

UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS
U.F.R de Sciences Appliquées et Technologie

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE
DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

Mamadou SY
Diplômé d'Études Approfondies

PARAMÉTRISATION EN MÉCANIQUE DES FLUIDES :
ANALYSES MATHÉMATIQUES DE QUELQUES MODÈLES.

Soutenue publiquement le 15 décembre 2003, devant la commission d'examen :

Messieurs	Olivier BESSON	Président, Examineur
	Benoît DESJARDINS	Rapporteur
	Daniel LEROUX	Examineur
	Hamidou TOURÉ	Examineur
	Didier BRESCH	Codirecteur de thèse
	Mary Teuw NIANE	Codirecteur de thèse.

À Madame Aïda NDAO in memoriam...

À mes PARENTS et à KHADY.

REMERCIEMENTS

Je ne saurais assez remercier mes deux directeurs de thèse dont les qualités tant intellectuelles qu'humaines m'ont beaucoup apporté.

Monsieur Dider BRESCH pour avoir accepté de diriger ce travail. Son sens aigu du travail bien fait et son intuition mathématique m'ont permis de mener à bien ce travail. Il n'a cessé d'être pour moi une source d'idées et de soutiens permanents. Toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Monsieur Mary Teuw NIANE, si ce travail a abouti c'est grâce à lui. La qualité de son enseignement m'a confirmé mon goût pour les mathématiques et à travers son cours sur l'analyse mathématique des équations de Navier-Stokes, il m'a initié à la recherche. Je le remercie pour son sens aigu du dévouement pour la collectivité.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait Monsieur Benoît DESJARDINS de participer au jury mais aussi et surtout d'avoir accepté la tâche ingrate de rapporteur. Malgré ses charges et en dépit du peu de temps que je lui ai laissé, il a pris soin de tout relire. Merci pour les remarques pertinentes.

J'aimerais aussi remercier Monsieur Olivier BESSON pour l'honneur qu'il me fait de participer au jury, d'avoir accepté de le présider, de m'avoir toujours accueilli à l'université de Neuchâtel mais aussi d'avoir soutenu le travail en collaboration avec Monsieur Soulève KANE avec qui je partage depuis tant d'années une solide amitié, cimentée par un goût commun des mathématiques.

Je souhaite exprimer ma gratitude à Messieurs Hamidou TOURÉ, Daniel LEROUX qui me font l'honneur de participer au jury.

C'est grâce à Monsieur Jacques SIMON mon "grand père" scientifique que j'ai connu Didier BRESCH. Sa rigueur dans la rédaction a beaucoup apporté à mes codes sources. Je le remercie pour les longues heures consacrées à l'explication de certains détails techniques de \LaTeX un format génial de \TeX qu'il a conçu.

Des discussions, les idées s'éclaircissent et des discussions j'ai eu la chance d'en avoir avec Jérôme LEMOINE. Merci Jerry.

Je remercie tous mes collègues et le PATS de l'UFR SAT. Ils ont tous participé à ce résultat.

Je remercie mes collaborateurs, Thierry HUCK de l'UBO dont la collaboration m'a permis de mieux cerner certaines questions physiques liées à l'océanographie et El Hassan ESSOUFI de l'université Moulay Ismail.

Je remercie le Réseau EDP-Contrôle-Modélisation pour le soutien apporté à la préparation et à la soutenance de cette thèse.

Je suis reconnaissant à Messieurs Bernard SARAMITO, Youcef AMIRAT, Madame Noëlle ROUGANNE (Mère Teresa du doctorant), pour leur disponibilité et leur soutien constants.

Je voudrais aussi témoigner de mes sentiments les plus profonds à tous mes amis compagnons de thèse et aux membres du groupe de travail e.d.p du LMA-CNRS (UMR 6620), à tous les membres du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique de l'université Gaston Berger de Saint-Louis.

Évidemment je n'oublie pas les membres du club Croissants. Le vendredi matin est l'un des moments forts dans la vie au labo. Merci à vous tous.

Un remerciement spécial à la famille BAUTHIER : Adèle, Gérard et Dame Catherine Bresch. Ils m'ont accueilli, soutenu et encouragé depuis mon arrivée à Clermont.

J'exprime ma reconnaissance à toute ma FAMILLE et à mes AMIS. Baïdy et Mariame, SeySoo, merci d'avoir toujours été là.

Des remerciements adéquats pour KHADY auraient nécessité une page à eux seuls. Je terminerai cette page seulement en lui disant MERCI.

Table des matières

Introduction générale

Chapitre 1. Equations de type Kazhikhov-Smagulov : dérivation et résultats d'existence

1.1. Introduction	19
1.2. La relation fondamentale de Kazhikhov-Smagulov	24
1.3. De nouveaux modèles de type Kazhikhov-Smagulov	27
1.3.1. Le modèle de pollution	27
1.3.2. Le modèle de combustion	28
1.3.3. Le modèle général	30
1.4. Résultats d'existence	32
1.4.1. Existence de solution faible pour le modèle de pollution	33
1.4.2. Existence de solution faible pour le modèle de combustion	40
1.4.3. Existence de solutions faibles pour le modèle général	43
1.5. Un résultat de convergence	46

Chapitre 2. Equations PG :

Obtention du modèle et paramétrisations de petites échelles

2.1. La circulation thermohaline "à la main"	55
2.1.1. Une circulation primaire "adiabatique"	55
2.1.2. Une circulation secondaire "efficace"	55
2.1.3. Quelques remarques complémentaires	56
2.2. Obtention des équations planétaires géostrophiques	57
2.2.1. Équations planétaires géostrophiques	57
2.2.2. Conditions limites et processus sous-maillles \implies dissipation	59
2.3. Paramétrisation de la viscosité et des couches limites	60
2.3.1. Différents choix de dissipation et de couches limites latérales	60
2.3.2. Équations planétaires géostrophiques et milieux poreux	61
2.3.3. D'autres relations de paramétrisation en océanographie	68
2.4. Commentaires	70

Chapitre 3. Analyse mathématique des équations PG

3.1. Convection de Bénard et milieux poreux	72
3.1.1. Loi de Brinkman / Équations primitives	72
3.1.2. Loi de Darcy / Modèle “hypervisqueux”	80
3.1.3. Loi de Darcy en domaines minces/ processus de filtration	85
3.2. Convection de Bénard et milieux poreux avec fond variable	87
3.3. Justification des équations PG	92

Introduction générale

Le travail qui est mené dans cette thèse tourne autour de deux thèmes principaux suivants : Les équations de type Kazhikhov-Smagulov et les équations planétaires géostrophiques ou thermohalines. Chaque thème constitue une partie indépendante.

Le premier volet est composé d'un chapitre qui regroupe quelques uns des résultats obtenus sur le sujet :

- **De nouveaux systèmes de type Kazhikhov-Smagulov : modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach**, en collaboration avec D. BRESCH et E. H. ESSOUFI, a fait l'objet d'une note parue dans C. R. Acad. Sci. Paris, 335, Série I, (2002), 973–978.
- **Some new Kazhikhov-Smagulov type models : pollution, combustion**, article qui développe et améliore les résultats donnés dans la note de l'académie, en collaboration avec D. BRESCH et E. H. ESSOUFI, en préparation.
- **Equations de Kazhikhov-Smagulov : densité initiale pouvant s'annuler**, article en préparation.

Le deuxième volet se compose de deux chapitres qui développent deux articles :

- 9 - **Convection in rotating porous media: The planetary geostrophic equations, used in geophysical fluid dynamics, revisited**, en collaboration avec D. BRESCH, paru dans Cont. Mech. Thermodyn., 15 (2003) 3, 247-263.
- 9 - **Circulation thermohaline et équations planétaires géostrophiques : Propriétés physiques, numériques et mathématiques**, en collaboration avec D. BRESCH et T. HUCK, paru dans Ann. Math. Blaise Pascal 9 No 2 (2002), 181–212.

Les équations de type Kazhikhov-Smagulov.

L'idée d'introduire une hypothèse compatible entre le tenseur du taux de déformation et la loi liant la partie potentielle de la vitesse à la densité est née, pour la première fois à notre connaissance, du travail réalisé dans [8] pour le système de Korteweg. Ce qui a donné un premier résultat complet d'existence globale de solutions faibles pour ce type de système avec le tenseur de Reynolds $-\text{div}(h\nabla u)$.

Dans la section 1.2 du chapitre 1, on montre comment, à partir de la loi de Fick, on dérive la relation fondamentale de Kazhikhov-Smagulov. Elle est essentielle pour le développement du modèle dit de Kazhikhov-Smagulov. Cette relation est aussi importante pour les modèles généralisés de type Kazhikhov-Smagulov développés dans [7].

Ainsi, on établit un nouveau modèle pour l'évolution du sel ou d'un polluant dans une couche mince de fluide ainsi qu'un nouveau modèle de combustion à faible nombre de Mach qui possèdent chacun une solution faible globale sans restriction sur les données contrairement aux modèles précédents avec la diffusion standard.

Le modèle de base avec du sel dissout dans un fluide compressible a été étudié en premier par Graffi dans [12], et étendu par Kazhikhov et Smagulov dans [15] pour tenir

en compte des effets non linéaires pour une petite diffusion en négligeant certains termes. Ce résultat a été complété par Beirao da Veiga dans [2] pour tenir en compte tous les effets non linéaires en conservant tous les termes. Tous ces résultats concernent le cas où la diffusivité est supposée petite.

Physiquement on considère un écoulement dans un domaine bi ou tridimensionnel $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3 et on note $[0, T]$ l'intervalle de temps, pour $T > 0$.

Le modèle est dérivé à partir des équations de Navier-Stokes compressibles

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \lambda \operatorname{div}(\Psi(\rho)d(u)) + \nabla p + (\mu + \tilde{\lambda})\nabla(\operatorname{div}u) = \rho f, \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \end{cases}$$

où $d(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$.

La vitesse u et la densité ρ sont supposées vérifier

$$u = v \mp \lambda \nabla \varphi_{\pm}(\rho) \text{ avec } \operatorname{div} v = 0 \quad (2)$$

où

$$\rho \nabla \varphi_{\pm}(\rho) = \pm \nabla \Psi(\rho) \quad (3)$$

et $\Psi > 0$. On note respectivement par φ_- , φ_+ la fonction donnant $-$ ou $+$ devant $\nabla \Psi$ dans (3). Deux exemples de telles relations peuvent être trouvés dans [1], [16]. Il s'agit d'un modèle de dispersion de polluants dans une couche mince de fluide et d'un modèle de combustion à faible nombre de Mach.

En ce qui concerne le premier exemple, la relation (2) est connue sous le nom de la loi de Fick avec $\varphi_+ = \log \rho$. Le modèle de combustion à faible nombre de Mach a été proposé par A. MAJDA où $\varphi_- = 1/\rho$.

L'idée est maintenant de transformer les équations (1) en équations sur ρ and v en utilisant la relation (2). En choisissant $\Psi(\rho) = 2\mu/\lambda$ et en utilisant (2) et $\varphi_+ = \log \rho$, A.V. KAZHIKHOV et Sh. SMAGULOV ont obtenu le modèle qui suit en négligeant les termes en $O(\lambda^2)$

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \lambda \Delta \rho, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \nabla \rho \cdot \nabla v - \lambda v \cdot \nabla \nabla \rho = -\nabla P + \mu \Delta v + \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Ce modèle suppose une faible diffusivité et a été appelé modèle de Kazhikhov-Smagulov par F. FRANCHI et B. STRAUGHAN, voir [10]. La densité initiale ρ_0 est supposée satisfaire $0 < m \leq \rho_0 \leq M < +\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$. Afin d'obtenir un résultat d'existence globale de solutions faibles, ils ont alors fait l'hypothèse restrictive concernant λ , μ , m et M .

En choisissant $\Psi(\rho) = \rho$ et $\lambda = \mu$, on montre que l'on obtient bien le modèle de Kazhikhov-Smagulov modifié (4), avec le tenseur de diffusion $\operatorname{div}(\rho \nabla v)$, sans aucune hypothèse de petitesse sur la diffusivité λ . Notre nouveau modèle pour l'évolution de sel

ou de polluant dans une couche mince de fluide possède une solution faible globale sans restriction sur les données. Tous ces travaux posent la question du domaine de validité du terme de diffusion $-\lambda\Delta u$.

Plus généralement, si l'on choisit la relation (3) entre Ψ et φ_{\pm} avec la relation (2), on obtient le modèle de type Kazhikhov-Smagulov

$$(5) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho - \lambda \Delta \Psi(\rho) = 0, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \operatorname{div}(\Psi(\rho) d(v)) - \lambda v \cdot \nabla \nabla \Psi(\rho) - \lambda \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla v + \nabla P = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

On montre que ce modèle possède une solution faible globale si la fonction Ψ est strictement croissante, de classe $C^1([m, M])$, avec $\Psi \geq c > 0$.

Ceci donne, par exemple, un premier résultat d'existence globale de solutions faibles dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ or 3) pour le modèle de combustion à faible nombre de Mach décrit dans [16] p. 281 et pour lequel P-L. Lions donne un résultat d'existence globale de solutions faibles en dimension deux dans \mathbb{R}^2 pour ρ proche de l'équilibre. Dans ce cas $\varphi_- = 1/\rho$, $\Psi(\rho) = \log \rho$ avec $m > 1$.

Dans le chapitre 1, nous rappelons brièvement les résultats obtenus dans [1] p. 140. pour le modèle de Kazhikhov-Smagulov (4).

Dans les travaux faits dans [2], [3], une telle simplification n'a pas été faite et les équations entières ont été traitées. C'est-à-dire les équations avec les termes d'ordre deux en λ . L'auteur montre alors l'existence d'une unique solution locale pour des données initiales et une force extérieure arbitraires, et l'existence d'une unique solution forte globale pour des données initiales et un champ de force extérieure petits. Dans [3], les auteurs montrent l'existence locale en temps de solutions suffisamment régulières, avec un domaine et des données assez réguliers. L'unicité est ainsi prouvée pour la plupart des solutions.

Dans [20], P. Secchi montre l'existence, pour un écoulement bidimensionnel, d'une unique solution globale si le coefficient de diffusion λ est petit et la convergence (quand $\lambda \rightarrow 0$) pour les écoulements bidimensionnels et tridimensionnels vers les solutions correspondantes pour le système de Navier-Stokes pour les fluides non homogènes.

On donne également, à notre connaissance, le premier résultat d'existence de solutions faibles globales pour le modèle de combustion en choisissant la viscosité en fonction de ρ .

Dans [9], P. Embid démontre l'existence locale en temps de solutions faibles pour une diffusion régulière générale $\mu(\rho)$. Un choix particulier de μ va nous permettre de prouver l'existence d'une solution globale en temps.

Le système (4) a été beaucoup étudié, mais seulement dans le cas d'une densité initiale strictement positive. C'est-à-dire dans le cas où il existe $m > 0$ tel que $\rho_0 \geq m > 0$. Toutes les références citées plus haut ont fait cette hypothèse.

Dans [24], on montre qu'on obtient bien un système bien posé avec une densité initiale s'annulant. On s'inspire des travaux faits par Simon [21] pour les équations de Navier-Stokes non homogènes avec une densité initiale s'annulant.

A notre connaissance l'étude qu'on a faite est nouvelle et elle permet de généraliser les résultats au cas $\rho_0 \geq 0$.

Dans la dernière section du chapitre 1, on montre que la solution du système (4) converge vers celle de l'équation de Navier-Stokes non homogène avec une densité initiale s'annulant quand λ tend vers 0, avec des conditions aux bords et initiales appropriées.

Les équations planétaires géostrophiques (PG).

Plusieurs mécanismes excitent différents mouvements de l'océan : attraction et orbite planétaire, tectonique, irruptions sous marine, vent, etc... La circulation thermohaline trouve son origine dans les différences de densité pouvant exister à l'intérieur de l'océan. Lorsqu'elle se trouve en contact avec l'atmosphère, une quantité d'eau donnée va subir des précipitations ou au contraire être soumise à l'évaporation, se réchauffer ou se refroidir. Ces phénomènes vont influencer sur la température et la salinité de la dite quantité d'eau, donc sur sa densité. Les mouvements advectifs horizontaux au sein des océans ayant des échelles de temps plus courtes que les phénomènes de diffusion, les caractéristiques créées par contact avec l'atmosphère vont être conservées par la quantité d'eau assez "longtemps". C'est la notion de masse d'eau, aux caractéristiques propres en salinité, température, mais aussi oxygène, sels nutritifs, gaz radioactifs. Du fait de ces traceurs conservatifs, une masse d'eau créée en un point du globe peut être suivie et repérée tout au long de son écoulement.

Donc la circulation océanique thermohaline, mise en mouvement par les échanges de chaleur et d'eau douce entre l'océan et l'atmosphère, génère des vitesses suffisamment lentes (cm/s) pour justifier une dynamique simplifiée, diagnostique, appelée planétaire géostrophique

$$\begin{cases} \varepsilon D_1 v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, \\ \varepsilon D_2 w + \partial_z p = T, \\ \operatorname{div}_x v + \partial_z w = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_z T + Q_1 T = Q, \end{cases}$$

où $u = (v, w)$ avec $v = (v_1, v_2)$, p , T représentent le champ de vitesses, la pression, la température, $x = (x_1, x_2)$ est la composante horizontale et z celle verticale, D_1 , D_2 and Q_1 sont des opérateurs différentiels utilisés pour paramétriser les processus à petites échelles, Q représente le terme source de chaleur, ε est le nombre de Rossby, le terme $f v^\perp = (-f v_2, f v_1)$ désigne la force de Coriolis où $f = (1 + \beta x_2)$, avec β une constante, correspond au paramètre de Coriolis dans une approximation du plan β , voir [53]–[54].

Tout au long de ce travail, les symboles ∇_x , Δ_x , div_x et rot_x vont désigner respectivement le gradient horizontal, le laplacien horizontal, les opérateurs de divergence et du rotationnel horizontaux.

Sa mise en oeuvre dans un bassin océanique réaliste comportant par exemple des frontières latérales nécessite une paramétrisation de la dissipation induite par la turbulence d'échelles sous-mailles et des conditions aux limites latérales, et réintroduit inévitablement des couches limites de petites échelles, dont l'influence sur la solution finale est d'ordre un !

Néanmoins ces équations permettent un certain nombre d'applications théoriques, conceptuelles, et numériques idéalisées, qui sont beaucoup plus difficiles à mettre en oeuvre avec les équations traditionnelles dites primitives, comme l'analyse de stabilité linéaire de la circulation générale.

Il est important de rappeler que les équations planétaires géostrophiques sont dérivées à partir des équations de Boussinesq ou équations primitives habituellement utilisées en océanographie [53], [54], [40] et [64], par une analyse d'échelle pour des études climatiques de résolution brute typique. Cette analyse d'échelle montre qu'on peut négliger les termes non linéaires et ceux dérivés en temps dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Les études mathématiques, plus récentes, sont principalement dédiées aux problèmes d'existence globale de solutions faibles ou fortes, ou à l'existence de bornes sur la dimension d'attracteur [14]. Notons que certaines équations planétaires géostrophiques correspondent à des équations de convection en milieux poreux minces, voir [11].

Plusieurs utilisations numériques de ces équations ont été faites dans la littérature océanographique, voir dans [59], [60], [36], [16], [17], [18], [84], [32] et [35], avec différents choix pour la dissipation et les conditions aux limites.

Pour éliminer les difficultés physiques et numériques liées à la résolution des équations planétaires géostrophiques, plusieurs modèles avec friction et diffusion sont proposés par exemple par Samelson et Vallis dans [62].

Une viscosité linéaire est souvent proposée dans la composante horizontale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et une diffusion horizontale dans l'équation de la thermodynamique.

Dans le chapitre 2 nous décrivons l'asymptotique qui mène aux équations planétaires géostrophiques ou équations thermohalines. Nous donnons ensuite quelques relations suivant les paramétrisations pour la dissipation. Les systèmes obtenus sont équivalents aux systèmes de convection de Bénard dans un milieu poreux mince et anisotrope avec la loi de Darcy ou celle de Brinkman.

Le lecteur intéressé par les études numériques sur les paramétrisations est renvoyé à [32]. Nous indiquons également certains problèmes ouverts qui intéressent particulièrement les océanographes.

Dans le chapitre 3, on donne quelques résultats mathématiques pour certaines équations planétaires géostrophiques ou encore équations thermohalines obtenues dans le chapitre 2. On regarde si les systèmes sont bien posés en étudiant en particulier des questions d'existence et des propriétés des solutions faibles de ces équations.

L'objectif est d'étudier les effets des différents termes de friction et de diffusion, et d'analyser les conditions aux bords appropriées pour les modèles correspondants. Cette partie est importante car les choix faits par les physiciens sont empiriques et font l'objet de discussions et d'études numériques. Ça peut être intéressant de comprendre les avantages mais aussi les insuffisances attachés à chaque modèle.

Une telle étude a été récemment initiée dans [64]–[65] et complétée dans [14] pour un domaine $\Omega = \omega \times (-h, 0)$ avec $h = \text{cte}$ et ω un domaine bi-dimensionnel régulier ou un carré.

Nous montrons qu'il est possible d'étendre quelques uns de ces résultats dans des domaines particuliers par le biais de relations simples entre la vitesse verticale et la température. Ce qui conduit à une approche unifiée pour le modèle visqueux avec différentes

conditions aux bords, le modèle avec traînée linéaire avec une paramétrisation hypervisqueuse, des équations planétaires géostrophiques et aussi pour le modèle utilisé en industrie pour les procédés centrifuges. Des relations similaires sont utilisées par exemple dans des résultats de stabilité dans la convection en milieu poreux, voir par exemple dans [46] page 144. Les résultats de régularité obtenus dans [85], [86] doivent être utilisés dans des domaines très compliqués pour obtenir l'unicité dans le cas visqueux. Avec ces types de relations, nous sommes capables de généraliser les conditions aux bords étudiées dans [64], [14] avec la paramétrisation visqueuse.

On montre qu'un contrôle de T dans $L^2(H_X^2 H_Z^1)$ est suffisant pour obtenir la régularité minimale sur la vitesse verticale permettant de donner un théorème d'existence globale de solutions faibles pour les équations avec paramétrisation hypervisqueuse.

Notons les travaux récents faits dans [15] où les auteurs montrent que les conditions aux bords sur la température sont naturelles à partir des conditions aux bords sur la vitesse. Ils utilisent alors une paramétrisation dans laquelle le terme bilaplacien horizontal prend en compte le terme de rotation de la terre.

Nous indiquons également que l'orientation du domaine est importante pour assurer l'existence de solutions faibles dans le cas d'un milieu poreux de petite épaisseur gouverné par la loi de Darcy. L'existence de solutions faibles pour le système habituel des équations planétaires géostrophiques, est aussi prouvée.

Dans la section 3.2, on considère une paramétrisation hypervisqueuse dans un domaine à fond s'annulant sur les bords. On montre que la vitesse horizontale v est explicitement donnée par la température et la fonction courant pour laquelle on a dérivé une équation elliptique dégénérée en prenant en compte la bathymétrie.

Ce résultat concerne les équations elliptiques dégénérées. Dans [5], ils démontrent un résultat de régularité avec profondeur s'annulant sur le rivage de la même façon que celui obtenu par [9] pour les équations verticales géostrophiques.

On peut trouver de plus amples applications en océanographie de cette régularité dans [5]. D'autres résultats mathématiques ont été récemment obtenus en planétaire géostrophique tels que la décroissance d'énergie des solutions dans \mathbb{R}^3 , voir [69]. Ces résultats sont utiles pour mieux comprendre l'évolution globale des écoulements géophysiques. Le lecteur intéressé par la convection en milieux poreux et par des résultats de stabilité peut consulter avec profit [50], [51].

L'étude des écoulements en milieux poreux tournants est importante dans d'autres applications qu'en océanographie; telles que les industries alimentaires, chimiques, les processus de filtration centrifuge et des machines tournantes, voir par exemple [78].

La justification mathématique des équations planétaires géostrophiques à partir des équations primitives est encore un problème ouvert. Dans la section 3.3, nous donnons un résultat mathématique de convergence entre le modèle de Salmon 3D c'est-à-dire les équations planétaires géostrophiques avec traînée linéaire $\varepsilon u_\varepsilon$ et le modèle planétaire géostrophique classique en faisant tendre le nombre de Rossby ε vers 0, à partir des

équations de Salmon 3D. Plus précisément, nous allons montrer la convergence du modèle

$$\begin{cases} \varepsilon v_\varepsilon + f v_\varepsilon^\perp + \nabla_x p_\varepsilon = 0, \\ \varepsilon w_\varepsilon + \partial_z p_\varepsilon = -T_\varepsilon, \\ \partial_t T_\varepsilon + (v_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot \nabla T_\varepsilon - \Delta T_\varepsilon = Q, \end{cases}$$

vers le modèle

$$\begin{cases} f v^\perp + \nabla_x p = 0, \\ \partial_z p = -T, \\ \partial_t T + (v, w) \cdot \nabla T - \Delta T = Q. \end{cases}$$

On montre comment par quelques manipulations algébriques, on peut obtenir une estimation uniforme en vitesse en utilisant des relations de paramétrisations semblables à celles données dans le chapitre 2.

Chapitre 1. Equations de type Kazhikhov-Smagulov : dérivation et résultats d'existence

Dans ce chapitre, on dérive d'abord la relation fondamentale de Kazhikhov-Smagulov à partir de la loi de Fick. Ensuite on regarde l'influence du choix du tenseur de Reynolds sur l'obtention de modèles de type Kazhikhov-Smagulov.

On montre qu'une certaine compatibilité entre le tenseur de viscosité et le terme de diffusivité permet d'obtenir des modèles de même type sans avoir à supposer une faible diffusivité comme cela avait été fait par A. Kazhikhov et Sh. Smagulov.

Le changement de terme diffusif peut paraître non fondé. On pourrait penser que l'on utilise ce qui nous arrange! Un exemple où un tel terme de diffusion a été obtenu sans hypothèses heuristiques est le papier de Gerbeau-Perthame, voir [11]. Ils utilisent précisément le terme diffusif $-\partial_x(h\partial_x u)$.

La justification de ce modèle de Saint-Venant est en cours [5]. Dans [17] page 251, P-L. Lions donne quelques modèles de Saint-Venant avec comme tenseur de diffusion $-\nu\rho\Delta u$ ou $-\nu\Delta(\rho u)$ ou $-\nu\operatorname{div}(\rho\nabla u)$.

On peut donc se poser la question de la validité du tenseur de Reynolds dans les systèmes de Navier-Stokes pour des problèmes à frontière libre, de multiphases, etc...

Il serait donc intéressant d'aller en amont de la physique et mieux comprendre les hypothèses qui donnent ces systèmes.

On commence par deux exemples : l'un concernant un modèle de pollution et l'autre un modèle de combustion à faible nombre de Mach. On donne ensuite la relation de compatibilité permettant de donner une classe de modèles de type Kazhikhov-Smagulov.

On montre alors que le modèle général obtenu est globalement bien posé sans contrainte entre la densité et les termes de diffusion comme dans les travaux précédents.

Dans le modèle de Kazhikhov-Smagulov étudié par P. Secchi dans [19]-[20], Beirao Da Veiga dans [2], Beirao Da Veiga et al. dans [3], Franchi et B. Straughan dans [10], D. Bresch, El. H. Essoufi et M. Sy dans [6]-[7] la densité initiale considérée est strictement positive. C'est-à-dire $0 < m \leq \rho_0$, avec m une constante réelle. Il est donc intéressant de voir ce qui se passe pour une densité initiale pouvant s'annuler avec tout d'abord le tenseur de diffusion $-\mu\Delta u$, puis avec le tenseur $-\operatorname{div}(\rho\nabla u)$ considéré dans [6].

Dans un travail fait dans [24], on montre que le système de Kazhikhov-Smagulov avec densité initiale s'annulant admet une solution faible globale.

Avec la diffusion $-\operatorname{div}(\rho\nabla u)$, l'étude est plus compliquée à cause de la possible dégénérescence de ρ qui empêche un contrôle du gradient de la vitesse. Cependant des estimations du système de Kazhikhov-Smagulov avec ce type de tenseur de diffusion, augmenté de deux termes de traînée, sont possibles. Un parallèle est fait avec les estimations pour le système de Saint-Venant réalisées par D. Bresch et B. Desjardins dans [4].

On montre, dans la dernière partie de ce chapitre, la convergence, quand λ tend vers 0, du système de Kazhikhov-Smagulov avec le terme de diffusion $-\mu\Delta u$ vers le système de Navier-Stokes avec densité initiale s'annulant étudié par Simon [21].

1.1. Introduction

L'idée d'introduire une hypothèse compatible entre le tenseur du taux de déformation et la loi liant la partie potentielle de la vitesse à la densité est née, pour la première fois à notre connaissance, du travail réalisé dans [8] pour le système de Korteweg. Ce qui a donné un premier résultat complet d'existence pour ce type de système avec le tenseur de Reynolds $-\text{div}(h\nabla u)$.

Ainsi, on établit un nouveau modèle pour l'évolution du sel ou d'un polluant dans une couche mince de fluide qui possède une solution faible globale sans restriction sur les données comme cela a été fait dans les autres modèles.

Le modèle de base avec du sel dissout dans un fluide compressible a été étudié en premier par Graffi [12], et étendu par Kazhikhov et Smagulov [15] pour tenir en compte des effets non linéaires pour une petite diffusion. Ce résultat a été complété par Beirao da Veiga [2] pour tenir en compte tous les effets non linéaires. Tous ces résultats mathématiques sont des résultats d'existence locale en temps de solutions faibles. Physiquement on considère un écoulement dans un domaine bi ou tridimensionnel $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3 et on note $[0, T]$ l'intervalle de temps, pour $T > 0$.

Le modèle est dérivé à partir des équations de Navier-Stokes compressibles

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t(\rho u) + \text{div}(\rho u \otimes u) - \lambda \text{div}(\Psi(\rho)d(u)) + \nabla p + (\mu + \tilde{\lambda})\nabla(\text{div}u) = \rho f, \\ \partial_t \rho + \text{div}(\rho u) = 0, \end{cases}$$

où $d(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$.

La vitesse u et la densité ρ sont supposées vérifier

$$(1.1.2) \quad u = v \mp \lambda \nabla \varphi_{\pm}(\rho) \text{ avec } \text{div} v = 0$$

où

$$(1.1.3) \quad \rho \nabla \varphi_{\pm}(\rho) = \pm \nabla \Psi(\rho)$$

et $\Psi > 0$. On note respectivement par φ_- , φ_+ la fonction donnant $-$ ou $+$ devant $\nabla \Psi$ dans (1.1.3). Deux exemples de telles relations peuvent être trouvés dans [1], [16]. Il s'agit d'un modèle de dispersion de polluants dans une couche mince de fluide et d'un modèle de combustion à faible nombre de Mach.

En ce qui concerne le premier exemple, la relation (1.1.2) est connue sous le nom de la loi de Fick avec $\varphi_+ = \log \rho$. Le modèle de combustion à faible nombre de Mach a été proposé par A. MAJDA où $\varphi_- = 1/\rho$.

L'idée est maintenant de transformer les équations (1.1.1) en équations sur ρ and v en utilisant la relation (1.1.2). En choisissant $\Psi(\rho) = 2\mu/\lambda$ et en utilisant (1.1.2) et $\varphi_+ = \log \rho$, A.V. KAZHIKHOV et Sh. SMAGULOV ont obtenu le modèle qui suit en négligeant les termes en $O(\lambda^2)$

$$(1.1.4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = \lambda \Delta \rho, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \nabla \rho \cdot \nabla v - \lambda v \cdot \nabla \nabla \rho = -\nabla P + \mu \Delta v + \rho f, \\ \text{div} v = 0. \end{cases}$$

Ce modèle suppose une faible diffusivité et a été appelé le modèle de Kazhikhov-Smagulov par F. FRANCHI et B. STRAUGHAN, voir [10].

La densité initiale ρ_0 est supposée satisfaire $0 < m \leq \rho_0 \leq M < +\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$. Afin d'obtenir un résultat d'existence globale de solutions faibles, ils ont alors fait l'hypothèse restrictive concernant λ , μ , m et M .

En choisissant $\Psi(\rho) = \rho$ et $\lambda = \mu$, on montre que l'on obtient bien le modèle de Kazhikhov-Smagulov modifié (1.3.2) sans aucune hypothèse de petitesse sur la diffusivité λ . Notre nouveau modèle pour l'évolution de sel ou de polluant dans une couche mince de fluide possède une solution faible globale sans restriction sur les données. Tous ces travaux posent la question du domaine de validité du terme de diffusion $-\lambda\Delta u$.

Plus généralement, si l'on choisit la relation (3) entre Ψ et φ_{\pm} avec la relation (2), on obtient le modèle de type Kazhikhov-Smagulov

$$(1.1.5) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho - \lambda \Delta \Psi(\rho) = 0, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \operatorname{div}(\Psi(\rho) d(v)) - \lambda v \cdot \nabla \nabla \Psi(\rho) - \lambda \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla v + \nabla P = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

On montre que ce modèle possède une solution faible globale si la fonction Ψ est strictement croissante, de classe $C^1([m, M])$, avec $\Psi \geq c > 0$.

Ceci donne, par exemple, un premier résultat d'existence globale de solutions faibles dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), de classe C^2 pour le modèle de combustion à faible nombre de Mach décrit dans [16] p. 281. Dans ce cas $\varphi_- = 1/\rho$, $\Psi(\rho) = \log \rho$ avec $m > 1$.

Mentionnons brièvement les résultats obtenus dans [1] p. 140. pour le modèle de Kazhikhov-Smagulov (1.1.4). Pour cela, ils supposent que l'écoulement a lieu dans un domaine borné Ω avec un bord fixe et imperméable Γ , de classe C^2 et ils considèrent les conditions aux bords et initiales

$$v(x, t) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T), \quad (1.1.6)$$

et

$$\rho(0, x) = \rho_0, \quad v(0, x) = v_0, \quad x \in \Omega. \quad (1.1.7)$$

Ils notent par H et V les adhérences de $\mathcal{V} = \{v \in (\mathcal{D}(\Omega))^d; \operatorname{div} v = 0\}$ dans la norme $(L^2(\Omega))^d$ et $(H^1(\Omega))^d$ respectivement. Ils obtiennent alors les résultats suivants :

Théorème 1.1.1. (Voir [1]) *Sous les hypothèse $0 < m \leq \rho_0 \leq M < +\infty$ et $u_0 \in H$, $\rho_0 \in H^1(\Omega)$, $f \in L^p(0, T; L^q(\Omega))$ avec $p \in [1, 2]$, $q \in [6/5, 2]$, $1/p + 3/2q \leq 7/4$ et les constantes λ , μ , M et m sont telles que*

$$\lambda < 2\mu(M - m)^{-1},$$

alors il existe au moins une solution généralisée du problème (1.1.4).

Théorème 1.1.2. (Voir [1]) Si en plus $u_0 \in V$, $f \in L^2(Q)$, alors le problème (1.1.4) admet une unique solution forte locale en temps. Cette solution est globale en dimension deux.

Dans les travaux faits dans [2], [3], une telle simplification n'a pas été faite et les équations entières ont été traitées. C'est-à-dire les équations avec les termes d'ordre deux en λ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, c'est-à-dire le système

$$(1.1.8) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = \lambda \Delta \rho, \\ \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v - b) - \lambda v \cdot \nabla \nabla \rho - \lambda \nabla \rho \cdot \nabla v \\ + \frac{\lambda^2}{\rho} ((\nabla \rho \cdot \nabla \nabla \rho) - (\nabla \rho \cdot \nabla \rho) \nabla \rho + \Delta \rho \nabla \rho) - \mu \Delta v + \nabla P = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases}$$

avec les conditions aux bords suivantes, dans le cas $\mu = 0$:

$$(1.1.9) \quad \begin{cases} v \cdot n = 0 \text{ sur }]0, T[\times \Gamma, \\ \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \text{ sur }]0, T[\times \Gamma, \\ v|_{t=0} = a(x) \text{ dans } \Omega, \\ \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où b est un champ de vecteur de données, $\Gamma = \partial\Omega$, $n = n(x)$ la normale extérieure à Γ , $a = a(x)$ et $\rho_0 = \rho_0(x)$ sont les conditions initiales pour la vitesse et la densité.

Dans [2], l'auteur montre l'existence d'une unique solution locale pour des données initiales et une force extérieure arbitraires, et l'existence d'une unique solution forte globale pour des données initiales et un champ de force extérieure petits.

Dans [3], les auteurs montrent l'existence locale en temps de solutions suffisamment régulières, avec un domaine et des données assez réguliers. L'unicité est ainsi prouvée pour la plupart des solutions. On donne leurs deux théorèmes principaux.

Théorème 1.1.3. Soit Γ de classe $\overline{C^5}$,

$a \in (H^3(\Omega))^d$ avec $\operatorname{div} a = 0$ dans Ω et $a \cdot n = 0$ sur Γ ,

$\rho_0 \in H^4(\Omega)$, $\partial \rho_0 / \partial n = 0$ sur Γ , $(\partial / \partial n)(\lambda \Delta \rho_0 - a \cdot \nabla \rho_0) = 0$ sur Γ ,

$\rho_0 > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$,

$b \in L^1(0, T_0; (H^2(\Omega))^d) \cap L^2(0, T_0; (H^1(\Omega))^d)$ avec $\operatorname{rot} b \in L^1(0, T_0; (H^2(\Omega))^d)$.

Alors il existe

$T_1 \in]0, T_0[$,

$v \in L^\infty(0, T_1; (H^3(\Omega))^d)$ avec $\partial_t v \in L^1(0, T_1; (H^2(\Omega))^d) \cap L^2(0, T_1; (H^1(\Omega))^d)$,

$P \in L^1(0, T_1; H^3(\Omega)) \cap L^2(0, T_1; H^2(\Omega))$,

$\rho \in L^2(0, T_1; H^5(\Omega)) \cap C^0([0, T_1]; H^4(\Omega))$ avec $\partial_t \rho \in L^2(0, T_1; H^3(\Omega))$

telles que (v, ρ, P) est la solution du système (1.1.8)-(1.1.9) avec $\mu = 0$ (fluide non visqueux).

Théorème 1.1.4. On suppose que $\min_{\bar{\Omega}} \rho_0 > 0$ et $b \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$.

Alors la solution de (1.1.8)-(1.1.9) avec $\mu = 0$ est unique dans la classe des fonctions $v \in (L^\infty(]0, T[\times \Omega))^d$ avec $\nabla v \in L^2(0, T; (L^\infty(\Omega))^{d \times d})$, $\partial_t v \in L^1(0, T; (L^\infty(\Omega))^d)$, $\rho \in L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ avec $\nabla \rho \in L^4(0, T; (L^\infty(\Omega))^d)$, $\Delta \rho \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$.

La fonction P est unique à une fonction arbitraire de t près.

Dans [20], P. Secchi montre l'existence, pour un écoulement bidimensionnel, d'une unique solution globale si le coefficient de diffusion λ est petit et la convergence (quand $\lambda \rightarrow 0$) pour les écoulements bidimensionnels et tridimensionnels vers les solutions correspondantes pour le système de Navier-Stokes pour les fluides non homogènes visqueux. Après avoir défini les espaces

$$\begin{aligned} H_N^k &\equiv \left\{ \rho \in H^k(\Omega); \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \int_{\Omega} \rho(x) dx = \int_{\Omega} \rho_0(x) dx \right\}, \quad k \geq 2, \\ V &\equiv \{v \in (H_0^1(\Omega))^d; \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega\}, \\ H &\equiv \{v \in (L^2(\Omega))^d; \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \end{aligned}$$

il démontre les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.1.5. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 avec son bord $\partial\Omega$ de classe C^3 . On suppose $v_0 \in V$, $\rho_0 \in H_N^2$ telle que $0 < m \leq \rho_0 \leq M$ dans Ω , $b \in L^2(]0, T[\times \Omega)$.

Alors il existe $\lambda_0 > 0$ dépendant de Ω , m , M tel que, si $\lambda/\mu < \lambda_0$, le système (1.1.8)-(1.1.9) admet une unique solution dans $]0, T[\times \Omega$. En plus

$$\begin{aligned} v &\in L^2(0, T; (H^2(\Omega))^d) \cap C(0, T; V), \quad \partial_t v \in L^2(0, T; H), \\ \rho &\in L^2(0, T; H_N^3) \cap C(0, T; H_N^2), \quad \partial_t \rho \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \nabla P &\in (L^2(]0, T[\times \Omega))^d, \end{aligned}$$

avec $m \leq \rho \leq M$.

Théorème 1.1.6. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec le bord $\partial\Omega$ de classe C^3 . On suppose $v_0 \in V$, $\rho_0 \in H_N^2$ telle que $0 < m \leq \rho_0 \leq M$ dans Ω , $b \in (L^2(]0, T_0[\times \Omega))^d$.

Alors il existe $T \in]0, T_0]$ (indépendant de λ) et une suite $(v^\lambda, \rho^\lambda, \nabla P^\lambda)$ solution de (1.1.8)-(1.1.9) convergente sur $[0, T]$ vers la solution généralisée (voir définition 1.4.1) $(v, \rho, \nabla P)$ du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v - b) - \mu \Delta v + \nabla P = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ v = 0 \text{ sur }]0, T[\times \partial\Omega \\ v|_{t=0} = v_0(x) \text{ dans } \Omega \\ \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

La fonction ρ vérifie $0 < m \leq \rho(t, x) \leq M$ p.p dans $]0, T[\times \Omega$. Si $d = 2$, $T = T_0$.

Ainsi, on donne à notre connaissance, le premier résultat d'existence de solutions faibles globales pour le modèle de combustion en choisissant la viscosité en fonction de ρ .

Dans [9], P. Embid démontre l'existence locale en temps de solutions faibles pour une diffusion régulière générale $\mu(\rho)$. Un choix particulier de μ va nous permettre de prouver l'existence d'une solution globale en temps.

Ainsi dans la section 1.3 on établit les nouveaux modèles de type Kazhikhov-Smagulov, dans la section 1.4 on présente les résultats principaux obtenus sur ces modèles. On montre que ces systèmes sont globalement bien posés sans hypothèse entre la densité et les termes de diffusion.

1.2. La relation fondamentale de Kazhikhov-Smagulov

On montre comment dériver, à partir de la loi de Fick sur la diffusion, la relation fondamentale de Kazhikhov-Smagulov qui est essentielle pour le développement du modèle dit de Kazhikhov-Smagulov. Le modèle de base fut étudié par Graffi [12]. Il a été étendu par Kazhikhov-Smagulov [15] pour tenir en compte des effets non linéaires pour les petites diffusions et Beirao da Veiga [2] l'a étendu pour tenir en compte tous les effets non linéaires. Cette relation de Kazhikhov-Smagulov est aussi importante pour les modèles généralisés de type Kazhikhov-Smagulov développés par Bresch et al. dans [6], [7].

On considère une couche de fluide résultant d'un mélange de deux fluides incompressibles miscibles. Avant le mélange on note ρ_{10} la densité constante du fluide 1 et ρ_{20} la densité constante du fluide 2.

On note $\rho_1(t, x)$ et $\rho_2(t, x)$ les densités respectives du fluide 1 et du fluide 2 dans le mélange. On définit la densité totale $\rho(t, x)$ du mélange par

$$\rho(t, x) = \rho_1(t, x) + \rho_2(t, x). \quad (1.2.1)$$

L'additivité des volumes V_{10} du fluide 1 et V_{20} du fluide 2 donne la relation

$$\frac{\rho_1}{\rho_{10}} + \frac{\rho_2}{\rho_{20}} = 1. \quad (1.2.2)$$

En effet, si on note par V_{total} le volume total, on a :

$$\rho_1 V_{total} = \rho_{10} V_{10} \text{ et } \rho_2 V_{total} = \rho_{20} V_{20}.$$

Et la relation (1.2.2) s'en déduit facilement.

On a, avec v^1 la vitesse dans le mélange du constituant 1 et v^2 celle du constituant 2 dans le mélange, les deux équations de conservation de la masse dans le mélange :

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 v^1) = 0, \quad \partial_t \rho_2 + \nabla \cdot (\rho_2 v^2) = 0. \quad (1.2.3)$$

On définit w comme la vitesse barycentrique ou la vitesse de masse moyenne par

$$\rho w = \rho_1 v^1 + \rho_2 v^2. \quad (1.2.4)$$

La relation ci-dessus permet de dériver à partir de (1.2.3) et (1.2.1), la relation

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho w) = 0. \quad (1.2.5)$$

En divisant la première et la deuxième équation de (1.2.3) respectivement par ρ_{10} et ρ_{20} et en faisant la somme des deux équations résultantes, on obtient :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_{10}} v^1 + \frac{\rho_2}{\rho_{20}} v^2 \right) = 0. \quad (1.2.6)$$

En définissant

$$v = \frac{\rho_1}{\rho_{10}}v^1 + \frac{\rho_2}{\rho_{20}}v^2, \quad (1.2.7)$$

comme la vitesse de volume moyenne du mélange, on obtient à partir de la relation (1.2.6),

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (1.2.8)$$

On définit la concentration de masse, c , et la concentration de volume, α , pour le constituant 1 dans le mélange par

$$c = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho_{10}}. \quad (1.2.9)$$

Les définitions et les relations précédentes vont permettre de dériver la relation fondamentale de Kazhikhov-Smagulov [15],

$$w = v - \lambda \frac{\nabla \rho}{\rho}, \quad (1.2.10)$$

à partir de la loi de Fick

$$v^1 = w - \lambda \frac{\nabla c}{c}, \quad (1.2.11)$$

où λ est une constante de diffusion. La relation (1.2.10) est essentielle pour le développement des modèles de type Kazhikhov-Smagulov comme le confirment les travaux faits dans [15], [6], [2], et est très utile dans le sens où elle permet de lier les vitesses du mélange w et v plutôt que les vitesses des constituants comme c'est le cas de (1.2.11).

Pour calculer (1.2.10) à partir de (1.2.11), on observe que les relations (1.2.2) et (1.2.9) donnent :

$$\frac{\rho_2}{\rho_{20}} = 1 - \alpha, \quad (1.2.12)$$

et donc la relation (1.2.7) devient

$$v = \alpha v^1 + (1 - \alpha)v^2, \quad (1.2.13)$$

et

$$1 - c = \frac{\rho - \rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho}. \quad (1.2.14)$$

Alors, la relation (1.2.4) donne

$$w = cv^1 + (1 - c)v^2. \quad (1.2.15)$$

Il est aussi utile de remarquer que d'après (1.2.12) et (1.2.9)

$$c = \alpha \frac{\rho_{10}}{\rho}, \quad \rho = \alpha \rho_{10} + (1 - \alpha)\rho_{20}, \quad \text{et } \alpha = \frac{\rho - \rho_{20}}{\rho_{10} - \rho_{20}}. \quad (1.2.16)$$

On prend le gradient des trois équations de (1.2.16) et on obtient

$$\nabla c = \frac{\rho_{10}}{\rho} \nabla \alpha - \frac{\rho_{10} \alpha}{\rho^2} \nabla \rho, \quad \nabla \rho = (\rho_{10} - \rho_{20}) \nabla \alpha \text{ et } \nabla \alpha = \frac{\nabla \rho}{(\rho_{10} - \rho_{20})}. \quad (1.2.17)$$

On trouve, après utilisation des relations (1.2.16) dans (1.2.17) et après simplification, que

$$\frac{\nabla c}{c} = \frac{\nabla \rho}{(\rho - \rho_{20})} - \frac{\nabla \rho}{\rho}. \quad (1.2.18)$$

On élimine v^2 des expressions de (1.2.7) et (1.2.4) et on obtient

$$v^1 \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha} - \frac{c}{1 - c} \right] = \frac{1}{1 - \alpha} v - \frac{1}{1 - c} w. \quad (1.2.19)$$

En remarquant que

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\rho_1}{\rho_{10}} \frac{\rho_{20}}{\rho_2} \quad \text{et} \quad \frac{c}{1 - c} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

la relation (1.2.19) devient

$$v^1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\rho_{10}}{(\rho_{20} - \rho_{10})} \left(\frac{\rho_{20}}{\rho_2} v - \frac{\rho}{\rho_2} w \right). \quad (1.2.20)$$

Si on utilise la relation (1.2.18) dans l'expression qui donne la loi de Fick, on trouve une nouvelle relation qui lie v^1 et w

$$v^1 = w - \lambda \left(\frac{\nabla \rho}{(\rho - \rho_{20})} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \right). \quad (1.2.21)$$

Les relations (1.2.20) et (1.2.21) nous permettent d'éliminer v^1 et de trouver une relation entre w et v

$$w \left(\frac{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10}) + \rho \rho_{10}}{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})} \right) = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})} v - \lambda \frac{\nabla \rho}{\rho} + \lambda \frac{\nabla \rho}{(\rho - \rho_{20})}. \quad (1.2.22)$$

En remplaçant ρ par sa valeur de la relation (1.2.1) dans le coefficient de w et en utilisant la relation (1.2.2), alors le coefficient de w dans la relation (1.2.22) se simplifie et on trouve

$$w \left(\frac{\rho_{10} \rho_{20}}{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})} \right) = \frac{\rho_{10} \rho_{20}}{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})} v - \lambda \frac{\nabla \rho}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{(\rho - \rho_{20})} \right),$$

d'où

$$w = v - \lambda \frac{\nabla \rho}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{(\rho - \rho_{20})} \right) \left(\frac{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})}{\rho_{10} \rho_{20}} \right) \quad (1.2.23)$$

Pour que la dérivation de la relation de Kazhikhov-Smagulov soit complète, il reste à montrer que

$$\left(1 - \frac{\rho}{(\rho - \rho_{20})} \right) \left(\frac{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})}{\rho_{10} \rho_{20}} \right) = 1.$$

En effet

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho}{(\rho - \rho_{20})} \right) \left(\frac{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})}{\rho_{10} \rho_{20}} \right) &= -\frac{\rho_{20}}{\rho - \rho_{20}} \frac{\rho_1(\rho_{20} - \rho_{10})}{\rho_{10} \rho_{20}} \\ &= -\alpha \frac{\rho_{20} - \rho_{10}}{\rho - \rho_{20}} = 1 \end{aligned}$$

en remplaçant ρ par son expression donnée par (1.2.16).

1.3. De nouveaux modèles de type Kazhikhov-Smagulov

Dans cette partie, on dérive plusieurs modèles de type Kazhikhov-Smagulov : Les modèles de pollution, de combustion à faible nombre de Mach et un modèle général.

1.3.1. Le modèle de pollution.

La dérivation d'un nouveau modèle de pollution est basée sur l'utilisation de la relation (1.1.2) dans le système suivant

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) = -\nabla p + (\mu + \tilde{\lambda})\nabla(\operatorname{div} u) + \mu \operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho f. \end{cases}$$

où f est un champ de forces extérieures, alors que μ et $\tilde{\lambda}$ sont des viscosités du fluide avec $\mu \geq 0$, $3\tilde{\lambda} + 2\mu \geq 0$ et $\tilde{\lambda} + 2\mu/3$ est appelée la viscosité volumique.

On va montrer que l'utilisation de la relation (1.1.2) dans le système (1.3.1) permet d'obtenir un nouveau système de type Kazhikhov-Smagulov

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \lambda \Delta \rho, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \lambda \nabla \rho \cdot \nabla v - \lambda v \cdot \nabla \nabla \rho - \lambda \operatorname{div}(\rho \nabla v) = -\nabla P + \rho f \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases}$$

Lemme 1.3.1. *En utilisant la relation (1.1.2) avec $\varphi_+ = \log \rho$ et $\lambda = \mu$, alors, à partir du système (1.3.1), on obtient le système (1.3.2) avec $P = \lambda v \cdot \nabla \rho + p + \lambda(\tilde{\lambda} + \lambda)\Delta(\log \rho)$.*

Démonstration. L'idée est de transformer les équations en injectant la relation (1.1.2) pour obtenir des équations satisfaites par ρ et v permettant ainsi d'utiliser la relation d'incompressibilité. En choisissant $\varphi_+ = \log \rho$ et $\Psi = \rho$ dans (1.1.2) on obtient

$$u = v - \lambda \frac{\nabla \rho}{\rho} \text{ avec } \operatorname{div} v = 0. \quad (1.3.3)$$

Il est immédiat de déduire, à partir de la relation précédente, la nouvelle équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = \lambda \Delta \rho.$$

Utilisant toujours la relation (1.3.3), on a

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu \operatorname{div}(\rho \nabla u) &= \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) + \lambda^t \nabla v \cdot \nabla \rho - \lambda(\nabla \rho \cdot \nabla)v \\ &+ (\lambda^2 - \lambda\mu) \left\{ \frac{\Delta \rho}{\rho} \nabla \rho + \frac{\nabla \nabla \rho \cdot \nabla \rho}{\rho} - \nabla(\Delta \rho) - \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho^2} \nabla \rho \right\} - \mu \operatorname{div}(\rho \nabla v). \end{aligned}$$

En plus, nous avons

$$(\mu + \tilde{\lambda})\nabla(\operatorname{div}(u)) = -\nabla(\lambda(\mu + \tilde{\lambda})\Delta \log(\rho)).$$

Finalement le lemme est démontré en choisissant $\mu = \lambda$ dans les équations précédentes. \square

Remarque. C'est le choix d'un terme diffusif particulier qui a permis d'obtenir le modèle sans les termes en $O(\lambda^2)$ qu'on ne trouve que dans l'expression de la nouvelle pression. \square

Remarque. Le même résultat peut être obtenu si le terme $\mu \operatorname{div}(\rho \nabla u)$ est remplacé par $\mu \operatorname{div}(\rho d(u))$ avec $d(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t \nabla u)$. \square

1.3.2. Le modèle de combustion.

Dans [16], l'auteur dérive le modèle qui suit en laissant le nombre de Mach tendre vers 0,

$$(1.3.4) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \operatorname{div} u = c_0 \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right), \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div}(2\mu(\rho) \nabla u) + \nabla \pi = \rho f, \end{cases}$$

avec π scalaire inconnu, où $c_0 > 0$ est une constante fixée et μ est une fonction positive et continue sur $(0, +\infty)$.

Le système précédent et plus précisément son extension à un modèle de combustion, c'est-à-dire un modèle de fluides réactifs, a été introduit par A. Majda [18] et étudié en particulier par P. Embid [9] qui a montré que le problème était bien posé localement en temps. Dans [16], P-L. Lions donne un résultat d'existence globale de solutions faibles en dimension deux dans \mathbb{R}^2 pour ρ proche de l'équilibre.

On montre ici que si on choisit

$$\mu(\rho) = \frac{c_0}{2} \log \rho$$

et qu'on utilise la relation (1.1.2), alors le système (1.3.4) peut être réécrit comme un système de type Kazhikhov-Smagulov

$$(1.3.5) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho - c_0 \Delta \log \rho = 0, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - c_0 \operatorname{div}(\log \rho \nabla v) - c_0 v \cdot \nabla \nabla \log \rho \\ \quad - c_0 \nabla \log \rho \cdot \nabla v + \nabla \pi_1 = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases}$$

Plus exactement on montre le

Lemme 1.3.2. *Soit (ρ, u, π) une solution de (1.3.4). Alors, en utilisant la relation (1.1.2) avec $\varphi_- = 1/\rho$ et $\operatorname{div} v = 0$, le système (1.3.4) donne (1.3.5).*

Démonstration. Comme dans le cas de la pollution, on obtient facilement l'équation de conservation de la masse. Regardons maintenant comment obtenir l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On a

$$\begin{aligned}\rho \partial_t u &= \rho \partial_t v + c_0 \rho \nabla \partial_t \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ &= \rho \partial_t v - \nabla (c_0 \partial_t \log \rho) + c_0 \partial_t \log \rho \nabla \log \rho \\ &= \rho \partial_t v - \nabla (c_0 \partial_t \log \rho) - c_0 v \cdot \nabla \log \rho \nabla \log \rho + \frac{c_0^2}{\rho} \Delta \log \rho \nabla \log \rho.\end{aligned}\quad (1.3.6)$$

Et

$$\begin{aligned}\rho u \cdot \nabla u &= \rho v \cdot \nabla v + c_0^2 \rho \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \nabla \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + c_0 \rho v \cdot \nabla \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + c_0 \rho \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \cdot \nabla v \\ &= \rho v \cdot \nabla v + \frac{c_0^2}{\rho} \nabla \log \rho \cdot \nabla \nabla \log \rho - \frac{c_0^2}{\rho} |\nabla \log \rho|^2 \nabla \log \rho - c_0 v \cdot \nabla \nabla \log \rho \\ &\quad + c_0 v \cdot \nabla \log \rho \nabla \log \rho - c_0 \nabla \log \rho \cdot \nabla v.\end{aligned}\quad (1.3.7)$$

On a aussi

$$-\operatorname{div}(\mu \nabla u) = -\operatorname{div}(c_0 \log \rho \nabla v) - \operatorname{div}(c_0^2 \log \rho \nabla \nabla \frac{1}{\rho}).$$

Réécrivons le terme $\operatorname{div}(c_0^2 \log \rho \nabla \nabla \frac{1}{\rho})$. On obtient

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}(c_0^2 \log \rho \nabla \nabla \frac{1}{\rho}) &= -c_0^2 \operatorname{div}(\log \rho \nabla \nabla \frac{1}{\rho}) \\ &= -c_0^2 \nabla \log \rho \cdot \nabla \nabla \frac{1}{\rho} - c_0^2 \log \rho \Delta \nabla \frac{1}{\rho} \\ &= -c_0^2 \nabla \left(\log \rho \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) - \frac{c_0^2}{\rho} \nabla \log \rho \Delta \log \rho + \frac{c_0^2}{\rho} (\nabla \log \rho \cdot \nabla) \nabla \log \rho.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}-\operatorname{div}(\mu \nabla u) &= -c_0 \operatorname{div}(\log \rho \nabla v) + \frac{c_0^2}{\rho} (\nabla \log \rho \cdot \nabla) \nabla \log \rho \\ &\quad - c_0^2 \frac{\nabla \log \rho}{\rho} \Delta \log \rho - c_0^2 \nabla \left(\log \rho \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right).\end{aligned}\quad (1.3.8)$$

Utilisant l'égalité

$$\frac{1}{\rho} \nabla \log \rho \cdot \nabla \nabla \log \rho = \frac{1}{2\rho} \nabla \log \rho |\nabla \log \rho|^2 + \nabla \left(\frac{1}{2\rho} (\nabla \log \rho)^2 \right)$$

et les termes calculés dans (1.3.6), (1.3.7) et (1.3.8), on trouve

$$\begin{aligned}\rho \partial_t u + \rho u \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mu(\rho) \nabla u) + \nabla \pi &= \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - c_0 \operatorname{div}(\log \rho \nabla v) \\ &\quad - c_0 v \cdot \nabla \nabla \log \rho - c_0 \nabla \log \rho \cdot \nabla v + \nabla \pi_1\end{aligned}$$

où

$$\pi_1 = \pi - c_0 \partial_t \log \rho - c_0^2 \log \rho \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} (\nabla \log \rho)^2.$$

Ce qui donne bien le système (1.3.5). \square

1.3.3. Le modèle général.

On montre dans cette section qu'il est possible de généraliser l'idée utilisée dans les sections précédentes en essayant d'établir une classe de modèles pouvant se ramener à un système de type Kazhikhov-Smagulov.

En effet, on démontre qu'on obtient un système de type Kazhikhov-Smagulov si on part d'un système initial du type

$$(1.3.9) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \operatorname{div}(\Psi(\rho) \nabla u) + (\mu + \tilde{\lambda}) \nabla(\operatorname{div} u) + \nabla P = \rho f, \\ u = v \mp \mu \nabla \varphi_{\pm}(\rho), \end{cases}$$

avec la relation de compatibilité

$$\rho \nabla \varphi_{\pm}(\rho) = \pm \nabla \Psi(\rho) \quad (1.3.10)$$

où $\Psi(\rho) \geq 0$ avec $0 < m \leq \rho$. On note respectivement par φ_- , φ_+ les fonctions qui donnent $-$ ou $+$ devant $\nabla \Psi$ dans (1.3.10).

Plus précisément, en considérant le système de type Kazhikhov-Smagulov suivant

$$(1.3.11) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho - \mu \Delta \Psi(\rho) = 0, \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - \mu \operatorname{div}(\Psi(\rho) \nabla v) - \mu v \cdot \nabla \nabla \Psi(\rho) - \mu \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla v + \nabla \pi = \rho f, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases}$$

on prouve le

Lemme 1.3.3.

Soit (ρ, u, P) une solution de (1.3.9) avec $\operatorname{div} v = 0$, alors le système (1.3.9) donne (1.3.11).

Démonstration. On obtient facilement l'équation de la masse. Dérivons l'équation de conservation de la quantité de mouvement. On a

$$\begin{aligned} & \rho \partial_t u + \rho u \cdot \nabla u \\ &= \mp \lambda \rho \partial_t \nabla \varphi_{\pm} \mp \lambda \rho v \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} \mp \lambda \rho \nabla \varphi_{\pm} \cdot \nabla v \\ & \quad + \lambda^2 \rho \nabla \varphi_{\pm} \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} + \rho v \cdot \nabla v + \rho \partial_t v, \\ &= \pm \lambda \partial_t \rho \nabla \varphi_{\pm} \mp \lambda \rho v \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} \mp \lambda \rho \nabla \varphi_{\pm} \cdot \nabla v \\ & \quad + \lambda^2 \rho \nabla \varphi_{\pm} \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} + \rho v \cdot \nabla v + \rho \partial_t v \pm \nabla(\mu \partial_t \Psi) \\ &= -\lambda \frac{1}{\rho} v \cdot \nabla \rho \nabla \Psi + \lambda^2 \frac{1}{\rho} \Delta \Psi \nabla \Psi \mp \lambda \rho v \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} - \lambda \nabla \Psi \cdot \nabla v \pm \lambda^2 \nabla \Psi \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} \\ & \quad + \rho v \cdot \nabla v + \rho \partial_t v \mp \nabla(\mu \partial_t \Psi) \\ &= \lambda^2 \frac{1}{\rho} \Delta \Psi \nabla \Psi - \lambda v \cdot \nabla \nabla \Psi - \lambda \nabla \Psi \cdot \nabla v + \lambda^2 \nabla \Psi \cdot \nabla \left(\frac{\nabla \Psi}{\rho} \right) \\ & \quad + \rho v \cdot \nabla v + \rho \partial_t v \pm \nabla(\mu \partial_t \Psi). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
-\mu \operatorname{div}(\Psi \nabla u) &= -\mu \operatorname{div}(\Psi \nabla v) \pm \lambda \mu \operatorname{div}(\Psi \nabla \nabla \varphi_{\pm}) \\
&= -\mu \operatorname{div}(\Psi \nabla v) \pm \lambda \mu \nabla \Psi \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} \pm \lambda \mu \Psi \Delta \nabla \varphi_{\pm} \\
&= -\mu \operatorname{div}(\Psi \nabla v) \pm \mu \lambda \nabla \Psi \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} \mp \lambda \mu \nabla \Psi \Delta \varphi_{\pm} + \nabla(\mu \lambda \Psi \Delta \varphi_{\pm}) \\
&= \pm \mu \lambda \nabla \Psi \cdot \nabla \nabla \varphi_{\pm} - \lambda \mu \nabla \Psi \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho} \nabla \Psi\right) - \mu \operatorname{div}(\Psi \nabla v) - \nabla(\mu \lambda \Psi \Delta \varphi_{\pm}) \\
&= \mu \lambda \nabla \Psi \cdot \nabla\left(\frac{\nabla \Psi}{\rho}\right) - \frac{\lambda \mu}{\rho} \nabla \Psi \Delta \Psi \\
&\quad + \lambda \mu \frac{\nabla \rho \cdot \nabla \Psi}{\rho^2} \nabla \Psi - \mu \operatorname{div}(\Psi \nabla v) - \nabla(\mu \lambda \Psi \Delta \varphi_{\pm}).
\end{aligned}$$

En sommant les deux égalités précédentes, il reste les deux termes suivants

$$\begin{aligned}
2 \nabla \Psi \cdot \nabla\left(\frac{\nabla \Psi}{\rho}\right) + \frac{\nabla \rho \cdot \nabla \Psi}{\rho^2} \nabla \Psi &= -2 \frac{\nabla \rho \cdot \nabla \Psi}{\rho^2} \nabla \Psi + 2 \frac{1}{\rho} \nabla \Psi \cdot \nabla \nabla \Psi + \frac{\nabla \rho \cdot \nabla \Psi}{\rho^2} \nabla \Psi \\
&= -\frac{\nabla \rho \cdot \nabla \Psi}{\rho^2} \nabla \Psi + \nabla\left(\frac{|\nabla \Psi|^2}{\rho}\right) + \frac{\nabla \rho}{\rho^2} |\nabla \Psi|^2 \\
&= -\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \cdot \nabla \Psi \nabla \Psi - \nabla \rho |\nabla \Psi|^2) + \nabla\left(\frac{|\nabla \Psi|^2}{\rho}\right) \\
&= \nabla\left(\frac{|\nabla \Psi|^2}{\rho}\right).
\end{aligned}$$

Le lemme est alors démontré et

$$\pi = P \pm \mu \partial_t \Psi - \mu \lambda \left(\Psi \Delta \varphi_{\pm} + \frac{|\nabla \Psi|^2}{\rho} \right). \quad \square$$

1.4. Résultats d'existence

Dans cette section on présente les résultats principaux d'existence de solutions pour les modèles dérivés précédemment. On montre que ces modèles sont globalement bien posés sans hypothèses entre la densité et les termes de diffusion.

Pour ce faire, on considère que l'écoulement a lieu dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou 3 , de classe \mathcal{C}^2 . On considère l'espace des fonctions test

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{D}(\Omega)^d; \operatorname{div} v = 0\},$$

et ses adhérences dans $(L^2(\Omega))^d$ et $(H^1(\Omega))^d$, qu'on note respectivement par H et V ; d est la dimension de l'espace qui contient le domaine. On ajoute à chaque système les conditions initiales

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (1.4.1)$$

Avant tout, on rappelle la définition d'une solution généralisée.

Définition 1.4.1.

Un couple de fonctions (ρ, v) est appelé solution généralisée sur $\Omega \times (0, T)$ du problème (1.3.11)–(1.4.1) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(1.4.2) \quad \begin{cases} 0 < m \leq \rho(t, x) \leq M, & p.p \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ \rho \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ v \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V). \end{cases}$$

Toute fonction $\eta \in \mathcal{C}^1(0, T; H^1(\Omega))$ telle que $\eta(T, \cdot) = 0$ vérifie

$$\int_{\Omega} \rho_0 \eta_0 + \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \cdot \partial_t \eta + \rho v \cdot \nabla \eta - \lambda \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla \eta) = 0, \quad (1.4.3)$$

et toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(0, T; V)$ telle que $\varphi(T, \cdot) = 0$, vérifie

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \rho v (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi) - \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \Psi(\rho) d(v) \cdot \nabla \varphi \\ & - \lambda \int_0^T \int_{\Omega} v \cdot \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_0^T \int_{\Omega} v \cdot \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi(\rho) \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \rho f \varphi + \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \varphi_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

où $\eta_0 = \eta_0(0, \cdot)$ et $\varphi_0 = \varphi(0, \cdot)$.

On peut aussi se servir de la formulation équivalente suivante : Pour $t_0 \in [0, T]$, on a

$$\int_0^{t_0} \int_{\Omega} (\rho \cdot \partial_t \zeta + \rho v \cdot \nabla \zeta - \lambda \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla \eta) = \int_{\Omega} \rho(t_0) \zeta(t_0) - \int_{\Omega} \rho_0 \zeta_0, \quad (1.4.5)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \rho v (\partial_t \psi + v \cdot \nabla \psi) - \lambda \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \Psi(\rho) \nabla v \cdot \nabla \psi \\ & - \lambda \int_0^{t_0} \int_{\Omega} v \cdot \nabla \Psi(\rho) \cdot \nabla \psi - \lambda \int_0^{t_0} \int_{\Omega} v \cdot \nabla \psi \cdot \nabla \Psi(\rho) \\ & + \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \rho f \psi = \int_{\Omega} \rho(t_0) v(t_0) \psi(t_0) - \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \psi_0 \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

pour tout $\psi \in C^1(0, T; V)$ et pour tout $\zeta \in C^1(0, T; H^1(\Omega))$.

La preuve de l'équivalence des deux définitions est similaire à celle utilisée dans [1], page 103.

La formulation faible pour le modèle de pollution ou celui de la combustion à faible nombre de Mach est obtenue en choisissant $\Psi = \rho$ ou $\Psi = \log \rho$. Dans tous ces modèles, les données initiales sont prises telles que

$$\begin{aligned} \rho_0 & \in L^2(\Omega), \text{ avec } 0 < m \leq \rho_0 \leq M < +\infty \\ \nabla \rho_0 & \in (L^2(\Omega))^d, \quad v_0 \in H. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

1.4.1. Existence de solution faible pour le modèle de pollution.

Nous montrons dans ce qui suit que le modèle de pollution fermé avec les conditions initiales (1.4.1) possède une solution faible globale dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou $d = 3$ sans restriction sur les données.

Ce qui donne le premier résultat d'existence globale sur un modèle de type Kazhikhov-Smagulov sans hypothèse entre la densité et les coefficients de diffusion, comme mentionné dans le Théorème 1.1.1. Notre résultat principal pour cette section est le

Théorème 1.4.2. *On suppose que les données vérifient (1.4.7) et $f \in L^p(0, T; (L^q(\Omega))^d)$ avec $p \in [1, 2]$, $q \in [6/5, 2]$, $1/p + 3/2q \leq 7/4$.*

Alors, sans aucune hypothèse sur la diffusivité λ , il existe au moins une solution généralisée, globale en temps, du système (1.3.2) telle que

$$v \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \text{ et } \rho \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)).$$

Démonstration. La preuve est une adaptation de celle faite pour les équations de Navier-Stokes non homogènes ($\lambda = 0$) par Antonzev, Kazhikhov et Monakov dans [1].

Pour montrer que $0 < m \leq \rho(t, x) \leq M < +\infty$ pour presque tout $(t, x) \in]0, T[\times \Omega$ on pose

$$\rho^- = \max(0, m - \rho) \text{ et } \rho^+ = \min(0, M - \rho).$$

Par exemple, on multiplie (1.3.2)₁ par $m - \rho$ et une intégration sur Ω permet d'obtenir

$$\int_{\Omega} (m - \rho) \partial_t \rho + \int_{\Omega} (m - \rho) (v \cdot \nabla) \rho + \lambda \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \nabla (m - \rho) = 0.$$

Cette égalité est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m - \rho)^2 + 2\lambda \int_{\Omega} (\nabla(m - \rho))^2 = 0.$$

Maintenant, on intègre de 0 à t l'égalité précédente et on prend le maximum. Ce qui donne

$$\|\rho^-\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + 2\lambda \int_0^t \|\nabla \rho^-\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\rho_0^-\|_{L^2(\Omega)}$$

où $\rho_0^- = \rho^-(0, \cdot) = \max(0, m - \rho_0) = 0$. Ainsi $\rho^-(t, x) = 0$. Ce qui donne la borne inférieure pour ρ . Pour la borne supérieure on fait le même calcul pour ρ^+ et on prend le minimum.

Estimation d'énergie.

Du système (1.3.2), en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par v et l'équation de conservation de la masse par ρ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho |v|^2 + |\rho|^2) + \lambda \int_{\Omega} (\rho |\nabla v|^2 + |\nabla \rho|^2) - \lambda \int_{\Omega} \rho \partial_i v_j \partial_j v_i = \int_{\Omega} \rho f \cdot v.$$

Utilisant le fait que

$$\int_{\Omega} \rho [(\nabla v)^2 - \partial_i v_j \partial_j v_i] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\operatorname{rot} v)^2,$$

il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho |v|^2 + |\rho|^2) + \lambda \int_{\Omega} \left(\frac{\rho}{2} |\operatorname{rot} v|^2 + |\nabla \rho|^2 \right) = \int_{\Omega} \rho f \cdot v. \quad (1.4.8)$$

Comme

$$\Delta = \nabla \operatorname{div} - \nabla^\perp \operatorname{rot}$$

et $\operatorname{div} v = 0$, avec $v = 0$ sur $\partial\Omega$, ceci implique que le système est dissipatif et on contrôle le gradient car

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\operatorname{rot} v|^2.$$

On tire de l'égalité (1.4.8) les estimations suivantes sur v et ρ :

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \|\nabla v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C, \quad (1.4.9)$$

et

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \|\nabla \rho\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (1.4.10)$$

où on a supposé $f \in L^1(0, T; (L^2(\Omega))^d)$.

Maintenant on peut donner une estimation pour $\Delta\rho$, ce qui donne une régularité pour ρ . Multipliant l'équation de la masse par $\Delta\rho$ et intégrant sur $(0, t) \times \Omega$, on trouve

$$\int_{\Omega} (\nabla\rho)^2(t) + 2\lambda \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta\rho)^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} \Delta\rho(v \cdot \nabla\rho) + \|\nabla\rho_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.4.11)$$

En utilisant les estimations (1.4.10), (1.4.9), l'hypothèse (1.4.7) et l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \Delta\rho(v \cdot \nabla)\rho \right| &\leq C \|\Delta\rho\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla\rho\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C \|\Delta\rho\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \|\Delta\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \end{aligned}$$

Remplaçant l'estimation précédente dans (1.4.11), il vient

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla\rho\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \|\Delta\rho\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (1.4.12)$$

Après ces estimations, se servant de l'équation (1.3.2)₁, on obtient $\partial_t\rho \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Compacité.

Les estimations précédentes ne sont pas suffisantes pour prouver l'existence de solution. On a besoin d'une estimation sur la dérivée en temps de la vitesse. Donc, considérons la base Ψ^i de l'espace H à partir des fonctions propres du problème spectral

$$\begin{cases} \lambda\Delta\Psi^i - \nabla q^i = \alpha_i\Psi^i \\ \nabla \cdot \Psi^i = 0 \\ \Psi^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

On prend $\phi = \sum_{i=1}^n d_i\Psi^i$, d_i étant des constantes. Fixons $\delta > 0$ et t tels que $0 < \delta < T$ and $0 \leq t \leq T - \delta$. De (1.4.3) et (1.4.4), avec $\Psi(\rho) = \rho$, prenant en considération les approximations sur (ρ^n, v^n) , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho^n v^n \phi &= \int_{\Omega} \rho^n v^n \cdot (v^n \cdot \nabla)\phi + \lambda \int_{\Omega} \rho^n \nabla v^n : ({}^t\nabla\phi - \nabla\phi) \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \nabla\rho^n \cdot \nabla\phi \cdot v^n + \int_{\Omega} \rho^n f \phi \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

et

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho^n(\tau, x) \varphi(t, x) = \int_{\Omega} \rho^n v^n \cdot \nabla\varphi - \lambda \int_{\Omega} \nabla\rho^n \cdot \nabla\varphi. \quad (1.4.14)$$

Lemme 1.4.3. *Sous les hypothèses du Théorème 1.4.2, on a les estimations suivantes*

$$\int_0^{T-\delta} \|v^n(t+\delta) - v^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

avec C indépendante de n et δ .

Démonstration. Partant de l'identité

$$\rho^n(t+\delta)v^n(t+\delta) - \rho^n(t)v^n(t) = \rho^n(t+\delta)[v^n(t+\delta) - v^n(t)] + [\rho^n(t+\delta) - \rho^n(t)]v^n(t),$$

et intégrant (1.4.13) par rapport à τ de t à $t+\delta$ et prenant $\phi = v^n(t+\delta) - v^n(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho^n(t+\delta)}(v^n(t+\delta) - v^n(t))\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \\ & + \int_{\Omega} [\rho^n(t+\delta) - \rho^n(t)]v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\ & = \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau)v^n(\tau) \cdot (v^n(\tau) \cdot \nabla)(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\ & + \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau)\nabla v^n(\tau) : ({}^t\nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t)) - \nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t))) \\ & - \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \nabla\rho^n(\tau) \cdot \nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \cdot v^n(\tau) \\ & + \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau)f(\tau, x)(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Dans (1.4.14), on suppose que $\varphi = v^n(t)(v^n(t+\delta) - v^n(t))$ et on intègre par rapport à τ de t à $t+\delta$, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho^n(t+\delta) - \rho^n(t))v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\ & = \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau)v^n(\tau) \cdot \nabla(v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t))) \\ & - \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \nabla\rho^n(\tau) \cdot \nabla[v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t))]. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Remplaçant la relation (1.4.16) dans (1.4.15) on trouve

$$\begin{aligned}
& \|\sqrt{\rho^n(t+\delta)}(v^n(t+\delta) - v^n(t))\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \\
&= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) f(\tau) (v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\
&+ \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) \nabla v^n(\tau) : ({}^t\nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t)) - \nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t))) \\
&+ \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla(v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t))) \\
&- \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla\{v^n(t+\delta) - v^n(t)\} \cdot v^n(\tau) \\
&+ \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) v^n(\tau) \cdot (v^n(\tau) \cdot \nabla)(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\
&- \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) v^n(\tau) \cdot \nabla(v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t))).
\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Utilisant les bornes de ρ^n , on obtient

$$\begin{aligned}
\|v^n(t+\delta) - v^n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|f(\tau, x)v^n(t+\delta)| + |f(\tau)v^n(t)| \\
&+ |\nabla v^n(\tau) : {}^t\nabla v^n(t+\delta)| + |\nabla v^n(\tau) : {}^t\nabla v^n(t)| \\
&+ |\nabla v^n(\tau) : \nabla v^n(t+\delta)| + |\nabla v^n(\tau) : \nabla v^n(t)| \\
&+ |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t+\delta)| + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)| \\
&+ |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t+\delta) \cdot v^n(t)| + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t+\delta) \cdot v^n(\tau)| \\
&+ |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(\tau)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t+\delta) \cdot v^n(t)| \\
&+ |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t+\delta) \cdot v^n(\tau)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(\tau)| \\
&+ |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t+\delta)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)|) \equiv \sum_{j=1}^{16} I_j(t).
\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

Tout d'abord, on estime

$$I_1(t) + I_2(t) = \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|f(\tau, x)v^n(t+\delta)| + |f(\tau)v^n(t)|).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder en espace et l'estimation (1.4.9) on trouve

$$\int_0^{T-\delta} I_1(t) \leq C \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}$$

En changeant l'ordre d'intégration en prenant $v^n(t) \equiv 0$ pour $t > T$ et $t < 0$, il vient

$$\int_0^{T-\delta} I_1(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \int_0^T \|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

De la même façon on estime $\int_0^{T-\delta} I_2(t)$.

$$\begin{aligned} I_3(t) + I_4(t) + I_5(t) + I_6(t) &= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|\nabla v^n(\tau) : {}^t\nabla v^n(t+\delta)| \\ &\quad + |\nabla v^n(\tau) : {}^t\nabla v^n(t)| + |\nabla v^n(\tau) : \nabla v^n(t+\delta)| + |\nabla v^n(\tau) : \nabla v^n(t)|) \end{aligned}$$

En se servant de l'inégalité de Cauchy et de (1.4.9) on obtient

$$\begin{aligned} I_3(t) &\leq \int_t^{t+\delta} \|\nabla v^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla v^n(t+\delta)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \\ &\leq C\delta^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+\delta} \|\nabla v^n(\tau)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n(t+\delta)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{T-\delta} I_3(t) \leq C(\delta T)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{d \times d})}$$

et avec à nouveau l'utilisation de (1.4.9) on arrive à l'estimation

$$\int_0^{T-\delta} I_3(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

De la même manière on estime $\int_0^{T-\delta} I_4(t)$, $\int_0^{T-\delta} I_5(t)$, $\int_0^{T-\delta} I_6(t)$.

Notons

$$\begin{aligned} I_7(t) + I_8(t) + I_9(t) + I_{10}(t) + I_{11}(t) &= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t+\delta)| \\ &\quad + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)| + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t+\delta) \cdot v^n(t)| \\ &\quad + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t+\delta) \cdot v^n(\tau)| + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(\tau)|). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, l'injection de Sobolev de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et (1.4.12) on trouve l'inégalité

$$I_7(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n(t)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla v^n(t+\delta)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}.$$

En intégrant l'inégalité précédente entre 0 et $T-\delta$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$\int_0^{T-\delta} I_7(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

On trouve la même majoration pour $\int_0^{T-\delta} I_8(t)$, $\int_0^{T-\delta} I_9(t)$, $\int_0^{T-\delta} I_{10}(t)$ et $\int_0^{T-\delta} I_{11}(t)$.

Enfin, on estime

$$\begin{aligned} I_{12}(t) + I_{13}(t) + I_{14}(t) + I_{15}(t) + I_{16}(t) &= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t+\delta)| \\ &+ |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(\tau)| \\ &+ |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t+\delta)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)|). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on utilise l'injection de Sobolev et l'inégalité de Hölder pour trouver

$$I_{12}(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^n(t)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}} \|\nabla v^n(t+\delta)\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}.$$

En intégrant entre 0 et $T - \delta$ l'inégalité ci-dessus on trouve

$$\int_0^{T-\delta} I_{12}(t) \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

On fait le même travail pour $\int_0^{T-\delta} I_{13}(t)$, $\int_0^{T-\delta} I_{14}(t)$, $\int_0^{T-\delta} I_{15}(t)$, et $\int_0^{T-\delta} I_{16}(t)$.

Ceci termine la preuve du lemme. \square

L'estimation (1.4.9) et le Lemme 1.4.3 donnent, par le théorème d'injection, la compacité de $(v^n) \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$ et dans tout domaine $L^p(0, T; (L^q(\Omega))^d)$ avec $p \in [2, +\infty]$, $q \in [2, 6[$ si $\frac{1}{p} + \frac{3}{2q} > \frac{3}{4}$ (voir [14]).

Passage à la limite.

Nous sommes maintenant à mesure de passer à la limite dans (1.4.3) et (1.4.4), en utilisant la compacité de v^n . Pour les termes linéaires, le passage à la limite n'est pas un problème. On s'occupe ici des termes non linéaires dans (1.4.4). Considérons les fonctions test

$$\varphi = \sum_{j=1}^n H_j(t) \Psi_j(x), \quad H_j \in C^1(0, T) \text{ telle que } H_j(T) = 0. \quad (1.4.19)$$

Pour ρ^n convergent faible étoile vers ρ dans $L^\infty(]0, T[\times \Omega)$ et v^n convergent fortement vers v dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$ le produit $\rho^n v^n$ converge faiblement vers ρv dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$. La différence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^n v^n (v^n \cdot \nabla) \varphi - \int_{\Omega} \rho v (v \cdot \nabla) \varphi &= \int_{\Omega} (\rho^n - \rho) v (v \cdot \nabla) \varphi \\ &+ \int_{\Omega} \rho^n (v^n - v) (v \cdot \nabla) \varphi + \int_{\Omega} \rho^n v^n (v^n - v) \cdot \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, le premier terme de droite tend vers zéro à cause de la faible convergence de $v\rho^n$ vers ρv . Les deux autres termes s'annulent grâce au fait que ρ^n est bornée uniformément et $v^n \in L^\infty(0, T; H)$ (voir (1.4.9)), et à la convergence forte de v^n vers v .

L'identité (1.4.4) reste vraie pour la famille de fonctions

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; W^{1,q}(\Omega)), \\ \frac{1}{p} + \frac{3}{2q} &\leq 1, \quad p \in [1, +\infty], \quad q \in [3/2, +\infty] \\ \partial_t \varphi &\in L^p(0, T; L^q(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{3}{2q} \leq \frac{7}{4}, \quad p \in [1, 2], \quad q \in [6/5, 2], \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

parce que (1.4.19) est dense dans (1.4.20).

De façon similaire, le passage à la limite dans (1.4.3) est valide pour les fonctions test

$$\begin{aligned} \eta &\in L^p(0, T; W^{1,q}(\Omega)), \quad \partial_t \eta \in L^1(]0, T[\times \Omega) \\ \frac{1}{p} + \frac{3}{2q} &\leq \frac{7}{4}, \quad p \in [1, 2], \quad q \in [6/5, 2]. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. On remarque qu'il est possible de remplacer, dans le système (1.3.2), ∇u par le tenseur des taux de déformation

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u). \quad \square$$

1.4.2. Existence de solution faible pour le modèle de combustion.

L'existence de solutions faibles globales est bien connue en dimension deux, voir les travaux dans [16]. Il donne un résultat d'existence globale pour des solutions à énergie finie en dimension deux.

Ici on considère $\Omega = \mathbf{T}^d$ avec $d = 2$ ou 3 et on montre le

Théorème 1.4.4. *Sous les hypothèses (1.4.7), $m > 1$, il existe au moins une solution globale généralisée (v, ρ) du système (1.3.5) telle que*

$$v \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \text{ et } \rho \in L^\infty(]0, T[\times \Omega) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Démonstration. Avant tout, on montre, comme précédemment, que

$$0 < m \leq \rho(t, x) \leq M < +\infty. \tag{1.4.21}$$

Pour presque tout $(t, x) \in]0, T[\times \Omega$, on note par $\rho^- = \max(0, m - \rho)$ et $\rho^+ = \min(0, M - \rho)$.

En multipliant l'équation de la masse par $m - \rho$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m - \rho)^2 + \int_{\Omega} (m - \rho)(v \cdot \nabla)(m - \rho) + c_0 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} (\nabla(m - \rho))^2 = 0.$$

En utilisant l'identité $\int_{\Omega} (m - \rho)(v \cdot \nabla)(m - \rho) = 0$ et en prenant le maximum, la dernière égalité conduit à

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho^-)^2 + 2c_0 \int_{\Omega} \frac{1}{M} (\nabla(\rho^-))^2 \leq 0.$$

Maintenant, on intègre de 0 à t l'inégalité précédente, ce qui donne

$$\|\rho^-\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + 2c_0 \frac{1}{M} \int_0^t \|\nabla \rho^-\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\rho_0^-\|_{L^2(\Omega)}^2$$

où $\rho_0^- = \rho^-(0, \cdot) = \max(0, m - \rho_0) = 0$. Ainsi $\rho^-(t, x) = 0$. Ce qui donne une borne inférieure pour ρ . Pour la borne supérieure on fait les mêmes calculs.

Estimation d'énergie.

On montre d'abord une estimation *a priori* sur ρ . On multiplie la première équation de (1.3.5) par ρ et on intègre sur Ω pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^2 + 2c_0 \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} |\nabla \rho|^2 = 0.$$

Gardant à l'esprit (1.4.21) on déduit l'estimation

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \frac{2c_0}{M} \|\nabla \rho\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C. \quad (1.4.22)$$

Dans la suite on veut avoir une estimation sur u . Du système (1.3.5), multipliant l'équation du mouvement par u et intégrant sur Ω , on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho^2 + \rho |u|^2) + c_0 \left(\int_{\Omega} \nabla \log \rho \cdot |\nabla \rho| + \log \rho |\nabla u|^2 \right) + \frac{1}{2} c_0 \int_{\Omega} \Delta \log \rho \cdot |u|^2 \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \rho) |u|^2 - \sum_{i,j} \int_{\Omega} \rho u_i u_j \partial u_i + c_0 \int_{\Omega} \partial_j \log \rho \cdot \partial_j u_i \cdot u_i + c_0 \int_{\Omega} \partial_i \log \rho \cdot \partial_j u_i \cdot u_j \\ & = \int_{\Omega} \rho f \cdot u. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} c_0 \int_{\Omega} \Delta \log \rho \cdot |u|^2 + c_0 \sum_{i,j} \int_{\Omega} \partial_j \log \rho \cdot u_i \cdot \partial_j u_i = 0, \\ & c_0 \sum_{i,j} \int_{\Omega} \partial_i \log \rho \cdot \partial_j u_i \cdot u_j + c_0 \sum_{i,j} \int_{\Omega} \log \rho \cdot \partial_j u_i \cdot \partial_i u_j = 0 \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 \nabla \rho \cdot u + \int_{\Omega} \rho u_i u_j \partial_j u_i = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho^2 + \rho|u|^2) + 2c_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} + 2c_0 \int_{\Omega} (\log \rho \cdot |\nabla u|^2 - \log \rho \cdot \partial_j u_i \cdot \partial_i u_j) \\ = 2 \int_{\Omega} \rho f \cdot u. \end{aligned}$$

En plus, avec

$$\int_{\Omega} \log \rho \left[(\nabla v)^2 - \partial_i v_j \partial_j v_i \right] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \log \rho \cdot (\operatorname{rot} v)^2,$$

il vient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho^2 + \rho|u|^2) + 2c_0 \int_{\Omega} \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} + c_0 \int_{\Omega} \log \rho \cdot |\operatorname{rot} u|^2 = \int_{\Omega} \rho f \cdot u.$$

Comme

$$\Delta = \nabla \operatorname{div} - \nabla^\perp \operatorname{rot}$$

et $\operatorname{div} u = 0$, on contrôle le gradient car

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\operatorname{rot} v|^2$$

et $\log \rho \geq \log m > 0$.

Finalement, en utilisant l'inégalité de Hölder, les bornes sur ρ avec $m > 1$, la dernière relation donne, après intégration sur $]0, T[$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \rho\|_{L^2((0,T),L^2(\Omega)^d)}^2 \\ + \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{d \times d})}^2 \leq C. \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Maintenant, on donne une estimation de $\Delta \log \rho$. On peut réécrire l'équation de la masse de la façon suivante

$$\partial_t \log \rho + (u \cdot \nabla) \log \rho = \frac{c_0}{\rho} \Delta \log \rho. \quad (1.4.24)$$

On multiplie (1.4.24) par $\Delta \log \rho$, on intègre sur $]0, T[\times \Omega$ et on utilise l'inégalité de Cauchy et le théorème d'injection de Sobolev pour obtenir

$$\|\Delta \log \rho\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \log \rho\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^d)}^2 \leq C. \quad (1.4.25)$$

La multiplication de (1.4.24) par $\log \rho$ et l'utilisation de (1.4.25) donnent

$$\|\log \rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C.$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'estimation (1.4.23) et (1.4.24) donne

$$\partial_t \log \rho \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \log \rho \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Pour conclure, on utilise le même argument de compacité que dans le cas du modèle de pollution. Par conséquent, on utilise de (1.4.23), (1.4.25) et la propriété $\rho > 1$ qui vont permettre de prouver que toute suite de vitesses est compacte dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)$. Ce qui achève la preuve du théorème. \square

1.4.3. Existence de solutions faibles pour le modèle général.

Nous montrons dans cette partie que le modèle général complété par les conditions initiales (1.1.7) admet une solution faible globale dans un domaine $\Omega = \mathbf{T}^d$ avec $d = 2$ ou 3 , sans restriction sur les données.

Théorème 1.4.5. *On suppose que Ψ est une fonction croissante de classe $C^1([m, M])$, avec $\Psi \geq c > 0$. Si les données vérifient la même condition que dans les sections précédentes, alors il existe au moins une solution globale généralisée (v, ρ) du système (1.3.11) telle que*

$$v \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \text{ et } \rho \in L^\infty(]0, T[\times \Omega) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Démonstration. Les étapes de la preuve sont les mêmes que dans les deux sections précédentes. On donne dans la suite les estimations d'énergie nécessaires pour le résultat d'existence.

Principe du maximum.

On considère les fonctions $\rho^- = \max(0, m - \rho)$ et $\rho^+ = \min(0, M - \rho)$ et par la même technique que dans la dernière section, on obtient à partir de la première équation de (1.3.11) l'estimation suivante

$$0 < m \leq \rho(t, x) \leq M < +\infty \quad p.p \quad (t, x) \in]0, T[\times \Omega. \quad (1.4.26)$$

Estimation d'énergie.

Se servant du système (1.3.11), on multiplie l'équation des moments par v et l'équation de la masse par ρ , on intègre sur Ω et utilisant les mêmes arguments que dans l'estimation d'énergie du système (1.3.2) ou (1.3.5), on trouve l'estimation suivante

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho v^2 + \rho^2) + \lambda \int_{\Omega} \left(\frac{\Psi}{2} (\text{rot} v)^2 + \Psi' (\nabla \rho)^2 \right) = \int_{\Omega} \rho f v. \quad (1.4.27)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, les bornes de ρ , l'hypothèse $\Psi \geq c > 0$, la relation (1.4.27) donne, après intégration sur $]0, T[$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \rho\|_{L^2((0, T), (L^2(\Omega))^d)}^2 \\ + \|v\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{d \times d})}^2 \leq C. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

On cherche maintenant une estimation de $\Delta \Psi(\rho)$. À partir de l'équation (1.3.11)₁, on trouve

$$\partial_t \Psi(\rho) + v \cdot \nabla \Psi(\rho) = \lambda \Psi'(\rho) \Delta \Psi(\rho). \quad (1.4.29)$$

On multiplie (1.4.29) par $\Delta \Psi(\rho)$, on intègre sur $]0, T[\times \Omega$, en utilisant l'inégalité de Cauchy et le théorème d'injection de Sobolev on trouve

$$\|\Delta \Psi(\rho)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla \Psi(\rho)\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^d)}^2 \leq C. \quad (1.4.30)$$

La multiplication de (1.4.29) par $\Psi(\rho)$ et l'utilisation de (1.4.30) donnent

$$\|\Psi(\rho)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C.$$

Cette dernière inégalité combinée avec l'estimation (1.4.29) et (1.4.30) donne

$$\partial_t \Psi(\rho) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \Psi(\rho) \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Compacité.

L'utilisation de (1.4.28) et (1.4.30) et la propriété de la fonction Ψ permettent de montrer que toute suite de vitesses est compacte dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^d)$.

Fixons $\delta > 0$ et t tels que $0 < \delta < T$ and $0 \leq t \leq T - \delta$. De (1.4.3) et (1.4.4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho^n v^n \phi &= \int_{\Omega} \rho^n v^n \cdot (v^n \cdot \nabla) \phi + \lambda \int_{\Omega} \Psi(\rho^n) \nabla v^n : ({}^t \nabla \phi - \nabla \phi) \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \Psi'(\rho^n) \nabla \rho^n \cdot \nabla \phi \cdot v^n + \int_{\Omega} \rho^n f \phi \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

et

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} \rho^n(\tau, x) \varphi(t, x) = \int_{\Omega} \rho^n v^n \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_{\Omega} \Psi'(\rho^n) \nabla \rho^n \cdot \nabla \varphi. \quad (1.4.32)$$

Lemme 1.4.6. *Sous les hypothèses du Théorème 1.4.5, on a les estimations suivantes*

$$\int_0^{T-\delta} \|v^n(t+\delta) - v^n(t)\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \leq C\delta^{\frac{1}{2}}.$$

avec C indépendante de n et δ .

Démonstration. Partant de l'identité

$$\rho^n(t+\delta)v^n(t+\delta) - \rho^n(t)v^n(t) = \rho^n(t+\delta)[v^n(t+\delta) - v^n(t)] + [\rho^n(t+\delta) - \rho^n(t)]v^n(t),$$

et intégrant (1.4.31) par rapport à τ de t à $t+\delta$ et prenant $\phi = v^n(t+\delta) - v^n(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{\rho^n(t+\delta)}(v^n(t+\delta) - v^n(t))\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \\ &+ \int_{\Omega} [\rho^n(t+\delta) - \rho^n(t)]v^n(t) \cdot (v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\ &= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau)v^n(\tau) \cdot (v^n(\tau) \cdot \nabla)(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \\ &+ \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \Psi(\rho^n) \nabla v^n(\tau) : ({}^t \nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t)) - \nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t))) \\ &- \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \Psi'(\rho^n) \nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \cdot v^n(\tau) \\ &+ \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau)f(\tau, x)(v^n(t+\delta) - v^n(t)) \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

Dans (1.4.32), on pose que $\varphi = v^n(t)(v^n(t + \delta) - v^n(t))$ et on intègre par rapport à τ de t à $t + \delta$, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho^n(t + \delta) - \rho^n(t)) v^n(t) \cdot (v^n(t + \delta) - v^n(t)) \\ &= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) v^n(\tau) \cdot \nabla (v^n(t) \cdot (v^n(t + \delta) - v^n(t))) \\ & \quad - \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \Psi'(\rho^n) \nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla [v^n(t) \cdot (v^n(t + \delta) - v^n(t))]. \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

Remplaçant la relation (1.4.34) dans (1.4.33) on trouve

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{\rho^n(t + \delta)}(v^n(t + \delta) - v^n(t))\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \\ &= \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) f(\tau) \cdot (v^n(t + \delta) - v^n(t)) \\ & \quad + \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \Psi(\rho^n) \nabla v^n(\tau) : ({}^t \nabla (v^n(t + \delta) - v^n(t)) - \nabla (v^n(t + \delta) - v^n(t))) \\ & \quad + \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \Psi'(\rho^n) \nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla (v^n(t) \cdot (v^n(t + \delta) - v^n(t))) \\ & \quad - \lambda \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \Psi'(\rho^n) \nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla \{v^n(t + \delta) - v^n(t)\} \cdot v^n(\tau) \\ & \quad + \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) v^n(\tau) \cdot (v^n(\tau) \cdot \nabla) (v^n(t + \delta) - v^n(t)) \\ & \quad - \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} \rho^n(\tau) v^n(\tau) \cdot \nabla (v^n(t) \cdot (v^n(t + \delta) - v^n(t))). \end{aligned} \quad (1.4.35)$$

Utilisant les bornes de ρ^n et les propriétés de la fonction Ψ , en posant

$$C = \frac{1}{m} \max \left(\Psi(M), \max_{[m, M]} \Psi', M, 1 \right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \|v^n(t + \delta) - v^n(t)\|_{(L^2(\Omega))^d}^2 \leq C \int_t^{t+\delta} \int_{\Omega} (|f(\tau, x) v^n(t + \delta)| + |f(\tau) v^n(t)| \\ & \quad + |\nabla v^n(\tau) : {}^t \nabla v^n(t + \delta)| + |\nabla v^n(\tau) : {}^t \nabla v^n(t)| \\ & \quad + |\nabla v^n(\tau) : \nabla v^n(t + \delta)| + |\nabla v^n(\tau) : \nabla v^n(t)| \\ & \quad + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t + \delta)| + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)| \\ & \quad + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t + \delta) \cdot v^n(t)| + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t + \delta) \cdot v^n(\tau)| \\ & \quad + |\nabla \rho^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(\tau)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t + \delta) \cdot v^n(t)| \\ & \quad + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t + \delta) \cdot v^n(\tau)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(\tau)| \\ & \quad + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t + \delta)| + |v^n(\tau) \cdot \nabla v^n(t) \cdot v^n(t)|) \equiv \sum_{j=1}^{16} I_j(t). \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

Reprenant le calcul fait dans le Lemme 1.4.3, on termine la preuve du lemme. \square

1.5. Un résultat de convergence

Dans cette section on montre la convergence quand λ tend vers 0 du système de Kazhikhov-Smagulov avec une densité initiale s'annulant ($\rho_0 \geq 0$)

$$(1.5.1) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \lambda \Delta \rho \text{ dans } Q, \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) - \lambda \nabla v \cdot \nabla \nabla \rho - \lambda \nabla \rho \cdot \nabla v - \mu \Delta v + \nabla p = \rho f \text{ dans } Q, \\ \operatorname{div}(v) = 0 \text{ dans } Q, \end{cases}$$

avec les conditions aux bords

$$\nabla \rho \cdot n = 0 \text{ sur }]0, T[\times \partial \Omega, \quad (1.5.2)$$

$$v = 0 \text{ sur }]0, T[\times \partial \Omega, \quad (1.5.3)$$

et les conditions initiales

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \text{ dans } \Omega, \quad (1.5.4)$$

$$\left(\int_{\Omega} \rho v u \right)(0) = \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \cdot u \quad \forall u \in \mathbf{V} \text{ avec } v_0 = v(0, \cdot), \quad (1.5.5)$$

vers le système de Navier-Stokes non homogène avec densité initiale s'annulant

$$(1.5.6) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ dans } Q, \\ \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) - \mu \Delta v + \nabla p = \rho f \text{ dans } Q, \\ \operatorname{div}(v) = 0 \text{ dans } Q, \\ \left(\int_{\Omega} \rho v u \right)(0) = \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \cdot u \quad \forall u \in \mathbf{V} \text{ avec } v_0 = v(0, \cdot), \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) \text{ dans } \Omega, \\ v = 0 \text{ sur }]0, T[\times \partial \Omega, \end{cases}$$

avec v un champ de vitesse, p la pression, ρ la densité, f un champ de vecteur de données et $Q =]0, T[\times \Omega$ avec Ω un ouvert borné lipschitzien de \mathbb{R}^3 , T l'horizon de temps et

$$\mathbf{V} = \{v \in (H^1(\Omega))^3; \operatorname{div} v = 0 \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial \Omega\}.$$

Le système (1.5.6) a été étudié par J. Simon qui a montré dans [21] l'existence d'une solution globale. Dans [24] on a montré l'existence de solutions faibles globales en temps pour le système (1.5.1)-(1.5.5).

Définition 1.5.1. Soit $1 \leq q \leq +\infty$, $0 < s < 1$. Soit E un espace de Banach. On appelle espace de Nikolskii et on note $N^{s,q}(0, T; E)$, l'espace défini par

$$N^{s,q}(0, T; E) = \left\{ f \in L^q(0, T; E) : \sup_{h>0} h^{-s} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^q(0, T-h; E)} < +\infty \right\}.$$

Pour le système (1.5.1), on a montré dans [24] les estimations suivantes :

$$\|\rho^{\frac{1}{2}}v\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 + \mu_1 \|\nabla v\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^9)}^2 \leq C\|f\|_{L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 + C_0, \quad (1.5.7)$$

$$\|\nabla \rho\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 + \lambda \|\Delta \rho\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_\lambda, \quad (1.5.8)$$

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \lambda \|\nabla \rho\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 \leq C, \quad (1.5.9)$$

avec $\mu_1 = \mu - \lambda \frac{M}{2}$.

Etant donné qu'on étudie la convergence quand λ tend vers 0, à partir des estimations ci-dessus et de l'équation (1.5.1)₁, il vient

$$\partial_t \rho \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (1.5.10)$$

Soit $(\rho^\lambda, v^\lambda, p^\lambda)$ la solution du problème (1.5.1)-(1.5.5). On a, quand λ tend vers 0, les convergences qui suivent :

$$\rho^\lambda \rightharpoonup \rho \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(Q), \quad (1.5.11)$$

$$v^\lambda \rightharpoonup v \text{ faible dans } L^2(0, T; \mathbf{V}). \quad (1.5.12)$$

A partir de (1.5.7), on a $(\rho^\lambda)^{\frac{1}{2}}v^\lambda$ uniformément borné dans $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$.

Ce qui entraîne que

$$(\rho^\lambda)^{\frac{1}{2}}v^\lambda \text{ borné uniformément dans } L^{\frac{8}{3}}(0, T; (L^4(\Omega))^3), \quad (1.5.13)$$

ce qui permet d'avoir

$$\rho^\lambda v^\lambda \otimes v^\lambda \text{ borné uniformément dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; (L^2(\Omega))^9). \quad (1.5.14)$$

Donc il existe $\xi_1 \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; (L^2(\Omega))^9)$ telle que

$$\rho^\lambda v^\lambda \otimes v^\lambda \rightharpoonup \xi_1 \text{ faible dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; (L^2(\Omega))^9). \quad (1.5.15)$$

Comme dans le Lemme 1.4.3 ou dans [24] pour la densité s'annulant, on a

$$\rho^\lambda v^\lambda \in N^{\frac{1}{4}, 2}(0, T; (L^2(\Omega))^3). \quad (1.5.16)$$

L'application du Lemma 4 (ii) de [21] donne que l'application

$$L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3) \cap N^{\frac{1}{4}, 2}(0, T; (L^2(\Omega))^3) \rightarrow L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$$

est une injection compacte. Donc

$$\rho^\lambda v^\lambda \rightarrow \rho v \text{ fort dans } L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3). \quad (1.5.17)$$

La continuité de l'application $H^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega)$, voir Lemma 3 de [21], donne

$$\rho^\lambda v^\lambda \otimes v^\lambda \rightharpoonup \rho v \otimes v \text{ faible } L^1(0, T; (W^{-1, \frac{3}{2}}(\Omega))^9) \quad (1.5.18).$$

D'où $\xi_1 = \rho v \otimes v$.

Passage à la limite pour l'équation de la masse.

On considère la fonction $\phi \in H^1(Q)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t \rho^\lambda + (v^\lambda \cdot \nabla) \rho^\lambda) \phi &= 0 \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^\lambda \partial_t \phi + \rho^\lambda (v^\lambda \cdot \nabla) \phi) - \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla \phi \\ &\quad + \int_{\Omega} \phi(0, \cdot) \rho_0. \end{aligned}$$

Or on a l'estimation suivante

$$\left| \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla \phi \right| \leq \lambda \|\nabla \rho^\lambda\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} \|\nabla \phi\|_{(L^\infty(Q))^3} T^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\lambda} C \|\nabla \phi\|_{(L^\infty(Q))^3}.$$

Donc quand λ tend vers 0 on a $\lambda \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla \phi$ qui tend vers 0.

Avec les convergences (1.5.11)-(1.5.12), on obtient

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^\lambda \partial_t \phi + \rho^\lambda (v^\lambda \cdot \nabla) \phi) + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla \phi + \int_{\Omega} \phi(0, \cdot) \rho_0 \\ \rightarrow &- \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \partial_t \phi + \rho (v \cdot \nabla) \phi) + \int_{\Omega} \phi(0, \cdot) \rho_0. \end{aligned}$$

D'où

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \quad (1.5.19)$$

Passage à la limite dans l'équation de quantité de mouvement.

On considère une fonction $\varphi \in (\mathcal{D}(Q))^3$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^\lambda \partial_t v^\lambda + \rho^\lambda (v^\lambda \cdot \nabla) v^\lambda) \varphi &= - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi v^\lambda (\partial_t \rho^\lambda + (v^\lambda \cdot \nabla) \rho^\lambda) \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \rho^\lambda v^\lambda (\partial_t \varphi + (v^\lambda \cdot \nabla) \varphi). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^\lambda \partial_t v^\lambda + \rho^\lambda (v^\lambda \cdot \nabla) v^\lambda) \varphi &= + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} (v^\lambda \cdot \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla v^\lambda) \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Omega} \rho^\lambda v^\lambda (\partial_t \varphi + (v^\lambda \cdot \nabla) \varphi). \end{aligned}$$

Comme précédemment on a les termes

$$\lambda \int_0^T \int_{\Omega} v^\lambda \cdot \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \cdot \nabla \rho^\lambda \cdot \nabla v^\lambda$$

qui tendent vers 0 quand λ tend vers 0.

Avec les convergences (1.5.11), (1.5.12) et l'équation de la masse (1.5.19), on a

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \rho^\lambda v^\lambda (\partial_t \varphi + (v^\lambda \cdot \nabla) \varphi) \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \partial_t v + \rho (v \cdot \nabla) v) \varphi.$$

Par ailleurs

$$\lambda \int_0^T \int_{\Omega} v^\lambda \cdot \nabla \nabla \rho^\lambda \varphi = -\lambda \int_0^T \int_{\Omega} v^\lambda \cdot \nabla \varphi \cdot \nabla \rho^\lambda.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \lambda \int_0^T \int_{\Omega} v^\lambda \cdot \nabla \nabla \rho^\lambda \varphi \right| &\leq \lambda \int_0^T \|\nabla \rho^\lambda\|_{(L^2(\Omega))^3} \|v^\lambda\|_{(L^2(\Omega))^3} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \lambda \|\nabla \rho^\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \|\nabla v^\lambda\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(Q)^3} \\ &\leq \lambda^{\frac{1}{2}} C. \end{aligned}$$

D'où quand λ tend vers 0, on a le terme $\lambda \int_0^T \int_{\Omega} v^\lambda \cdot \nabla \nabla \rho^\lambda \varphi$ qui tend vers 0.

Pour les termes $\int_0^T \int_{\Omega} (\rho^\lambda f + \mu \Delta v^\lambda - \nabla p^\lambda) \varphi$, la convergence s'obtient facilement et de façon directe. En résumé quand λ tend vers 0, l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (1.5.1) tend vers

$$\rho \partial_t v + \rho (v \cdot \nabla) v - \mu \Delta v + \nabla p = \rho f. \quad (1.5.20)$$

Conditions initiales.

D'après la convergence (1.5.11) $\rho^\lambda(0) \rightarrow \rho(0)$ fort dans $L^2(\Omega)$. Avec la condition initiale on a $\rho(0) = \rho_0$ dans Ω .

Pour montrer que

$$\left(\int_{\Omega} \rho v \cdot u \right)(0) = \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \cdot u \quad \forall u \in \mathbf{V},$$

on considère $u \in \mathbf{V}$ fixé.

Grâce à (1.5.7) on a

$$\int_{\Omega} \rho^\lambda v^\lambda \cdot u \text{ borné dans } L^\infty(0, T). \quad (1.5.21)$$

On a

$$\left| \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{\lambda} v^{\lambda} \cdot u \right| \leq C(\|f\|_{(L^2(\Omega))^3} + \Psi_{\lambda}), \quad (1.5.22)$$

où $\|f\|_{(L^2(\Omega))^3} \in L^1(0, T)$ et $\Psi_{\lambda} = \|\rho^{\lambda} v^{\lambda} \otimes v^{\lambda} - (\mu + \lambda) \nabla v^{\lambda}\|_{L^2(\Omega)^9} + C\|\rho^{\lambda}\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ est borné dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T)$.

Les estimations (1.5.22) et (1.5.21) permettent de vérifier les hypothèses du LEMA 1.3 iv.b de [22]. En conséquence, la suite $\int_{\Omega} \rho^{\lambda} v^{\lambda} \cdot u$ est dans un compact de $\mathcal{C}([0, T])$.

Par ailleurs, (1.5.17) et (1.5.21) impliquent que

$$\int_{\Omega} \rho^{\lambda} v^{\lambda} \cdot u \rightarrow \int_{\Omega} \rho v \cdot u \text{ dans } L^{\infty}(0, T) \text{ faible } *.$$

Cette convergence a aussi lieu dans $\mathcal{C}([0, T])$ au sens fort; donc $\int_{\Omega} \rho v \cdot u \in \mathcal{C}([0, T])$ et en particulier pour $t = 0$ c'est-à-dire

$$\left(\int_{\Omega} \rho^{\lambda} v^{\lambda} \cdot u \right)(0) \rightarrow \left(\int_{\Omega} \rho v \cdot u \right)(0) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Or

$$\int_{\Omega} \rho^{\lambda}(0) v^{\lambda}(0) \cdot u = \int_{\Omega} \rho_0^{\lambda} v_0^{\lambda} \cdot u \rightarrow \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \cdot u \text{ dans } \mathbb{R},$$

d'où

$$\left(\int_{\Omega} \rho v \cdot u \right)(0) = \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \cdot u.$$

Ce qui termine la preuve de la convergence. \square

Références bibliographiques

- [1] S.N. ANTONSEV, A.V. KAZHIKHOV, V.N. MONAKOV. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, North-Holland, 1990.
- [2] H. BEIRAO DA VEIGA. Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions. *Ann. Scuola Norm Pisa*, **10**, (1983), 341–351.
- [3] H. BEIRAO DA VEIGA, H. SERAPIONI, A. VALLI. On the motion of nonhomogeneous fluids in the presence of diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, **85**, (1982), 179–191.
- [4] D. BRESCH ET B. DESJARDINS. Existence of global weak solutions for a 2D Shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model, *Commun. Math. Phys.* **238** (2003) 1-2, 211-223.
- [5] D. BRESCH ET B. DESJARDINS. From Navier-Stokes to Saint-Venant, *en préparation*.
- [6] D. BRESCH, E.H. ESSOUFI, M. SY. De nouveaux systèmes de type Kazhikhov-Smagulov : modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **335**, Série I, (2002), 973–978.
- [7] D. BRESCH, E.H. ESSOUFI, M. SY. Some new Kazhikhov-Smagulov type models : pollution, combustion, *en préparation*.
- [8] D. BRESCH, B. DESJARDINS, C.K. LIN. On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Comm. Partial Diff. Eqs.* (**28**) Nos 3-4 (2003), 1009-1037.
- [9] P. EMBID. Well-posedness of the nonlinear equations for zero Mach number combustion *Comm. Partial Diff. Eqs.*, **12**, (1987), 1227-1283.
- [10] F. FRANCHI, B. STRAUGHAN. A comparison of the Graffi and Kazhikhov-Smagulov models for heavy pollution instability. *Adv. in Water Ressources*, **24**, (2001), 585–594.
- [11] J. F. GERBEAU ET B. PERTHAME. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; Numerical validation, *Discrete Cont. Dyn. Syst. Ser. B* **1**, No. 1 (2001) 89-102.
- [12] D. GRAFFI. Il teorema di unicita per i fluidi incompressibili, perfetti, eterogenei. *Rev. Unione Mat Argentina*, **17**, (1955), 73–77.
- [13] V.N. IGNATIEV, B.G. KUZNETSOV. Diffusion model of boundary layer turbulence with polymer. *Tchyslennye Metody Mekh. Splotshn. Sredy, Akad. Nauk SSSR, Sibirsk. Otd., Institut Teor. i Prikl. Mekh.*, (1973), T4, N4, S.78–87.
- [14] O. A. LADYZHENSKAYA. *Mathematical problems in viscous incompressible fluid dynamics* Moscow, 1970.
- [15] A. KAZHIKHOV, SH. SMAGULOV. The correctness of boundary value problems in a diffusion model of an inhomogeneous fluid. *Sov. Phys. Dokl.* **22**, No. 1, (1977), 249–252.
- [16] P.-L. LIONS. *Mathematical topics in fluid dynamics, Vol 1 Incompressible models*, Oxford University Press, 1998.
- [17] P.-L. LIONS. *Mathematical topics in fluid dynamics, Vol 2 Compressible models*, Oxford University Press, 1998.

- [18] A. MAJDA. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space dimensions*. *Appl. Math. Sci.* **53** Springer-Verlag, 1984.
- [19] P. SECCHI. On the initial value problem for the equations of motion of viscous incompressible fluids in the presence of diffusion. *Boll. Un. Mat. Ital. B* (6) 1 (1982), no. 3, 1117–1130.
- [20] P. SECCHI. On the motion of viscous fluids in the presence of diffusion. *SIAM J. Math. Anal.* **19**, (1988), no. 1, 22–31.
- [21] J. SIMON. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids : Existence of velocity, density, and pressure *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 21, (September 1990), no. 5, 1093-1117.
- [22] J. SIMON. *Existencia de solution del problema de Navier-Stokes con densidad variable*, Universidad de Sevilla, 1989.
- [23] J. SIMON. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, *Annali Mat. Pura Appl.*, serie IV Vol. 146, (1987) pp. 65-96.
- [24] M. SY. Equations de Kazhikhov-Smagulov : densité initiale pouvant s'annuler, en préparation.

Chapitre 2. Equations PG :

Obtention du modèle et paramétrisations de petites échelles

Les variations d'insolation avec la latitude, mais aussi les échanges de chaleur et d'eau douce entre l'océan et l'atmosphère, modifient la température et la salinité de l'eau à la surface des océans, et créent ainsi des courants de densité. Influencés également par les vents en surface, ces courants tendent à feuilleter l'océan en couches ("masses d'eau") de propriétés quasi-uniformes, rejoignant la surface dans leur région de formation, et soumises au mélange aux interfaces entre les couches.

Cette circulation d'échelle planétaire, dite thermohaline, est relativement lente avec des vitesses de l'ordre du mm/s dans l'intérieur de l'océan, mais jusqu'à quelques cm/s dans des courants bien identifiés, plus souvent intensifiés le long des bords Ouest, et larges de moins d'une centaine de km.

Elle joue un rôle aussi important que l'atmosphère dans le transport de chaleur des régions tropicales vers les régions polaires (plus de 2 petawatt au niveau des tropiques), réduisant ainsi les écarts de température à la surface du globe et rendant notre planète plus vivable. On se demande actuellement comment la formation des eaux profondes en Atlantique Nord, qui draine les eaux du Gulf Stream si favorable au climat européen, réagira au réchauffement climatique et à l'augmentation prévisible des pluies aux moyennes et hautes latitudes.

Contrairement à l'atmosphère où les phénomènes transitoires comme les anticyclones et les dépressions ont des tailles assez voisines de la circulation générale (couramment plus de 1000 km), on peut imaginer que la circulation thermohaline est assez bien découplée des tourbillons océaniques, dits de méso-échelle, de diamètre typique d'une centaine de km.

Il est ainsi tentant de définir des équations du mouvement filtrées pour cette circulation lente de grande échelle : les équations planétaires géostrophiques. Différents systèmes d'équations peuvent être obtenus suivant les opérateurs visqueux considérés pour paramétriser les phénomènes à petites échelles. Les choix de ces opérateurs sont totalement empiriques et sont sujet à diverses études numériques. Ces équations interviennent en océanographie et en météorologie.

Dans les deux premières sections nous donnons une description physique de la circulation thermohaline.

Dans la section 2.3 on montre que certaines équations planétaires géostrophiques sont équivalentes à la convection de Bénard dans un milieu poreux anisotrope. On décrit ces modèles et quelques résultats obtenus par des chercheurs travaillant en dynamique des fluides géophysiques.

On rappelle également des résultats obtenus par des chercheurs travaillant dans le domaine des milieux poreux. De cette façon, on espère rapprocher les deux communautés. Nous détaillons donc les différents modèles et mentionnons les parallèles qui existent entre ces modèles. Ces paramétrisations sont parfois semblables à des modèles de convection de Bénard dans un milieu poreux en rotation et de faible épaisseur. Malheureusement cette observation était méconnue par la communauté de la dynamique des fluides géophysiques.

2.1. La circulation thermohaline "à la main"

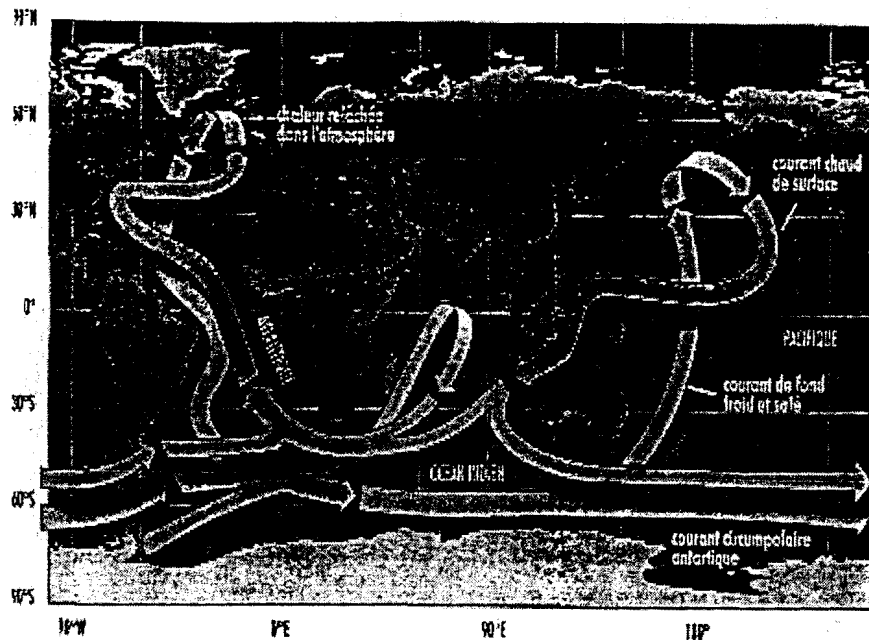


Figure 2.1 : Le célèbre tapis roulant océanique ("conveyor belt"), popularisé par Wally Broecker et adapté par Pascale Delecluse.

2.1.1. Une circulation primaire "adiabatique".

Les flux de chaleur, variant principalement avec la latitude, induisent un gradient méridien de température, donc de densité, à la surface des océans.

La dilatation des eaux de surface tropicales, conjointement à une contraction des eaux de surface des régions froides, génère un gradient de pression Sud-Nord dans les couches supérieures (et parallèlement un gradient opposé dans les couches profondes). L'équilibre géostrophique, c'est-à-dire entre gradient de pression et force de Coriolis, implique alors un courant vers l'Est (Ouest) dans les couches de surface (de fond), loin des continents.

Outre l'incapacité de ces courants à transporter de la chaleur pour équilibrer l'excédent tropical et le déficit aux hautes latitudes, et leur caractère éventuellement instable, la présence des continents, frontières méridiennes des bassins océaniques, modifie nécessairement cette solution intérieure en créant des courants méridiens.

2.1.2. Une circulation secondaire "efficace".

Une manière d'idéaliser cette situation dans le cadre géostrophique est donc de considérer un océan à deux couches, les eaux froides et denses au fond alimentées par les régions polaires, et les eaux supérieures plus chaudes et plus légères au dessus de la thermocline (zone de variation rapide de la température).

Ainsi le courant vers l'Est rencontrant le bord Est enfonce l'interface entre ces deux couches, alors que la divergence des eaux supérieures le long du bord Ouest la soulève. Les pentes ainsi formées sont associées à des courants géostrophiques vers les pôles (l'équateur) en surface (au fond) le long des bords.

Différents arguments dynamiques et thermodynamiques justifient une intensification des courants sur le bord Ouest des océans plutôt que sur le bord Est : dissipation de vorticité potentielle, asymétrie entre les processus de refroidissement (convection) et réchauffement (diffusion).

Cette vision de la circulation thermohaline à l'échelle d'un bassin dans un seul hémisphère est évidemment largement idéalisée : il faut vraiment voir cette circulation à l'échelle globale en faisant intervenir tous les bassins océaniques et les grands systèmes de courants (Gulf Stream dans l'Atlantique Nord, Kuroshio dans le Pacifique Nord, Courant Antarctique Circumpolaire dans l'océan austral) et on ne peut pas la découpler de la circulation forcée par le vent (voir FIGURE 2.1).

2.1.3. Quelques remarques complémentaires.

Si la transformation des eaux chaudes en eaux froides résulte bien du refroidissement intense d'eaux suffisamment salées en surface, la transformation inverse n'est pas encore parfaitement comprise : la théorie classique prônait le rôle du mélange vertical à travers la thermocline, via l'équilibre de Sverdrup entre l'advection verticale de chaleur due à la remontée lente des eaux froides et la diffusion diapycnale (à travers les isopycnes, soit souvent quasiment verticale) de chaleur.

Depuis, d'autres mécanismes de conversion ont été proposés, par exemple par transformation des eaux froides en eau chaude dans la couche d'Ekman à travers les fronts antarctiques.

Plus l'extension des zones de formation d'eau profonde par convection est limitée, plus les eaux ainsi produites sont froides, ce qui maximise l'énergie potentielle de la stratification moyenne de l'océan (structure verticale en température).

Effectivement, les eaux profondes sont formées par convection hivernale dans des régions bien connues : mer de Norvège, du Groenland et du Labrador pour l'hémisphère Nord, mer de Weddell et de Ross dans l'Antarctique.

La théorie des couches profondes de Stommel-Arons (1960), voir [72], [73], a anticipé l'observation des courants profonds de bord Ouest formés par l'eau profonde Nord-Atlantique. Elle est basée sur les hypothèses que les couches profondes sont formées dans les régions froides (source de masse) et consommées par mélange vertical partout ailleurs, ce qui est associé à des vitesses verticales vers le haut à travers l'interface supérieure.

Conséquence de la conservation de la vorticité potentielle, les courants intérieurs associés sont à l'opposé du transport attendu, en fait de l'équateur vers les pôles, et le courant de bord Ouest doit faire le double du travail pour compenser l'apport de masse aux hautes latitudes.

2.2. Obtention des équations planétaires géostrophiques

2.2.1. Équations planétaires géostrophiques.

Les équations primitives, parfaitement adaptées à l'étude de la circulation océanique, proviennent des équations de Navier-Stokes lorsqu'on fait les approximations de Boussinesq (1903), voir [3], où les variations de densité ne sont prises en compte qu'associées à la force gravitationnelle, et hydrostatique :

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla_x)v + w\partial_z v + f v^\perp = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_x P, \\ \partial_z P = -\rho g, \\ \nabla_x \cdot v + \partial_z w = 0, \\ \partial_t \rho + (v \cdot \nabla_x)\rho + w\partial_z \rho = 0, \end{cases}$$

avec $v = (v_1, v_2)$ et $v^\perp = (-v_2, v_1)$.

Pour la circulation thermohaline, dont les échelles spatiales sont bien supérieures au rayon de déformation interne, et les échelles temporelles plus longues que quelques jours, on peut encore simplifier ces équations.

Historiquement, Burger [12] déduit le premier en 1958 des équations de la dynamique de l'atmosphère spécialement adaptées aux échelles planétaires :

$$\text{Ro} = \frac{V}{fL} \ll \frac{L}{a} \leq 1, \quad \frac{V^2}{gH} \ll 1, \quad \frac{fV}{g} \leq \frac{H}{a} \ll 1,$$

où V est l'ordre de grandeur des vitesses horizontales, L et H respectivement les échelles horizontales et verticales des mouvements, a le rayon de la Terre, g l'accélération de la gravité au niveau de la mer, $f=2\Omega\sin(\text{latitude})$ le paramètre de Coriolis, et Ro le nombre de Rossby.

Parallèlement, Robinson et Stommel [58] et Welander [81] établissent simultanément en 1959 les équations de la thermocline pour l'océan, afin d'essayer d'en expliquer la structure thermique (stratification), basées sur les hypothèses suivantes :

$$\frac{H}{L} \ll 1, \quad \text{Ro} = \frac{V}{fL} \ll 1, \quad \frac{fV}{\frac{g\Delta\rho}{\rho_0}} \ll 1.$$

Sur la sphère, la faible épaisseur de l'océan comparée au rayon de la Terre permet de simplifier encore ces équations des termes métriques dans l'équation de continuité et de remplacer la valeur de la coordonnée radiale par a partout où elle n'apparaît pas comme une variation.

Les équations du mouvement se ramènent ainsi à l'équilibre géostrophique pour les vitesses horizontales, à l'équation hydrostatique sur la verticale, et à la divergence nulle des vitesses (équation de continuité), voir (2.3.1) avec $\mathbf{D}_H = D_V = 0$.

L'équation de vorticité qui en découle, dite de Sverdrup,

$$\beta v_2 = f \partial_z w, \quad (2.2.2)$$

est également quasi-stationnaire.

Ces équations inviscides sont ainsi utilisées pour étudier la structure interne de l'océan mais ne permettent pas de résoudre les couches limites de bord.

La relation de Sverdrup est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation (2.3.1)₁ où $\mathbf{D}_H = 0$.

Cette équation permet par exemple de donner explicitement v_2 et w en fonction de ρ . En effet l'équation satisfaite par v_2 dérivée par rapport à z donne

$$\partial_z^2 w = -\frac{\beta}{\rho_0 f^2} \partial_x (\rho g).$$

Les conditions aux bords sur w permettent alors d'intégrer directement suivant la verticale. La composante de v suivant l'axe Sud-Nord est alors donnée par (2.2.2). Notons que $\bar{v}_2 = 0$. Il reste maintenant à déterminer v_1 . On sait que $\nabla_x \cdot \bar{v} = 0$ sur la surface par intégration verticale de la contrainte d'incompressibilité. Supposons qu'il soit possible de trouver une solution v telle que $v \cdot n = 0$ alors cette solution satisfait également $\bar{v} \cdot n = 0$ sur le rivage. Ce qui donne $\bar{v}_1 n_x = 0$ sur ∂S . Avec $\partial_x \bar{v}_1 = 0$ sur S et donc $\bar{v}_1 = 0$. Or $\partial_z v_1 = \partial_y T$ en dérivant (2.3.1)₂ par rapport à z . On voit donc que v_1 est déterminé de manière unique.

Phillips [55] synthétise en 1963 les résultats atmosphériques et océaniques sous la dénomination de mouvements géostrophiques de type 2, où l'échelle spatiale horizontale est comparable au rayon de la Terre et le nombre de Burger Bu petit:

$$\frac{L}{a} \sim 1, \quad \text{Bu} = \frac{gH\Delta\rho}{f^2 L^2 \rho_0} \ll 1,$$

ce qui est équivalent à supposer l'échelle horizontale des mouvements grande devant le premier rayon de déformation interne, de l'ordre d'une centaine de km dans l'océan.

La spécificité de cette dynamique réside dans le caractère diagnostique des équations de quantité de mouvement (et de vorticité), alors que les équations pour les traceurs actifs température et salinité (et l'équation d'état) restent inchangées, avec les mêmes paramétrisations des processus de petites échelles qu'avec les équations primitives : ce sont ces dernières qui comportent l'évolution temporelle des champs (prognostiques).

Ces équations filtrent ainsi les ondes de gravité et de Rossby rapides (barotropes), et l'océan s'ajuste désormais par les ondes de Rossby baroclines, lentes (de célérité vers l'Ouest comparable aux courants horizontaux, soit de l'ordre du cm/s), et des ondes visqueuses de bord, rapides (période \sim mois), analogues des ondes de Kelvin en l'absence des termes non-linéaires dans les équations de la quantité de mouvement (leur vitesse dépend d'ailleurs de la résolution horizontale).

2.2.2. Conditions limites et processus sous-maïles \implies dissipation.

Néanmoins, pour satisfaire les conditions aux limites, il est nécessaire de prendre en compte la dissipation dans les équations du mouvement, et les petites échelles réapparaissent dans les couches limites frictionnelles.

En outre, ces équations ne représentant que les processus de grande échelle, alors que la plus grande partie de l'énergie cinétique de l'océan se trouve à la méso-échelle et réalise une grande partie du mélange des propriétés : il est nécessaire de paramétriser ces processus sous-maïles. Une approche traditionnelle de type diffusion moléculaire est souvent employée, principalement pour les traceurs, mais des approches plus précises ont commencé à voir le jour depuis une dizaine d'années : mélange le long des isopycnes – les surfaces d'égale densité– (Redi 1982, [57]) et diffusion de leur épaisseur (Gent et McWilliams 1990, [27])... voir Griffies et al. (2000, [28]) pour les derniers raffinements des modèles de circulation générale océanique.

Il faut mentionner la paramétrisation classique de la convection océanique, qui s'effectue dans des cheminées convectives de moins d'un km de diamètre, et qui est très souvent représentée par un mélange pur et simple des propriétés sur la verticale jusqu'à obtention d'un profil indemne d'instabilités statiques (une paramétrisation à seuil, donc fortement non linéaire).

Malgré tout, la dynamique grande-échelle reste très inadéquate pour satisfaire les conditions aux limites latérales, et le développement de paramétrisations pour des couches limites turbulentes serait très utile.

En effet, on peut voir dans les expériences numériques que le choix du type de viscosité et de condition aux limites influence l'amplitude de la circulation thermohaline à l'ordre 1! Pour s'en convaincre, on peut consulter les travaux de Huck et al. faits dans [35]. L'influence de la paramétrisation est également fort visible du point de vue qualitatif mathématiquement, voir le chapitre 3.

2.3. Paramétrisation de la viscosité et des couches limites latérales

2.3.1. Différents choix de dissipation et de couches limites latérales.

On cherche donc à résoudre le système d'équations suivant pour les vitesses horizontales $v = (v_1, v_2)$ et verticale w et la pression p :

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} f v^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla_x p = D_H, \\ \partial_z p + \rho g = \rho_0 D_V, \\ \nabla_x \cdot v + \partial_z w = 0. \end{cases}$$

La première équation décrit la dynamique géostrophique. La seconde équation est appelée approximation hydrostatique. La dernière représente l'incompressibilité du fluide.

On considère une équation d'état $\rho(T, S, p)$, par exemple linéarisée :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_T T + \alpha_S S),$$

avec $\alpha_T = 2 \times 10^{-4} K^{-1}$ et $\alpha_S = 8 \times 10^{-4} \text{psu}^{-1}$.

L'équation d'advection-diffusion-convection du traceur q (T ou S) est donnée par

$$\partial_t q + \nabla_x \cdot (vq) + \partial_z (wq) = \nabla_x \cdot (\kappa_H \nabla_x q) + \partial_z (\kappa_V \partial_z q) + C.$$

Les conditions aux limites latérales sont données par :

$$v \cdot n = 0, \quad \kappa_H \partial_n q = 0;$$

et les conditions limites à la surface et au fond :

$$w = 0 \text{ (toit rigide)}, \quad \kappa_V \partial_z q = Q/\rho_0 C_P \text{ en surface et } \kappa_V \partial_z q = 0 \text{ au fond}$$

(où Q est le flux de chaleur en $W m^{-2}$ et C_P la capacité calorifique de l'eau de mer). Par simplicité, on se limite ici à un domaine cartésien de la taille de l'Atlantique Nord. Le paramètre de Coriolis f est linéarisé autour de la latitude moyenne $40^\circ N$, soit $f = f_0 + \beta y$, avec $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$ et $\beta = 2 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$: C'est ce que l'on appelle l'approximation du plan- β .

Les diffusivités turbulentes horizontale $\kappa_H = 700 m^2 s^{-1}$ et verticale $\kappa_V = 10^{-4} m^2 s^{-1}$ proviennent d'estimations faites à partir d'observations de dispersion de flotteurs et de traceurs dans différentes régions de l'océan. Le terme C représente l'ajustement convectif, c'est-à-dire le mélange vertical effectué pour éliminer les instabilités statiques, et dont les processus (non-hydrostatiques) dans l'océan impliquent des échelles spatiales (km) et temporelles (minute) non-résolues : une procédure consiste à scruter tous les profils verticaux de densité à la fin de chaque pas de temps, et s'il y a apparition d'une inversion du gradient de densité, en général suite au refroidissement ou à l'évaporation en surface, les deux boîtes impliquées voient leurs propriétés (température et salinité) immédiatement mélangées; si ce mélange produit une eau de densité encore supérieure à l'eau sous-jacente, la boîte inférieure est mélangée aux deux précédentes et ainsi de suite jusqu'à obtention d'un profil vertical de densité stable. Dans l'océan, ces processus sont suffisamment rapides pour qu'on puisse les considérer comme instantanés aux échelles de temps PG.

2.3.2. Équations planétaires géostrophiques et milieux poreux.

Dans cette partie, on décrit quelques paramétrisations utilisées en océanographie et pour lesquelles les systèmes correspondants sont équivalents à la convection de Bénard en milieux poreux anisotropes minces avec la loi de Darcy ou celle de Brinkman. Il est fondamental de préciser que l'analogie entre l'effet de Coriolis et l'anisotropie du domaine a été identifiée dans divers papiers tels que [78].

La loi de Darcy.

i) *Océanographie et météorologie.* On considère un domaine tridimensionnel sans dimension

$$\Omega_\delta = \{(x, z) : x \in s, -\delta H(x) < z < 0\} \quad (2.3.2)$$

avec δ son rapport d'aspect et s sa surface horizontale. On considère le système adimensionnel suivant

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} \varepsilon \text{Pr} \partial_t u^\delta + M u^\delta + \nabla p^\delta = (0, \text{Ra}^{1/2} T^\delta), & \text{div}_x v^\delta + \partial_z w^\delta = 0, & u^\delta \cdot n_{\partial\Omega_\delta} = 0, \\ \partial_t T^\delta + \text{Ra}^{1/2} (v^\delta \cdot \nabla_x T^\delta + w^\delta \partial_z T^\delta) - K_h \Delta_x T^\delta - \delta^2 K_v \partial_z^2 T^\delta = Q, \end{cases}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_H & -f & 0 \\ f & \varepsilon_H & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_V \end{pmatrix}$$

et $u^\delta = (v^\delta, w^\delta)$, ε , ε_H , ε_V , K_h , K_v , Pr , Ra sont des coefficients constants et positifs. On note par Pr le nombre de Darcy-Prandtl, Ra le nombre de Rayleigh, ε le nombre de Rossby et M le tenseur de perméabilité. Voir par exemple dans [45] pour un tel système.

Quand $\text{Pr} = 0$ c'est-à-dire avec un nombre de Darcy-Prandtl nul, ce système correspond à la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope sous un gradient de température connu en océanographie sous le nom de modèle linéaire tridimensionnel de Salmon, [59]-[60]. L'étude mathématique de ces types d'équations a été faite par exemple dans [71]. Dans ce papier l'auteur effectue une analyse de stabilité non linéaire. Dans la preuve, des éléments finis avec des conditions aux bords périodiques sont explorés. La preuve est basée sur une formulation variationnelle de l'équation de la température testée avec la solution.

Dans [23], l'auteur examine, dans un carré, les cas $\text{Pr} = 0$ et $\text{Pr} \neq 0$. Il montre, dans le cas bidimensionnel, l'existence, l'unicité et la régularité de solutions pour le problème d'évolution aussi bien que pour le problème stationnaire. L'hypothèse principale étant $T_0 \in L^\infty(\Omega)$ pour utiliser le principe du maximum. Voir aussi [56].

Le concept de stabilité structurelle est discuté et est résumé brièvement dans [49] dans le contexte de l'écoulement d'un fluide en milieux poreux. Ainsi les équations pour la convection dans un milieu poreux avec une perméabilité anisotropique sont analysées, c'est-à-dire le système (2.3.3) avec un tenseur de perméabilité anisotropique général M et $\text{Pr} = 0$. Il est montré, par des estimations *a priori*, que la solution existe dans le cadre fonctionnel naturel et dépend continuellement des échanges au niveau de la perméabilité.

L'hypothèse que la température initiale T_0 appartient à $L^\infty(\Omega)$, est aussi faite pour pouvoir utiliser le principe du maximum.

Le lecteur intéressé par l'étude analytique concernant les solutions faibles non linéaires pour la convection stationnaire aussi bien qu'oscillante, et leurs bifurcations correspondantes, peut consulter [77] pour le cas $\text{Pr} \neq 0$.

Il s'avère que l'inclusion du terme de dérivée en temps dans l'équation de Darcy permet de mettre en évidence une bifurcation de Hopf. Pour plus d'informations sur l'étude numérique voir dans [13] pour $\text{Pr} = 0$.

Notons que dans le cas d'un écoulement en milieu poreux le nombre de Darcy-Prandtl Pr est habituellement très petit.

On étudie maintenant le cas limite quand le rapport d'aspect δ tend vers 0. La solution $(u^\delta, p^\delta, T^\delta)$ de (2.3.3) étant cherchée dans le domaine Ω^δ qui varie avec δ , on introduit un domaine normalisé indépendant de δ pour comparer les solutions correspondantes aux différentes valeurs de δ . Plus précisément, utilisant une échelle verticale

$$z = \delta Z, \quad (2.3.4)$$

on obtient le domaine normalisé de \mathbb{R}^3 suivant

$$\Omega = \{(x, Z) : x \in s, -H(x) < Z < 0\}.$$

On utilise aussi différentes échelles pour les vitesses verticales et horizontales pour les avoir à l'ordre un.

Les vitesses et la pression adimensionnalisées sont définies par

$$V^\delta(t, x, Z) = v^\delta(t, x, z), \quad W^\delta(t, x, Z) = \frac{1}{\delta} w^\delta(t, x, z), \quad P^\delta(t, x, Z) = p^\delta(t, x, z) \quad (2.3.5)$$

et la température est définie par

$$T^\delta(t, x, Z) = \delta T^\delta(t, x, z). \quad (2.3.6)$$

Ce choix de vitesse verticale est dictée par la condition d'incompressibilité $\text{div}_x v + \partial_z w = 0$ qui montre que $w \approx \delta v$ alors que $\text{div}_x v \approx v$ et $\partial_z w \approx w/\delta$.

En regardant la limite de $(V^\delta, W^\delta, T^\delta, P^\delta)$ quand

$$\text{Ra} \approx 1, \quad \text{Pr} = 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

avec les équations (2.3.3) transportées dans Ω et en supposant que δQ converge (on note Q sa limite), on arrive au système

$$(2.3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon_H v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, & \partial_Z p = T, \\ \text{div}_x v + \partial_Z w = 0, & (v, w) \cdot n_{\partial\Omega} = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_Z T - K_h \Delta_x T - K_v \partial_Z^2 T = Q, \end{cases}$$

dans le domaine Ω .

On remarque que $\operatorname{div}_x v + \partial_Z w = 0$, $(v, w) \cdot n_{\partial\Omega} = 0$ entraînent que w est donné par

$$w = \operatorname{div}_x \int_Z^0 v. \quad (2.3.8)$$

En plus

$$\operatorname{div}_x \int_{-H}^0 v = 0.$$

Donc le système (2.3.7) est équivalent à

$$(2.3.9) \quad \begin{cases} \varepsilon_H v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, & \partial_Z p = T, & \operatorname{div}_x \int_{-H}^0 v = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla_x T + \operatorname{div}_x \left(\int_Z^0 v \right) \partial_Z T - K_h \Delta_x T - K_v \partial_Z^2 T = Q, \end{cases}$$

avec w donné par (2.3.8).

On obtient ainsi le modèle de Rayleigh utilisé en océanographie: les équations planétaires géostrophiques avec traînée linéaire. C'est équivalent de considérer la convection de Bénard dans des milieux poreux anisotropes particuliers gouvernés par la loi de Darcy.

La justification mathématique de l'analyse asymptotique entre (2.3.3) et (2.3.9) ne semble pas être direct à cause du terme non linéaire

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_x \left(\int_Z^0 v \right) \partial_Z \tilde{T} T$$

où \tilde{T} est la fonction test.

Le problème semble être le même quand on essaye de justifier les équations de Prandtl, voir par exemple [4], [29]. C'est la raison pour laquelle les océanographes utilisent une paramétrisation hypervisqueuse pour la température pour prendre en compte les paramétrisations à échelle réduite, voir [62].

Il faut remarquer que dans [66], pour avoir $\nabla_x T \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^2)$ et cette estimation est décisive dans leur preuve pour l'existence de solutions faibles, ils considèrent le tenseur suivant

$$Q_1 T = -K_h \Delta_x T - K_v \partial_Z^2 T + \lambda \Delta_x^2 T + \beta \Delta_x \partial_Z^2 T. \quad (2.3.10)$$

Par conséquent ils montrent qu'il est utile d'introduire le terme différentiel de quatrième ordre pour la fonction température. Dans la section 3.1, on prouve qu'il est nécessaire et suffisant de contrôler la température dans $L^2(H_z^1 H_X^2)$ avec seulement $T_0 \in L^2(\Omega)$. On obtient ainsi que le système suivant

$$(2.3.11) \quad \begin{cases} \varepsilon_H v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, & \partial_Z p = T, \\ \operatorname{div}_x \int_{-H}^0 v = 0, & v \cdot n_x = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla_x T + \operatorname{div}_x \left(\int_Z^0 v \right) \partial_Z T - K_h \Delta_x T - K_v \partial_Z^2 T + \lambda \Delta_x^2 T = Q, \end{cases}$$

est bien posé, avec les conditions initiales et aux bords pour la température suivantes :

$$(2.3.12) \quad \begin{cases} K_v \partial_Z T = \gamma (T^* - T) \text{ sur } \Gamma_s, \\ -K_h \nabla_x T \cdot n_x - K_v \partial_Z T n_Z + \lambda \nabla_x (\Delta_x T) \cdot n_x = 0 \text{ sur } \Gamma_b \cup \Gamma_l, \\ \Delta_x T = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ T(0) = T_0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où

$$\Gamma_s = \{(x, 0) : x \in s\}, \quad \Gamma_b = \{(x, -H(x)) : x \in s\},$$

et

$$\Gamma_l = \{(x, Z) : x \in \partial s, -H(x) < Z < 0\}.$$

Dans la section 3.1 du chapitre 3, on suppose que le domaine est plat; c'est-à-dire un domaine $\Omega = s \times (-h, 0)$ avec $h = \text{cte}$ et s un domaine bi-dimensionnel borné. On établit les relations

$$\varepsilon_H \text{rot}_x v + f \text{div}_x v + \beta v_2 = 0 \quad (2.3.13)$$

et

$$-(\varepsilon_H + \frac{f^2}{\varepsilon_H}) \partial_Z (\text{div}_x v) = \Delta_x T + \beta \partial_Z v_1 + \frac{\beta f}{\varepsilon_H} \partial_Z v_2. \quad (2.3.14)$$

C'est exactement le type de domaine considéré dans [64]. Ces équations impliquent que la vitesse (v, w) satisfait $v \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))^2)$ et $w \in L^2(0, T; L^\infty L^2_x(\Omega))$ et est uniformément bornée si $T \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\Delta_x T \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ sont uniformément bornés dans le schéma d'approximation de Galerkin.

C'est suffisant pour démontrer l'existence de solutions faibles pour le modèle hyper-visqueux.

Dans la section 3.2 du chapitre 3, on va étendre le résultat à un domaine avec une profondeur s'annulant sur le rivage en utilisant un résultat de régularité démontré dans [5] et concernant une équation elliptique dégénérée.

ii) *Traitement alimentaire et procédé de filtrations centrifuges.*

On montre dans cette section que l'orientation du domaine de faible hauteur est important dans l'étude mathématique. On considère maintenant un domaine Ω^δ défini par

$$\Omega^\delta = \{(x, z) : (x_1, z) \in s, -\delta < x_2 < \delta\}.$$

Pour la convenance du lecteur voir FIGURE 3.3. Alors, utilisant l'échelle

$$X_2 = x_2 / \delta$$

avec la vitesse et la température transportées définies par

$$\begin{aligned} V_1(t, x_1, X_2, z) &= v_1(t, x_1, x_2, z), & V_2(t, x_1, X_2, z) &= v_2(t, x_1, x_2, z) / \delta, \\ W(t, x_1, X_2, z) &= w(t, x_1, x_2, z), & T(t, x_1, X_2, z) &= T(t, x_1, x_2, z). \end{aligned}$$

Le passage à la limite avec

$$\delta \rightarrow 0, \quad \text{Pr} = 0, \quad \text{Ra} \approx 1$$

dans (2.3.3), en supposant $\varepsilon_H = \varepsilon_V$, $Q \approx 1$ et en choisissant la diffusion $-K_h \partial_{x_1}^2 T - \delta^2 K_h \partial_{x_2}^2 T - K_v \partial_z^2 T$ pour T , conduit au système suivant

$$(2.3.15) \quad \begin{cases} \varepsilon_H v_1 + \partial_{x_1} p = 0, & \varepsilon_H w + \partial_z p = T, & \partial_{X_2} p = 0, \\ \partial_{x_1} \int_{-H}^0 v_1 + \partial_z \int_{-H}^0 w = 0, & (v_1, w) \cdot n_{x_1, z} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \\ \partial_t T + v_1 \partial_{x_1} T + w \partial_z T + \left(\int_{X_2}^0 (\partial_{x_1} v_1 + \partial_z w) \right) \partial_{X_2} T - K_h \Delta_x T - K_v \partial_z^2 T = Q, \end{cases}$$

défini dans $\Omega = \{(x, z) : (x_1, z) \in s, -1 < X_2 < 1\}$. On renvoie à [46] pour de telles équations en dimension deux. Dans la suite, on montre qu'un tel système est bien posé si la vitesse $v_2 = \int_{X_2}^0 (\partial_{x_1} v_1 + \partial_z w)$ est contrôlée par ∇T qui appartient à $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ dans une approximation de Galerkin.

On n'a pas à considérer une paramétrisation hypervisqueuse pour obtenir ce résultat d'existence de solutions faibles.

Avec un domaine défini par (2.3.2), des équations similaires à celles de (2.3.15) sont obtenues dans [79] où la température imposée est supposée perpendiculaire à la force centrifuge en négligeant la gravité.

Donc, l'équation de Darcy s'écrit

$$v + \partial_x p = Tx, \quad \partial_z p = 0.$$

Ces types d'équations ont quelques applications en traitement alimentaire. On peut voir par exemple dans [79] où une solution analytique bi-dimensionnelle, pour un petit rapport d'aspect, est présentée pour de telles applications.

La loi de Brinkman.

Nous considérons un domaine tridimensionnel normalisé

$$\Omega_\delta = \{(x, z) : x \in s, -\delta H(x) < z < 0\} \quad (2.3.16)$$

avec δ le rapport d'aspect et s sa surface bi-dimensionnelle. Une loi alternative à celle de Darcy est communément appelée la loi de Brinkman.

Les équations convectives avec la loi de Brinkman et les termes tournants s'écrivent

$$\begin{cases} \varepsilon L_1 u^\delta + M u^\delta + \nabla p^\delta = (0, \text{Ra}^{1/2} T^\delta), \\ \partial_t T^\delta + \text{Ra}^{1/2} (v^\delta \cdot \nabla_x T^\delta + w^\delta \partial_z T^\delta) + L_2 T^\delta - \text{Ra}^{1/2} w = Q, \end{cases}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -f & 0 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$L_1 u = -A_h \Delta_x u - \delta^2 A_v \partial_Z^2 u, \quad L_2 T = -K_h \Delta_x T - \delta^2 K_v \partial_Z^2 T.$$

En passant à la limite quand δ tend vers 0 avec $Ra = 1$ dans les équations transportées dans le domaine fixe Ω obtenu par la transformation (2.3.4)–(2.3.6), on obtient les équations étudiées mathématiquement par [14], [64] et [65] où les processus à petite échelle sont paramétrisés par les traditionnelles diffusion turbulente laplacienne et la viscosité turbulente.

En d'autres termes on obtient le système

$$(2.3.17) \quad \begin{cases} \varepsilon D_1 v + M_1 v + \nabla_x p = 0, & \partial_Z p = T, & \operatorname{div}_x v + \partial_Z w = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_Z T + Q_2 T = Q, \end{cases}$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D_1 v = -A_h \Delta_x v - A_v \partial_Z^2 v, \quad Q_2 T = -K_h \Delta_x T - K_v \partial_Z^2 T.$$

Ce sont les traditionnelles équations primitives visqueuses en négligeant les termes non linéaires et de dérivée en temps dans les équations de conservation de la quantité de mouvement.

On choisit les conditions initiales et aux bords suivantes pour la température

$$(2.3.18) \quad \begin{cases} K_v \partial_Z T = \gamma (T^* - T) \text{ sur } \Gamma_s, \\ K_h \nabla_x T \cdot n_x + K_v \partial_Z T n_Z = 0 \text{ sur } \Gamma_b \cup \Gamma_l, \\ T(0) = T_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans [64]–[65], ils prouvent l'existence globale en temps et l'unicité de solutions fortes pour les équations (2.3.17)–(2.3.18) pour un domaine $\Omega = \omega \times (0, h)$ avec des données initiales dans L^∞ ou H^2 et les conditions aux bords suivantes sur v

$$(2.3.19) \quad \begin{cases} A_v \partial_Z v = \tau \text{ sur } \Gamma_s, \\ v \cdot n_x = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n_x} \right)_{\text{tang}} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \\ \partial_Z v = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \end{cases}$$

Dû essentiellement à la forte non linéarité (comparable au carré d'un gradient) des équations, deux problèmes restent ouverts tant que leur preuve utilise le principe du maximum.

Dans [14], ils donnent des réponses à ces problèmes ouverts. Ils montrent l'existence et l'unicité de solutions faibles sous l'hypothèse que $T_0 \in L^2(\Omega)$ et l'existence globale de solutions fortes sous l'hypothèse que $T_0 \in H^1(\Omega)$, évitant ainsi l'utilisation directe du principe du maximum pour T . Ce faisant ils résolvent l'un des trois problèmes posés dans [65]. Ils établissent également des résultats d'unicité de solutions faibles et d'existence d'attracteur global en dimension finie pour les deux autres problèmes ouverts restants. Pour cela, ils utilisent fortement que le domaine est donné par $\omega \times (-h, 0)$ avec $h = \text{Cte}$ et que les conditions aux bords pour la vitesse au fond et à la surface sont supposées être

$$(2.3.20) \quad \begin{cases} A_v \partial_Z v = \tau, & w = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ \partial_Z v = 0, & w = 0 \text{ sur } \Gamma_b, \end{cases}$$

avec τ un champ de vecteurs donné.

Pour l'unicité de solutions faibles, les auteurs prouvent que la différence v de deux solutions faibles v^1 and v^2 satisfait $\bar{v} = \int_{-h}^0 v = \int_{-h}^0 (v^1 - v^2) = 0$ et ils en déduisent que $v \in L^2(0, T; (H^2(\Omega))^2)$ en écrivant l'équation vérifiée par \bar{v} et en l'intégrant par rapport à z .

Ce type de méthode a déjà été utilisé dans différentes analyses mathématiques en océanographie, voir par exemple [20], [85].

On remarque que la condition au bord $(2.3.20)_1$ n'est pas adaptée en océanographie, voir par exemple [10]. Il est mieux d'utiliser

$$A_v \partial_Z v = \alpha(v - \tau), \quad w = 0 \text{ sur } \Gamma_s.$$

En effet un désavantage de la condition au bord $(2.3.20)_1$ est qu'elle peut générer des solutions irréalistes pour quelques valeurs des paramètres.

Si $(2.3.21)_1$ est utilisée, alors, la force exercée par le vent s'annule quand v approche τ , ce qui empêche la vitesse de l'eau de dépasser celle du vent. Cette limitation n'est plus vraie si $(2.3.20)_1$ est utilisée.

Dans ce travail, on considère les conditions aux bords suivantes

$$(2.3.21) \quad \begin{cases} A_v \partial_Z v = \alpha(\tau - v), & w = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ A_v \partial_Z v = \gamma_2 v, & w = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \end{cases}$$

ou bien

$$(2.3.22) \quad \begin{cases} A_v \partial_Z v = \alpha(\tau - v), & w = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \end{cases}$$

Le domaine utilisé est $\Omega = T^2 \times (-1, 0)$ et est habituellement utilisé en météorologie et on suppose que $f = \beta(x_2)$ avec β une fonction périodique qui ne s'annule pas.

On montre, dans la section 3.1 du chapitre 3, la relation

$$-\varepsilon_H \Delta_x (\partial_Z \text{div}_x v) - \varepsilon_V \partial_Z^2 (\partial_Z \text{div}_x v) = f \partial_Z \text{rot}_x v - \beta'(x_2) \partial_Z v_1 + \Delta_x T \quad (2.3.23)$$

avec $\varepsilon_H = \varepsilon A_h$, $\varepsilon_V = \varepsilon A_v$.

Cette équation est essentielle pour étendre le résultat obtenu par [14] en considérant diverses conditions aux bords mais dans un domaine $\Omega = T^2 \times (-1, 0)$.

C'est suffisant pour démontrer l'unicité de solutions faibles. Ce qui correspond à un résultat de régularité classique. Avec la relation (2.3.23), on peut choisir les conditions aux bords (2.3.21) ou (2.3.22).

Remarque. La condition aux bords (2.3.22) est déduite de (2.3.21) en faisant tendre γ_2 vers $+\infty$. \square

Un modèle non linéaire en milieux poreux.

Dans [24], l'auteur étudie un système d'équations aux dérivées partielles fortement non linéaires. Ces équations décrivent la convection naturelle dans un milieu poreux. Ce modèle est obtenu en couplant l'équation d'énergie et l'équation dite de Darcy-Forchheimer

$$u + |u|u + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u \cdot n_{\partial\Omega} = 0.$$

Dans son travail, il étudie le cas où le domaine est parallélépipédique de \mathbb{R}^3 et il montre que la solution de l'équation de Darcy-Forchheimer est régulière. Le lecteur, intéressé par les résultats de décroissance sur ce type de modèle, peut consulter [52]. Voir aussi [80] concernant les développements théoriques. A notre connaissance, la version asymptotique de ce modèle n'est pas utilisée en océanographie même avec des termes additionnels dans l'équation de la température. Dans tous les cas, ces types d'équations avec des termes tournants ont été indiquées dans [79].

2.3.3. D'autres relations de paramétrisation en océanographie.

Nous avons vu dans ce qui précède que certaines paramétrisations utilisées en océanographie correspondent à la convection de Bénard en milieux poreux. Nous donnons dans cette partie quelques relations de paramétrisation utilisées en océanographie et qui ne correspondent pas, à notre connaissance, à la convection en milieux poreux.

1) *Modèle planétaire géostrophique avec une friction horizontale laplacienne (PGL).*

Il correspond à un laplacien horizontal dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et a été étudié par exemple dans [16]. Ce système admet des solutions faibles si on contrôle $(v, \nabla_x v)$ dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^6)$ quand on contrôle T dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Pour s'en convaincre, le lecteur est renvoyé à la section consacrée à la paramétrisation hypervisqueuse avec traînée linéaire.

Le système est le suivant

$$\begin{cases} \varepsilon A_h \Delta_x v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, \\ \partial_Z p = T, \quad \operatorname{div}_x v + \partial_Z w = 0, \\ \partial_t T - K_v \partial_Z^2 T - K_h \Delta_x T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_Z T = Q. \end{cases}$$

2) *Modèle planétaire géostrophique avec friction biharmonique (PGB):*

Il correspond à un laplacien biharmonique horizontal dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon A_h \Delta_x^2 v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, \\ \partial_Z p = T, \quad \operatorname{div}_x v + \partial_Z w = 0, \\ \partial_t T - K_v \partial_Z^2 T - K_h \Delta_x T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_Z T = Q. \end{cases}$$

Remarquons que dans [64] ou [11], seule la condition aux bords $\bar{v} \cdot n = 0$ est satisfaite dans le cas de la paramétrisation de type Rayleigh. En effet, on contrôle seulement *a priori* v et la divergence horizontale de l'intégrale verticale de v . Seule la trace $\bar{v} \cdot n$ est alors *a priori* définie.

2.4. Commentaires

La dynamique planétaire-géostrophique dérive des équations primitives pour des échelles de temps supérieures à quelques jours et des échelles spatiales bien supérieures au rayon de déformation du premier mode barocline (typiquement 100 km dans l'océan) : elle est donc parfaitement adaptée à l'étude de la circulation océanique de grande échelle aux moyennes latitudes.

Le passage de l'équateur reste problématique même si la zone où la force de Coriolis est négligeable reste très limitée, voire inférieure à la résolution du modèle, car le transport des courants (jets) équatoriaux très intenses (quelques m/s parfois) ne pourra être pris en compte.

En l'absence de force de Coriolis à l'ordre 1 dans les équations du mouvement, seuls les termes non-linéaires négligés dans la dynamique PG peuvent équilibrer le gradient de pression. Il est peu probable que l'on puisse s'affranchir de résoudre explicitement ces courants équatoriaux, dans une dynamique PE, pour déterminer avec précision les échanges inter-bassins.

L'implémentation numérique de ces équations pour un bassin océanique fermé nécessite la paramétrisation de la diffusion turbulente de quantité de mouvement et des couches limites latérales : celles-ci ont une influence d'ordre un sur la solution dans un bassin idéalisé à fond plat.

Il n'existe pourtant pas actuellement de paramétrisation satisfaisante, basée sur le caractère non-linéaire et inertiel de ces couches limites. Il serait intéressant d'essayer de faire une analyse mathématique des couches limites afin de proposer une paramétrisation exploitable ne présentant pas les inconvénients des autres paramétrisations jusqu'alors utilisées.

La justification mathématique du modèle planétaire géostrophique classique à partir des équations Primitives est encore ouverte.

La réduction du nombre de variables prognostiques par rapport aux équations primitives, et la dynamique diagnostique, permettent de résoudre beaucoup plus facilement certains problèmes, analytiques ou numériques, comme par exemple des analyses de stabilité linéaire de la circulation océanique.

La plupart des développements actuels se font sur des modèles couplés, l'océan et l'atmosphère étant indissociables pour tous les problèmes de prévisibilité climatique.

Chapitre 3. Analyse mathématique des équations PG

Ce chapitre est consacré à un modèle mathématique utilisé en océanographie et en météorologie dans un domaine tridimensionnel Ω . Ce modèle est appelé planétaire géostrophique ou thermohaline et s'écrit

$$(3.1) \quad \begin{cases} \varepsilon D_1 v + f v^\perp + \nabla_x p = 0, \\ \varepsilon D_2 w + \partial_z p = T, \\ \operatorname{div}_x v + \partial_z w = 0, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_z T + Q_1 T = Q, \end{cases}$$

où $u = (v, w)$ avec $v = (v_1, v_2)$, p , T représentent le champ de vitesses, la pression, la température, $x = (x_1, x_2)$ est la composante horizontale et z celle verticale, D_1 , D_2 and Q_1 sont des opérateurs différentiels utilisés pour paramétriser les processus à petites échelles, Q représente le terme source de chaleur, ε est le nombre de Rossby, le terme $f v^\perp = (-f v_2, f v_1)$ désigne la force de Coriolis où $f = (1 + \beta x_2)$, avec β une constante, correspond au paramètre de Coriolis dans une approximation du plan β , voir [53]–[54].

On peut voir (2.3.9), (2.3.11), (2.3.17) pour d'autres modèles planétaires géostrophiques avec des termes de diffusion et de friction différents.

On donne quelques résultats mathématiques pour certaines équations dites planétaires géostrophiques ou encore équations thermohalines obtenues dans le chapitre 2.

On regarde si les systèmes sont bien posés en étudiant en particulier des questions d'existence et des propriétés des solutions faibles (solution globale en temps) de ces équations. L'objectif est d'étudier les effets des différents termes de friction et de diffusion, et d'analyser les conditions aux bords appropriées pour les modèles correspondants. Cette partie est importante car les choix faits par les physiciens sont empiriques et font l'objet de discussions et d'études numériques. Ça peut être intéressant de comprendre les avantages mais aussi les insuffisances attachés à chaque modèle.

Une telle étude a été récemment initiée dans [64]–[65] et complétée dans [14] pour un domaine $\Omega = \omega \times (-h, 0)$ avec $h = \text{cte}$ et ω un domaine bi-dimensionnel régulier ou un carré.

Nous montrons qu'il est possible d'étendre quelques uns de ces résultats dans des domaines particuliers par le biais de relations simples entre la vitesse verticale et la température. Ce qui conduit à une approche unifiée pour le modèle visqueux avec différentes conditions aux bords, le modèle avec traînée linéaire avec une paramétrisation hyper-visqueuse, des équations planétaires géostrophiques et aussi pour le modèle utilisé en industrie pour les procédés centrifuges.

3.1. Convection de Bénard et milieux poreux dans un domaine mince

On donne dans cette section des résultats mathématiques dans des domaines simples en utilisant des relations entre la vitesse verticale et la température.

On considère, dans un domaine mince, en premier la loi de Brinkman, puis la loi de Darcy.

3.1.1. Loi de Brinkman / Équations primitives.

On donne ici un résultat d'unicité de solutions faibles pour la loi de Brinkman, avec les équations primitives sans les dérivées en temps et les termes non linéaires, dans un domaine mince avec plusieurs conditions aux bords. C'est-à-dire (2.3.21) ou (2.3.22) dans le domaine $\Omega = T^2 \times (0, 1)$, voir FIGURE 3.1. L'existence de solutions faibles est directe et est obtenue par le schéma de Galerkin.

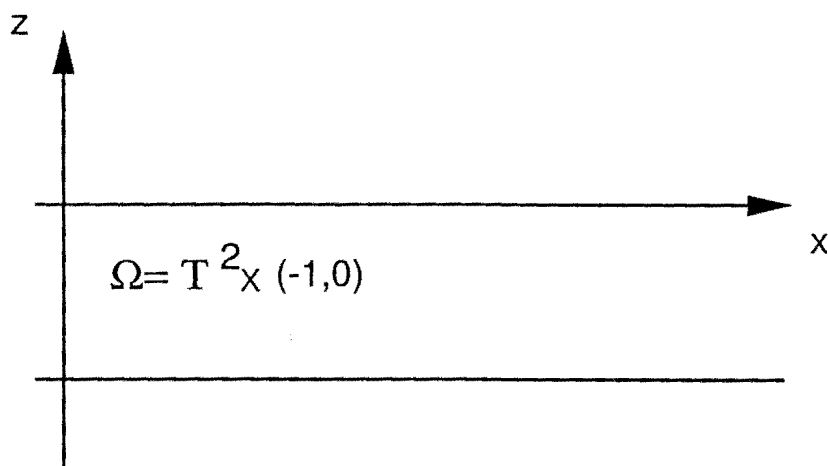


Figure 3.1: Le domaine occupé par le fluide.

Nous avons les résultats suivants

Lemme 3.1.1. Soit (v, w, p, T) une solution de (2.3.17)–(2.3.18) et (2.3.21) ou (2.3.22). Alors

$$-\varepsilon A_h \Delta_x (\partial_Z \operatorname{div}_x v) - \varepsilon A_v \partial_Z^2 (\partial_Z \operatorname{div}_x v) = f \partial_Z \operatorname{rot}_x v - \beta'(x_2) \partial_Z v_1 - \Delta_x T. \quad (3.1.1)$$

Démonstration. Nous avons

$$\partial_Z p = T.$$

Donc, appliquant le laplacien horizontal sur la précédente relation, on trouve

$$\partial_Z (\operatorname{div}_x (\nabla_x p)) = \Delta_x T.$$

Puisque

$$\nabla_x p = \varepsilon A_h \Delta_x v + \varepsilon A_v \partial_Z^2 v - f v^\perp$$

et $f = (1 + \beta(x_2))$, on obtient (3.1.1). \square

L'équation (3.1.1) permet d'obtenir une estimation suffisante qui conduit à l'unicité de solutions faibles.

Ce qui donne une preuve plus générale, par le choix de différentes conditions aux bords, que dans [14] où ils utilisent fortement la condition au bord (2.3.20). Le prix à payer est la considération d'un domaine $\Omega = T^2 \times (-1, 0)$ c'est-à-dire un tore avec β périodique.

De tels domaines sont utilisés par exemple en météorologie. Dans [14], ils considèrent un domaine $\Omega = s \times (-1, 0)$ avec $\beta(x_2) = \beta x_2$.

Lemme 3.1.2. *Soit (v, w, p, T) une solution assez régulière de (2.3.17)–(2.3.18) et (2.3.21) ou (2.3.22). Alors*

$$\begin{aligned} \varepsilon A_h \int_{\Omega} |\nabla_x(\operatorname{div}_x v)|^2 + \varepsilon A_v \int_{\Omega} |\partial_Z(\operatorname{div}_x v)|^2 \\ + \chi \varepsilon \gamma_2 \int_{\Gamma_b} |\operatorname{div}_x v|^2 + \varepsilon \alpha \int_{\Gamma_s} |\operatorname{div}_x v|^2 \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{(H^1(\Omega))^2}^2 \\ + |\beta'| \|v_1\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{(H^1(\Omega))^2} + \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla_x(\int_0^z T)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon \alpha \|\nabla_x \cdot \tau\|_{L^2(\Gamma_s)}^2 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

avec $\chi = 1$ si (v, w) satisfait (2.3.21) et $\chi = 0$ si (v, w) vérifie (2.3.22).

Démonstration. On multiplie la relation (3.1.1) par $\int_Z^0 \operatorname{div}_x v$. On obtient

$$\begin{aligned} -\varepsilon A_h \int_{\Omega} \Delta_x(\operatorname{div}_x v) \operatorname{div}_x v - \varepsilon A_v \int_{\Omega} \partial_Z^2(\operatorname{div}_x v) \operatorname{div}_x v \\ = \int_{\Omega} f \operatorname{rot}_x v \operatorname{div}_x v - \int_{\Omega} \beta' v_1 \int_Z^0 \operatorname{div}_x v - \int_{\Omega} \Delta_x T \int_Z^0 \operatorname{div}_x v \end{aligned}$$

pour $\operatorname{div}_x \int_{-h}^0 v = 0$ et $h = \text{Cte}$.

L'intégration par parties du membre de gauche donne

$$\begin{aligned} -\varepsilon A_h \int_{\partial\Omega} \nabla_x(\operatorname{div}_x v) n_x \operatorname{div}_x v - \varepsilon A_v \int_{\partial\Omega} \partial_Z(\operatorname{div}_x v) n_Z \operatorname{div}_x v \\ + \varepsilon A_h \int_{\Omega} |\nabla_x(\operatorname{div}_x v)|^2 + \varepsilon A_v \int_{\Omega} |\partial_Z(\operatorname{div}_x v)|^2 \\ = \int_{\Omega} f \operatorname{rot}_x v \operatorname{div}_x v - \int_{\Omega} \beta' v_1 \int_Z^0 \operatorname{div}_x v - \int_{\Omega} \Delta_x T \int_Z^0 \operatorname{div}_x v \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Le premier terme est égale à 0 quand on considère les conditions périodiques horizontales. Le second terme dans le membre de gauche est égale à 0 au fond si $v = 0$ sur Γ_b .

Si $\partial_Z v = \gamma_2 v$ sur Γ_b , on trouve

$$\begin{aligned} -\varepsilon A_v \int_{\Gamma_b} \partial_Z(\operatorname{div}_x v) n_Z \operatorname{div}_x v = \varepsilon A_v \int_{\Gamma_b} \nabla_x \cdot (\partial_Z v) \operatorname{div}_x v \\ = \varepsilon \gamma_2 \int_{\Gamma_b} |\operatorname{div}_x v|^2. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

À la surface, on montre que

$$\begin{aligned} -\varepsilon A_v \int_{\Gamma_s} \partial_Z(\operatorname{div}_x v) n_Z \operatorname{div}_x v &= -\varepsilon A_v \int_{\Gamma_s} \nabla_x \cdot (\partial_Z v) \operatorname{div}_x v \\ &= -\varepsilon \alpha \int_{\Gamma_s} \operatorname{div}_x \tau \operatorname{div}_x v + \varepsilon \alpha \int_{\Gamma_s} |\operatorname{div}_x v|^2. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

On a également

$$\int_{\Omega} \Delta_x T \int_0^z \operatorname{div}_x v = \int_{\Omega} \partial_Z \left(\int_0^z \Delta_x T \right) \int_0^z \operatorname{div}_x v = - \int_{\Omega} \left(\int_0^z \nabla_x T \right) \cdot \nabla_x (\operatorname{div}_x v). \quad (3.1.6)$$

Remplaçant (3.1.4)–(3.1.6) dans (3.1.3), on obtient (3.1.2). \square

On peut énoncer maintenant le résultat suivant

Théorème 3.1.3. *Soient $\tau \in L^\infty(0, T; (L^2(\Gamma_s))^2)$ tel que $\operatorname{div}_x \tau \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_s))$, $T_0 \in L^2(\Omega)$, $T^* \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_s))$ et $Q \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.*

Alors il existe une unique solution faible de (2.3.17)–(2.3.18) avec la vitesse qui satisfait (2.3.21) ou (2.3.22).

Démonstration. On divise la preuve en deux parties : l'existence de solution faible et l'unicité.

Existence de solution faible. On utilise le schéma de Galerkin.

On considère (w_j) une base orthogonale de

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ v \in (\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^2 / \nabla_x \cdot \left(\int_{-1}^0 v \right) = 0 \right\}$$

et (ϕ_j) une base orthogonale de $H^1(\Omega)$. On note V_1 l'adhérence dans $(H^1(\Omega))^2$ de \mathcal{V}_1 . Tous ces espaces étant définis à partir de l'espace $L^2(\Omega)$ périodique.

On définit

$$T_m = \sum_{j=1}^m \beta_j(t) \phi_j(x), \quad v_m = \sum_{j=1}^m \gamma_j^m(t) w_j(x). \quad (3.1.7)$$

et les formes multilinéaires suivantes, pour tout $T, T' \in H^1(\Omega)$ et tout $V, W \in V_1$,

$$\begin{aligned} a(T, T') &= K_h \int_{\Omega} \nabla_x T \cdot \nabla_x T' + K_v \int_{\Omega} \partial_z T \partial_z T' + \gamma \int_{\Gamma_s} T T', \\ a_1(T^*, T') &= \gamma \int_{\Gamma_s} T^* T', \quad b(v, T, T') = \int_{\Omega} \left(v, \nabla_x \left(\int_z^0 v \right) \right) \cdot \nabla T T', \\ b_0(V, W) &= \varepsilon A_h \int_{\Omega} \nabla_x V \nabla_x W + \varepsilon A_v \int_{\Omega} \partial_z V \partial_z W + \varepsilon \int_{\Gamma_s} V W + \varepsilon \gamma_2 \int_{\Gamma_b} V W \\ b_1(\tau, V) &= \varepsilon \alpha \int_{\Gamma_s} \tau V. \end{aligned}$$

Une formulation variationnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de celle de la température donne, pour $j = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{d}{dt}(T_m, \phi_j) + a(T_m, \phi_j) + b(v_m, T_m, \phi_j) = a_1(T^*, \phi_j) + (Q, \phi_j) \quad (3.1.8)$$

et

$$\left(\int_z^0 \nabla_x T_m, w_j \right) + b_0(v_m, w_j) + (fv_m^\perp, w_j) = b_1(\tau, w_j) \quad (3.1.9)$$

On définit

$$P_m : L^2(\Omega) \rightarrow \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_m)$$

comme le projecteur orthogonal.

On pose $T_m|_{t=0} = P_m T_0$. On obtient à partir du système (3.1.8)-(3.1.9) un système linéaire de m équations différentielles ordinaires. L'existence des $\beta_j(t)$ est classique.

Estimation d'énergie.

Pour obtenir une existence globale en temps, l'estimation d'énergie est nécessaire. En multipliant (3.1.9) par $\gamma_j^m(t)$ et en sommant sur j , on tire :

$$b_0(v_m, v_m) + \left(\int_z^0 \nabla_x T_m, v_m \right) + (fv_m^\perp, v_m) = b_1(\tau, v_m). \quad (3.1.10)$$

Or $(fv_m^\perp, v_m) = 0$, donc

$$b_0(v_m, v_m) = b_1(\tau, v_m) + \left(T_m, \nabla_x \cdot \int_z^0 v_m \right).$$

Une estimation du deuxième terme de droite de l'égalité ci-dessus, donne

$$\left| T_m \int_0^z \nabla_x \cdot v_m \right| \leq C \|T_m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_x v_m\|_{(L^2(\Omega))^4}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon A_h \|\nabla_x v_m\|_{(L^2(\Omega))^4}^2 + \varepsilon A_v \|\partial_z v_m\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \chi \varepsilon \gamma_2 \|v_m\|_{(L^2(\Gamma_b))^2}^2 \\ + \varepsilon \alpha \|v_m\|_{(L^2(\Gamma_S))^2}^2 \leq C \left(\|T_m\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|\tau\|_{(L^2(\Gamma_S))^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

On multiplie (3.1.8) par $\beta_j^m(t)$ et on somme sur j , ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(T_m, T_m) + b(v_m, T_m, T_m) = a_1(T^*, T_m) + (Q, T_m). \quad (3.1.12)$$

On munit $H^1(\Omega)$ de la norme

$$\|T\|_S^2 = K_h \|\nabla_x T\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + K_v \|\partial_z T\|_{(L^2(\Omega))}^2 + \gamma \|T\|_{L^2(\Gamma_S)}^2. \quad (3.1.13)$$

La norme définie par (3.1.13) est équivalente à la norme naturelle de $H^1(\Omega)$.

En effet, pour un T assez régulier on a

$$T(x, y, z) = T(x, y, 0) - \int_z^0 \partial_z T. \quad (3.1.14)$$

Donc

$$\begin{aligned} |T(x, y, 0)|^2 &\leq 2 \left(|T(x, y, z)|^2 + \left(\int_{-1}^0 |\partial_z T| \right)^2 \right) \\ &\leq 2 \left(|T(x, y, z)|^2 + \int_{-1}^0 |\partial_z T|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Une intégration sur Ω donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T(x, y, 0)|^2 &= \int_{T^2} |T(x, y, 0)|^2 = \|T\|_{L^2(\Gamma_S)}^2 \\ &\leq 2 \left(\|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_z T\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 2\|T\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|T\|_S \leq \|T\|_{H^1(\Omega)}.$$

On a aussi à partir de (3.1.14)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |T(x, y, z)|^2 &= \int_{\Omega} \left[T(x, y, 0) - \int_z^0 \partial_z T(x, y, \xi) \right]^2 \\ &\leq 2 \int_{\Omega} \left[|T(x, y, 0)|^2 + \left| \int_z^0 \partial_z T(x, y, \xi) \right|^2 \right] \\ &\leq 2(\|T\|_{L^2(\Gamma_S)}^2 + \|\partial_z T\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

D'où

$$\|T\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|T\|_S.$$

Par ailleurs le terme

$$b(v, T, T') = -b(v, T', T) + \int_{\Gamma_S \cup \Gamma_b} (v \cdot n_x + \nabla_x \cdot \left(\int_z^0 v \right) n_z) T T'.$$

Comme $w = 0$ et $n_x = 0$ sur $\Gamma_S \cup \Gamma_b$, alors

$$b(v, T, T') = -b(v, T', T).$$

D'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|T_m\|_S^2 \leq C\|T^*\|_{L^2(\Gamma_S)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|Q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Utilisant le fait que $\|T_m\|_S \geq \|T_m\|_{L^2(\Omega)}$ et le choix d'un ε_1 adéquat, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|T^*\|_{L^2(\Gamma_S)}^2 + \|Q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (3.1.16)$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \|T_m\|_S^2 \leq C \left(\|T^*\|_{L^2(\Gamma_S)}^2 + \|Q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.1.17)$$

Une intégration de (3.1.16) et (3.1.17) entre 0 et t , conduit aux estimations suivantes

$$\|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2(t) + \int_0^t \left(\|T_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|T_m\|_S^2 \right) \leq CC, \quad (3.1.18)$$

avec

$$C = \left(\|T_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|T^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_S))}^2 + \|Q\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right).$$

D'où

$$T_m \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.1.19)$$

En conséquence, en intégrant entre 0 et T dans (3.1.11), on obtient

$$v_m \in L^2(0, T; V_1), \quad (3.1.20)$$

où V_1 est munie de la norme

$$\|v_m\|_{V_1}^2 = \varepsilon A_h \|\nabla_x v_m\|_{(L^2(\Omega))^4}^2 + \varepsilon A_v \|\partial_z v_m\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon \alpha \|v_m\|_{(L^2(\Gamma_S))^2}^2, \quad (3.1.21)$$

qui est équivalente à la norme naturelle de $(H^1(\Omega))^2$ en utilisant les mêmes arguments que dans le cas de la preuve pour montrer l'équivalence entre la norme naturelle de $H^1(\Omega)$ et celle définie par (3.1.13).

Estimation a priori pour $\partial_t T_m$.

On considère $\bar{T} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j \phi_j$.

$$\begin{aligned} (\partial_t T_m, \bar{T}) &= (\partial_t T_m, P_m \bar{T}) \\ &= -a(T_m, P_m \bar{T}) - b(v_m, T_m, P_m \bar{T}) + (Q, P_m \bar{T}) + a_1(T^*, P_m \bar{T}) \\ &\leq C \|T_m\|_S \|P_m \bar{T}\|_S + \|Q\|_{L^2(\Omega)} \|P_m \bar{T}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|T^*\|_{L^2(\Gamma_S)} \|P_m \bar{T}\|_{L^2(\Gamma_S)} + |b(v_m, T_m, P_m \bar{T})|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} |b(v_m, T_m, P_m \bar{T})| &= \left| \int_{\Omega} v_m \cdot \nabla_x P_m \bar{T} T_m \right| \\ &\leq C \|\nabla_x P_m \bar{T}\|_{(L^2(\Omega))^2} \|T_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|T_m\|_S^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\nabla_x P_m \bar{T}\|_{(L^2(\Omega))^2} \|T_m\|_S^2, \end{aligned}$$

donc

$$(\partial_t T_m, \bar{T}) \leq C (\|T_m\|_S^2 + \|T_m\|_S + \|Q\|_{L^2(\Omega)} + \|T^*\|_{L^2(\Gamma_s)}) \|P_m \bar{T}\|_S. \quad (3.1.22)$$

D'après (3.1.19) et (3.1.20) on a, à partir de (3.1.22),

$$\partial_t T_m \in L^1(0, T; (H^1(\Omega))') \quad (3.1.23),$$

et est bornée indépendamment de m .

Passage à la limite.

Avec les estimations de (3.1.19) et (3.1.20), il existe

$$T \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } v \in L^2(0, T; V_1)$$

et une sous suite $(T_{m'}, v_{m'})$ telle que

$$\begin{aligned} T_{m'} &\text{ converge vers } T \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible,} \\ T_{m'} &\text{ converge vers } T \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *, \\ v_{m'} &\text{ converge vers } v \text{ dans } L^2(0, T; V_1) \text{ faible.} \end{aligned}$$

Une application du Corollaire 4 de [70], avec $X = H^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$ et $Y = (H^1(\Omega))'$, permet de dire que

$$T_{m'} \text{ converge fortement vers } T \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

D'où, après passage à la limite dans la formulation variationnelle on trouve (v, w, T) solution de (2.3.17)–(2.3.18), et qui vérifie les estimations

$$(3.1.24) \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon A_h \|\nabla_x v\|_{(L^2(\Omega))^4}^2 + \varepsilon A_v \|\partial_z v\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \\ &\quad + \chi \varepsilon \gamma_2 \|v\|_{(L^2(\Gamma_b))^2}^2 + \varepsilon \alpha \|v\|_{(L^2(\Gamma_s))^2}^2 \leq c(\|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau\|_{(L^2(\Gamma_s))^2}^2), \\ &\frac{d}{dt} \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + K_h \|\nabla_x T\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + K_v \|\partial_z T\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \gamma \|T\|_{L^2(\Gamma_s)}^2 \leq c(\|Q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|T^*\|_{L^2(\Gamma_s)}^2). \end{aligned} \right.$$

Si τ satisfait $\nabla_x \cdot \tau \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_s))$, utilisant le Lemme 3.1.2, v satisfait

$$\|\operatorname{div}_x v\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|\nabla_x T\|_{(L^2(\Omega))^2} + \|\nabla_x \cdot \tau\|_{L^2(\Gamma_s)}). \quad (3.1.25)$$

Unicité de la solution faible. On note par (v, w, T) la différence entre deux solutions faibles (v_1, w_1, T_1) et (v_2, w_2, T_2) . Nous avons formellement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |T|^2 + K_h \int_{\Omega} |\nabla_x T|^2 + K_v \int_{\Omega} |\partial_z T|^2 + \gamma \int_{\Gamma_s} |T|^2 \\ \leq \left| \int_{\Omega} w \partial_z T_1 T \right| + \left| \int_{\Omega} v \nabla_x T_1 T \right|. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Les autres termes s'annulent. On montre, dans ce qui suit, qu'on contrôle le terme non linéaire dans le membre de droite.

Concernant la vitesse verticale, utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg en dimension deux et la relation qui donne w en fonction de $\operatorname{div}_x v$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w \partial_z T_1 T \right| &= \left| \int_z^0 \int_{T^2} w \partial_z T_1 T \right| \\ &\leq \int_z^0 \|w\|_{L_x^4} \|T\|_{L_x^4} \|\partial_z T\|_{L_x^2} \\ &\leq \|w\|_{L_x^\infty L_x^4} \|\partial_z T_1\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{L_x^2 L_x^4} \\ &\leq c \|\operatorname{div}_x v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\operatorname{div}_x v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\partial_z T_1\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|T\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Utilisant les estimations sur v et $\operatorname{div}_x v$ par rapport à T données par (3.1.24)–(3.1.25) avec $\tau = 0$ et $Q = 0$, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} w \partial_z T_1 T \right| \leq c \|\partial_z T_1\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{L^2(\Omega)} \|T\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.1.27)$$

Le terme avec v est contrôlé de la façon suivante

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v \nabla_x T_1 T \right| &\leq \|v\|_{(L^6(\Omega))^2} \|\nabla_x T_1\|_{(L^2(\Omega))^2} \|T\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq c \|v\|_{(H^1(\Omega))^2} \|\nabla_x T_1\|_{(L^2(\Omega))^2} \|T\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|T\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$ et l'inégalité d'interpolation $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{6}$ qui donne

$$\|T\|_{L^3(\Omega)} \leq \|T\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|T\|_{L^6(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

En se servant des estimations sur v données par (3.1.24), il vient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v \nabla_x T_1 T \right| &\leq c \|\nabla_x T_1\|_{(L^2(\Omega))^2} \|T\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \|T\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{3}{4\varepsilon} \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \frac{1}{4} \|T\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Avec un choix convenable de ε , les estimations (3.1.27)–(3.1.28) et l'inégalité (3.1.26) sont assez suffisantes pour prouver l'unicité, en utilisant le lemme de Gronwall. \square

Remarque. On peut montrer l'existence globale de solutions fortes si

$$\tau \in L^\infty(0, T; (H^1(\Gamma_s))^2), T_0 \in H^1(\Omega), Q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } T^* \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_s)).$$

En effet $\operatorname{div}_x v$ est plus régulière si on utilise (3.1.2) et donc $\operatorname{rot}_x v$ par la relation entre $\operatorname{div}_x v$ et $\operatorname{rot}_x v$.

Alors $\nabla_x v$ est contrôlé en utilisant un résultat connu donné par exemple dans [67], si on considère des conditions horizontales périodiques. La dérivée verticale $\partial_z v$ est contrôlée en utilisant l'équation. Pour obtenir la régularité sur T , on prend $K_v \partial_z^2 T + K_h \Delta_x T$ comme fonction test. \square

3.1.2. Loi de Darcy / Modèle "hypervisqueux".

On montre dans cette partie qu'on contrôle w quand on contrôle le laplacien horizontal de T ou une expression en fonction de T . Pour cela on démontre quelques relations qui lient w et T , et on donne une estimation de $\operatorname{div}_x v$.

On considère la loi de Darcy dans un domaine $\Omega = S \times (-h, 0)$ où S est un domaine bi-dimensionnel borné et $h = \text{Cte}$. On choisit $h \equiv 1$ pour simplifier, voir FIGURE 3.2.

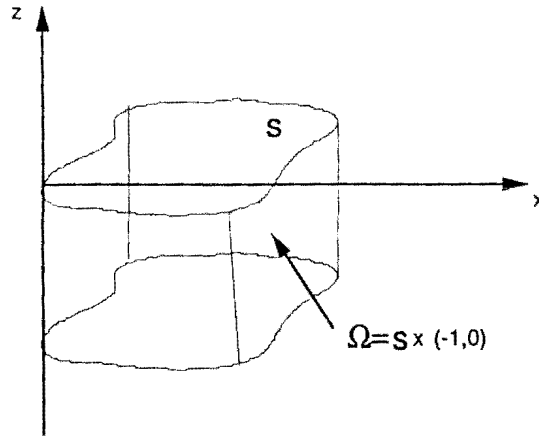


Figure 3.2: Le domaine occupé par le fluide.

On suppose que la vitesse $u = (v, w)$ et la pression p sont gouvernées par la loi de Darcy dans un domaine mince avec une profondeur constante. Ce qui signifie que

$$Mu + \nabla p = Te_z \quad (3.1.29)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_H & -f & 0 \\ f & \varepsilon_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\operatorname{div}_x \bar{v} = 0, \quad \bar{v} \cdot n_x = 0. \quad (3.1.30)$$

La vitesse verticale étant donnée par

$$w = - \int_{-1}^z \operatorname{div}_x v(x, \xi) d\xi.$$

La convection de Bénard dans un tel milieu poreux avec paramétrisation donne

$$\partial_t T + v \cdot \nabla_x T + \operatorname{div}_x \left(\int_Z^0 v \right) \partial_Z T + D(T) = Q, \quad (3.1.31)$$

avec D est un opérateur de paramétrisation d'ordre quatre.

Par exemple, pour

$$D(T) = -K_h \Delta_x T - K_v \partial_Z^2 T + \lambda \Delta_x^2 T, \quad (3.1.32)$$

on obtient la paramétrisation hypervisqueuse donnée par [62] et étudiée dans [16].

Lemme 3.1.4. Soit (v, w, p, T) une solution du système (3.1.29)–(3.1.31). Alors

$$\varepsilon_H \operatorname{rot}_x v = -f \operatorname{div}_x v - \beta v_2 \quad (3.1.33)$$

et

$$(\varepsilon_H^2 + f^2) \partial_Z^2 w = \varepsilon_H \Delta_x T + \frac{\beta}{\varepsilon_H^2 + f^2} (-2\varepsilon_H f \partial_y T + (f^2 - \varepsilon_H^2) \partial_x T). \quad (3.1.34)$$

Démonstration. On a

$$\partial_Z p = T.$$

Donc, en prenant le laplacien horizontal de la relation précédente, on trouve

$$\partial_Z (\nabla_x \cdot (\nabla_x p)) = \Delta_x T.$$

Avec

$$\nabla_x p = -\varepsilon_H v - f v^\perp,$$

on obtient

$$\varepsilon_H \partial_Z^2 w + f \partial_Z (\operatorname{rot}_x v) - \beta \partial_Z v_1 = \Delta_x T. \quad (3.1.35)$$

En appliquant, le rotationnel horizontal sur la composante horizontale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la loi de Darcy, on obtient (3.1.33). Utilisant (3.1.33) et les valeurs

$$\partial_Z v_1 = -\frac{1}{\varepsilon_H^2 + f^2} (f \partial_y T + \varepsilon_H \partial_x T), \quad \partial_Z v_2 = \frac{1}{\varepsilon_H^2 + f^2} (-\varepsilon_H \partial_y T + f \partial_x T),$$

tirées de l'équation de quantité de mouvement (3.1.29), dans (3.1.35), on déduit (3.1.34).

Ce qui achève la preuve. \square

Remarque. La relation (3.1.33) est fortement utilisée en océanographie. \square

Remarque. L'équation (3.1.35) est intéressante d'un point de vue numérique pour avoir $w = 0$ sur $\Gamma_s \cup \Gamma_b$. \square

i) Le cas $\varepsilon_H \neq 0$.

Lemme 3.1.5. Soit (v, w, p, T) une solution assez régulière du système (3.1.29)–(3.1.31). Elle vérifie les estimations a priori suivantes

$$\begin{aligned} \varepsilon_H \|\operatorname{div}_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \varepsilon_H^{-1} \left(\|\Delta_x (\int_0^z T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + |\beta|^2 \|v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\varepsilon_H^2} \|v_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Démonstration. On multiplie (3.1.34) par w , on trouve

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\varepsilon_H + \frac{f^2}{\varepsilon_H}) |\partial_Z w|^2 &= \int_\Omega (\Delta_x T + \beta \partial_Z v_1 + \frac{\beta f}{\varepsilon_H} \partial_Z v_2) w \\ &= - \int_\Omega \Delta_x (\int_0^z T) \partial_Z w - \int_\Omega (\beta v_1 + \frac{\beta f}{\varepsilon_H} v_2) \partial_Z w. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Donc, on dérive (3.1.36) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec $f = (1 + \beta x_2)$. \square

Remarque. On peut choisir une diffusion sur T permettant alors de contrôler w . On renvoie aux travaux faits dans [15].

Dans [64], ils n'ont pas une telle estimation sur $\operatorname{div}_x v$, donc ils ont ajouté un autre terme dans la paramétrisation convective (3.1.32) pour pouvoir passer à la limite. Pour cela ils réécrivent le terme non linéaire venant de la vitesse verticale de la façon suivante

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_x \left(\int_Z^0 v_n \right) \partial_Z \tilde{T} T_n = - \int_{\Omega} \left(\int_Z^0 v_n \right) \cdot \nabla_x (\partial_Z \tilde{T} T_n),$$

et ils obtiennent une convergence forte de $\nabla_x T_n$ par la paramétrisation (2.3.10). \square

ii) *Le cas $\varepsilon_H = 0$.*

On remarque que l'équation (3.1.34) donne une relation entre w et $\partial_z v_2$, donc entre w and $\partial_{x_1} T$. Ce qui permet d'obtenir une expression explicite de (v, w) en fonction de T . L'existence de solutions faibles est alors directe. On a juste à résoudre le système suivant

$$(3.1.38) \quad \begin{cases} f v^\perp = -\nabla_x \left(\int_{-1}^z T - \int_{-1}^0 \int_{-1}^z T \right), \\ f^2 \partial_z^2 w = \beta \partial_{x_1} T, \quad w|_{z=-1} = w|_{z=0} = 0, \\ \partial_t T - K_v \partial_z^2 T - K_h \Delta_x T + v \cdot \nabla_x T + w \partial_z T = Q. \end{cases}$$

L'existence de solutions faibles pour les équations planétaires géostrophiques usuelles est ainsi obtenue, c'est-à-dire (3.1) avec $D_1 = D_2 = 0$ et $Q_1 = -K_v \partial_z^2 - K_h \Delta_x$.

On montre, dans le calcul qui suit que la solution du système (3.1.38) est un cas particulier. En effet, si on considère le système (3.1.39) posé dans un domaine Ω avec fond variable $z = h(x, y)$. On va déterminer, explicitement en fonction de la température T et de h , chaque composante de la vitesse et la pression. Ce système est de la forme

$$(3.1.39) \quad \begin{cases} f v^\perp + \nabla p = 0, \\ \partial_z p = T, \\ f^2 \partial_z^2 w = \beta \partial_x T, \\ \partial_t T + v \cdot \nabla T + \operatorname{div}_x \left(\int_z^0 v \right) \partial_z T - K_h \Delta_x T - K_v \partial_z^2 T = Q. \end{cases}$$

Le système (3.1.39) est complété par les conditions aux bords sur v :

$$w = 0 \quad \text{à la surface,} \quad (3.1.40)$$

$$v \cdot n = 0 \quad \text{sur les bords latéraux,} \quad (3.1.41)$$

$$(v, w) \cdot n = 0 \quad \text{au fond.} \quad (3.1.42)$$

En intégrant (3.1.39)₂ entre 0 et z , il vient :

$$p(x, y, z) = p_s(x, y) + \int_0^z T. \quad (3.1.43)$$

On prend la moyenne en z de (3.1.39)₁, ce qui donne :

$$f\bar{v}^\perp + \nabla p_s + \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T = 0. \quad (3.1.44)$$

En prenant le ∇^\perp . de l'équation (3.1.44), on trouve

$$f \operatorname{div} \bar{v} + \beta \bar{v}_2 = -\nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right). \quad (3.1.45)$$

Pour
$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (3.1.46)$$

on obtient à partir de l'équation (3.1.45)

$$\bar{v}_2 = \frac{\nabla^\perp h}{\beta h} \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T - \int_0^z \nabla T(x, y, h) \right). \quad (3.1.47)$$

Par une intégration de (3.1.46) entre 0 et x et par utilisation de (3.1.47) on obtient

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\beta} \partial_y \int_0^x \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \alpha_1(y), \quad (3.1.48)$$

avec $\alpha_1(y) = \bar{v}_1(0, y)$.

Pour déterminer $p_s(x, y)$, on revient à l'équation (3.1.44) et on trouve

$$\begin{aligned} p_s(x, y) = & -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^x \left(\frac{f}{\beta} \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T \right) \right. \\ & + \int_0^y \left(\frac{f}{\beta} \partial_y \int_0^x \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_y T \right) \\ & \left. \left(\int_0^y f \alpha_1(y) \right) - \alpha_2(y) - \alpha_3(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

avec $\alpha_2(y) = p_s(0, y)$ et $\alpha_3(x) = p_s(x, 0)$.

Dans la suite, on va utiliser (3.1.49) et (3.1.39)₁ pour retrouver les expressions de v_1 et v_2 :

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z) = & \frac{1}{2f} \left\{ \int_0^x \partial_y \left[\frac{f}{\beta} \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T \right] - 2 \int_0^z \partial_y T \right. \\ & \left. + \left(\frac{f}{\beta} \partial_y \int_0^x \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_y T \right) + f \alpha_1(y) - \alpha'_2(y) \right\} \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

$$\begin{aligned} v_2(x, y, z) = & -\frac{1}{2f} \left\{ \frac{f}{\beta} \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T - 2 \int_0^z \partial_x T \right. \\ & \left. + \int_0^y \left[\frac{f}{\beta} \partial_y \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right) + \partial_x \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_y T \right) \right] - \alpha'_3(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

L'équation (3.1.39)₃, intégrée deux fois en profondeur suivant z , donne

$$w(x, y, z) = \frac{\beta}{f^2} \int_0^z \int_0^\xi \partial_x T + z\alpha_4(x, y), \quad (3.1.52)$$

avec $\alpha_4(x, y) = \partial_z w(x, y, 0)$.

Quelques notations : on pose

$$(3.1.53) \quad \begin{cases} f_0 = \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \nabla T \right), \\ f_1 = \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T, \\ f_2 = \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_y T. \end{cases}$$

Les conditions aux bords permettent de trouver des relations entre les fonctions inconnues α_i , $i = 1, 2, 3, 4$. La condition (3.1.41) permet d'avoir

$$\alpha_1(y) = \frac{n_y f_0}{n_x \beta} - \frac{1}{\beta} \int_0^{x^1} \partial_y f_0 \quad (3.1.54)$$

où n_x et n_y sont les composantes de la normale et x^1 un point de l'axe des x à la verticale duquel on prend la trace.

Au fond, l'utilisation de la relation (3.1.42) permet de trouver la relation

$$w = v \cdot \nabla h.$$

Donc

$$v(x, y, h) \cdot \nabla h = \frac{\beta}{f^2} h f_1 + h \alpha_4. \quad (3.1.55)$$

En remplaçant v par sa valeur, on trouve une équation qui lie α_4 , α'_2 , α'_3 et α_1 . Les inconnues qui restent à déterminer étant α_4 , α'_2 , et α'_3 .

La condition d'incompressibilité donne la relation

$$\frac{\beta}{2f^2} \left\{ \frac{f}{\beta} f_0 + f_1 + \int_0^y \left(\frac{f}{\beta} \partial_y f_0 + \partial_x f_2 \right) - \alpha'_3 \right\} + \alpha_4 = 0. \quad (3.1.56)$$

La relation (3.1.56) permet de simplifier la relation (3.1.55) et de trouver

$$(3.1.57) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2f} \left\{ \int_0^x \partial_y \left(\frac{f}{\beta} f_0 + f_1 \right) - 2 \int_0^h \partial_y T + \frac{f}{\beta} \partial_y \int_0^x f_0 + f_2 \right\} \partial_x h + \frac{\alpha_1}{2} \partial_x h \\ & + \frac{1}{f} \partial_y h \int_0^z \partial_x T - \frac{\beta}{f^2} h f_1 + \left(\partial_y h \frac{f}{\beta} - h \right) \alpha_4 - \frac{1}{2f} \partial_x h \alpha'_2 = 0. \end{aligned}$$

Il manque une équation pour déterminer les trois inconnues. Ce qui signifierait qu'il n'y a pas d'unicité pour le système (3.1.39)!

Solutions de (3.1.38) :

On suppose que h est une constante. La première conséquence est $f_0 = 0$. On a les expressions suivantes pour w et (v_2, v_1) :

$$w = \frac{\beta}{f^2} \left[\int_0^z \int_0^\xi \partial_x T - \frac{z}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T \right], \quad (3.1.58)$$

$$v_2 = \frac{1}{f} \left[\int_0^z \partial_x T - \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T \right], \quad (3.1.59)$$

$$v_1 = \frac{1}{2f} \left[\frac{1}{h} \left(\int_0^h \int_0^z \partial_y T + \int_0^x \int_0^h \int_0^z \partial_y \partial_x T \right) - 2 \int_0^z \partial_y T - \alpha'_2 \right]. \quad (3.1.60)$$

Les conditions (3.1.46) et (3.1.41), utilisant $\bar{v}_2 = 0$, donnent $\bar{v}_1 = 0$. Ce qui donne :

$$v_1 = -\frac{1}{f} \left[\int_0^z \partial_y T - \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_y T \right].$$

Les expressions des différentes constantes sont :

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= -\frac{\beta}{hf^2} \int_0^h \int_0^z \partial_x T, \\ \alpha'_3 &= -\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_x T(., 0, .), \\ \alpha'_2 &= -\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^z \partial_y T(0, ., .). \end{aligned}$$

3.1.3. Loi de Darcy en domaines minces/ processus de filtration.

On remarque qu'il est possible de démontrer l'existence de solutions faibles pour (2.3.15) avec des conditions aux bords sur T et le domaine Ω , voir FIGURE 3.3. L'orientation du domaine par rapport à l'axe de rotation est importante pour une construction de solution faible.

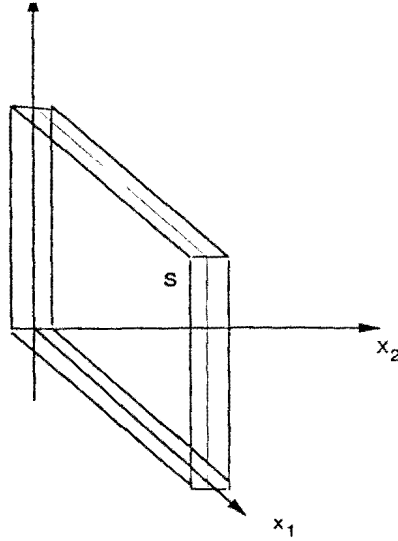


Figure 3.3: Le domaine occupé par le fluide.

Le domaine, décrit par la FIGURE 3.3, est défini par

$$\Omega = \{(x, z) : (x_1, z) \in s, -1 < X_2 < 1\}.$$

Dans ce cas, la relation entre v_2 et T s'écrit

Lemme 3.1.6.

$$-\varepsilon_H \partial_{X_2}^2 v_2 = \partial_{X_2} \partial_z T$$

Démonstration. On a

$$\partial_z \partial_{X_2} p = \partial_{x_1} \partial_{X_2} p = 0. \quad (3.1.61)$$

Donc

$$\partial_{X_2} (T - \varepsilon_H w) = 0. \quad (3.1.62)$$

Par ailleurs l'équation d'incompressibilité donne

$$\partial_z w = -\partial_{x_1} v_1 - \partial_{X_2} v_2.$$

On prend la dérivée ∂_{X_2} de l'égalité précédente et on remplace le résultat obtenu dans (3.1.62), il vient

$$\partial_{X_2} \partial_z T = -\varepsilon_H \partial_{X_2}^2 v_2$$

car $\partial_{x_1} \partial_{X_2} v_1 = 0$ d'après la deuxième égalité de (3.1.61). \square

Ce qui entraîne qu'on contrôle $\partial_{X_2} v_2$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ si on contrôle la dérivée verticale de la température

$$\partial_z T \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

3.2. Convection de Bénard et milieux poreux avec fond variable

La théorie est normalement appliquée à des bassins océaniques avec contours et profondeur idéalisés du genre des carrés avec un parallélépipède à fond constant.

Dans [59], il exprime le champ de vitesse en fonction de la pression et obtient alors une équation sur la pression grâce à l'incompressibilité. Il essaie alors de comprendre les limitations et résultats inhérents à un domaine avec une profondeur variable s'annulant sur le bord.

Il est important en océanographie de considérer un domaine avec une profondeur qui s'annule sur le rivage, voir FIGURE 3.4. C'est le cas pour les équations de Navier-Stokes hydrostatiques en dimension deux dans [6], pour les équations verticales géostrophiques dans [8].

On propose ici de considérer de tels domaines pour les équations planétaires géostrophiques avec une paramétrisation hypervisqueuse.

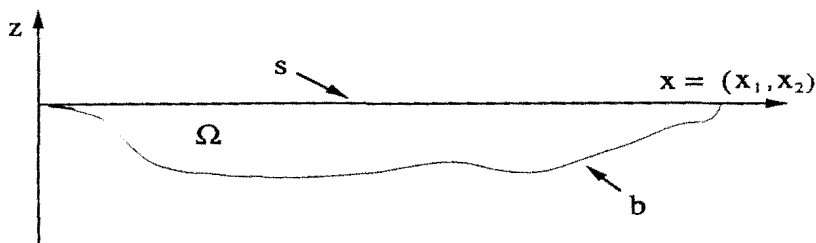


Figure 3.4: Le domaine occupé par le fluide.

Loi de Darcy en domaines minces/ Modèle hypervisqueux de Samelson Vallis.

Le domaine est maintenant défini par

$$\Omega = \{(x, Z) : x \in s, -H(x) < Z < 0\}$$

avec H une fonction continue telle que $H(x) = 0$ sur ∂s . La surface est définie par

$$\Gamma_s = \{(x, 0) : x \in s\}.$$

On considère que la vitesse $u = (v, w)$ et la pression p sont gouvernées par (3.1.29), (3.1.31) avec

$$\operatorname{div}_x \bar{v} = 0, \quad \bar{v} \cdot n_{\partial\Gamma_s} = 0. \quad (3.2.1)$$

Dans la preuve de notre résultat principal, dans cette partie, on a besoin d'un résultat de régularité sur l'équation suivante

$$-\nabla_x \cdot \left(\frac{1}{H} \widetilde{M} \nabla_x \Psi \right) = g \text{ in } \Gamma_s, \quad \Psi = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_s, \quad (3.2.2)$$

avec \widetilde{M} donné par

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} \varepsilon_H & -f \\ f & \varepsilon_H \end{pmatrix}.$$

Le résultat est démontré dans [5] avec différentes applications en océanographie. On suppose que la profondeur H satisfait

$$H \in W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Gamma_s), \quad H > 0 \text{ dans } \Gamma_s \quad (3.2.3)$$

et

$$H = \varphi(\text{dist}(x, \partial\Gamma_s)) \text{ dans un voisinage de } \partial\Gamma_s \quad (3.2.4)$$

avec φ une fonction croissante telle que $\varphi(0) = 0$ et elle vérifie la condition (3.2.5) donnée en dessous. On suppose que, pour toute paire de constantes positives c_1, c_2 , il existe une paire de constantes positives C_1, C_2 telles que

$$\forall (t, \tau) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad c_1 \leq \frac{t}{\tau} \leq c_2 \implies C_1 \leq \frac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)} \leq C_2. \quad (3.2.5)$$

Remarque. Si on considère $H = (\text{dist}(x, \partial\Gamma_s))^\theta$ avec $0 < \theta < 2$ alors $1/H$ est un poids de Munkenhout dans $A_2(\Gamma_s, \partial\Gamma_s)$. De tels poids ont été utilisés dans plusieurs équations dégénérées, voir par exemple [37]. \square

Remarque. La relation (3.2.5) peut être trouvée dans [38] page 108. \square

Donnons le résultat suivant qui est démontré dans [5] en utilisant l'inégalité de Hardy dans les espaces à poids et les quotients différentiels.

Lemme 3.2.1. *Soit s un domaine borné de classe \mathcal{C}^3 . Soit g tel que $H^{1/2}g \in L^2(\Gamma_s)$ avec H qui vérifie (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5). Il existe une unique solution Ψ de (3.2.2) telle que $\Psi \in H_0^1(\Gamma_s)$ et $\nabla_x \Psi / H^{1/2} \in (L^2(\Gamma_s))^2$. De plus*

$$H^{1/2} \nabla_x \left(\frac{1}{H} \nabla_x \Psi \right) \in (L^2(\Gamma_s))^4$$

et

$$\|H^{1/2} \nabla_x \left(\frac{1}{H} \nabla_x \Psi \right)\|_{(L^2(\Gamma_s))^4}^2 \leq c \|H^{1/2} g\|_{L^2(\Gamma_s)}^2$$

avec c une constante dépendant seulement du domaine.

Remarque. Le lecteur intéressé par des résultats de régularité similaires sur les équations elliptiques dégénérées avec des poids qui s'annulent, peut consulter avec profit [2], [76] et [39] par exemple. On peut aussi voir [38] pour des résultats mathématiques sur les espaces de Sobolev à poids. \square

Remarque. On remarque, dans le Lemme 3.2.1, que le résultat de régularité n'est pas obtenu sur $\Delta_x \Psi$ mais sur $H^{1/2} \nabla_x (\nabla_x \Psi / H)$. Ceci explique la catégorie de profondeurs qu'il est possible de considérer. \square

Nous sommes désormais en mesure de prouver l'estimation suivante.

Théorème 3.2.2. *Soit s un domaine borné simplement connexe de classe C^3 .*

Soit (v, p_s, T) une solution régulière de (3.1.29), (3.1.31) et (3.2.1). Alors

$$\|\operatorname{div}_x v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\|\Delta_x T\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_x T\|_{(L^2(\Omega))^2} \right).$$

Démonstration. La loi de Darcy s'écrit

$$\widetilde{M}v + \nabla_x p_s = -\nabla_x \int_Z^0 T. \quad (3.2.6)$$

Avec

$$\operatorname{div}_x \bar{v} = 0, \quad \bar{v} \cdot n_{\partial\Gamma_s} = 0$$

et Γ_s un domaine simplement connexe, il existe Ψ tel que

$$\bar{v} = \nabla_x^\perp \Psi = (-\partial_{x_2} \Psi, \partial_{x_1} \Psi)$$

et donc on a $\nabla_x \Psi \cdot \tau = 0$ sur Γ_s où τ désigne le vecteur tangent. Donc Ψ est constant sur le bord car la surface est simplement connexe. On choisit

$$\Psi = 0 \text{ sur } \partial\Gamma_s, \quad (3.2.7)$$

car Ψ n'intervient que par son gradient dans l'expression de v .

Intégrant (3.2.6) par rapport à z de $-H$ à 0 , on obtient

$$\widetilde{M}\bar{v} + H\nabla_x p_s = -\int_{-H}^0 \nabla_x \int_Z^0 T.$$

Donc, en divisant par H et en utilisant le rotationnel horizontal, on trouve

$$\nabla_x^\perp \cdot \left(\frac{\widetilde{M}}{H} \nabla_x^\perp \Psi + \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right) \right) = 0.$$

Ce qui donne

$$-\nabla_x \cdot (\widetilde{M} \nabla_x \Psi / H) = \nabla_x^\perp \cdot \left(\frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right) \right).$$

On remarque que l'équation précédente s'écrit

$$-\nabla_x \cdot (\widetilde{M} \nabla_x \Psi / H) = -\frac{\nabla_x^\perp H}{H^2} \cdot \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right) - \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x T \cdot \nabla_x^\perp H. \quad (3.2.8)$$

On a

$$-\nabla_x p_s = \frac{\widetilde{M}}{H} \nabla_x^\perp \Psi + \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right).$$

Ainsi, en utilisant la relation précédente dans (3.2.6), on obtient

$$\widetilde{M}v = -\nabla_x \int_Z^0 T + \frac{\widetilde{M}}{H} \nabla_x^\perp \Psi + \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right). \quad (3.2.9)$$

Donc, en multipliant par $(\widetilde{M})^{-1}$ et en appliquant l'opérateur divergence sur (3.2.9), on voit que

$$\|\nabla_x \cdot v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\|\Delta_x \int_Z^0 T\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\nabla_x H \cdot \nabla_x^\perp \Psi}{H^{3/2}} \right\|_{L^2(\Gamma_s)} + \|\nabla_x T\|_{(L^2(\Omega))^2} \right) \quad (3.2.10)$$

avec c dépendant de H . Maintenant on utilise le fait que Ψ satisfait (3.2.7)–(3.2.8) avec

$$H^{1/2} \left(-\frac{\nabla_x^\perp H}{H^2} \cdot \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right) - \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x T \cdot \nabla_x^\perp H \right) \in L^2(\Gamma_s).$$

Le Lemme 3.2.1 donne l'existence et l'unicité de solution faible de l'équation de la fonction courant et le résultat de régularité

$$H^{1/2} \nabla_x \left(\frac{1}{H} \nabla_x \Psi \right) \in (L^2(\Gamma_s))^4$$

et donc

$$H^{1/2} \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{H} \nabla_x^\perp \Psi \right) = \frac{\nabla_x H \cdot \nabla_x^\perp \Psi}{H^{3/2}} \in L^2(\Gamma_s)$$

et par (3.2.8)

$$\left\| \frac{\nabla_x H \cdot \nabla_x^\perp \Psi}{H^{3/2}} \right\|_{L^2(\Gamma_s)} \leq c \|\nabla_x T\|_{(L^2(\Omega))^2}. \quad (3.2.11)$$

Utilisant (3.2.10) et (3.2.11), on achève la preuve du Théorème. \square

Remarque. Notons que l'absence de parois verticales est importante pour satisfaire la condition au fond et en surface $u \cdot n = 0$ où $u = (v, w)$ et la condition d'absence de flux $\bar{v} \cdot n_{\partial_s} = 0$ sur le rivage. En présence de bords latéraux, on obtiendrait seulement $\bar{v} \cdot n_{\partial_s} = 0$ et non $u \cdot n = 0$ sur les bords latéraux.

Remarque. Des équations similaires sur la fonction courant ont été obtenues avec les équations verticales géostrophiques.

Dans [7], les auteurs reviennent sur le travail réalisé par R. Salmon dans [59] et qui concerne les équations planétaires géostrophiques

$$\begin{cases} f v^\perp + \frac{1}{\rho_0} \nabla_x p = -\epsilon_H v, \\ \frac{1}{\rho_0} \partial_z p = (-1 + \alpha T) g, \\ \nabla_x \cdot v + \partial_z w = 0, \end{cases}$$

avec comme équation en température l'équation linéaire suivante

$$wN^2 = -kT,$$

où N représente la flottabilité (dans la littérature on l'appelle improprement la fréquence de Brunt-Väisälä et dans ce cas elle correspond à une fréquence multipliée par 2π). Elle se rapporte au mouvement d'oscillation verticale qui animerait une parcelle d'eau si on l'écartait de sa position d'équilibre. k désigne le coefficient d'amortissement.

Dans [7], considérant une équation non linéaire sur la température du type

$$\partial_t T + v \cdot \nabla_x T + \nabla_x \cdot \left(\int_Z^0 v \right) \partial_Z T - K_h \Delta T - K_v \partial_Z^2 T = Q,$$

les auteurs dérivent le système suivant pour la fonction courant

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{\widetilde{M} \nabla_x \Psi}{H} \right) = g\alpha \nabla^\perp \cdot \left(\frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla_x \left(\int_Z^0 T \right) \right) & \text{dans } \Gamma_S, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial\Gamma_S. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Remarque. Numériquement, ce système est intéressant car il permet notamment de retrouver un champ de vitesse incompressible tri-dimensionnel directement par un calcul bi-dimensionnel sur la surface pour la fonction courant. Il permet de satisfaire les conditions aux bords d'imperméabilité sans problème apparent.

On peut voir les simulations numériques dans [9]. \square

Le Théorème 3.2.2 et la relation (3.2.9) donnent une estimation uniforme de v dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ et $\operatorname{div}_x v$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ si on obtient une estimation uniforme de T et $\Delta_x T$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Ces estimations suffisent pour montrer l'existence de solutions faibles par le schéma classique de Galerkin.

3.3. Justification des équations PG

La justification mathématique des équations planétaires géostrophiques à partir des équations primitives est encore un problème ouvert.

Nous allons ici indiquer comment obtenir les équations planétaires géostrophiques classiques, en faisant tendre le nombre de Rossby ε vers 0, à partir des équations de Salmon 3D, c'est-à-dire les équations planétaires géostrophiques avec traînée linéaire $\varepsilon u_\varepsilon$. Plus précisément, nous allons montrer la convergence du modèle

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \varepsilon v_\varepsilon + f v_\varepsilon^\perp + \nabla_x p_\varepsilon = 0, \\ \varepsilon w_\varepsilon + \partial_z p_\varepsilon = -T_\varepsilon, \\ \partial_t T_\varepsilon + (v_\varepsilon, w_\varepsilon) \cdot \nabla T_\varepsilon - \Delta T_\varepsilon = Q, \end{cases}$$

vers le modèle planétaire géostrophique

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} f v^\perp + \nabla_x p = 0, \\ \partial_z p = -T, \\ \partial_t T + (v, w) \cdot \nabla T - \Delta T = Q. \end{cases}$$

L'inégalité d'énergie classique ne donne pas d'estimation uniforme sur u_ε dans L^2 (estimation qui semble nécessaire pour espérer passer à la limite dans le terme convectif de l'équation en température).

Nous allons montrer comment par quelques manipulations algébriques, nous pouvons obtenir une telle estimation en utilisant des relations de paramétrisations semblables à celles données précédemment.

On considère f une fonction périodique dépendant de y , de classe $W^{1,\infty}$ telle qu'il existe C_0, C_1, C_2 trois constantes strictement positives avec $f \geq C_0$ et $C_1 \leq |f'| \leq C_2$. Le domaine est supposé du type bande $\Omega = T^2 \times]0, 1[$ (voir FIGURE 3.1).

Lemme 3.3.1. Soit $(v_\varepsilon, w_\varepsilon, p_\varepsilon, T_\varepsilon)$ une solution de (3.3.1).

Alors on a les relations suivantes :

$$\varepsilon^2 \Delta w_\varepsilon + f^2 \partial_z^2 w_\varepsilon - f' f \partial_z v_{2,\varepsilon} - \varepsilon f' \partial_z v_{1,\varepsilon} + \varepsilon \Delta_x T_\varepsilon = 0, \quad (3.3.3)$$

et

$$\partial_z v_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 + f^2} A_\varepsilon (\nabla_x T_\varepsilon + \varepsilon \nabla_x w_\varepsilon) \quad (3.3.4)$$

où A_ε est une matrice 2×2 telle que $(A_\varepsilon)_{ii} = \varepsilon$, $(A_\varepsilon)_{12} = f$ et $(A_\varepsilon)_{21} = -f$.

Démonstration. Tout d'abord on prend le rotationnel de la composante horizontale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (3.3.1). On trouve

$$\varepsilon \operatorname{rot}_x v_\varepsilon + f \operatorname{div}_x v_\varepsilon + f' v_{2,\varepsilon} = 0. \quad (3.3.5)$$

On applique ensuite le laplacien horizontal à la composante verticale de conservation de la quantité de mouvement du système (3.3.1), on obtient

$$\varepsilon \Delta_x w_\varepsilon + \partial_z \operatorname{div}_x \nabla_x p_\varepsilon + \Delta_x T_\varepsilon = 0. \quad (3.3.6)$$

En utilisant les composantes horizontales de l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui donne $\nabla_x p_\varepsilon$, on obtient, à partir de (3.3.6),

$$\varepsilon \Delta w_\varepsilon + f \partial_z \operatorname{rot}_x v_\varepsilon - f' \partial_z v_{1,\varepsilon} + \Delta_x T_\varepsilon = 0. \quad (3.3.7)$$

Maintenant on utilise la relation (3.3.5) dans (3.3.7) pour obtenir la relation (3.3.3).

On cherche une pression à moyenne nulle. Donc on intègre la composante verticale de l'équation de quantité de mouvement par rapport à z et on obtient la pression

$$p_\varepsilon = \int_z^0 (T_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon) - \int_0^1 \int_z^0 (T_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon). \quad (3.3.8)$$

On dérive la composante horizontale de l'équation de quantité de mouvement par rapport à z et on utilise la relation (3.3.8), ce qui donne (3.3.4). \square

Les relations (3.3.3) et (3.3.4) sont suffisantes pour l'obtention d'une estimation uniforme de $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$.

Estimation de ∇T_ε . Avec les conditions aux bords et de la condition initiale pour T_ε

$$\begin{cases} \partial_z T_\varepsilon = \gamma(T^* - T_\varepsilon) \text{ sur } \Gamma_s, \\ \partial_z T_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_b, \\ T_\varepsilon(0) = T_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.3.9)$$

on multiplie (3.3.1)₃ par T_ε et une intégration par partie donne l'estimation suivante :

$$\|T_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla T_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 + \|T_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_s))}^2 \leq C, \quad (3.3.10)$$

avec

$$C = C_0(\|Q\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|T^*\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_s))}^2 + \|T_0\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Estimation de $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$. On multiplie l'équation (3.3.3) par w_ε et on obtient après intégration sur Ω

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\nabla w_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \int_\Omega f^2 (\partial_z w_\varepsilon)^2 + \int_\Omega (f' f \partial_z v_{2,\varepsilon} + f' \varepsilon \partial_z v_{1,\varepsilon}) w_\varepsilon \\ + \int_\Omega \nabla_x T_\varepsilon \cdot \nabla_x w_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

La relation (3.3.4) et la première équation de (3.3.1) permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f' f \partial_z v_{2,\varepsilon} + f' \varepsilon \partial_z v_{1,\varepsilon}) w_{\varepsilon} &= \int_{\Omega} \left(\partial_{x_1} T_{\varepsilon} \left[1 - \frac{2f' f^2}{\varepsilon^2 + f^2} \right] + \frac{2\varepsilon f' f}{\varepsilon^2 + f^2} \partial_{x_2} T_{\varepsilon} \right) w_{\varepsilon} \\ &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{f' f}{\varepsilon^2 + f^2} \partial_{x_2} w_{\varepsilon} w_{\varepsilon} + \varepsilon \int_{\Omega} \partial_z w_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \\ &- \int_{\Omega} \frac{\varepsilon f' f^2}{\varepsilon^2 + f^2} \partial_{x_1} w_{\varepsilon} w_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} \partial_z w_{\varepsilon} w_{\varepsilon} &= 0, \quad - \int_{\Omega} \frac{\varepsilon f' f^2}{\varepsilon^2 + f^2} \partial_{x_1} w_{\varepsilon} w_{\varepsilon} = 0, \\ \max \left(\left| 1 - \frac{2f' f^2}{\varepsilon^2 + f^2} \right|, \left| \frac{2\varepsilon f' f}{\varepsilon^2 + f^2} \right| \right) &\leq 1 + 2\|f'\|_{\infty} = C, \end{aligned}$$

et l'inégalité de Young, on obtient, en remplaçant (3.3.12) dans (3.3.11),

$$\varepsilon^2 \|\nabla w_{\varepsilon}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + C_0 \|\partial_z w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla_x T_{\varepsilon}\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \left| \frac{2f' f}{\varepsilon^2 + f^2} \partial_{x_2} w_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \right|. \quad (3.3.13)$$

Or

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_{\Omega} \left| \frac{2f' f}{\varepsilon^2 + f^2} \partial_{x_2} w_{\varepsilon} w_{\varepsilon} \right| &\leq \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{2\|f'\|_{\infty}}{C_0} |\partial_{x_2} w_{\varepsilon} w_{\varepsilon}| \\ &\leq 2\varepsilon^2 \frac{\|f'\|_{\infty}^2}{C_0^2} \|\partial_z w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla w_{\varepsilon}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla w_{\varepsilon}\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \left(C_0 - 2\varepsilon^2 \frac{\|f'\|_{\infty}^2}{C_0^2} \right) \|\partial_z w_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla_x T_{\varepsilon}\|_{(L^2(\Omega))^2}^2. \quad (3.3.14)$$

Le passage à la limite se faisant pour un ε tendant vers 0, alors, on choisit $\varepsilon^2 < \frac{C_0^2}{4C_2^2}$.

Ce qui conduit, à partir de (3.3.14) après intégration en temps et l'utilisation de (3.3.10), à l'estimation

$$\varepsilon^2 \|\nabla w_{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}^2 + C_0 \|\partial_z w_{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq c \|\nabla_x T_{\varepsilon}\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)}^2 \leq C \quad (3.3.15)$$

avec C indépendant de ε .

Multipliant la composante horizontale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (3.3.1) par v_{ε}^{\perp} et utilisant les relations sur \bar{v}_{ε} et p_{ε} , on obtient

$$\int_{\Omega} f |v_{\varepsilon}|^2 = \int_{\Omega} \nabla_x \left(\int_z^0 T_{\varepsilon} \right) v_{\varepsilon}^{\perp} + \varepsilon \int_{\Omega} \operatorname{div}_x \left(\int_z^0 v_{\varepsilon} \right) \operatorname{rot}_x v_{\varepsilon}. \quad (3.3.16)$$

D'après l'estimation de $\partial_z w$ dans (3.3.15), la relation d'incompressibilité $\partial_z w_\varepsilon = -\operatorname{div}_x v_\varepsilon$ montre que $\operatorname{div}_x v_\varepsilon$ est borné dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

D'après la relation (3.3.5) on a

$$\varepsilon \|\operatorname{rot}_x v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|v_{2,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_\infty \|\operatorname{div} v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Avec l'estimation précédente, on obtient à partir de (3.3.16)

$$C_0 \|v_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \leq \int_\Omega \nabla_x \left(\int_z^0 T_\varepsilon \right) v_\varepsilon^\perp + C_2 \|v_{2,\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div} v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_\infty \|\operatorname{div} v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.3.17)$$

L'inégalité de Young utilisée dans le second membre de (3.3.17), conduit à l'inégalité

$$C_0 \|v_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon'} \|\nabla_x T_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon' \|v_\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \frac{C_2}{2\varepsilon'} \|\operatorname{div}_x v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_\infty \|\operatorname{div} v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Un choix convenable de ε' et une intégration en temps dans l'inégalité précédente permettent d'avoir

$$C_0 \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)}^2 \leq C \left(\|\nabla_x T_\varepsilon\|_{L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)}^2 + \|\operatorname{div}_x v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \leq C. \quad (3.3.18)$$

Ces bornes uniformes dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ sur w_ε et v_ε , obtenues à partir de (3.3.15) et (3.3.18), permettent alors le passage à la limite de (3.3.1) vers (3.3.2). D'où le

Théorème 3.3.2. *Soit $T_0 \in L^2(\Omega)$, $T^* \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_s))$, $Q \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Alors il existe une sous-suite de $(v_\varepsilon, w_\varepsilon, p_\varepsilon, T_\varepsilon)$ solutions du système (3.3.1), à ε fixé, qui converge vers (v, w, p, T) la solution du système (3.3.2) quand ε tend vers 0 au sens suivant*

$$(v_\varepsilon, w_\varepsilon) \rightharpoonup (v, w) \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible,}$$

et

$$T_\varepsilon \rightarrow T \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort.}$$

Démonstration. Des estimations uniformes de $(v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, on déduit l'existence d'un couple (v, w) tel que, pour une sous-suite,

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \text{ faible et } w_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible.}$$

On peut alors obtenir une estimation de $\partial_t T_\varepsilon$ comme dans les preuves précédentes et montrer qu'il existe T tel que, pour une sous-suite, T_ε converge fortement vers T dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On peut alors passer à la limite dans la formulation variationnelle en température en faisant porter le terme de dérivée spatiale de la convection sur la fonction test.

Le passage à la limite dans la forme faible en vitesse de (3.3.1) ne nécessiterait lui que la borne uniforme de v_ε dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ et la borne uniforme de $\sqrt{\varepsilon} u_\varepsilon$ dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$. On obtient alors que (v, w) satisfait

$$\int_\Omega f v^\perp \phi_x = 0 \quad \int_\Omega T \phi_z = 0$$

avec $\phi = (\phi_x, \phi_z)$ une fonction test. Par le théorème de De Rham, on obtient alors l'existence d'une pression telle que (v, w, p) satisfait (3.3.2)_{1,2}. \square

Références bibliographiques

- [1] A. ARAKAWA. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motions: two dimensional incompressible flow. part 1. *J. Comput. Phys.*, **1** (1966), 119–143.
- [2] P. BOLLEY, J. CAMUS. Sur une classe d'opérateur elliptique et dégénérées à plusieurs variables. *Bull. Société Math. de France, mémoire* **34**, (1973), 55-140.
- [3] J. BOUSSINESQ. *Théorie analytique de la chaleur, Vol. 2*. Gauthier-Villars, (1903), Paris.
- [4] Y. BRENIER. Homogeneous hydrostatic flows with convex velocity profiles. *Nonlinearity*, **12**, no. 3, (1999), 495–512.
- [5] D. BRESCH, F. GUÍLLEN-GONZALEZ, J. LEMOINE. A note on a degenerate elliptic equation with applications for seas and lakes in oceanography, *accepté dans Elect. J. Diff. eqs* (2003).
- [6] D. BRESCH, F. GUÍLLEN-GONZALEZ, N. MASMOUDI, M.A. RODRÍGUEZ-BELLIDO. On the uniqueness of weak solutions of the two-dimensional primitive equations, *Adv. Diff. Equations*, **16**, 1, (2003), 77–94.
- [7] D. BRESCH, T. HUCK, M. SY. Circulation thermohaline et équations planétaires géostrophiques : Propriétés physiques, numériques et mathématiques. *Ann. Math. Blaise Pascal* **9** No 2 (2002), 181–212
- [8] D. BRESCH, J. LEMOINE, J. SIMON. Nonstationary models for shallow lakes. *Asymptotic Analysis*, **22**, (2000), 15–38.
- [9] D. BRESCH, J. LEMOINE, J. SIMON. Modelization of shallow lakes and seas. *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, G. Iooss et al. (Eds), Chapman & Hall, (1999), 262–271.
- [10] D. BRESCH, J. SIMON. On the effect of friction on wind driven shallow lakes, *J. Math. Fluid Mech.*, (2001), 231–258.
- [11] D. BRESCH, M. SY. Convection in rotating porous media: The planetary geostrophic equations, used in geophysical fluid dynamics, revisited. *Cont. Mech. Thermodyn.*, **15** (2003) 3, 247-263.
- [12] A.P. BURGER. Scale considerations of planetary motions of the atmosphere. *Tellus*, **10** (1958), 195–205.
- [13] J.-P. CALTAGIRONE, P. FABRIE, M. COMBARNOUS. De la convection naturelle oscillante en milieu poreux au chaos temporel? *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, **305** (1987), no. 7, 549–553.
- [14] C. CAO, E.S. TITI. Global well posedness and finite dimensional global attractor for a 3-D planetary geostrophic viscous model. *Comm. Pure Appl. Math.*, **56**, no. 2, (2003), 198–233.
- [15] C. CAO, E.S. TITI AND M. ZIANE, A “horizontal” hyper-diffusion 3 – D thermocline planetary geostrophic model: well-posedness and long time behavior, *Nonlinearity*, (Septembre, 2003, soumis).

- [16] A. COLIN DE VERDIÈRE. Buoyancy driven planetary flows. *J. Mar. Res.*, **46**, (1988), 215–265.
- [17] A. COLIN DE VERDIÈRE. On the interaction of wind and buoyancy driven gyres. *J. Mar. Res.*, **47** (1989), 595–633.
- [18] A. COLIN DE VERDIÈRE. On the oceanic thermohaline circulation. in modelling oceanic climate interactions. *J. Willebrand and D. L. T. Anderson Eds., Springer-Verlag* (1993), 151–183.
- [19] A. COLIN DE VERDIÈRE, T. HUCK. Baroclinic instability: an oceanic wavemaker for interdecadal variability. *J. Phys. Oceanogr.*, **29** (1999), 893–910.
- [20] T. COLIN, P. FABRIE. Rotating fluid at high Rossby number driven by a surface stress: existence and convergence. *Adv. Differential Equations*, **2**, no. 5, (1997), 715–751.
- [21] H. A. DIJKSTRA, H. OKSUZOGLU, F. W. WUBS, E. F. F. BOTT. A fully implicit model of the three-dimensional thermohaline ocean circulation. *J. Comput. Phys.*, **173** (2001), 1–31.
- [22] N. R. EDWARDS, J. G. SHEPHERD. Multiple thermohaline states due to variable diffusivity in a hierarchy of simple models. *Ocean Modelling*, **3** (2001), 67–94.
- [23] P. FABRIE. Solutions fortes et comportement asymptotique pour un modèle de convection naturelle en milieux poreux. *Acta Applicandae Mathematicae*, **7**, (1986), 45–77.
- [24] P. FABRIE. Solutions fortes et majorations asymptotiques pour le modèle de Darcy-Forchheimer en convection naturelle. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math*, **10**, (1989), 7–26.
- [25] B. F. FARRELL, P. J. IOANNOU. Generalized stability theory. part i: Autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53** (1996), 2025–2040.
- [26] B. F. FARRELL, P. J. IOANNOU. Generalized stability theory. part ii: Nonautonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53** (1996), 2041–2053.
- [27] P. R. GENT, J. C. MCWILLIAMS. Isopycnal mixing in ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, **20** (1990), 150–155.
- [28] S. M. GRIFFIES AND AL. Developments in ocean climate modelling. *Ocean Modelling*, **2** (2000), 123–192.
- [29] E. GRENIER. On the derivation of homogeneous hydrostatic equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, **33** (1999), no. 5, 965–970.
- [30] R. HALLBERG, P. RHINES. Buoyancy-driven circulation in an ocean-basin with isopycnals intersecting the sloping boundary. *J. Phys. Oceanogr.*, **26** (1996), 913–940.
- [31] R. HANEY. Surface thermal boundary condition for ocean circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, **1** (1971), 241–248.
- [32] T. HUCK. Modélisation de la circulation thermohaline : analyse de sa variabilité interdécennale. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, 1997.
- [33] T. HUCK, G. K. VALLIS, A. COLIN DE VERDIÈRE. On the robustness of the interdecadal modes of the thermohaline circulation. *J. Climate*, **14** (2001), 940–963.

- [34] T. HUCK, G.K. VALLIS. Linear stability analysis of the three-dimensional thermally-driven ocean circulation: application to interdecadal oscillations. *Tellus*, **53A** (2001), 526–545.
- [35] T. HUCK, A.J. WEAVER, A. COLIN DE VERDIÈRE. On the influence of the parameterization of lateral boundary layers on the thermohaline circulation in coarse-resolution ocean models. *J. Mar. Res.*, **57** (1999), 387–426.
- [36] P. KILLWORTH. A two-level wind and buoyancy driven thermocline model. *J. Phys. Oceanogr.*, **15** (1985), 1414–1432.
- [37] H. KOCH. Non-Euclidean singular integrals and the porous medium equation. Habilitation thesis, Dortmund, 1999.
- [38] A. KUFNER. *Weighted Sobolev spaces*. Teubner-Texte zur Mathematik, **31**, 1980.
- [39] S. LEVENDORSKII. *Degenerate elliptic equations*. Mathematics and its Applications, 258. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [40] J. L.LIONS, R. TEMAM, S. WANG. On mathematical problems for the primitive equations of the ocean : the mesoscale midlatitude case *Nonlinear Analysis* **40** (2000) 439-482
- [41] G. MADEC, P. DELECLUSE, M. IMBARD, C. LÉVY. OPA 8.1 ocean general circulation model reference manual. *Note du Pôle de modélisation, Institut Pierre-Simon Laplace*, **11** (1998), 1–91.
- [42] J. MAROTZKE. *Instabilities and multiple equilibria of the thermohaline circulation*. Ph.D. thesis dissertation, Institut für Meereskunde, Kiel, 126pp, (1990).
- [43] J. MAROTZKE, J. WILLEBRAND. Multiple equilibria of the global thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **21** (1991), 1372–1385.
- [44] A. M. MOORE, J. VIALARD, A. T. WEAVER, D. L. T. ANDERSON, R. KLEEMAN, J. R. JOHNSON. The role of air-sea interaction in controlling the optimal perturbations of low-frequency tropical coupled ocean-atmosphere modes. *ECMWF Technical memorandum, Reading, UK*, **351** (2001), 35pp.
- [45] H.V. LY, E.S. TITI. Global Gevrey regularity for the Bénard convection in a porous medium with zero Darcy-Prandtl Number. *J. Nonlinear Sci.*, **9**, (1999), 333–362.
- [46] D.A. NIELD, A. BEJAN. *Convection in porous media*. Springer-Verlag, 1992.
- [47] R. PACANOWSKI, K. DIXON, A. ROSATI. *The GFDL Modular Ocean Model*. Users Guide Version 1.0., GFDL Ocean Group Technical Report #2, (1991).
- [48] Y.G. PARK, K. BRYAN. Comparison of thermally driven circulations from a depth-coordinate model and an isopycnal-layer model. part ii: The difference and structure of the circulations. *J. Phys. Oceanogr.*, **31** (2001), 2612–2624.
- [49] L. E. PAYNE, J.F. RODRIGUES, B. STRAUGHAN. Effect of anisotropic permeability on Darcy's law. Applied mathematical analysis in the last century. *Math. Methods Appl. Sci.*, **24**, no. 6, (2001), 427–438.
- [50] L.E. PAYNE, B. STRAUGHAN. Stability in the initial-time geometry problem for the Brinkman and Darcy equations of flow in porous media. *J. Math. Pures et Appl.*, **75**, (1996), 225-271.

- [51] L.E. PAYNE, B. STRAUGHAN. Structural stability for the Darcy equations of flow in porous media. *Proc. Roy. Soc. London A*, 454 (1998), 1691–1698.
- [52] L.E. PAYNE, B. STRAUGHAN. Convergence, continuous dependence and decay for the Brinkman–Forchheimer equations. *Stud. Appl. Math.*, 102, (1999), 419–439.
- [53] J. PEDLOSKY. *Geophysical fluid dynamics*. Springer–Verlag, 1987.
- [54] J. PEDLOSKY. *Ocean Circulation Theory*. Springer–Verlag, 1996.
- [55] N.A. PHILIPPS. Geostrophic motion. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1 (1963), 123–176.
- [56] D. POLISEVSKI. The evolution Darcy–Boussinesq system (a weak maximum principle and the uniqueness). *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 26, 1, (1985), 181–183.
- [57] M. REDI. Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation. *J. Phys. Oceanogr.*, 12 (1982), 1154–1158.
- [58] A. ROBINSON AND H. STOMMEL. The oceanic thermocline and the associated thermohaline circulation. *Tellus*, XI (1959), 295–308.
- [59] R. SALMON. A simplified linear ocean circulation theory. *J. Mar. Res.*, 44, (1986), 695–711.
- [60] R. SALMON. The thermocline as an "internal boundary layer". *J. Mar. Res.*, 48, (1990), 437–469.
- [61] R. SALMON. Linear ocean circulation theory with realistic bathymetry. *J. Mar. Res.*, 56 (1998), 833–884.
- [62] R. SAMELSON, G. VALLIS. A simple friction and diffusion scheme for planetary geostrophic basin models, *J. Phys. Oceanography*, 27 (1997), 186–194.
- [63] R.M. SAMELSON, G.K. VALLIS. Large-scale circulation with small diapycnal diffusion: The two-thermocline limit. *J. Mar. Res.*, 55 (1997), 223–275.
- [64] R. SAMELSON, R. TEMAM, S. WANG. Some mathematical properties of the planetary geostrophic equations for large scale ocean circulation. *Appl. Anal.*, 70, (1998), 147–173.
- [65] R. SAMELSON, R. TEMAM, S. WANG. Remarks on the planetary geostrophic model of gyre scale ocean circulation. *Diff. Int. Eqs.*, 13, (2000), 1–14.
- [66] R. SAMELSON, R. TEMAM, S. WANG. Smooth solutions and attractor dimension bounds for planetary geostrophic ocean models. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 2000.
- [67] B. SARAMITO. *Stabilisation d'un plasma : Modélisation mathématique et simulation numérique*. Masson, RMA, 1995.
- [68] G. A. SCHMIDT, L. A. MYSAK. The stability of a zonally averaged thermohaline circulation model. *Tellus*, 48 (1996), 158–178.
- [69] M. SCHONBEK, G.K. VALLIS. Energy decay of solutions to the Boussinesq, primitive and planetary geostrophic equations. *J. Math. Anal. and Appl.*, 234, (1999), 457–481.
- [70] J. SIMON. Compact sets in the Space $L^p(0, T; B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata* (IV), Vol. CXLVI, (1987), 65–96.
- [71] H. STOMMEL. Thermohaline convection with two stable regimes of flow. *Tellus*, XIII (1961), 224–230.

- [72] H. STOMMEL, A.B. ARONS. On the abyssal circulation of the world ocean. i: Stationary planetary flow patterns on a sphere. *Deep Sea Res.*, **6** (1960), 140–154.
- [73] H. STOMMEL, A.B. ARONS. On the abyssal circulation of the world ocean. ii: An idealized model of the circulation pattern and amplitude in oceanic basins. *Deep Sea Res.*, **6** (1960), 217–233.
- [74] B. STRAUGHAN. A sharp nonlinear stability threshold in rotating porous convection. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **457**, no. 2005, (2001), 87–93.
- [75] L. A. TE RAA, H. A. DIJKSTRA. Instability of the thermohaline ocean circulation on interdecadal time scales. *J. Phys. Oceanogr.*, **32** (2002), 138–160.
- [76] H. TRIEBEL. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland publishing company Amsterdam–New-York–Oxford, 1978.
- [77] P. VADASZ. Coriolis effect on gravity-driven convection in a rotating porous layer heated from below. *J. Fluid Mech.*, **1376**, (1998), 351–375.
- [78] P. VADASZ. Flow in rotating porous media. *Fluid transport in porous media*, series: advances in fluid mechanics, **13**, series editor: M. Rahman, (1997), 161–213.
- [79] P. VADASZ. Natural convection in porous media induced by the centrifugal body force - the solution for a small aspect ratio. *J. Energy Resources Technology*, **114**, (1992), 250–254.
- [80] S. WHITAKER. The Forchheimer equation: a theoretical development *Transport in Porous media*, **25**, (1996), 27–61.
- [81] P. WELANDER. An advective model of the ocean thermocline. *Tellus*, **XI** (1959), 309–318.
- [82] M. WINTON. *Numerical investigations of steady and oscillating thermohaline circulation*. Ph.D. thesis, University of Washington, (1993).
- [83] M. WINTON, E.S. SARACHIK. Thermohaline oscillations induced by strong steady salinity forcing of ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, **23** (1993), 1389–1410.
- [84] S. ZHANG, C. A. LIN, R. J. GREATBATCH. A thermocline model for ocean-climate studies. *J. Mar. Res.*, **50** (1992), 99–124.
- [85] M. ZIANE. Regularity results for the stationary primitive equations of the atmosphere and the ocean. *Nonlinear Anal.*, **28**, (1997), 289–313.
- [86] M. ZIANE. Regularity results for Stokes type systems related to climatology. *Appl. Math. Lett.*, **8**, No 1, 53–58, 1995.

PARAMÉTRISATION EN MÉCANIQUE DES FLUIDES :
ANALYSES MATHÉMATIQUES DE QUELQUES MODÈLES.

RÉSUMÉ.

Cette thèse, consacrée essentiellement à l'étude de quelques modèles issus de la paramétrisation en mécanique des fluides, est composée de deux parties.

Équations de type Kazhikhov-Smagulov. On établit de nouveaux systèmes de type Kazhikhov-Smagulov en supposant une dépendance entre le tenseur de Reynolds choisi et la loi liant la vitesse à la densité. Les modèles sont aussi obtenus à partir des équations compressibles sans avoir à supposer une faible diffusivité λ . On montre que divers modèles peuvent se ramener à un modèle de type Kazhikhov-Smagulov et que divers résultats d'existence globale de solutions faibles peuvent être alors établis. On conclut par un résultat de convergence du système classique de Kazhikhov-Smagulov avec une densité initiale $\rho_0 \geq 0$ vers le système de Navier-Stokes avec une densité initiale $\rho_0 \geq 0$.

Équations planétaires géostrophiques. On décrit l'asymptotique qui mène aux équations planétaires géostrophiques. On donne ensuite quelques relations suivant les paramétrisations pour la dissipation. Les systèmes obtenus sont équivalents aux systèmes de convection de Bénard dans un milieu poreux mince et anisotrope avec la loi de Darcy ou celle de Brinkman.

On donne ensuite quelques résultats mathématiques pour quelques modèles et un résultat de convergence entre le modèle de Salmon 3D et le modèle planétaire géostrophique classique.

PARAMETRIZATION IN FLUIDS MECHANICS :
MATHEMATICAL ANALYSIS OF SOME MODELS.

ABSTRACT.

This thesis, devoted essentially to the study of some models resulting from parametrization in fluids mechanics, is composed of two parts.

Kazhikhov-Smagulov equations. We propose some new Kazhikhov-Smagulov type models using particular Reynolds tensor depending on the relation between the velocity and the density. Moreover, the models are obtained without assuming small enough diffusivity λ . In general framework, several Kazhikhov-Smagulov type models may be derived and global existence of weak solutions established. We conclude by a result of convergence of the traditional Kazhikhov-Smagulov system with initial density $\rho_0 \geq 0$ towards the Navier-Stokes equations with initial density $\rho_0 \geq 0$.

Planetary geostrophic equations. We describe the asymptotic which leads to the geostrophic equations. We give then some relations according to parametrizations for dissipation. The systems obtained are equivalent to the systems of Bénard convection in a porous and anisotropic medium with the Darcy law or that of Brinkman. We give also some mathematical results for some models and a result of convergence between the Salmon's 3D model and the traditional planetary geostrophic model.