1444	0.2005	0.5649
1985	0.9909	0.1966	0.2047	0.0977	0.2066	0.4969
1986	1.5661	0.1731	0.3319	0.0914	0.2119	0.5280
1987	1.1331	0.1203	0.4392	0.0724	0.3876	0.6018
1988	0.8044	0.2053	0.3171	0.1178	0.3942	0.5738
1989	0.7770	0.1970	0.2461	0.0904	0.3167	0.4589
1990	0.7320	0.3446	0.1112	0.0985	0.1519	0.2858
1991	1.0702	0.6847	0.1425	0.1927	0.1332	0.2814
1992	1.3533	0.8847	0.2037	0.2960	0.1505	0.3346
1993	2.0052	0.7461	0.2974	0.2769	0.1483	0.3711
1994	1.9007	0.6137	0.4394	0.3248	0.2312	0.5292
1995	1.6134	0.5093	0.4738	0.2640	0.2937	0.5184
1996	1.3109	0.5804	0.4360	0.2856	0.3326	0.4921
1997	1.2144	0.5763	0.4373	0.3248	0.3431	0.5636
1998	1.2146	0.3961	0.3558	0.2326	0.2929	0.5872
1999	1.0585	0.2645	0.3388	0.1477	0.3201	0.5584
2000	1.0854	0.2264	0.2836	0.1285	0.2613	0.5676

Les courbes de des estimations des états sont données dans la figures 4.5.

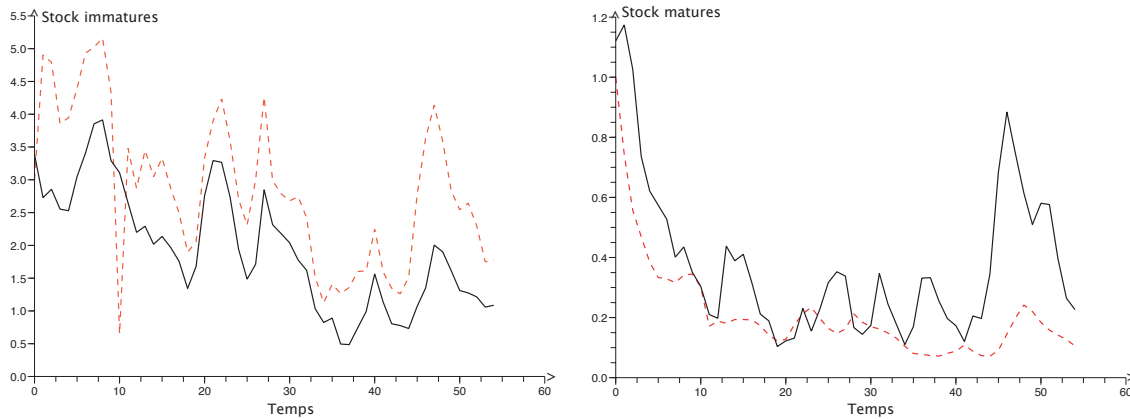


FIGURE 4.5 – estimation de la biomasse des matures et des immatures du Arctic cod dans le Nord Est par "ICES" (en trait plein) et par l'observateur (en pointillé).

Nous remarquons qu'à partir d'un certain temps  $k$ , les états de l'observateur bien qu'ils ne convergent pas vers les états des estimations de "ICES" présentent la même allure que ceux ci. Cette différence pourrai s'expliquer d'une part par le fait que les données sur l'abondance des stocks et les captures sont exprimées en poids et puisque l'observateur utilise les captures en nombre, nous avons fixé de façon arbitraire le poids moyen individuel des poissons immatures et matures. D'autre part le taux de passage des immatures vers les matures est estimés en utilisant un autre modèle qui n'est pas celui que nous considérons pour la synthèse de l'observateur.

## 4.5 Conclusion

Nous venons de construire des observateurs pour deux modèles de pêche discrets, l'un structuré en classe d'âge et l'autre structuré en classe de stade. Les observateurs sont simples et faciles à implémenter avec des données, ils ont tous les deux la particularité de ne pas dépendre de la fonction de recrutement qui est très difficile à modéliser. Ainsi, en ajoutant du bruit sur la première classe d'âge du modèle correspondant au recrutement (ce qui est plus proche de la réalité à cause des nombreux facteurs qui inter-agissent sur le recrutement), on ne change en rien la synthèse des observateurs. L'intérêt de ces observateurs réside dans le fait qu'avec la donnée des captures, il est possible de faire une estimation du stock disponible en mer pour une population de poissons donnée structurée en âge ou en stade. Notons par contre que les observateurs ne permettent pas de faire des prédictions sur les stocks à partir des captures disponibles car la sortie  $y(k)$  est utilisée pour estimer l'état  $x(k)$  du système.

*CHAPITRE 4. SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR UNE CLASSE DE  
SYSTÈMES DISCRETS :APPLICATION À DES MODÈLES DE PÊCHE*

---

Néanmoins lorsque la fonction de recrutement dans la première classe d'âge ou de stade est assez connue, l'observateur peut être un outil de prédiction de l'évolution de la dynamique du stock de poissons. En effet connaissant bien la fonction de recrutement, il suffit de connaître une condition initiale du système modélisant la dynamique de la population de poissons pour ensuite intégrer le modèle au cours du temps. Il est difficile voir même irréaliste de vouloir compter le nombre de poissons en mer à un instant et dans une zone donnée. On utilise alors l'observateur pour avoir une bonne estimation de la taille du stock de poisson à un instant  $k_0$  donné. C'est en ce sens que ces observateurs peuvent être utilisés comme un outil d'aide à la décision pour une bonne politique d'exploitation des ressources halieutiques.



# Chapitre 5

## Observateur numérique intervalle : Application à un modèle de pêche discret structuré en classe d'âge

### 5.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de construire un observateur intervalle du modèle de pêche à structure d'âge [27]. En effet, l'observateur que nous avons construit au chapitre précédent bien que présentant des propriétés très intéressantes et une vitesse de convergence assez rapide, a la particularité d'utiliser la donnée des captures à l'instant  $k$  pour donner une estimation du stock au même instant  $k$ . En théorie du contrôle, la plupart des techniques de synthèse d'observateur utilisent les sorties mesurables qui précèdent l'instant  $k$  pour estimer l'état du système à cette instant. Le modèle de pêche dont on se propose d'estimer les états présente une forte non linéarité au niveau de sa première équation, ce qui rend difficile d'adapter les différentes méthodes de synthèse d'observateur qui existent dans la littérature. Une autre approche pour estimer les états d'un système consiste à générer à partir d'un instant  $k \geq k_0$ , un intervalle  $X_k$  susceptible de contenir l'état du système à l'instant  $k$  : on parle alors de synthèse d'observateur intervalle [15, 28, 41, 72, 29, 33, 34]. Dans un souci de pouvoir faire des prédictions sur l'état du stock d'une population de poissons, nous appliquons au modèle de pêche à structure d'âge un algorithme de synthèse d'observateur numérique intervalle. L'algorithme de synthèse de l'observateur intervalle numérique est essentiellement basé sur le critère de minimisation de l'erreur quadratique entre la sortie mesurable réelle et la sortie estimée. Considérant toujours le modèle de pêche à structure d'âge décrit par les équations 3.2, 3.3 et 3.6 définies au chapitre 3, nous faisons l'hypothèse supplémentaire selon laquelle le nombre de poissons de la dernière classe d'âge qui survit après le temps

de passage d'une classe à une autre est négligeable. Le modèle est alors donné par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = g(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \exp(-M_1 - \tau q_1 E(k)) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = x_{n-1}(k) \exp(-M_{n-1} - \tau q_{n-1} E(k)) \end{cases} \quad (5.1)$$

Où les paramètres sont les mêmes que ceux du modèle à structure d'âge défini au chapitre 3,  $g$  représente ici la fonction de recrutement. Nous considérons toujours la sortie mesurable comme étant les captures totales en nombre à l'instant  $k$ . Les captures sont données par :

$$y(k) = \sum_{i=1}^n C_i(k) x_i(k) \quad (5.2)$$

Où :

$$C_i(k) = \frac{q_i E(k) \tau}{q_i E(k) \tau + m_i} \left( 1 - \exp(-m_i - q_i E(k) \tau) \right)$$

**Remarque 5.1.1** *L'hypothèse selon laquelle dans le modèle 5.1 le nombre de poissons de la dernière classe qui survit après le temps de passage d'une classe à une autre est négligeable peut être justifiée par le fait qu'en pratique, on a surtout tendance à exercer une intensité de pêche plus importante sur les poissons matures. Nous faisons cette restriction sur notre modèle pour des raisons purement techniques liées à la synthèse de l'observateur numérique.*

Pour simplifier les notations, nous noterons dans la suite les équations (5.1) et (5.2) respectivement par :

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (5.3)$$

$$y(k) = h(x(k)) \quad (5.4)$$

## 5.2 Algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle

### 5.2.1 Ensemble invariant des états du modèle de pêche

L'une des étapes fondamentales de l'algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle est la minimisation dans un ensemble invariant de l'erreur qua-

dratique entre la sortie réelle et la sortie estimée. Avant d'aborder l'algorithme d'estimation, nous déterminons un ensemble invariant du modèle de pêche 5.1.

Soit  $\{x(k)\}_{k \geq 0}$  une trajectoire du système (5.1) correspondant à la condition initiale  $x(0) = x_0$ . Naturellement pour donner un sens biologique aux trajectoires, nous choisissons  $x_0$  dans l'orthant positif. D'après le système (5.1),  $x(k) \geq 0, \forall k \geq 0$  ( i.e toutes ces composantes sont positives).

On considère les fonctions de recrutement  $g$  qui sont bornées : c'est le cas par exemple des fonctions de recrutement de Beverton et Holt et de Ricker. On a dans ce cas :

$$\exists M \geq 0 / 0 \leq x_1(k) \leq M \forall k \geq 0.$$

En utilisant la dynamique du système (5.1) on a :

$$\forall i = 2, \dots, n$$

$$0 \leq x_i(k) \leq M e^{-M_1 - q_1 E(k-1)\tau} \times e^{-M_2 - q_2 E(k-2)\tau} \times \dots \times e^{-M_{i-1} - q_{i-1} E(k-i+1)\tau}$$

$$0 \leq x_i(k) \leq M \pi_i \text{ où } \pi_i = \prod_{l=1}^{i-1} e^{-M_l}$$

Posons  $\pi_1 = 1$  et  $\Omega = \prod_{i=1}^n [0, M \pi_i]$ ,  $\Omega$  est un ensemble invariant du système (5.1).

Nous considérerons cette ensemble invariant  $\Omega$  dans toute la suite de ce chapitre.

### 5.2.2 Algorithme de minimisation de l'erreur d'estimation

Soient  $sh$  et  $lh$  deux nombres entiers naturels désignant respectivement le début et la longueur du temps d'observation de la sortie mesurable. Nous supposons disposer des sorties  $y(sh), y(sh+1), \dots, y(sh+lh-1)$ , on définit pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  la fonction :

$$j_{sh}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=sh}^{sh+lh-1} \left( h(x(i)) - y(i) \right)^2 \quad (5.5)$$

Où  $x(sh) = x$  et  $x(i) = f(x(i-1))$  pour  $i = sh+1, \dots, sh+lh-1$

Nous rappelons ici brièvement un algorithme de minimisation de l'erreur quadratique entre les sorties des états réels et des états estimés du système (5.1). Il s'agira de minimiser la fonction  $j_{sh}$  sur l'ensemble invariant  $\Omega$  des états du système (5.1). L'algorithme en question permet de localiser tous les ouverts (de rayon  $\epsilon$  arbitrairement fixé) contenu dans l'ensemble invariant  $\Omega$  des états du système (5.1) et contenant une solution du problème :

$$\min_{x \in \Omega} j_{sh}(x) \quad (5.6)$$

Notons par  $B(\mathbb{R})$  et  $B(\mathbb{R}^n)$  respectivement l'ensemble des ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^n$

On définit les fonctions d'inclusion suivantes :

$$F : B(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B(\mathbb{R}^n)$$

$$I \longrightarrow F(I) = \{f(x)/x \in I\}$$

$$J_{sh} : B(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B(\mathbb{R})$$

$$I \longrightarrow J_{sh}(I) = \{j_{sh}(x)/x \in I\}$$

L'algorithme de minimisation de l'erreur quadratique est le suivant [28] :

- \* Soit  $\Omega$  un domaine invariant des états du système (5.1).
- \* Soit  $\epsilon$  arbitrairement fixé le diamètre maximal souhaité des ouverts contenant une solution du problème (5.6).
- \* Soit  $J^* = \min_{x \in \Omega} j_{sh}(x)$
- \* Soit  $L$  une liste vide d'ouvert

a)

On initialise  $L$  à  $\Omega$  :  $L := \Omega$

b)

On enlève le premier élément  $A$  de la liste  $L$

Soit  $A = A_1 \cup A_2$  une subdivision de  $A$  à partir de son point médian  $\beta_{sh}$

On pose :

$$UJ^* = j_{sh}(\beta_{sh})$$

$$[L_{A_1}, U_{A_1}] = J_{sh}(A_1)$$

$$[L_{A_2}, U_{A_2}] = J_{sh}(A_2)$$

c)

Si  $L_{A_1} > UJ^*$  alors  $A_1$  ne contient pas de point où le minimum  $J^*$  est atteint, on supprime  $A_1$  de la liste  $L$ .

Sinon  $A_1$  contient un point où  $J^*$  est atteint, on ajoute  $A_1$  à la fin de la liste  $L$ .

Si  $L_{A_2} > UJ^*$  alors  $A_2$  ne contient pas de point où le minimum  $J^*$  est atteint, on supprime  $A_2$  de la liste  $L$ .

Sinon  $A_2$  contient un point où  $J^*$  est atteint, on ajoute  $A_2$  à la fin de la liste  $L$ .

d)

On recommence la boucle à partir de b) tant que la liste est non vide et le diamètre du premier élément de la liste est supérieur à  $\epsilon$ .

A la fin de la boucle, soit la liste  $L$  est vide (pas de minimum de  $j_{sh}$  sur  $\Omega$ ) ou  $L$  contient tous les ouverts de diamètres inférieurs ou égaux à  $\epsilon$  et contenant un minimum global de  $j_{sh}(x)$ .

### 5.2.3 Algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle

**Définition 5.2.1** *On dira que  $(X_k)_{k \geq k_0} \subset \mathbb{R}^n$  est un observateur intervalle de (5.1) de précision  $\epsilon$  s'il existe  $k_0 \geq 0$  tel que pour tout  $k \geq k_0$  les états  $x(k)$  du système (5.1) vérifient  $x(k) \in X_k$  et le diamètre de  $X_k$  est inférieur ou égal à  $\epsilon$ .*

Nous décrivons à présent l'algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle. Nous supposons toujours qu'au temps  $k = sh$  on dispose des mesures  $y(sh), y(sh + 1), \dots, y(sh + lh - 1)$ ; nous avons l'algorithme suivant :

**A<sub>1</sub>)**

Au temps  $k = sh$ , on cherche les intervalles  $X_{sh}$  de diamètre  $\epsilon$  qui contiennent les solutions du problème (5.6) en utilisant l'algorithme de minimisation de l'erreur quadratique décrit ci-dessus.

**A<sub>2</sub>)**

On calcule les intervalles contenant les états du système (5.1) au temps  $sh + lh$  en utilisant la fonction d'inclusion de la dynamique du système (5.1) :

$$X_{sh+lh} = \underbrace{FoFo \dots oF}_{lh \text{ fois}}(X_{sh})$$

**A<sub>3</sub>)**

On pose  $sh = sh + 1$  et recommence la boucle à partir de **A<sub>1</sub>)**

Nous donnons le résultat suivant :

**Théorème 5.2.1** *Supposons que le système (5.1) à sortie mesurable (5.2) est localement observable, alors l'algorithme ci-dessous dont les différentes étapes sont décrites par **A<sub>1</sub>)**, **A<sub>2</sub>)** et **A<sub>3</sub>)** génère un observateur numérique intervalle du système (5.1). Le diamètre de l'observateur intervalle est fixé arbitrairement.*

Pour les besoins de la preuve du théorème (5.2.1), nous énonçons le lemme suivant [11] :

**Lemme 5.2.1** *Si le système (5.1) avec la sortie mesurable (5.2) est localement observable, alors le problème (5.6) admet une unique solution qui correspond à l'état du système au début du temps d'observation  $sh$ .*

**Preuve 5.2.1** (Lemme (5.2.1))  $j_{sh}$  est continue sur  $\Omega$  qui est compact, alors  $j_{sh}$  atteint son minimum sur  $\Omega$ .

On désigne par  $x(x_0, k_i, k_j)$  la solution du système (5.1) à l'instant  $k_j$  ayant la condition initiale  $x_0$  au temps initial  $k_i \leq k_j$ . Soient  $sh$  et  $lh$  deux entiers naturels fixés (avec  $lh \geq n$ ), alors pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  on pose :

$$G(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ hof(x(x, sh, sh + 1)) \\ \vdots \\ hof(x, sh, sh + lh - 1) \end{pmatrix}$$

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow G(x) \end{aligned}$$

Puisque le système (5.1),(5.2) est localement observable on a :

$$rang\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x)\right) = n$$

Donc l'application  $A$  est injective et par la suite le problème (5.6) admet une unique solution  $x^*$ .

Par ailleurs on remarque que  $j_{sh}(x(sh)) = 0$ , donc  $x(sh)$  est un minimum global de  $j_{sh}$ , ce minimum étant unique dans  $\Omega$ , alors on a  $x(sh) = x^*$   $\square$

**Preuve 5.2.2** (Théorème (5.2.1))

Nous faisons la preuve du théorème pour  $n = 3$ , pour  $n \geq 3$ , le raisonnement est identique.

Montrons que le système (5.1),(5.2) est observable.

Soient  $x(k)$  et  $\bar{x}(k)$   $k \geq 0$  deux solutions du système (5.1) telles que

$$h(x(k)) = h(\bar{x}(k)) \quad k \geq 0$$

Rappelons que  $h(x(k)) = C(k)x(k)$  où  $C(k) = (C_1(k) \ C_2(k) \ C_3(k))$  et

$$C_i(k) = \frac{q_i E \tau}{q_i E(k) \tau + m_i} \left(1 - \exp(-m_i - q_i E(k) \tau)\right).$$

Nous avons :

$$C(k)x(k) - C(k)\bar{x}(k) = 0$$

$$C(k)(x(k) - \bar{x}(k)) = 0$$

$$C_1(k)(x_1(k) - \bar{x}_1(k)) + C_2(k)(x_2(k) - \bar{x}_2(k)) + C_3(k)(x_3(k) - \bar{x}_3(k)) = 0$$

5.2. ALGORITHME DE SYNTHÈSE DE L'OBSERVATEUR  
NUMÉRIQUE INTERVALLE

Posons  $z(k) = x(k) - \bar{x}(k)$ , alors nous pouvons écrire :

$$C_1(k)z_1(k) + C_2(k)z_2(k) + C_3(k)z_3(k) = 0. \quad (5.7)$$

$$C_1(k+1)z_1(k+1) + C_2(k+1)z_2(k+1) + C_3(k+1)z_3(k+1) = 0 \quad (5.8)$$

$$C_1(k+2)z_1(k+2) + C_2(k+2)z_2(k+2) + C_3(k+2)z_3(k+2) = 0 \quad (5.9)$$

Tenant compte du fait pour tout  $k > 0, i = 2, 3, z_i(k) = v_{i-1}(k-1)z_{i-1}(k-1)$ , on a :

$$\begin{aligned} (5.9) \implies & C_1(k+2)z_1(k+2) + C_2(k+2)v_1(k+1)z_1(k+1) \\ & + C_3(k+2)v_2(k+1)z_2(k+1) = 0 \\ \implies & C_1(k+2)z_1(k+2) + C_2(k+2)v_1(k+1)z_1(k+1) \\ & + C_3(k+2)v_2(k+1)v_1(k)z_1(k) = 0 \\ \implies & z_1(k+2) + \frac{C_2(k+2)v_1(k+1)}{C_1(k+2)}z_1(k+1) + \frac{C_3(k+2)v_2(k+1)v_1(k)}{C_1(k+2)}z_1(k) = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

On pose :

$$\alpha_1(k) = \frac{C_2(k+2)v_1(k+1)}{C_1(k+1)} \quad \text{et} \quad \alpha_2(k) = \frac{C_3(k+2)v_2(k+1)v_1(k)}{C_1(k+2)}$$

Rappelons que pour  $i = 1, 2, 3$  :

$$v_i(k) = e^{-m_i - q_i E(k)\tau} \quad \text{et} \quad C_i(k) = \frac{q_i E(k)\tau}{m_i + q_i E(k)\tau} (1 - e^{-m_i - q_i E(k)\tau}) = \frac{q_i E(k)\tau}{-\ln v_i(k)} (1 - v_i(k))$$

Par suite nous obtenons :

$$z_1(k+2) + \alpha_1(k)z_1(k+1) + \alpha_2(k)z_1(k) = 0$$

$$z_1(k+2) = -\alpha_1(k)z_1(k+1) - \alpha_2(k)z_1(k)$$

$$z_1(2) = -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)$$

$$z_1(3) = -\alpha_1(1)z_1(2) - \alpha_2(1)z_1(1) = -\alpha_1(1)(-\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)) - \alpha_2(1)z_1(1)$$

$$z_1(3) = (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0)$$

D'autre part on a :

CHAPITRE 5. OBSERVATEUR NUMÉRIQUE INTERVALLE : APPLICATION  
 À UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

$$z_1(3) = f_0(x(2)) - f_0(\bar{x}(2)) \text{ avec } f_0(x) = g(\sum_{i=1}^3 b_i x_i)$$

$$z_1(3) = f_0(x_1(2), v_1(1)x_1(1), v_1(0)v_2(1)x_1(0)) - f_0(\bar{x}_1(2), v_1(1)\bar{x}_1(1), v_1(0)v_2(1)\bar{x}_1(0))$$

on a :

$$z_1(3) = (x_1(2) - \bar{x}_1(2))G_1 + v_1(1)(x_1(2) - \bar{x}_1(2))G_2 + v_1(0)v_2(1)(x_1(0) - \bar{x}_1(0))G_3$$

Où

$$G_i = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \left( tz_1(2) + \bar{x}_1(2), tv_1(1)z_1(1) + v_1(1)\bar{x}_1(1), tv_1(0)v_2(1)z_1(0) + v_1(0)v_2(1)\bar{x}_1(0) \right) dt$$

pour  $i = 1, 2, 3$

D'où

$$z_1(3) = z_1(2)G_1 + v_1(1)z_1(1)G_2 + v_1(0)v_2(1)z_1(0)G_3$$

En remplaçant  $z_1(2)$  par sa valeur dans l'expression de  $z_1(3)$ , on obtient :

$$z_1(3) = G_1(-\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)) + v_1(1)z_1(1)G_2 + v_1(0)v_2(1)z_1(0)G_3$$

$$z_1(3) = (-\alpha_1(0)G_1 + v_1(1)G_2)z_1(1) + (-\alpha_2(0)G_1 + v_1(0)v_2(1)G_3)z_1(0)$$

D'après les deux expressions de  $z_1(3)$ , on a :

$$(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0) =$$

$$(-\alpha_1(0)G_1 + v_1(1)G_2)z_1(1) + (-\alpha_2(0)G_1 + v_1(0)v_2(1)G_3)z_1(0)$$

En mettant  $z_1(0)$  et  $z_1(1)$  en facteur, on obtient :

$$(v_1(0)v_2(1)G_3 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0))z_1(0) + (v_1(1)G_2 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1))z_1(1) = 0 \quad (5.11)$$

$$z_1(4) = -\alpha_1(2)z_1(3) - \alpha_2(2)z_1(2)$$

On sait que :

$$z_1(3) = (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0)$$

et

$$z_1(2) = -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)$$



D'où

$$z_1(4) = -\alpha_1(2) \left( (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0) \right) \\ - \alpha_2(2) \left( -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0) \right)$$

$$z_1(4) = \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1))z_1(0) + (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1)))z_1(1)$$

D'autre part aussi on a :

$$z_1(4) = f_0(x(3)) - f_0(\bar{x}(3))$$

$$z_1(4) = f_0(x_1(3), v_1(2)x_1(2), v_1(1)v_2(2)x_1(1)) - f_0(\bar{x}_1(3), v_1(2)\bar{x}_1(2), v_1(1)v_2(2)\bar{x}_1(1))$$

$$z_1(4) = (x_1(3) - \bar{x}_1(3))\bar{G}_1 + v_1(2)(x_1(2) - \bar{x}_1(2))\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)(x_1(1) - \bar{x}_1(1))\bar{G}_3$$

$$z_1(4) = z_1(3)\bar{G}_1 + v_1(2)z_1(2)\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)z_1(1)\bar{G}_3$$

avec

$$\bar{G}_i = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \left( tz_1(3) + \bar{x}_1(3), tv_1(2)z_1(2) + v_1(2)\bar{x}_1(2), tv_1(1)v_2(2)z_1(1) + v_1(1)v_2(2)\bar{x}_1(1) \right) dt$$

Pour  $i = 1, 2, 3$

En utilisant les expressions

$$z_1(3) = (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0)$$

et

$$z_1(2) = -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0)$$

nous obtenons :

$$z_1(4) = \left( (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))z_1(1) + \alpha_1(1)\alpha_2(0)z_1(0) \right) \bar{G}_1 \\ + v_1(2) \left( -\alpha_1(0)z_1(1) - \alpha_2(0)z_1(0) \right) \bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)z_1(1)\bar{G}_3$$

Réécrivons  $z_1(4)$  en mettant en facteur  $z_1(0)$  et  $z_1(1)$ , alors on a :

$$z_1(4) = (\alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\bar{G}_2)z_1(0) \\ + ((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)\bar{G}_3)z_1(1)$$

En égalisant les deux expressions de  $z_1(4)$ , nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned} & \left( \alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\bar{G}_2 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)) \right) z_1(0) \\ & + \left( (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)\bar{G}_3 \right. \\ & \left. - (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))) \right) z_1(1) \end{aligned} \quad (5.12)$$

En couplant les équations (5.11) et (5.12) nous obtenons le système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1(0)v_2(1)G_3 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0))z_1(0) \\ + (v_1(1)G_2 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1))z_1(1) = 0 \\ \left( \alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\bar{G}_2 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)) \right) z_1(0) \\ + \left( (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\bar{G}_2 + v_1(1)v_2(2)\bar{G}_3 \right. \\ \left. - (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))) \right) z_1(1) = 0 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

On remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) \right) = b_i \frac{\partial}{\partial w} g(w) \Big|_{w=\sum_{i=1}^n b_i x_i}$$

D'où :

$$G_i = \frac{b_i}{b_1} G_1 \quad \text{et} \quad \bar{G}_i = \frac{b_i}{b_1} \bar{G}_1 \quad i = 2, 3$$

Le système d'équation (5.13) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1(0)v_2(1)\frac{b_3}{b_1}G_1 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0))z_1(0) \\ + (v_1(1)\frac{b_2}{b_1}G_1 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1))z_1(1) = 0 \\ \\ (\alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)))z_1(0) \\ + ((\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 + v_1(1)v_2(2)\frac{b_3}{b_1}\bar{G}_1 \\ - (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))))z_1(1) = 0 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= v_1(0)v_2(1)\frac{b_3}{b_1}G_1 - \alpha_2(0)G_1 - \alpha_1(1)\alpha_2(0) \\ \Gamma_{12} &= v_1(1)\frac{b_2}{b_1}G_1 - \alpha_1(0)G_1 - \alpha_1(0)\alpha_1(1) \\ \Gamma_{21} &= \alpha_1(1)\alpha_2(0)\bar{G}_1 - \alpha_2(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 - \alpha_2(0)(\alpha_2(2) - \alpha_1(2)\alpha_1(1)) \\ \Gamma_{22} &= (\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))\bar{G}_1 - \alpha_1(0)v_1(2)\frac{b_2}{b_1}\bar{G}_1 + v_1(1)v_2(2)\frac{b_3}{b_1}\bar{G}_1 \\ &\quad - (\alpha_2(2)\alpha_1(0) - \alpha_1(2)(\alpha_1(0)\alpha_1(1) - \alpha_2(1))) \end{aligned}$$

On écrit le système (5.14) sous la forme simplifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}z_1(0) + \Gamma_{12}z_1(1) = 0 \\ \Gamma_{21}z_1(0) + \Gamma_{22}z_1(1) = 0 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

On considère maintenant l'ensemble des paramètres du modèle tels que le déterminant du système (5.15) soit non nul i.e

$$-\Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} \neq 0 \quad (5.16)$$

Cette ensemble est un ensemble de mesure nulle dans  $\mathbb{R}_+^n$ . Dans le cas où (5.16) n'est pas satisfaite, il suffit de perturber un des paramètres du modèle (5.1) pour que la relation (5.16) soit vérifiée.

D'après (5.16), on a  $z_1(1) = z_1(0) = 0$

En utilisant l'équation (5.10) nous obtenons que  $z_1(k) = 0 \quad \forall k \geq 0$

CHAPITRE 5. OBSERVATEUR NUMÉRIQUE INTERVALLE : APPLICATION  
À UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE

---

Par ailleurs  $z_2(2) = v_1(1)z_1(1)$ , donc  $z_2(2) = 0$

De (5.7) nous avons  $z_3(2) = 0$  et par conséquent  $z_2(1) = 0$  et  $z_3(1) = 0$

$z_3(1) = 0$  implique  $z_2(0) = 0$ . D'après toujours l'équation (5.7) on a  $z_3(0) = 0$

Finalement  $z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = 0$ .

Le système (5.1)(5.2) est donc observable. Alors d'après le lemme (5.2.1) le problème (5.6) admet une unique solution. Donc pour tout  $sh \in \mathbb{N}$ , l'algorithme d'optimisation décrit ci-dessus génère un unique ouvert  $X_{sh}$  contenant  $x(sh)$ .

Soit  $\epsilon$  positif le diamètre souhaité de l'observateur intervalle,

d'après la continuité de  $f$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\|x - x(sh)\| < \eta$  implique

$$\| \underbrace{fofo\dots of(x)}_{lh \text{ fois}} - \underbrace{fofo\dots of(x(sh))}_{lh \text{ fois}} \| < \frac{1}{2}\epsilon$$

il suffit de déterminer  $X_{sh}$  par l'algorithme d'optimisation tel que son diamètre soit inférieur à  $\eta$  et de calculer l'ouvert estimateur de l'état  $x(sh + lh)$  par la fonction d'inclusion  $F$  :

$$X_{sh+lh} = \underbrace{FoFo\dots oF}_{lh \text{ fois}}(X_{sh})$$

Le diamètre de  $X_{sh+lh}$  est inférieur à  $\epsilon$ .

**Remarque 5.2.1** *Le calcul numérique de la trajectoire d'un ouvert de  $\mathbb{R}_+^n$  par un système non linéaire est difficile à réaliser avec précision. En effet avec la discrétisation qu'impose le numérique, l'erreur commise en calculant les trajectoires d'un ouvert croit à chaque pas de temps. Dans notre cas nous considérons un temps relativement court d'observation  $lh$  de sorte à réduire l'erreur d'estimation des trajectoires.*

**Remarque 5.2.2** *La convergence globale de l'algorithme de synthèse de l'observateur est essentiellement liée à la capacité de l'algorithme d'optimisation à déterminer dans l'ensemble invariant des états  $\Omega$  tous les ouverts de diamètre  $\epsilon$  (arbitrairement choisi) qui contiennent un minimum global de la fonction objective  $j_{sh}$ . L'observabilité nous permet d'avoir un contrôle sur le diamètre des ouverts estimateurs. Si le système est observable, l'algorithme d'optimisation génère un unique ouvert de  $\Omega$  et la continuité de la fonction de la dynamique du système (5.1) nous permet de choisir convenablement le diamètre des trajectoires.*

**Remarque 5.2.3** *L'algorithme de synthèse de l'observateur numérique intervalle est une combinaison de deux algorithmes : un algorithme d'optimisation de la fonction objective et un algorithme de calcul de la trajectoire d'un ouvert pour un système dynamique. Ces deux algorithmes ont la particularité d'avoir des temps de calcul relativement longs qui croissent en fonction de la taille  $n$  du système considéré, de la longueur du temps d'observation  $lh$  et du raffinement de la discrétisation du domaine  $\Omega$  des états. Ainsi, une bonne performance de l'algorithme de l'observateur numérique requière des outils de calculs informatiques très puissantes.*

## 5.3 Simulations

Nous donnons une illustration de l'observateur numérique intervalle. Nous considérons une population de poissons modélisée par (5.1) de taille 3 et nous supposons que la fonction de recrutement est celle de Beverton et Holt. On considère un temps d'observation  $lh = 3$ , c'est à dire on observe les captures  $y(sh), y(sh + 1)$  et  $y(sh + 2)$  pour trouver un intervalle estimateur de l'état  $x(sh + 3)$ . Considérons les paramètres suivants :

Paramètres de Beverton et Holt	$\alpha = 1, \beta = 0.0002$
Paramètres de fécondité	$b = [5 \ 5 \ 5],$
Coefficients de capturabilité	$q = [0.24 \ 0.36 \ 0.42],$
Taux de Mortalité naturelle	$M = [0.2 \ 0.2 \ 0.2],$
Temps de pêche par saison	$\tau = 1,$
Effort de pêche	$E(k) = E = 8/3,$

Avec ces paramètres et considérant les  $\Gamma_{ij}$ ,  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$  définis en (5.16), pour tout  $x$  et  $\bar{x}$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $z = x - \bar{x}$  on a :

$$-\Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} = 0.00734219 + 0.0055823G_1 + 0.00140772\bar{G}_1 + 0.0025079G_1\bar{G}_1$$

avec

$$G_1 = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \left( tz_1(3) + x_1(3), tv_1(2)z_1(2) + v_1(2)x_1(2), tv_1(1)v_2(2)z_1(1) + v_1(1)v_2(2)x_1(1) \right) dt$$

$$\bar{G}_1 = \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \left( tz_1(3) + \bar{x}_1(3), tv_1(2)z_1(2) + v_1(2)\bar{x}_1(2), tv_1(1)v_2(2)z_1(1) + v_1(1)v_2(2)\bar{x}_1(1) \right) dt$$

Pour  $h$  Beverton et Holt on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f_0(x) = \frac{\partial}{\partial x} xh(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{1 + \beta x} \right) = \frac{1}{(1 + \beta x)^2} \geq 0$$

On remarque que  $G_1 \geq 0$  et  $\bar{G}_1 \geq 0$ . D'où :

$$-\Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{11}\Gamma_{22} \neq 0$$

Le système avec les paramètres ci-dessus est alors observable.

Déterminons maintenant dans  $\mathbb{R}^3$  un domaine  $\Omega_3$  compact et invariant du système (5.1) avec  $n=3$ . Soit  $m$  le minimum des taux de mortalité naturelle et  $q$  le minimum des coefficients de capturabilité.

En utilisant la dynamique du modèle (5.1), on a pour tout  $k > 0$

*CHAPITRE 5. OBSERVATEUR NUMÉRIQUE INTERVALLE : APPLICATION  
À UN MODÈLE DE PÊCHE DISCRET STRUCTURÉ EN CLASSE D'ÂGE*

---

$$x_1(k) = g(\sum_{i=1}^3 b_i x(k-1)) \leq \frac{1}{\beta} \text{ car } g \text{ est croissante et majorée par } \frac{1}{\beta}$$

$$x_2(k) = e^{-M_1 - q_1 E \tau} x_1(k-1) \leq e^{-m - q E \tau} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$x_3(k) = e^{-M_2 - q_2 E \tau} x_2(k-1) \leq e^{-2m - 2q E \tau} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$\Omega_3 = [0, \frac{1}{\beta}] \times [0, \frac{e^{-m - q E \tau}}{\beta}] \times [0, \frac{e^{-2m - 2q E \tau}}{\beta}]$  est un domaine invariant du (5.1) quand  $n = 3$ .

Nous pouvons maintenant appliquer l'algorithme de synthèse de l'observateur dans le domaine  $\Omega_3$ . les simulations sont faites à l'aide de Scilab. nous représentons les états du système en trait plein et les bornes de l'intervalle estimateur en pointillé.

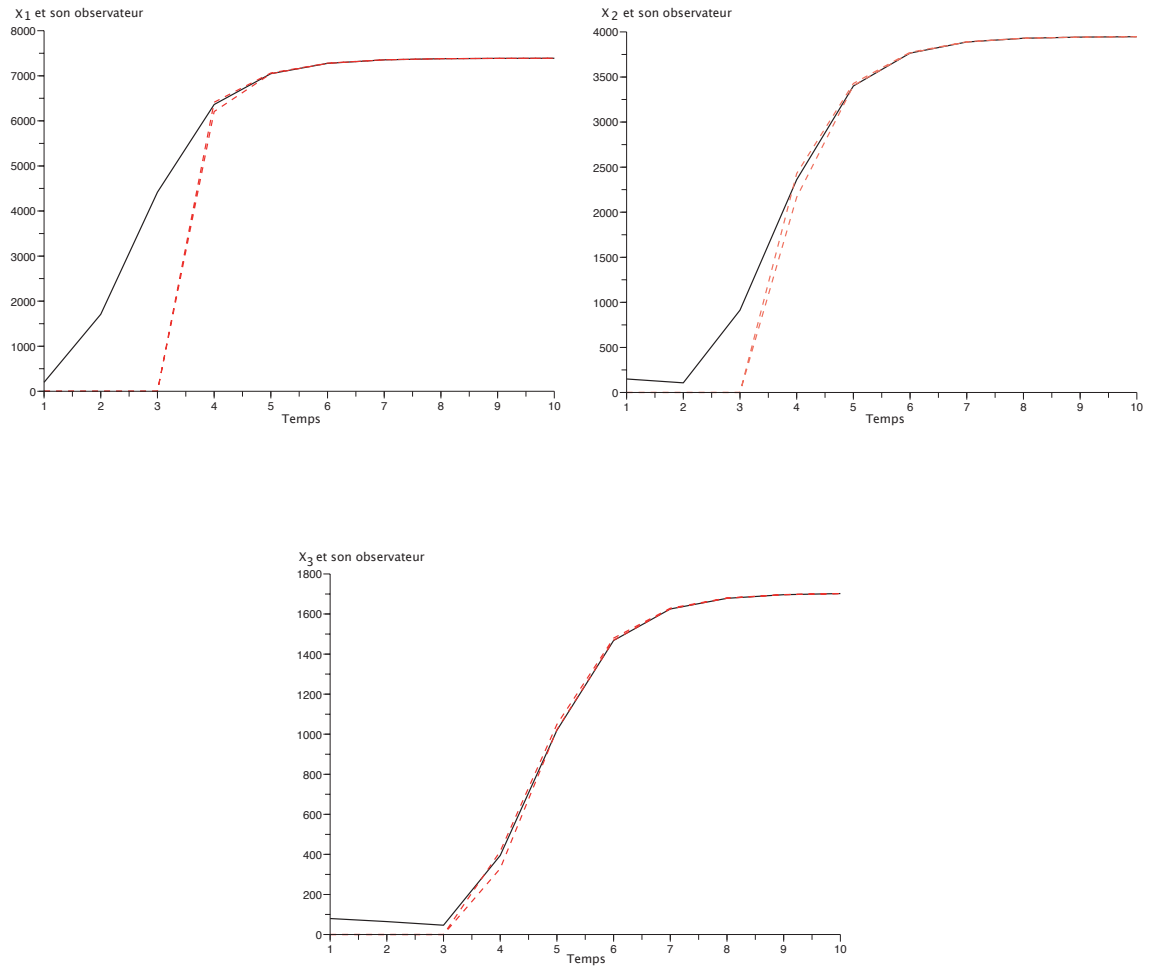


FIGURE 5.1 – Exemples de trajectoires des états de l’observateur (en pointillé) et du modèle de pêche (en trait plein) pour la fonction de recrutement de Beverton et Holt.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons adapté un algorithme de synthèse d'observateur intervalle à un modèle de pêche discret structuré en  $n$  classes d'âge. Nous avons donné une preuve concernant la convergence de l'observateur intervalle et illustré l'observateur par un exemple numérique qui atteste de la vitesse de convergence de l'observateur. Cet observateur est utile dans la mesure où il peut nous permettre sur la base des captures réalisées de faire des prédictions sur les stocks d'une population de poissons dont la dynamique est régie par le modèle de pêche (5.1). On dispose ainsi d'un outil d'estimation des stocks de poissons qui peut être utile dans certains cas à l'aide à la prise de décision dans les politiques de management des pêcheries.



# Chapitre 6

## Stabilité et stabilisation d'un modèle de pêche discret structuré en stade

### 6.1 Introduction

Dans le cadre d'une bonne politique de lutte pour la préservation des ressources halieutiques, il s'avère fondamental de bien comprendre les propriétés d'évolution des stocks pour une bonne exploitation de la ressource. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude du comportement asymptotique des états des stocks d'une population de poissons structurée en classe de stade et dont la classe des recrutés est déterminée par la fonction de recrutement de Beverton et Holt. Le modèle de la population de poissons considérée est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = (1-p_1)s_1(k)x_1(k) + s_0h\left(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k)\right) \\ \qquad \qquad \qquad = (1-p_1)s_1(k)x_1(k) + \frac{s_0 \sum_{i=1}^n b_i x_i(k)}{1 + \beta(\sum_{i=1}^n b_i x_i(k))} \\ x_2(k+1) = p_1s_1(k)x_1(k) + (1-p_2)s_2(k)x_2(k) \\ \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = p_{n-2}s_{n-2}(k)x_{n-2}(k) + (1-p_{n-1})s_{n-1}(k)x_{n-1}(k) \\ x_n(k+1) = p_{n-1}s_{n-1}(k)x_{n-1}(k) + s_n(k)x_n(k) \end{array} \right. \quad (6.1)$$

avec

$$s_i(k) = e^{-m_i - q_i \tau E(k)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Dans ce modèle, nous considérons l'effort de pêche  $E(k)$  comme terme de contrôle. Aux chapitres 4 et 5, nous avons donné quelques techniques de synthèse d'observateur qui nous permettent d'estimer les états du modèle de pêche (6.1). l'objectif à présent est d'utiliser l'effort de pêche pour réguler les stocks de poissons.

Dans la suite nous noterons le système (6.1) par :

$$x(k+1) = F(x(k), E(k)) = \begin{pmatrix} F_1(x(k), E(k)) \\ F_2(x(k), E(k)) \\ \vdots \\ F_n(x(k), E(k)) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

## 6.2 Stabilité globale de l'équilibre non nul

### 6.2.1 Point d'équilibre

Pour un effort de pêche constant  $E(k) = E^*$ . Notons  $s_i^*(k) = e^{-m_i - q_i \tau E^*}$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Si le système (6.1) admet un point d'équilibre  $x^*$ , alors  $x^*$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = (1 - p_1)s_1^*x_1^* + s_0 \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i^* \right) h \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i^* \right) \\ x_2^* = p_1 s_1^* x_1^* + (1 - p_2) s_2^* x_2^* \\ \vdots \\ x_{n-1}^* = p_{n-2} s_{n-2}^* x_{n-2}^* + (1 - p_{n-1}) s_{n-1}^* x_{n-1}^* \\ x_n^* = p_{n-1} s_{n-1}^* x_{n-1}^* + s_n^* x_n^* \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Nous avons alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{s_0}{1 - (1 - p_1)s_1^*} \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i^* \right) h \left( \sum_{i=1}^n b_i x_i^* \right) \\ x_2^* = \frac{p_1 s_1^*}{1 - (1 - p_2)s_2^*} x_1^* \\ \vdots \\ x_{n-1}^* = \frac{p_{n-2} s_{n-2}^*}{1 - (1 - p_{n-1})s_{n-1}^*} x_{n-2}^* \\ x_n^* = \frac{p_{n-1} s_{n-1}^*}{1 - s_n^*} x_{n-1}^* \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Posons :

$$l_1 = 1, \quad l_j = \prod_{i=2}^j \frac{p_{i-1}s_{i-1}^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*}, \quad j = 2, \dots, n-1, \quad \text{et } l_n = \frac{p_{n-1}s_{n-1}^*}{1 - s_n^*} \prod_{i=2}^{n-1} \frac{p_{i-1}s_{i-1}^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*}$$

D'après (6.4) on a :

$$x_i^* = l_i x_1^* \quad i = 2, \dots, n \quad (6.5)$$

On définit

$$R = \sum_{i=1}^n b_i l_i$$

On remarque que :

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i^* = b_1 l_1 x_1^* + b_2 l_2 x_1^* + \dots + b_n l_n x_1^* = (b_1 l_1 + b_2 l_2 + \dots + b_n l_n) x_1^* = R x_1^*$$

D'après la première équation de (6.4), on a :

$$(1 - (1 - p_1)s_1^*)x_1^* = s_0(Rx_1^*)h(Rx_1^*)$$

D'où

$$x_1^* = \frac{1}{R} h^{-1} \left( \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{s_0 R} \right)$$

$$x_1^* = \frac{1}{\beta R} \frac{s_0 R - (1 - (1 - p_1)s_1^*)}{1 - (1 - p_1)s_1^*}$$

**Remarque 6.2.1** *L'équilibre  $x^*$  n'a de sens biologique que lorsque*

$$\frac{s_0 R}{1 - (1 - p_1)s_1^*} > 1$$

*Nous supposons dans toute la suite que cette dernière inégalité est vérifiée.*

### 6.2.2 Analyse de la stabilité du point d'équilibre $x^*$

Nous nous intéressons à la stabilité de l'équilibre non trivial  $x^*$  du modèle (6.1) correspondant à un effort de pêche constant. Nous avons le résultat suivant :

**Proposition 6.2.1** *L'équilibre non trivial  $x^*$  du modèle (6.1) correspondant à un effort de pêche constant  $E^*$  est globalement asymptotiquement stable.*

**Preuve 6.2.1** (Proposition 6.2.1)

Nous donnons ici une preuve basée sur la technique des fonctions de Lyapunov. posons :

$$R_i = \frac{b_i l_i}{R}; \quad i = 1, \dots, n$$

On définit la fonction  $V(x)$  suivante :

$$\begin{aligned} V(x) = & (x_1 - x_1^*)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ & + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Nous avons :  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) = & (x_1(k+1) - x_1^*)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k+1) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ & + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k+1) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

En utilisant la dynamique du système (6.1) et les relations d'équilibre (6.4), nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) = & V(F(x(k), E(k))) \\ = & \left( (1 - p_1)(s_1 x_1(k) - s_1^* x_1^*) + s_0 \frac{\sum_{i=1}^n b_i (x_i(k) - x_i^*)}{(1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i(k))(1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i^*)} \right)^2 \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{p_{i-1}(s_{i-1} x_{i-1}(k) - s_{i-1}^* x_{i-1}^*) + (1 - p_i)(s_i x_i(k) - s_i^* x_i^*)}{l_i} \right)^2 \\ & + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{p_{n-1}(s_{n-1} x_{n-1}(k) - s_{n-1}^* x_{n-1}^*) + s_n x_n(k) - s_n^* x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Pour  $E = E^*$  et donc  $s_i = s_i^*$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) = & V(F(x(k), E^*)) \\ = & \left( (1 - p_1)s_1^* (x_1(k) - x_1^*) + s_0 \frac{\sum_{i=1}^n b_i (x_i(k) - x_i^*)}{(1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i(k))(1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i^*)} \right)^2 \\ & + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{p_{i-1}s_{i-1}^* (x_{i-1}(k) - x_{i-1}^*) + (1 - p_i)s_i^* (x_i(k) - x_i^*)}{l_i} \right)^2 \\ & + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{p_{n-1}s_{n-1}^* (x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*) + s_n^* (x_n(k) - x_n^*)}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Faisons la remarque :

$$1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i^* = 1 + \beta R x_1^* = 1 + \beta R \frac{1}{\beta R} \frac{s_0 R - (1 - (1 - p_1) s_1^*)}{1 - (1 - p_1) s_1^*} = 1 + \frac{s_0 R}{1 - (1 - p_1) s_1^*} - 1$$

$$1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i^* = \frac{s_0 R}{1 - (1 - p_1) s_1^*}$$

Alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) &= V(F(x(k), E^*)) \\ &= \left( (1 - p_1) s_1^* (x_1(k) - x_1^*) + \frac{1 - (1 - p_1) s_1^*}{R} \frac{1}{1 + \beta \sum_{i=1}^n b_i x_i(k)} \sum_{i=1}^n b_i (x_i(k) - x_i^*) \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1) s_1^*}{1 - (1 - p_i) s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{p_{i-1} s_{i-1}^*}{l_i} (x_{i-1}(k) - x_{i-1}^*) + (1 - p_i) s_i^* \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &\quad + (1 - (1 - p_1) s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{p_{n-1} s_{n-1}^*}{l_n} (x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*) + s_n^* \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque  $l_i = \frac{s_{i-1}^* p_{i-1}}{1 - (1 - s_i^*) p_i} l_{i-1}$  pour  $i = 2, n-1$  et  $l_n = \frac{p_{n-1} s_{n-1}^*}{1 - s_n^*} l_{n-1}$ , nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} V(F(x(k), E^*)) &= \\ &= \left( (1 - p_1) s_1^* (x_1(k) - x_1^*) + (1 - (1 - p_1) s_1^*) \frac{1}{1 + \beta \sum_{i=1}^n x_i(k)} \sum_{i=1}^n \frac{b_i l_i}{R} \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1) s_1^*}{1 - (1 - p_i) s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \times \\ &\quad \left( (1 - (1 - p_i) s_i^*) \left( \frac{x_{i-1}(k) - x_{i-1}^*}{l_{i-1}} \right) + (1 - p_i) s_i^* \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &\quad + (1 - (1 - p_1) s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( (1 - s_n^*) \left( \frac{x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*}{l_{n-1}} \right) + s_n^* \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto x^2$  étant convexe, nous avons l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq (1 - p_1)s_1^*(x_1(k) - x_1^*)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \frac{1}{1 + \beta \sum_{i=1}^n x_i(k)} \sum_{i=1}^n \frac{b_i l_i}{R} \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \right) \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \times \\
 &\left[ (1 - (1 - p_i)s_i^*) \left( \frac{x_{i-1}(k) - x_{i-1}^*}{l_{i-1}} \right)^2 + (1 - p_i)s_i^* \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \right] \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left[ (1 - s_n^*) \left( \frac{x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*}{l_{n-1}} \right)^2 + s_n^* \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

nous savons que  $1 + \beta \sum_{i=1}^n x_i(k) \geq 1$ ,  $\frac{b_i l_i}{R} = R_i$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq (1 - p_1)s_1^*(x_1(k) - x_1^*)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \right) \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_{i-1}(k) - x_{i-1}^*}{l_{i-1}} \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) R_n \left( \frac{x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*}{l_{n-1}} \right)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned}$$

Remplaçons  $\sum_{i=2}^{n-1} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_{i-1}(k) - x_{i-1}^*}{l_{i-1}} \right)^2$  par

$\sum_{i=1}^{n-2} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2$  dans le membre à droite de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq (1 - p_1)s_1^*(x_1(k) - x_1^*)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=1}^{n-2} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_n \left( \frac{x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*}{l_{n-1}} \right)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} \left[ 1 - (1 - p_1)s_1^* \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 = \\
 \sum_{i=1}^{n-2} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 + (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_n \left( \frac{x_{n-1}(k) - x_{n-1}^*}{l_{n-1}} \right)^2
 \end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq (1 - p_1)s_1^*(x_1(k) - x_1^*)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left[ 1 - (1 - p_1)s_1^* \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} \left[ 1 - (1 - p_1)s_1^* \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 = \\
 ((1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=2}^n R_j) \left( \frac{x_1(k) - x_1^*}{l_1} \right)^2 \\
 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2
 \end{aligned}$$

On obtient par la suite :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq (1 - p_1)s_1^*(x_1(k) - x_1^*)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\
 &+ ((1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=2}^n R_j) \left( \frac{x_1(k) - x_1^*}{l_1} \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned}$$

Mettons maintenant en facteur les termes  $\left( \frac{x_i - x_i^*}{l_i} \right)^2$  pour  $i = 1, \dots, n$  dans l'expression à droite de l'inégalité ci-dessous. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq \left[ (1 - p_1)s_1^* + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=2}^n R_j \right] (x_1(k) - x_1^*)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\
 &+ \left[ \sum_{i=2}^{n-1} (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \times \\
 &\left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned}$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 V(F(x(k), E^*)) &\leq \left[ (1 - p_1)s_1^* + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=2}^n R_j \right] (x_1(k) - x_1^*)^2 \\
 &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\
 &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j + \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \\
 &\times \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned}$$



On sait que :

$$(1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i+1}^n R_j = (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i}^n R_j - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_i$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned} V(F(x(k), E^*)) &\leq \left[ (1 - p_1)s_1^* + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=2}^n R_j \right] (x_1(k) - x_1^*)^2 \\ &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i}^n R_j \right. \\ &+ \left. \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_i \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} &(1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=i}^n R_j + \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \\ &= \left( (1 - (1 - p_1)s_1^*) + \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \right) \sum_{j=i}^n R_j \end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned} V(F(x(k), E^*)) &\leq \left[ (1 - p_1)s_1^* + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \sum_{j=2}^n R_j \right] (x_1(k) - x_1^*)^2 \\ &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \left( (1 - (1 - p_1)s_1^*) + \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \right) \sum_{j=i}^n R_j - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_i \right] \\ &\times \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Puisque

$$\sum_{j=2}^n R_j = 1 - R_1$$

et

$$\left( (1 - (1 - p_1)s_1^*) + \frac{(1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - p_i)s_i^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \right) \sum_{j=i}^n R_j = \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j$$

nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} V(F(x(k), E^*)) &\leq \left[ (1 - p_1)s_1^* + (1 - (1 - p_1)s_1^*)(1 - R_1) \right] (x_1(k) - x_1^*)^2 \\ &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_i \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ &+ \left[ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n s_n^*}{1 - s_n^*} - (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \right] \\ &\times \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \\ V(F(x(k), E^*)) &\leq \left[ 1 - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_1 \right] (x_1(k) - x_1^*)^2 \\ &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right) \right)^2 \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_i \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ &+ \left[ - (1 - (1 - p_1)s_1^*)R_n + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \right] \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= (x_1(k) - x_1^*)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ &+ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = V(F(x(k), E^*)) - V(x(k)) \leq$$

$$\begin{aligned} & (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \right) - (1 - (1 - p_1)s_1^*) R_1 (x_1(k) - x_1^*)^2 \\ & - \sum_{i=2}^{n-1} (1 - (1 - p_1)s_1^*) R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 - (1 - (1 - p_1)s_1^*) R_n \left( \frac{x_n(k) - x_n^*}{l_n} \right)^2 \end{aligned}$$

On peut simplifier le second membre de l'inégalité et obtenir :

$$\begin{aligned} V(F(x(k), E^*)) - V(x(k)) \leq \\ (1 - (1 - p_1)s_1^*) \left[ \left( \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \right) - \sum_{i=1}^n R_i \left( \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

Finalement, en utilisant la stricte convexité de la fonction  $x \mapsto x^2$ , le fait que  $0 \leq R_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^n R_i = 1$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} V(F(x(k), E^*)) - V(x(k)) \leq 0 \quad \forall x(k) \in \mathbb{R}_+^n \\ V(F(x(k), E^*)) - V(x(k)) = 0 \Rightarrow \frac{x_i(k) - x_i^*}{l_i} = \frac{x_1(k) - x_1^*}{l_1} \text{ pour tout } i \geq 2. \end{cases} \quad (6.7)$$

D'où l'équilibre  $x^*$  non trivial du système (6.1) est Lyapunov stable.

Posons maintenant :

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}_+^n / V(F(x, E^*)) - V(x) = 0\}$$

D'après le principe de Lasalle,  $\Gamma$  est globalement attractif.

soit  $x$  un élément de  $\Gamma$ , alors d'après (6.7) nous pouvons écrire :

$$\frac{x_i - x_i^*}{l_i} = x_1 - x_1^*, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{x_i}{l_i} - \frac{x_i^*}{l_i} = x_1 - x_1^*, \quad i = 1, \dots, n$$

Donc

$$x_i = l_i x_1$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 V(F(x, E^*)) - V(x) &= (F_1(x, E^*) - x_1^*)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1-p_1)s_1^*}{1 - (1-p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{F_i(x, E^*) - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &\quad + (1 - (1-p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{F_n(x, E^*) - x_n^*}{l_n} \right)^2 - (x_1 - x_1^*)^2 \\
 &\quad - \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1-p_1)s_1^*}{1 - (1-p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\
 &\quad - (1 - (1-p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n - x_n^*}{l_n} \right)^2
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

En utilisant la dynamique du système (6.1) (avec  $E = E^*$  et donc  $s_i = s_i^*$ ) nous avons :

pour  $i = 2, \dots, n-1$

$$F_i(x, E^*) = p_{i-1}s_{i-1}^*x_{i-1} + (1-p_i)s_i^*x_i = p_{i-1}s_{i-1}^*l_{i-1}x_1 + (1-p_i)s_i^*l_i x_1$$

$$F_i(x, E^*) = p_{i-1}s_{i-1}^*l_{i-1}x_1 + (1-p_i)s_i^*l_{i-1} \frac{p_{i-1}s_{i-1}^*}{1 - (1-p_i)s_i^*} x_1$$

$$F_i(x, E^*) = p_{i-1}s_{i-1}^*l_{i-1}x_1 \left( 1 + \frac{(1-p_i)s_i^*}{1 - (1-p_i)s_i^*} \right)$$

$$F_i(x, E^*) = \frac{p_{i-1}s_{i-1}^*}{1 - (1-p_i)s_i^*} l_{i-1}x_1 = l_i x_1 = x_i$$

$$F_n(x, E^*) = p_{n-1}s_{n-1}^*x_{n-1} + s_n^*x_n = p_{n-1}s_{n-1}^*l_{n-1}x_1 + s_n^*l_n x_1$$

$$F_n(x, E^*) = p_{n-1}s_{n-1}^*l_{n-1}x_1 + s_n^* \frac{p_{n-1}s_{n-1}^*}{1 - s_n^*} l_{n-1}x_1$$

$$F_n(x, E^*) = p_{n-1}s_{n-1}^*l_{n-1}x_1 \left( 1 + \frac{s_n^*}{1 - s_n^*} \right) = \frac{p_{n-1}s_{n-1}^*}{1 - s_n^*} l_{n-1}x_1 = l_n x_1 = x_n$$

D'après la relation (6.8)

$$V(F(x, E^*)) - V(x) = (F_1(x, E^*) - x_1^*)^2 - (x_1 - x_1^*)^2 = 0$$

D'où nous obtenons que :  $F_1(x, E^*) = x_1$  et par conséquent  $F(x, E^*) = x$  car nous avons déjà établi ci dessus que  $x_i = l_i x_1$  et d'après (6.5)  $x_i^* = l_i x_1^*$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Donc on a  $\Gamma \subset \{0, x^*\}$ . Nous allons maintenant montrer que zéro ne peut pas être un point oméga limite.

Supposons que zéro est un point oméga limite, alors il existe  $x^0$  dans  $\mathbb{R}_+^n$  tel que la solution  $x(k, x^0)$  avec condition initiale  $x^0$  tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini.

Nous savons que  $V$  est une fonction décroissante le long des trajectoires du système (6.1); alors on a :

$$V(x^0) \geq V(x(k, x^0)) \geq V(0) \quad \forall k \geq 0. \quad (6.9)$$

d'autre part

$$\begin{aligned} V(0) - V(x^0) &= x_1^{*2} + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ &\quad + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n^*}{l_n} \right)^2 \\ &\quad - (x_1^0 - x_1^*)^2 - \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i^0 - x_i^*}{l_i} \right)^2 \\ &\quad - (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n^0 - x_n^*}{l_n} \right)^2 \\ V(0) - V(x^0) &= x_1^0(2x_1^* - x_1^0) + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ \frac{1 - (1 - p_1)s_1^*}{1 - (1 - p_i)s_i^*} \sum_{j=i}^n R_j \right] \left( \frac{x_i^0}{l_i} \right) \left( \frac{2x_i^* - x_i^0}{l_i} \right) \\ &\quad + (1 - (1 - p_1)s_1^*) \frac{R_n}{1 - s_n^*} \left( \frac{x_n^0}{l_n} \right) \left( \frac{2x_n^* - x_n^0}{l_n} \right) \end{aligned}$$

D'où  $V(0) > V(x)$  pour tout  $x \in \{x \in \mathbb{R}_+^n / 0 < x_i < 2x_i^*, \forall i = 1, \dots, n\}$ . Ceci est une contradiction par rapport à la relation (6.9), par la suite  $\Gamma = x^*$ . L'équilibre  $x^*$  est alors globalement asymptotiquement stable. ■

### 6.3 Stabilisation par retour d'état

Nous venons de voir précédemment que pour un effort de pêche constant, l'équilibre non trivial est globalement asymptotiquement stable. Toutefois l'effort de pêche dans la plupart des pêcheries est une quantité qui varie en fonction du temps. Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème qui consiste à stabiliser le système (6.1) autour du point d'équilibre en agissant sur l'effort de pêche que l'on suppose variable au cours du temps. En théorie du contrôle il existe deux méthodes pour stabiliser un système autour d'un équilibre donné : la première stratégie consiste à trouver un contrôle en fonction du temps de sorte que le système soit stable à l'équilibre : on parle de système à boucle ouvert. La deuxième stratégie consiste à trouver un contrôle en fonction des états du système de sorte que le système soit stable à l'équilibre : on parle de stabilisation avec retour d'état. Nous allons nous intéresser dans le cadre de notre travail à cette dernière stratégie de stabilisation . Nous calculons l'effort de pêche en fonction des états du système de sorte que le système (6.1)

soit stable autour d'un équilibre  $x^*$  correspondant à un effort de pêche  $E^*$ . Nous appliquons le résultat suivant [6, 7, 58].

**Proposition 6.3.1** *Soit  $x^*$  un équilibre non trivial correspondant à un effort de pêche constant  $E^*$ . Soit  $\eta$  tel que  $0 < \eta \leq E^*$ .*

*Alors le système (6.1) est globalement stabilisable par le feedback*

$$E(x) = E^* + v(x)$$

où  $v(x)$  est continue et satisfait la relation :

$$\|v(x)\| \leq \eta \quad \forall x \in \Omega$$

$\Omega$  est le domaine des états du modèle (6.1)

Comme la preuve de la Proposition 6.3.1 est constructive, nous la reproduisons ici car elle donne la construction du feedback  $v(x)$ . Nous considérons toujours la fonction de Lyapunov définie dans la preuve de la proposition (6.2.1). On a :

$$\Delta V(x) = V(F(x, E(x))) - V(x) = V(F(x, E^* + v(x))) - V(x)$$

En utilisant le développement de Taylor de  $V \circ F$  au point  $(x, E^*)$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(F(x, E^*) + v(x)) - V(x) \\ &= V(F(x, E^*)) + v(x) \frac{\partial V}{\partial E}(F(x, E^*)) \\ &\quad + v(x)^2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial E^2} V(F(x, E^* + tv(x))) dt - V(x) \\ \Delta V(x) &= V(F(x, E^*)) - V(x) + v(x) \frac{\partial V}{\partial x}(F(x, E^*)) \frac{\partial F}{\partial E}(x, E^*) \\ &\quad + v(x)^2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial E^2} V(F(x, E^* + tv(x))) dt \end{aligned}$$

Soit  $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\phi(x, v) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial E^2} V(F(x, E^* + tv(x))) dt$$

Considérons  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux fonctions réelles continues telles que :  $\theta_1(x) + \theta_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$  et

$$\theta_1(x) \geq \sup_{|v| \leq \eta} |\phi(x, v)|, \quad \forall x \in \Omega \tag{6.10}$$

$$\theta_2(x) \geq \left| \frac{\partial V}{\partial x}(F(x, E^*)) \frac{\partial F}{\partial E}(x, E^*) \right|, \quad \forall x \in \Omega \tag{6.11}$$

On pose :

$$\theta(x) = \frac{\eta}{\eta\theta_1(x) + \theta_2(x)} > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (6.12)$$

Nous construisons le feedback  $v(x)$  :

$$v(x) = -\theta(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(F(x, E^*)) \frac{\partial F}{\partial E}(x, E^*) \right)$$

On vérifie facilement que

$$|v(x)| \leq \eta \quad \forall x \in \Omega$$

Et nous avons :

$$\Delta V(x) = V(F(x, E^*)) - V(x) - v^2(x) \left( \frac{1}{\theta(x)} - \phi(x, v) \right) \quad (6.13)$$

Dans la preuve de la proposition (6.2.1), nous avons montré que

$$V(F(x, E^*)) - V(x) \leq 0$$

D'après les relations (6.12), (6.10) et (6.11) on a aussi  $\frac{1}{\theta(x)} - \phi(x, v) \geq \frac{\theta(x)}{\eta} \geq 0$

D'où on a :  $\Delta V(x) \leq 0$

Ceci montre que l'équilibre  $x^*$  est stable au sens de Lyapunov par le feedback  $E(x) = E^* + v(x)$ .

Montrons maintenant que l'équilibre  $x^*$  est attractif. Pour se faire on pose :

$$\Gamma_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \Delta V(x) = 0 \right\}$$

Soit  $x$  dans  $\Gamma_0$ , alors nous avons  $\Delta V(x) = 0$ , et d'après (6.13) on a :

$$V(F(x, E^*)) - V(x) = 0 \quad \text{et} \quad v(x) = 0$$

toujours dans la preuve de la proposition (6.2.1), nous avons montré que

$V(F(x, E^*)) - V(x) = 0$  implique  $x = x^*$ . On arrive alors à montrer que  $\Gamma_0 = \{x^*\}$ .

D'après le principe de Lasalle nous avons  $x^*$  qui est globalement attractif.  $x^*$  est globalement attractif et stable alors il est globalement asymptotiquement stable par le feedback  $E(x) = E^* + v(x)$ . ■

## 6.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre quelques propriétés de stabilité du modèle de pêche à structure de stade dont la classe des recrutés est décrite par la fonction de recrutement de Beverton et Holt. Nous avons en effet démontré que lorsque l'effort de pêche est supposé constant, l'équilibre non nul du modèle (6.1) est globalement

asymptotiquement stable. En tenant compte du fait que l'effort de pêche est souvent variable, nous avons aussi montré qu'on peut l'utiliser comme terme de contrôle pour stabiliser le système autour d'un point d'équilibre correspondant à un effort de pêche constant donné. En effet, nous exprimons l'effort de pêche comme une fonction des états du système de sorte que le système se stabilise autour de l'équilibre non nul considéré. Rappelons que nous avons dans les chapitres précédents mis en oeuvre des méthodes d'estimation des états des stocks des populations de poissons modélisés en (6.1). En pratique, la propriété de stabilisation du système (6.1) peut être un outil puissant de régulation de la taille des stocks de poissons. En effet, la stabilité autour d'un point d'équilibre positif garantie que la population de poissons considérée est protégée contre l'extinction et qu'il n'y a pas de crainte de surpeuplement. Nous disposons ainsi d'un outil de régulation de certaines ressources halieutiques pour assurer la pérennité de la pêche dans le temps et dans l'espace.



# Chapitre 7

## Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre de cette thèse, deux grands problèmes ont été traités, à savoir l'estimation et le contrôle de la taille des stocks de populations de poissons dont la dynamique est décrite par des modèles de pêche discrets à structure d'âge et de stade. Comme nous le mentionnions dans notre introduction, ces questions sont motivées par la nécessité de doter les décideurs politiques et économiques de moyens scientifiques pour une bonne gestion des ressources halieutiques qui sont de nos jours surexploitées. Pour trouver des réponses aux questions que nous nous sommes posées, nous avons utilisé des techniques bien connues du domaine de l'automatique : la synthèse d'observateur et l'étude du comportement asymptotique de systèmes dynamiques à sorties mesurables. Ces deux aspects de l'automatique sont très bien développés dans le cadre des systèmes dynamiques continus, par contre ils restent des sujets où la recherche est encore très active pour ce qui est du cas des systèmes dynamiques discrets non linéaires.

Au niveau des chapitres 4 et 5 nous avons développé des techniques de synthèse d'observateur et d'observateur intervalle pour des modèles de pêche à structure de stade et d'âge. L'intérêt de ces observateurs réside dans le fait qu'ils utilisent l'information des captures pour donner une estimation de la taille du stock à travers le modèle considéré. Les captures étant très souvent disponibles dans les pêcheries, ces observateurs peuvent dans certains cas aider à avoir une idée de la quantité des stocks de poissons en mer. Toutefois il est important de noter que l'utilisation pratique de ces observateurs nécessite un grand effort dans l'organisation des données au niveau des pêcheries. En effet dans le cadre de notre travail, les observateurs que nous avons construits utilisent des paramètres telles que les taux de mortalité naturelles et par pêche par classe d'âge ou par classe de stade. Au chapitre 6 nous nous

sommes intéressés à l'étude du comportement asymptotique des stocks de poissons, nous avons montré qu'en considérant la fonction de recrutement de Beverton et Holt et en maintenant l'effort de pêche constant durant le temps que dure la pêche, l'équilibre positive du modèle de pêche à structure de stade lorsqu'il existe est globalement asymptotiquement stable. Cette dernière propriété lorsqu'elle est vérifiée permet d'éviter l'extinction des espèces de poissons pêchées. Il est cependant difficile voire impossible de maintenir l'effort de pêche constant à cause du manque de moyens de supervision de l'activité de la pêche dans certaines zones de pêche. Néanmoins des mesures allant dans ce sens sont prises dans certaines pêcheries où l'on impose aux pêcheurs des tailles adéquates de filets, un temps de pêche durant l'année et bien d'autres mesures allant dans le sens de la limitation de l'activité de pêche. Nous avons aussi montré que l'on peut exprimer l'effort de pêche comme une fonction de l'état des stocks disponibles de sorte que le modèle soit globalement asymptotiquement stable autour d'un état d'équilibre.

Bien que les objectifs que nous nous sommes fixés dans l'introduction aient été atteints, les travaux effectués dans cette thèse gagneraient à être poussés davantage pour une prise en charge d'autres considérations qui sont d'actualité dans la gestion des pêcheries. Ainsi en perspective de cette thèse, nous comptons aborder les questions traitées dans le cas des modèles stochastiques. Pour tenir compte des incertitudes dues aux variations environnementales, nous envisageons d'ajouter un bruit aussi bien sur les modèles de dynamique des populations étudiées que sur le modèle des captures. Aussi nous comptons utiliser les observateurs pour développer des logiciels d'estimation des stocks de populations de poissons. Concernant la stabilité, nous comptons pousser la réflexion lorsqu'on considère des fonctions de recrutement autre que celui de Beverton et Holt.

# Bibliographie

- [1] F. Albertini and D. Alessandro, *Observability and Forward-Backward Observability of Discrete-Time Nonlinear Systems*. Math. Control Signals Systems, 2002, 15, pp :275-290.
- [2] P. Albertos, Block multirate Input-Output model for sampled-Data control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35, 1990, pp :1085-1088.
- [3] Anon(2001), Advisory Committee on Fisheries Management (ACFM) : Report of the Arctic fisheries Working Group. *ICES CM 2001/ACFM :19*.
- [4] A. El Assoudi, E. H. El Yaagoubi, and H. Hammouri, *Non-linear observer based on the Euler discretization*, Internat. J. Control, 75, 2002, pp :784-791.
- [5] J. S. Baras, A. Bensoussan and M. R. James, Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters : special cases. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 48, N°5, 1988, pp :1147-1158.
- [6] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr, *Stabilization of discrete-time nonlinear systems.*, C. R.Acad. Sci. Paris, Serie I, 321, 1995, pp :371-374.
- [7] M. Bensoubaya, A. Ferfera, and A. Iggidr. On the stabilization of continuous and discrete time nonlinear systems. In *The 2nd Marrakech International Conference on Differential Equations*, June 1995.
- [8] R. J. H. Beverton, and S. J. Holt, "On The Dynamics of Exploited Fish Populations," Chapman & Hall, London, 1957.
- [9] S.P. Bhattacharyya, Observer design for linear system with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23,1978, pp :483-484.
- [10] A. Boccoti and A. Biglio, *Some remarks about stability of non linear discrete-time control systems*, Nonlinear differ. equa. appl, 8, 2008, pp :425-438.
- [11] L. Boillereaux, J. M. Flaus., A New Approach for Designing Model-Based indirect Sensors, *IEEE Transactions on Control systems Technology*, 8, N°4, 2000, pp :601-608
- [12] M.Boutayeb and D. Aubry, *A Strong Tracking Extended Kalman Observer for Nonlinear Discrete-time Systems*, *IEEE transaction on automatic control*, vol 44, N°8, 1999, pp :1550-1556.

- [13] M. Boutayeb and M. Darouach, Observer design for Linear Time-invariant Systems *Decision and Control, Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, 4, 2000 :pp :3183-3187.
- [14] C. I. Byrnes, W. Lin and B. K. Ghosh, *Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback*, systems and Control Letter, 21, 1993, pp :255-263.
- [15] G. Chen, J. Wang, L.S. Shieh., Interval kalman Filtering, *IEEE Transactions on Aerospace and electronic Systems*, 33, N° 1, 1997, pp :250-259.
- [16] G. Ciccarella, M. Dalla Mora, and A. Germani, *Observers for discrete-time nonlinear systems*, *Systems Control Lett.*, 20, 1993, pp :373-382.
- [17] D.H. Cushing *The counting of fish with an echo sounder*. Rapp. P.-V. Réun. CIEM, 1964, pp :155-190
- [18] M. Darouach, M. Zasadzinski and S.J. Xu, Full-order observer for linear systems with unknown inputs *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, N°3, 1994 pp :606-609.
- [19] W. Doubleday, *Harvesting in matrix population models*, *Biometrics*, 31, 1975, pp :189-200.
- [20] S. N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag New York, Inc, 1996.
- [21] FAO, *Rapport du deuxième groupe de travail AD HOC sur les Chinchards et les Maquereaux de la zone nord du COPACE*, Organisation des Nations Unies pour l’Alimentation et l’Agriculture. ROME, 1987
- [22] W. W. Fox , *An exponential surplus yield model for optimizing exploited fish population*. *Trans. Am. Fish. Soc*, 99, N°1, 1970, pp :80-88.
- [23] D.J. Garrod *Empirical assessments of catch effort relationship in the North Atlantic cod stocks*. *Res Bull ICNAF*, 6,1969, pp :26-34.
- [24] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, *A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors*, *IEEE Trans. Autom. Control*, 37, 1992, pp :875-880.
- [25] A. Gels, *Applied Optimal Estimation*, MA :MIL press, 1974.
- [26] W. M. Getz and R. G. Haight, “Population Harvesting. Demographic Models of Fish, Forest, and Animal Resources,” Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [27] A. Guiro, A. Iggidr and D. Ngom *Interval numerical observer : Application to a discrete time nonlinear fish model*, *Accepté au cari 2008*, A paraître.
- [28] H. V. Gonzáles, J. M. Flaus and G. Acuna., Moving horizon state estimation with global convergence using interval techniques : application to biotechnological processes, *Journal of Process Process Control*,14 ,2003, pp :325-336.

- 
- [29] J.L. Gouze , A. Rapaport and M.Z. Hadj-Sadok, Interval observers for uncertain biological systems, *J. Ecol. Modell.*, 133, N°1, 2000, pp :45.
- [30] M. Graham, *Modem theory of exploiting a fishery and application to North Sea rawlling.* *J. Cons. perm. int Explor Mer*, 10, N°2, 1935, pp :264-274.
- [31] J. W. Grizzle et P.E Moraal, *Newton, Observers and Nonlinear Discrete-time Control.* Proceedings of the 29 th Conference on Decision and Control, 1990, pp :760-767.
- [32] I. Gyori, G. Ladas and P.N .Vlahos, *Global attractivity in delay difference equation*, *Nonlinear anal*, 17, N°5, 1991, pp :473-479.
- [33] M.Z. Hadj-Sadok and J.L. Gouze, *Interval observers for uncertain models of wastewater treatment processes*, CONTROLO'98, Third Portuguese Conference on Automatic Control, 1998.
- [34] M.Z. Hadj-Sadok and J.L. Gouze, *Estimation of uncertain models of activated sludge processes with interval observers*, *J. Process Control*, 11, 2001, pp :299.
- [35] M. Hou and P.C. Muller, Disturbance decoupled observer design : A unified viewpoint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, N°6, 1994, pp :1338-1341.
- [36] M. Hou and P.C. Muller, Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, 1992, pp :872-875.
- [37] A. Iggidr, *Controllability, observability and stability of mathematical models*, in *Mathematical Models.* In *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)*. Ed. Jerzy A. Filar. Developed under the auspices of the UNESCO, Eolss Publishers, Oxford,UK, [[http ://www.eolss.net](http://www.eolss.net)].
- [38] A. Iggidr, M. Oumoun, and J. Vivalda, *State estimation for a fish population via a nonlinear observer*, in "Proc. the 2000 American Control Conference", Chicago, Illinois, 2000, pp : 28-30.
- [39] O.L.R. Jacobs, *Introduction to control theory (second edition)*, Oxford University Press, 1993.
- [40] J. Jamet et Y. Lagoin, *Manuel d'instruction et de perfectionnement des agents des services des pêches maritimes des pays tropicaux.* *Océanographie Appliquée aux pêches*, Tome I, 1981, 300 p.
- [41] L. Jaulin, E. Walter, Guaranteed bounded-error parameter estimation for non-linear models with uncertain experimental factors, *Automatica*, 35, 1999, pp :849-856.
- [42] A.H. Jaswinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, New York Academic, 1970.

- [43] J. Jin, M.J. Tank and C. Park, Time-delayed state and unknown input observation *Int. J. Control*, 66, N°5, 1997, pp :733-745.
- [44] M. Jolivet et A. Pavé. *L'environnement : un champ de recherche en formation*. Nature, sciences et société, 1, N°1, 1993, pp :6-20.
- [45] V. Jurdjetic and J. P. Quinn, *Controllability and Stability*, J. Differential Equations, 28, 1978, pp :381-389.
- [46] R.E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem's*, Transaction ASME-Journal of Basic Engineering, 1960, pp :35-45.
- [47] R.E. Kalman and J.E. Bertram, *Control system analysis and design via the second method of lyapunov II discrete systems*, Trans. ASME Sc. D.J. Basic engineering, 82, 1960, pp :394-400.
- [48] E. W. Kamen, Block form observers for linear time-varying discrete-time systems. *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, USA, 1993, pp :355-356.
- [49] I. Karafyllis and C. Kravaris, *On the observer problem for discrete-time control systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 52, 2007, pp :12-25.
- [50] W.G. Killey and A. C. Peterson, *Difference Equation : An Introduction with Applications*, academic press, New York, 1989.
- [51] K. Kimura, *On the detection of fish-groups by an acoustic method*. J. Imp. Fish. Inst., Tokyo, 1929, 24(2),pp :41-45
- [52] G. Kreisselmeier and R. Engel, *Nonlinear observers for autonomous Lipschitz continuous systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 4, N°8, 2003, pp :451-464.
- [53] A. J. Krener and W. Respondek, *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*, SIAM Journal on Control and Optimization, 23, 1985, pp :197-216.
- [54] A. J. Krener and M. Xiao, *Nonlinear observer design in the Siegel domain*, SIAM J. Control Optimization, 41, 2002, pp :932-953.
- [55] J. P. Lasalle, *The Stability and Control of Discrete Processes*, Springer-Verlag New York Inc. 1986.
- [56] W. Lee et K. Nam, *Observer Design for Nonlinear Discrete-time Systems*, Proceedings of the 29 th Conference on Decision and Control, 1990, pp :768-769.
- [57] F.L. Lewis, *Optimal Estimation with an. Introductory to Stochastic Control theory*, John Wily and sons, Inc, 1986.
- [58] W. Lin, *Further results on global stabilization of discrete non linear systems*, systems and Control Letter, 29, 1996. pp :51-59.
- [59] W. Lin and C.I. Byrnes, *Passivity and Absolute Stabilization of a Class of Discrete-time Nonlinear Systems*, Automatica, Vol 31, No 2, 1995, pp :263-267.

- 
- [60] D. G. Luenberger, *An introduction to observers*, IEEE Trans. Automat. Control, 16 : 1971, pp :596-602.
- [61] P. Magal and D. Pelletier, *A fixed point theorem with application to a model of population dynamics*, J. Difference Equ. Appl., 3, 1997, pp :65-87.
- [62] P.S. Maybeck, *Stochastic models, estimation, and control*, vol 141, 1979.
- [63] L. Midttun and O. Nakken, *Some results of abundance estimation studies with echo integrators*. Rapp. P.-V. Réun. CIEM, 1977, pp :253-258.
- [64] R.B. Mitson and R.J. Wood, *An automatic method of counting fish echoes*. J. Cons. CIEM, 26(3), 1961, pp :281-291.
- [65] P. Moraal and J. Grizzle, *Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements*, IEEE Trans. Autom. Control, 40, 1995, pp :395-404.
- [66] C. Navarro Hernandez, S. Banks, and M. Aldeen, *Observer design for nonlinear systems using linear approximations*, IMA J. Math. Control Inf., 20, 2003, pp :359-370.
- [67] D. Ngom, A. Iggidr, A. Guiro and A. Ouahbi, *An Observer for a nonlinear age-structured model of a harvested fish population*, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 5, N°2, 2008, pp : 337-354
- [68] R. Nikoukhah, S. L. Campbell and F. Delebecque, *Observer Design for General Linear Time-invariant Systems*. *Automatica*, 34, N°3, 1998, pp :575-583.
- [69] A. Ouahbi, *Observation et contrôle de modèles non linéaires de populations marines exploitées*, PH. D Thesis University of marrakech, Marroco, 2002.
- [70] D. Pelletier and P. Magal, *Dynamics of a migratory population under different fishing effort allocation schemes in time and space*, Canadian Journal of Fisheries and Aquatic sciences, 53, 1996, pp :1189-1199.
- [71] J.J. Pella et P.K. Tomlinson, *A generalized stock production model*. Bull IATTC, 13, 1969, pp :419-496.
- [72] A. Rapaport and D. Dochain, *Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs*, *Mathematical Biosciences*, 193, 2005. pp :235-253.
- [73] W. E. Ricker, *Stock and recruitment*, J. Fish. Res. Board Can., 11, 1954, pp :559-623.
- [74] A. Saberi, A.A. Stoorvogel and P. Sunniti, *Exact, almost and optimal input decoupled (delayed) observers*. *Int. J. Control*, 73, N°7, 2000, pp :552-581.
- [75] S. Saila and E. Lorda, *Sensitivity analysis applied to a matrix Model of the Hudson river Striped bass population*, In W. van Winkle, editor. Proceedings of conference on assessing the effects of power-plant induced mortality on fish population., Pergamon Press, 20, 1977, pp :311-332.

- [76] M.B.Shaeffer, *Some aspects of the dynamics of population important to the management of the commercial marine fisheries*. Bull. Int. Amer. trop. tuna comm, 1, N°2, 1954, pp :26-56.
- [77] M.B.Schaeffer *A study of the dynamics of the fishery for yellow fin tuna in the Eastern Tropical Pacific*. Ocean. Bull. Int. Amer : Trop. Tuna Comm. 1957. 2, N°6, pp :247-285.
- [78] J. G. Shepherd, *A family of general production curves for exploited populations*, Mathematical Biosciences, 59, 1982, pp :77-93.
- [79] Y. Song and W. gizzle, *The extended kalman filter as a local asymptotic observer for discrete-time nonlinear systems*, Journal of Mathematical systems, Estimation, and Control, 5,N°1, 1995, pp :59-78.
- [80] H.W. Sorenson, *Least-Squares Estimation :from Gauss to Kalman*, IEEE :spectrum, 7, pp :63-68.
- [81] S. Sundaram and C.N. Hadjicostis, *Delays observers for linear systems with unknown inputs* *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52, 2007, pp :334-339.
- [82] S. Touzeau, *Modèle de contrôle en gestion des pêches*. PhD thesis, Thèse de Doctorat de l'Université de Nice-Sophia Antipolis, Science de l'ingénieur (France), 1997. 266 p.
- [83] S. Tuljapurkar and H. Caswell, *Structured population models in marine, terrestrial, and fresh- water systems : 1993 Summer school at Cornell university*. Population and community biology series 18, Chapman Hall, Summer school on Structured population models, Ithaca (NY US), 1997. 643 pp.
- [84] J. Tsinias, *Stabilizability of discrete-time non linear systems*, IMA. J control Inform, 6, 1989. pp :135-150.
- [85] M.E. Valcher, *State observers for discrete-time linear systems with unknown inputs*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, N°2, 1999, pp :397-401.
- [86] L. C. Westphal, *Handbook of control systems engineering*, Second Edition, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [87] A. Wikan and A. Eide, *An Analysis of a Nonlinear Stage-Structured Cannibalism Model with Application to the Northeast Arctic Cod Stock*, Bulletin of Mathematical Biology, 66, 2004, pp :1685-1704.
- [88] W. M. Wonham *On pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear systems*. IEEE Trans. Automat. Control, 12, N°6, 1967, pp :660-665.
- [89] M. Xiao, N. Kazantzis, C. Kravaris, and A. J. Krener, *Nonlinear discrete-time observer design with linearizable error dynamics*, IEEE Trans. Autom. Control, 48, 2003, pp :622-626.



- 
- [90] F. Yuli, L. Xiaoxim and L Qi, *New criteria of stability and boundedness for discrete systems*, *Nonlinear anal*, 41, 2000, pp :779-715.
- [91] G. Zimmer, *State observation by on-line minimization*, *Int. J. Control*, 60, 1994, pp :595-606.