

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES



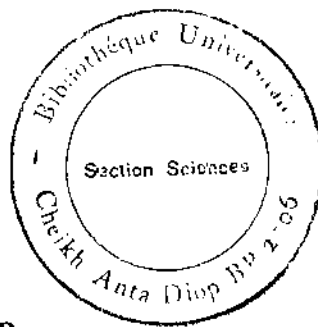
THESE

présentée par

EL HADJI CHEIKH MBACKE DIOP

pour obtenir le grade de Docteur de 3^e Cycle

Spécialité : Géométrie Différentielle



SUR LES FEUILLETAGES SINGULIERS PRESQUE ISOMETRIQUES

Soutenue le 11 Juin 1993 devant la commission d'examen :

M. S. NIANG
MM. C. BADJI
J. BREUNEVAL
E. FEDIDA
O. ABIB
H. SEYDI
D. S. THIAM

Président
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Examinateur

ST

6137

REMERCIEMENTS

Le Professeur Edmond FEDIDA a dirigé avec constance et rigueur les travaux que je vous sou mets. Son soutien ne m'a jamais fait défaut. En plus, il a organisé mes deux voyages sur Montpellier. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance.

Je remercie le Professeur Pierre MOLINO pour sa direction éclairée et son aide constante au cours de ce travail. J'ai trouvé auprès de lui une disponibilité et une attention particulières. Je lui exprime ma profonde gratitude. A travers Pierre MOLINO, je remercie toute l'équipe du Laboratoire GETODIM qui m'a bien accueilli en son sein.

Je remercie le Recteur, le Professeur Souleymane NIANG, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail en acceptant de présider mon Jury.

Je remercie les Professeurs Hamet SEYDI, Chérif BADJI, Doudou Sakhir THIAM, Jacques BREUNEVAL, OdINETTE ABIB qui ont bien voulu être membres de mon Jury.

Je remercie mes parents, frères, amis et collègues qui m'ont toujours encouragé. Encore une fois Merci au GETODIM, qui, en plus des subventions qu'il m'a allouées lors de mon premier séjour à Montpellier, a bien voulu prendre en charge l'impression de ce mémoire ; et à Madame MORI qui a tapé le texte.

Introduction

Dans [Mo 6] P. Molino a posé le problème de l'étude des variétés munies d'une structure de Poisson-Riemann : une structure de Poisson-Riemann est la donnée d'un triple (P, Λ, g) où (P, Λ) est une variété de Poisson et g une métrique riemannienne sur P qui vérifie les conditions suivantes :

i) Si S est le feuilletage symplectique de (P, Λ) , alors la métrique g est adaptée à S en ce sens que toute géodésique perpendiculaire à une feuille en l'un de ses points reste perpendiculaire à toutes les feuilles qu'elle rencontre.

ii) Notant $\mathcal{J}(P, \Lambda, H)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles différentiables qui respectent le tenseur de Poisson Λ et le champ d'éléments de contact H orthogonal aux feuilles, la partie $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ formée des champs complets est transitive en restriction à chaque feuille.

L'étude des feuilletages presque isométriques singuliers est apparue comme une étape intermédiaire dans celle des structures de Poisson-Riemann. Soit M une variété différentiable connexe, un feuilletage presque isométrique singulier \mathcal{F} sur M est un feuilletage singulier au sens de Sussmann-Stefan qui satisfait aux conditions suivantes :

1. Il existe une métrique riemannienne g sur M adaptée à \mathcal{F} dans le sens de i).

2. Soit $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ le module des champs de vecteurs différentiables tangents aux feuilles et soit $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ la sous algèbre de Lie de $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ formée des champs de vecteurs qui respectent le champ d'éléments de contact H orthogonal aux feuilles ; alors la partie $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ formée des champs complets est transitive sur chaque feuille.

La condition 1 signifie que \mathcal{F} est un feuilletage riemannien singulier. Dans [Mo 6], on a montré l'existence, pour un feuilletage presque isométrique singulier sur une variété connexe M , d'une fibration $\psi : M \rightarrow W$ dite horizontale, de M sur une variété basique W ayant la propriété qu'une fibre rencontre toutes les feuilles et qu'en outre les traces de celles-ci sur chaque fibre N forment un nouveau feuilletage \mathcal{F}_N presque isométrique pour la métrique induite ; l'algèbre de Lie $\mathcal{J}(N, \mathcal{F}_N, H_N)$ est un invariant du feuilletage dit algèbre de Lie structurale horizontale. Il se pose le problème de savoir si cet inva-

riant a une dimension finie.

Dans le présent travail, nous donnons des réponses partielles à cette question. Ensuite nous faisons une description des feuilletages presque isométriques sur les variétés compactes et connexes de dimension 4.

Au chapitre I, nous rappelons les propriétés des feuilletages riemanniens singuliers décrits dans [Mo 5], puis l'on précise la structure des fibres de la fibration horizontale : ce sont les adhérences des nappes, une nappe passant par un point $x \in M$ étant par définition l'ensemble des points que l'on peut atteindre à partir de x en suivant un chemin continûment différentiables par morceaux tangent à H .

Au chapitre II, nous donnons une propriété générale qui caractérise les éléments de l'algèbre de Lie structurale horizontale. De façon précise, on montre que si $X \in \mathcal{J}(N, \mathcal{F}_N, H_N)$ a un jet infini nul en un point $x_0 \in N$, alors il reste identiquement nul sur N . Nous montrons que $\mathcal{J}(N, \mathcal{F}_N, H_N)$ a une dimension finie lorsque \mathcal{F} est régulier ou a une dimension générique ≤ 2 . On montre également qu'un flot presque isométrique sur une variété compacte et connexe est isométrique s'il est régulier ou si le champ d'éléments de contact H est complètement intégrable dans l'ouvert régulier ; dans ce dernier cas, il résulte d'une action de S^1 sur M et $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ est une algèbre de rotations infinitésimales autour de la strate \sum_0 des feuilles ponctuelles qui est une sous-variété de codimension 2.

Le chapitre III est consacré à l'étude des feuilletages presque isométriques singuliers (M^4, \mathcal{F}) de dimension générique 2 sur une variété compacte et connexe M^4 . Un tel feuilletage provient d'une action de $SU(2)$ ou du tore \mathbb{T}^2 lorsqu'il possède une feuille ponctuelle. Si la dimension minimale des feuilles est 1 et si la variété basique de la fibration horizontale est S^1 , il existe une sous algèbre J de $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}, H)$ isomorphe à \mathbb{R}^2 qui est transitive sur les feuilles. \mathcal{F} est alors défini par une action de \mathbb{T}^2 sur M^4 s'il est à feuilles compactes et la variété feuilletée (M^4, \mathcal{F}) est construite par suspension à l'aide d'un automorphisme φ de (N, \mathcal{F}_N) , (N, \mathcal{F}_N) étant la fibre type de la fibration horizontale, munie du feuilletage induit \mathcal{F}_N . Si les feuilles dans la strate singulière \sum_1 ne sont pas compactes, alors les composantes connexes de \sum_1 sont des tores \mathbb{T}^2 ; on peut définir \mathcal{F} par une action d'un sousgroupe G dense de \mathbb{T}^3 .

Le problème de la finitude de la dimension de l'algèbre de Lie structurale horizontale reste ouvert si la dimension des feuilles est ≥ 2 . La résolution de ce problème ramènerait la classification des feuilletages presque isométriques singuliers à celle des actions de groupes de Lie. En particulier il serait intéressant de savoir, lorsqu'un feuilletage presque isométrique (M, \mathcal{F}, g) est à nappes denses, s'il existe une autre métrique riemannienne g' sur M pour laquelle l'algèbre de Lie structurale est formée d'isométries infinitésimales.

Chapitre I. Feuilletages presque isométriques singuliers.
Définition et constructions élémentaires associées.

A. RAPPELS SUR LES FEUILLETAGES RIEMANNIENS.

I. Définition.

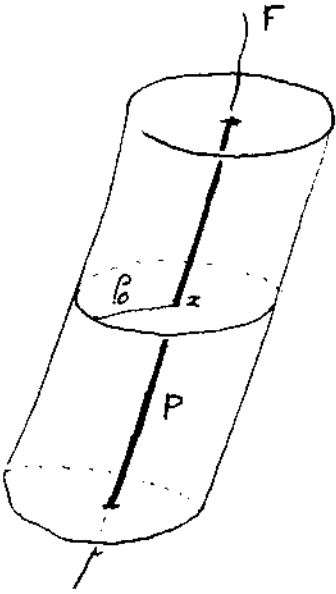
Soit M une variété différentiable connexe. Un feuilletage riemannien singulier sur M est une partition \mathcal{F} de M en sous variétés immergées connexes - les feuilles - vérifiant les conditions suivantes :

1) \mathcal{F} est un feuilletage singulier au sens de Sussmann [Su], Stefan [St] i.e le module $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ des champs de vecteurs différentiables tangents aux feuilles est transitif en restriction à chaque feuille.

2) Il existe une métrique riemannienne g adaptée à \mathcal{F} dans le sens suivant : toute géodésique perpendiculaire en un point à une feuille reste perpendiculaire à toutes les feuilles qu'elle rencontre.

Cette condition signifie que \mathcal{F} est un système transnormal au sens de Bolton [Bo]. Dans le cas où toutes les feuilles ont la même dimension, on dit que \mathcal{F} est régulier. Les feuilletages riemanniens singuliers ont été étudiés par Molino [Mo 5]. Ils apparaissent de façon naturelle dans l'étude des feuilletages réguliers riemanniens ou totalement géodésiques, les adhérences des feuilles (respectivement des nappes) d'un feuilletage riemannien régulier (resp. d'un feuilletage totalement géodésique) formant un feuilletage riemannien singulier. Avant de décrire leur structure, rappelons le lemme suivant qui nous sera utile pour toute la suite.

Lemme (Existence de Voisinage tubulaire). Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et F une sous variété immergée de M de dimension p . Soit P un ouvert connexe relativement compact de F .



Il existe un réel $\rho_0 > 0$ tel que, si $B_{\rho_0}^P$ est le fibré en boule sur P , formé des vecteurs de longueurs $< \rho_0$ perpendiculaires à F aux différents points de P , l'application exponentielle

$$\exp_p : B_{\rho_0}^P \rightarrow \mathcal{B}_{\rho_0}^P$$

réalise un difféomorphisme de $B_{\rho_0}^P$ sur un ouvert $\mathcal{B}_{\rho_0}^P$ de M vérifiant les propriétés suivantes :

i) Si $y = \exp X_x$, alors $d(y, P) = \|X_x\|$ et est réalisée par la géodésique de vecteur vitesse en x X_x , d étant la distance définie par g .

ii) L'application de projection orthogonale

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}_{\rho_0}^P &\rightarrow P \\ y = \exp_p X_x &\mapsto x \end{aligned}$$

est une fibration localement triviale de fibre type la boule $\mathcal{D}(0, \rho_0)$ dans \mathbb{R}^{n-p} .

On dit que $\mathcal{B}_{\rho_0}^P$ est le voisinage tubulaire de P de rayon ρ_0 .

Si $\rho < \rho_0$, le tube δ_ρ^P est la sous variété de codimension 1, image par \exp_p du fibré en sphères de rayon ρ dans $B_{\rho_0}^P$; δ_ρ^P est l'ensemble des points qui sont à une distance ρ de P . Les géodésiques issues de P et perpendiculaires à F constituent la famille des courbes orthogonales aux tubes.

II. Description des feuilletages riemanniens singuliers.

Dans la suite \mathcal{F} est un feuilletage riemannien singulier sur la variété connexe M et g une métrique adaptée.

1. Voisinages tubulaires distingués.

Soient $x_0 \in M$ et P un voisinage ouvert connexe de x_0 relativement compact dans la feuille F_{x_0} . Considérons un voisinage tubulaire $\mathcal{B}_{\rho_0}^P$ de rayon ρ_0 de P dont le lemme précédent garantit l'existence et notons $\pi : \mathcal{B}_{\rho_0}^P \rightarrow P$ la projection orthogonale.

Si ρ_0 est assez petit, la feuille F_y passant par $y \in \mathcal{B}_{\rho_0}^P$ est transverse à la fibre $\pi^{-1}(\pi(y))$. La plaque P_y passant par y est par définition la composante connexe de y dans l'ouvert $F_y \cap \mathcal{B}_{\rho_0}^P$. Comme la métrique g est adaptée, le fait que les géodésiques perpendiculaires à F_{x_0} aux points de P forment la famille des courbes orthogonales aux tubes entraîne que l'espace tangent à la feuille F_y en y est contenu dans le tangent au tube δ_ρ^P lorsque $y \in \delta_\rho^P$. Il en résulte que P_y est tracée dans ce tube. Ceci entraîne que la distance entre les feuilles est localement constante pour un feuilletage riemannien singulier.

De plus la restriction $\pi : P_y \rightarrow P$ de la projection orthogonale est une submersion surjective.

On dira que $\mathcal{B}_{\rho_0}^P$ est un voisinage tubulaire distingué de x_0 .

2. Lemme d'homothétie.

Soit $\lambda > 0$. Considérons l'homothétie h_λ définie sur la réunion des tubes δ_ρ^P tels ^{que} $\sqrt{\lambda}\rho$ et $\lambda\rho < \rho_0$ et qui est obtenue en composant \exp_p avec l'homothétie de rapport λ dans le fibré perpendiculaire à la plaque, $\mathcal{B}_{\rho_0}^P$. Le lemme suivant joue un rôle important dans l'étude des feuilletages riemanniens singuliers.

Lemme. L'homothétie h_λ envoie plaque sur plaque et laisse le feuilletage \mathcal{F} invariant dans le domaine de $\mathcal{B}_{\rho_0}^P$ où elle est définie.

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour λ voisin de 1 car $h_{\lambda\mu} = h_\lambda \circ h_\mu$. Pour un tel λ , le point $y_\lambda = h_\lambda(y)$ appartient à un voisinage tubulaire de y , lorsque $y \in \delta_\rho^P$. Il existe donc un voisinage ouvert Ω de y dans P_y et un voisinage ouvert Ω_λ de y_λ dans P_{y_λ} tels que la distance $d(y'_\lambda, \Omega)$ soit constante sur Ω_λ et soit réalisée par la géodésique joignant le point y'_λ à sa projection y' sur Ω .

De $d(y, P) = \rho$, $d(y_\lambda, P) = \lambda\rho$, on déduit que $d(y, y_\lambda) = \rho|1-\lambda|$.

Or si $y'_\lambda \in \delta_{\lambda_0}^p$, $d(y, y'_\lambda) = \rho|1-\lambda| \Rightarrow y'_\lambda = h_\lambda(y)$.
 D'où $\Omega_\lambda = h_\lambda(\Omega)$.

3. Stratification par la dimension des feuilles.

Si la dimension des feuilles varie de r_0 à r_1 , celles qui ont la dimension maximale sont appelées feuilles génériques, les autres sont dites singulières.

La strate Σ_r est la réunion des feuilles de dimension r . On montre, en appliquant le lemme d'homothétie dans les voisinages tubulaires distingués des points de M , que chaque strate Σ_r est une sous variété plongée de M ; de plus si γ est une géodésique perpendiculaire aux feuilles tangente à Σ_r , elle reste localement contenue dans cette strate. D'autre part le fait que le feuilletage reste invariant par les homothéties par rapport à chaque strate entraîne que si $r < r_1$, la codimension de Σ_r est supérieure à 2. Ainsi la strate Σ_{r_1} est un ouvert connexe dense de M appelé ouvert régulier du feuilletage; la strate Σ_{r_0} est dite minimale.

\mathcal{F} définit, en restriction à chaque strate, un feuilletage régulier pour lequel la métrique induite par g est adaptée.

4. Métriques adaptées et métriques transverses.

4.1. Cas régulier.

Dans le cas régulier, la caractérisation des métriques adaptées est due à Reinhart [Re]. Une métrique g sera adaptée à \mathcal{F} si elle vérifie la condition suivante: Quels que soient les champs de vecteurs différentiables locaux feuilletés et perpendiculaires aux feuilles X et Y , la fonction $g(X, Y)$ est basique dans le sens qu'elle est localement constante sur les traces des feuilles dans l'ouvert où X et Y sont définis. g sera dite alors bundle-like ou encore quasi-fibrée.

Une métrique bundle-like g définit dans le module $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur M une forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{F}} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) &\rightarrow C^\infty(N) \\ (X, Y) &\mapsto g_{\mathcal{F}}(X, Y) = g(\pi_{\mathcal{H}} X, \pi_{\mathcal{H}} Y) \end{aligned}$$

où $\pi_H : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(H)$ désigne la projection orthogonale sur le module $\mathfrak{X}(H)$ des champs de vecteurs perpendiculaires aux feuilles.

g_T vérifie les propriétés suivantes :

$$1) \forall X \in \mathfrak{X}(M) , g_T(X,X) \geq 0$$

$$2) \text{Ker } g_T = \mathfrak{X}_{\mathcal{F}} .$$

3) $\forall X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}} , L_X g_T = 0$, $L_X g_T$ étant la dérivée de Lie de g_T suivant X définie par

$$(L_X g_T)(Y,Z) = X g_T(Y,Z) - g_T([X,Y], Z) - g_T(Y, [X,Z]) , \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M) .$$

1) et 2) permettent de regarder g_T comme une structure euclidienne sur le fibré $Q = T(M)/T\mathcal{F}$ transverse à \mathcal{F} lorsqu'on l'identifie au fibré orthogonal à \mathcal{F} . 3) signifie alors que g_T est laissée invariante par l'action de $\mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$ sur Q .

Une structure euclidienne sur Q vérifiant les conditions 1) à 3) est appelée métrique transverse. On voit qu'à toute métrique bundle-like est associée une métrique transverse unique. Rappelons que si \mathcal{F} est un feuilletage régulier sur M de dimension p et de codimension q , il existe, pour tout $x_0 \in M$, un voisinage ouvert U de x_0 et une submersion surjective $f : U \rightarrow \bar{U}$ sur une variété \bar{U} de dimension q tels que les composantes connexes des traces des feuilles sur U soient les fibres de f . Les champs de vecteurs feuilletés dans U se projettent suivant les champs de vecteurs sur \bar{U} .

Soient X et Y deux champs de vecteurs feuilletés et perpendiculaires aux feuilles. Puisque la fonction $g_T(X,Y)$ est basique, elle se projette dans \bar{U} suivant une fonction $\bar{g}(\bar{X},\bar{Y})$ qui ne dépend que des projections \bar{X} et \bar{Y} de X et Y sur \bar{U} . De cette manière, on définit une métrique riemannienne \bar{g} sur \bar{U} . On interprète alors g_T come le pull-back de \bar{g} sur U .

Lorsqu'on munit U et \bar{U} des métriques respectives g et \bar{g} , l'application tangente à f réalise, en tout point $x \in U$, une isométrie de l'espace H_x orthogonale à la feuille F_x sur l'espace $T_{f(x)}\bar{U}$. f est alors une submersion riemannienne.

Signalons enfin que la donnée d'une métrique transverse pour un feuilletage régulier \mathcal{F} permet de construire des métriques adaptées à \mathcal{F} .

4.2. Cas singulier.

La notion de fibré transverse au feuilletage n'a pas de sens dans le cas singulier. Soit F une feuille de \mathcal{F} , le fibré transverse à F sera par définition le quotient $Q^F = T_p M / T_p F$ où $T_p M$ désigne la préimage de F dans le fibré tangent (TM, p, M) . $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ opère sur Q^F via les groupes à un paramètre associés à ses éléments.

La métrique adaptée g détermine une structure euclidienne $g_{\mathcal{F}}^F$ sur Q^F identifié au fibré orthogonal à F . Là encore $g_{\mathcal{F}}^F$ est laissée invariante par l'action de $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ sur Q^F ; ceci s'exprime par la relation

$$X g_{\mathcal{F}}^F(Y, Z) - g_{\mathcal{F}}^F([X, Y], Z) - g_{\mathcal{F}}^F(Y, [X, Z]) = 0, \quad \forall X \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

On appelle métrique transverse $g_{\mathcal{F}}$ associée à g la famille des métriques transverses $g_{\mathcal{F}}^F$ définies le long des différentes feuilles. Localement, $g_{\mathcal{F}}$ détermine la distance entre les feuilles.

On ne sait pas encore, à la différence du cas régulier, si l'existence d'une métrique transverse pour un feuilletage singulier entraîne celle d'une métrique riemannienne adaptée à ce feuilletage. Toutefois dans le cas où la variété ambiante M est compacte, on a le résultat suivant :

Théorème 1 [Mo 4]. Soient \mathcal{F} un feuilletage riemannien singulier sur la variété compacte et connexe M , g une métrique adaptée à \mathcal{F} et g' une autre métrique riemannienne sur M . Alors g' sera adaptée à \mathcal{F} si, et seulement si, pour toute feuille F de \mathcal{F} , la structure euclidienne $g_{\mathcal{F}}'^F$ définie par g' sur Q^F est une métrique transverse pour \mathcal{F} .

La démonstration de ce résultat utilise le fait que l'existence de g entraîne que les différentes strates sont des sous variétés plongées, alors qu'on ne sait pas si celle d'une métrique transverse permet d'affirmer le même résultat.

5. Géométrie globale des feuilletages riemanniens singuliers.

Dans ce paragraphe, on suppose la variété M compacte.

5.1. Cas régulier.

Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien régulier de codimension q sur M . Q étant le fibré transverse de \mathcal{F} , notons EQ le fibré des repères orthonormés de Q . Si $p : EQ \rightarrow M$ est la projection, \mathcal{F} se relève dans EQ suivant un feuilletage régulier $\tilde{\mathcal{F}}$ de même dimension.

EQ est une variété fibrée principale de groupe $O(q, \mathbb{R})$. Soit ω la connexion de Lévi-Civita transverse projetable sur EQ . Le champ d'éléments de contact tangent aux feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ est horizontal pour ω . θ_q étant la forme fondamentale de EQ , à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^q$, on associe le champ de vecteurs basique B_ε défini par les conditions $\theta_q(B_\varepsilon) = \varepsilon$ et $\omega(B_\varepsilon) = 0$.

Les champs basiques et les champs fondamentaux associés aux éléments de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}(q, \mathbb{R})$ sont feuilletés pour $\tilde{\mathcal{F}}$ et engendrent un supplémentaire de $T_z \tilde{\mathcal{F}}$ en chaque point $z \in EQ$. En fait si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ est une base de \mathbb{R}^q et si $\left\{ \lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{q(q-1)}{2}} \right\}$ est une base de $\mathcal{D}(q, \mathbb{R})$, les champs basiques B_{ε_i}

et les champs fondamentaux X_{λ_i} définissent un parallélisme transverse de $\tilde{\mathcal{F}}$. Comme M , et par suite EQ est compacte, ce parallélisme est complet. D'où $\tilde{\mathcal{F}}$ est transversalement complet (T.C). Rappelons que pour les feuilletages T.C. on a le théorème suivant :

Théorème 2. [MO 1] *Soit \mathcal{S} un feuilletage T.C. sur une variété connexe V . Alors les adhérences des feuilles de \mathcal{S} sont les fibres d'une fibration localement triviale $\Phi : V \rightarrow B$ sur une variété basique B . Sur chaque fibre, \mathcal{S} induit un feuilletage de Lie à feuilles denses. L'algèbre de Lie structurale k de ce feuilletage est un invariant de \mathcal{S} . De plus il existe un faisceau $\mathcal{E}(V, \mathcal{S})$ de germes de champs transverses commutant avec tous les champs transverses globaux qui est un fibré en algèbre de Lie sur B , de fibre type k^- , ayant pour orbites les adhérences des feuilles.*

Pour la notion de feuilletage de Lie, voir [Fe].

Appliquant ce résultat à $\tilde{\mathcal{F}}$ sur l'une des composantes connes de EQ (éventuellement si \mathcal{F} est transversalement orientable), on obtient par projection sur M , un théorème de structure pour les feuilletages riemanniens réguliers.

Théorème 3 [MO 3] Soit (M, \mathcal{F}, g) un feuilletage riemannien régulier sur une variété compacte et connexe M . Les adhérences des feuilles sont des sous variétés et, sur chacune d'elles \mathcal{F} induit un feuilletage riemannien transversalement ^{localement} homogène. Il existe un faisceau commutant $\mathcal{E}(M, \mathcal{F})$ formé de germes de champs de Killing transverses qui est un fibré en algèbre de Lie sur M ayant pour orbites les adhérences des feuilles.

Comme, transversalement aux feuilles, les adhérences sont des orbites de champs de Killing, elles forment un nouveau feuilletage riemannien singulier.

5.2. Cas singulier.

Remarquons d'abord que si une feuille F est contenue dans une strate Σ_r , il en est de même de son adhérence. Ceci est évident pour la strate Σ_{r_0} qui est compacte. Si $r > r_0$, alors $\bigcup_{r' \leq r} \Sigma_{r'}$ est compacte, donc $F \subset \Sigma_r$

entraîne $\bar{F} \subset \bigcup_{r' \leq r} \Sigma_{r'}$. Maintenant, comme la distance entre les feuilles est

localement constante, la fonction $x \rightarrow d\left(x, \bigcup_{r' < r} \Sigma_{r'}\right)$ est constante sur F et

égale à la distance $d\left(F, \bigcup_{r' < r} \Sigma_{r'}\right)$ qui est > 0 . \bar{F} étant à la même distance

de $\bigcup_{r' < r} \Sigma_{r'}$, on en déduit que \bar{F} est contenu dans Σ_r .

Dans chaque composante connexe de la strate Σ_{r_0} , qui est compacte, on peut appliquer le théorème de structure des feuilletages riemanniens réguliers.

Si $r \geq r_0$, Σ_r n'est pas compacte. Une désingularisation de \mathcal{F} par éclatements successifs le long des strates singulières ramène l'étude de \mathcal{F} à celle d'un feuilletage riemannien régulier. De façon précise, il existe, d'après [Mo 4], une variété \tilde{M} compacte, un feuilletage riemannien régulier $\tilde{\mathcal{F}}$ sur \tilde{M} est une application différentiable $E : \tilde{M} \rightarrow M$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) E envoie chaque feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ suivant une feuille de \mathcal{F} .
- ii) En dehors du lieu singulier, E est un revêtement fini trivial.

On peut alors appliquer le théorème 3 à $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ et en déduire, par projection sur M , que les adhérences des feuilles de (M, \mathcal{F}) sont des sous variétés. De plus le faisceau commutant $\mathcal{E}(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ se projette sur Σ_{r_1} en un faisceau localement constant $\mathcal{E}(\Sigma_{r_1}, \tilde{\mathcal{F}})$. Celui-ci se prolonge par continuité, en un faisceau $\mathcal{E}(M, \mathcal{F})$ qui est par définition le faisceau commutant du feuilletage \mathcal{F} .

Les adhérences des feuilles forment un nouveau système transnormal sur M . Un problème non encore résolu est de savoir si elles forment un feuilletage riemannien singulier.

B. FEUILLETAGES PRESQUE ISOMÉTRIQUES SINGULIERS.

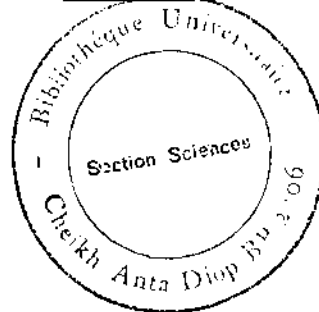
I. Définition et exemples.

1. Définition. Soient M une variété différentiable connexe, \mathcal{F} un feuilletage riemannien singulier et g une métrique riemannienne adaptée à \mathcal{F} . On dira que \mathcal{F} est presque isométrique pour la métrique g si la condition suivante est satisfaite :

* Si $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables tangents aux feuilles qui respectent le champ d'éléments de contact H perpendiculaire aux feuilles, la partie $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ formée des champs complets est transitive sur chaque feuille.

Remarque. H n'est pas différentiable si les feuilles n'ont pas toutes la même dimension. La condition * signifie que les groupes à un paramètre définis par les éléments de \mathcal{J}_c laissent H invariant.

Il est clair que si M est compacte, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_c$.



2. Exemples.

2.1. Exemple fondamental.

Soient (M, g) une variété riemannienne connexe, G un sous groupe de Lie connexe du groupe de Lie des isométries de (M, g) . Les orbites de G forment une partition \mathcal{F} de M en sous variétés immergées connexes. Si λ est un élément de l'algèbre de Lie de G , on note X_λ le champ fondamental qui lui est associé. L'algèbre de Lie des champs fondamentaux est transitive sur chaque orbite. D'où \mathcal{F} est un feuilletage singulier.

Soit $\gamma :]-a, b[\rightarrow M$ une géodésique perpendiculaire à la feuille F_{x_0} en $x_0 = \gamma(0)$; notons $\Omega = \{t \in]a, b[/ F_{\gamma(t)} \perp \gamma\}$. Il est clair que Ω est fermé. Montrons qu'il est aussi ouvert.

Soit $t_0 \in \Omega$, $x = \gamma(t_0)$. P_x étant un voisinage ouvert connexe relativement compact de x dans la feuille F_x , considérons un voisinage tubulaire \mathcal{B}_ρ^x de P_x tel que l'application $\exp_\rho : \mathcal{B}_\rho^x \rightarrow \mathcal{B}_\rho^x$ soit un difféomorphisme.

Soit V_e un voisinage ouvert de l'élément neutre e de G tel que $V_e \cdot x$ soit contenu dans P_x . Comme les éléments de V_e sont des isométries on a : (1) $\forall f \in V_e \exp_{P_x} \circ f_* = f \circ \exp_{P_x}$.

Si $y = \gamma(t) \in \mathcal{B}_\rho^x$ se projette sur x , notons P_y sa composante connexe dans l'ouvert $\mathcal{B}_\rho^x \cap F_y$. (1) entraîne que si y est à la distance ρ de P_x , alors tous les points de $V_e \cdot y$ sont à la même distance ρ de P_x . Donc la fonction $z \rightarrow d(z, P_x)$ est localement constante sur P_y . Par connexité, elle sera constante sur P_y . P_y est donc tracée sur le tube δ_ρ^x . Comme les géodésiques perpendiculaires à la feuille F_x aux points de P_x sont exactement les courbes orthogonales aux tubes, on en déduit que γ est perpendiculaire à la plaque $P_{y=\gamma(t)}$. Ceci étant vrai pour tout point de $\gamma \cap \mathcal{B}_\rho^x$, le résultat découle de la continuité de l'application γ .

Par connexité on a $\Omega =]-a, b[$. D'où g est adaptée.

* provient du fait que les champs fondamentaux sont des isométries infinitésimales et laissent donc H invariant.

2.2. Exemple 2.

Soit $E(p, W, G)$ un fibré principal de groupe G , $p : E \rightarrow W$ étant la projection. Si g_W est une métrique riemannienne quelconque sur W , son pull-back $g_E = p^* g_W$ est une métrique transverse pour le feuilletage \mathcal{F} défini par les fibres. \mathcal{F} est donc riemannien.

Soit H une connexion sur E . Tout vecteur X tangent à E se décompose suivant une composante verticale X_v et une composante horizontale X_h . Soit g une métrique adaptée à \mathcal{F} ayant g_T pour métrique transverse associée et telle que H soit perpendiculaire aux fibres de p . Puisque H est laissé invariant par les champs fondamentaux, qui forment une algèbre de Lie transitive sur les fibres, \mathcal{F} est presque isométrique.

2.3. Exemple 3.

Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes. Considérons la variété riemannienne produit $M = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$. Les feuilletages vertical et horizontal de M sont presque isométriques pour $g_1 \times g_2$.

II. Nappes et fibration horizontale.

Soit \mathcal{F} un feuilletage presque isométrique sur la variété connexe M , munie de la métrique g . On désigne par H le champ d'éléments de contact perpendiculaire aux feuilles.

Définition. Pour tout $x \in M$, la nappe N_x passant par x est l'ensemble des points que l'on peut atteindre à partir de x en suivant un chemin continûment différentiable par morceaux tangent à H .

Les nappes sont construites de la même manière que pour les feuilletages totalement géodésiques. Voir pour cela Cairns' [Ca], Blumenthal-Hebda [Bl-He]. Les nappes d'un feuilletage totalement géodésique sur une variété compacte connexe N forment un feuilletage régulier sur N . On a le même résultat pour les feuilletages presque isométriques, avec une structure plus rigide.

Proposition. Les nappes sont les feuilles d'un feuilletage transversalement complet S sur M , pour lequel les champs de vecteurs dans $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ sont feuilletés.

Démonstration.

Soit \mathcal{X}_g la famille des champs de vecteurs différentiables dont chaque

orbite est contenue dans une nappe. Les classes d'accessibilité de \mathfrak{X}_S sont les feuilles d'un feuilletage singulier S . Par construction les feuilles de S sont contenues dans les nappes. D'où il résulte que \mathfrak{X}_S est le module des champs de vecteurs tangents aux nappes.

En fait le feuilletage S est régulier. Pour voir cela, considérons le champ d'éléments de contact $x \mapsto T_x S$ qu'il détermine sur M .

1) Comme les transformations engendrées par les éléments de $J_c(M, \mathcal{F}, H)$ respectent H , elles envoient les nappes les unes sur les autres et partant elles respectent \mathfrak{X}_S . Le fait que $J_c(M, \mathcal{F}, H)$ est transitive sur les feuilles entraîne que la dimension de TS est constante sur chaque feuille de \mathcal{F} .

2) Soit $x \in M$ et \mathcal{B}_p^x un voisinage tubulaire distingué de x . Considérons la projection orthogonale $\pi : \mathcal{B}_p^x \rightarrow P_x$ sur la plaque P_x .

Comme une géodésique perpendiculaire à la feuille F_x aux points de P_x reste perpendiculaire à toutes les feuilles qu'elle rencontre, chaque fibre $\pi^{-1}(y)$, $y \in P_x$, est contenue dans la nappe \mathcal{N}_y passant par y . Les champs de vecteurs tangents aux fibres sont donc des éléments de \mathfrak{X}_S . Par suite la dimension de TS est constante sur chaque fibre.

Les fibres de π étant transverses aux plaques, 1 et 2 entraînent que la dimension de TS est constante sur \mathcal{B}_p^x . La dimension de TS est donc localement constante et par connexité elle est constante sur M . Ceci prouve que S est régulier.

Maintenant, comme l'espace tangent à la fibre $\pi^{-1}(y)$ au point $y \in P_x$ est H_y , H_y est contenu dans $T_y S$. D'où les feuilles de S coïncident avec les nappes.

1) Signifie que les éléments de $J_c(M, \mathcal{F}, H)$ sont feuilletés pour S . De plus ils engendrent en chaque point $x \in H$ un supplémentaire de $T_x S$. D'où S est transversalement complet.

En appliquant le théorème de structure des feuilletages transversalement complets à S , on obtient le corollaire suivant :

Corollaire. *Les adhérences des nappes sont les fibres d'une fibration localement triviale*

$$\psi : M \rightarrow W$$

sur une variété basique W . Sur chaque fibre $N = \psi^{-1}(y)$, $y \in W$, \mathcal{F} induit un feuilletage \mathcal{F}_N presque isométrique à nappes denses.

Démonstration. Par transversalité, les composantes connexes des traces des feuilles de \mathcal{F} sur les fibres de ψ , orbites des éléments de $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ ψ -verticaux, forment sur chacune de ces fibres N , un feuilletage \mathcal{F}_N presque isométrique pour la métrique induite g_N , le champ d'éléments de contact H_N orthogonal aux feuilles de \mathcal{F}_N étant la restriction de H à N .

III. Algèbre de Lie structurale horizontale.

Une fonction $f \in C^\infty(N)$ sera dite H -basique si sa différentielle en tout point $x \in M$ s'annule sur H_x . Une telle fonction est constante sur chaque nappe; elle se projette sur W suivant une fonction $\bar{f} \in C^\infty(W)$. Par suite l'anneau $C_H^\infty(M)$ des fonctions H -basiques s'identifie à $C^\infty(W)$ par la correspondance $\bar{f} \circ \psi \rightarrow \bar{f}$.

Soient $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ et $f \in C_H^\infty(M)$. $X \cdot f \in C_H^\infty(M)$. X détermine une dérivation X_W sur l'anneau $C^\infty(W)$. Autrement dit il se projette suivant un champ de vecteurs X_W sur W .

D'autre part $fX \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$. C'est facile à voir dans le cas régulier: pour tout $x \in M$ et $Y(x) \in H_x$, on considère un champ de vecteurs Y feuilleté et perpendiculaire aux feuilles défini dans un voisinage de x et prenant la valeur $Y(x)$ au point x . On a alors $[fX, Y] = f[X, Y] - (Y \cdot f)X = 0$ car $[X, Y] = 0$. D'où fX laisse invariant Y . Ceci étant, si (φ_t) est le groupe local à un paramètre engendré par X , on a $\varphi_{t*}(Y_x) = Y_{\varphi_t(x)} \in H_{\varphi_t(x)}$.

Dans le cas singulier on applique la démonstration précédente dans chaque strate, puis l'on remarque que fX laisse invariant le champ d'éléments de contact perpendiculaire à chaque strate.

La correspondance $X \rightarrow X_W$ est ainsi un morphisme de $C_H^\infty(M)$ -modules et d'algèbres de Lie de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ sur $\mathcal{X}(W)$.

Soit maintenant X_W un champ de vecteurs différentiable sur W . Soient $y \in W$ et x un élément de $\psi^{-1}(y)$. Notant q la dimension de W , il existe q éléments X_1, \dots, X_q de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ qui sont linéairement indépendants dans un voisinage V de x saturé de nappes et qui se projettent suivant une base locale

$\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_q\}$ de $\mathfrak{X}(W)$.

Au voisinage de y , X_y s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^q \bar{f}_i \bar{X}_i$. X_y se relève

dans V suivant l'élément $X = \sum_{i=1}^q \bar{f}_i \circ \psi X_i$ de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$.

En considérant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert localement fini de W , on relève X_y en un champ de vecteurs global X qui est dans $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$.

Ceci étant le morphisme $X \rightarrow X_y$ est surjectif. On a donc une suite exacte de $C_H^\infty(M)$ -modules et d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H) \rightarrow \mathfrak{X}(W) \rightarrow 0$$

Revenons maintenant au feuilletage induit par \mathcal{F} sur les fibres. Soit $N_0 = \psi^{-1}(y_0)$ une fibre de ψ fixée une fois pour toutes. Si N est une autre fibre de ψ , il existe un élément h du groupe de transformations engendrées par $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ qui envoie N_0 sur N ; h conjugue les feuilletages (N_0, \mathcal{F}_{N_0}) et (N, \mathcal{F}_N) et envoie H_{N_0} sur H_N . Par conséquent, le triple $(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0})$ ne dépend pas, à un isomorphisme près, du point y_0 . L'algèbre de Lie $\mathcal{J}(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0})$ apparaît ainsi comme un invariant du feuilletage \mathcal{F} . On notera cet invariant H et on l'appellera algèbre de Lie structurale horizontale de (M, \mathcal{F}, g) . Le prochain chapitre sera consacré à l'étude de cet invariant.

Chapitre II. Etude de l'algèbre de Lie structurale horizontale

Nous avons vu au chapitre I que l'étude d'un feuilletage presque isométrique (M, \mathcal{F}, g) sur une variété connexe M se ramène essentiellement au cas d'un feuilletage presque isométrique à nappes denses (N, \mathcal{F}_N, g_N) défini par l'algèbre de Lie structurale $H = \mathcal{J}(N, \mathcal{F}_N, H_N)$ de (M, \mathcal{F}, g) . Dans ce chapitre, on montre que les éléments de H sont des champs presque analytiques en ce sens qu'ils sont entièrement déterminés par leur jet infini en un point quelconque de N . Ceci fournit une réponse partielle à une conjecture faite dans [Mo 6], que nous démontrerons dans quelques cas particuliers, selon laquelle H a une dimension finie.

I. Propriétés des éléments de H .

Théorème 1. Soit (N, \mathcal{F}_N, g) un feuilletage presque isométrique singulier à nappes denses et soit $X \in H$. S'il existe $x_0 \in N$ tel que $j_{x_0}^\infty X = 0$, alors X est identiquement nul.

Démonstration. Considérons un voisinage tubulaire $B_{\rho_0}^{P, X_0}$ distingué de x_0 , image par \exp_{P, X_0} du fibré $B_{\rho_0}^{P, X_0}$ formé des vecteurs de longueur $< \rho_0$ perpendiculaires à la feuille F_{x_0} aux points de P_{x_0} . Si X engendre le groupe local à un paramètre (φ_t) , alors (φ_{t_*}) est un groupe à un paramètre sur $B_{\rho_0}^P$; le champ de vecteurs X' associé à (φ_{t_*}) est appelé le linéarisé de X .

Lemme 1. $\exp_{P, X_0} X' = X$.

Démonstration du lemme 1. On a vu au chapitre I que si une géodésique perpendiculaire aux feuilles est tangente à une strate Σ_r , elle reste localement contenue dans cette strate. On commence par démontrer le résultat dans le cas régulier, où toutes les feuilles ont la même dimension.

Considérons un voisinage ouvert simple U de x_0 et une submersion riemannienne $f : U \rightarrow \bar{U}$ qui définit le feuilletage \mathcal{F} dans U . Notons X_U la restriction de X à U et φ_t^U le flot de X_U . Comme φ_t^U laisse la métrique trans-

verse invariante, si $\gamma : s \rightarrow \exp s V_x$ est une géodésique perpendiculaire aux feuilles, $\varphi_t^U \circ \gamma$ est un chemin perpendiculaire aux feuilles de même longueur que γ . Mais les géodésiques perpendiculaires aux feuilles sont des relevés des géodésiques de \bar{U} . γ et $\varphi_t^U \circ \gamma$ se projettent donc sur une géodésique $\bar{\gamma}$ de \bar{U} . Il en résulte que $\varphi_t^U \circ \gamma$ est la géodésique $s \rightarrow \exp s \cdot \varphi_t^U(V_x)$.

En fait, l'argument essentiel vaut dans le cas général, en considérant d'une part les géodésiques qui restent dans la même strate et d'autre part celles qui rentrent [et restent] dans une strate moins dégénérée à partir de leur point de départ.

Lemme 1.2. Soit (N, \mathcal{F}, g) un feuilletage presque isométrique singulier sur la variété connexe N . La nappe η_x passant par x est l'ensemble des points que l'on peut atteindre à partir de x par des géodésiques brisées perpendiculaires aux feuilles.

Démonstration du lemme 1.2. On appellera provisoirement "nappe géodésique" passant par x et notera η'_x l'ensemble des points que l'on peut atteindre à partir de x par des géodésiques brisées perpendiculaires aux feuilles.

On note \mathcal{X}_g , la famille des champs de vecteurs différentiables dont chaque orbite est contenue dans une nappe géodésique, et S' le feuilletage singulier formé par les classes d'accessibilité de \mathcal{X}_g . Le lemme 1.1 entraîne que les transformations engendrées par les éléments de $\mathcal{J}_c(N, \mathcal{F}, g)$ envoient les nappes géodésiques les unes sur les autres ; par suite elles laissent invariante \mathcal{X}_g . Ceci étant, on démontre de la même façon que pour le lemme 0, que le feuilletage S' est régulier. D'où $\eta'_x = \eta_x$.

Démonstration du théorème 1. Supposons que $j_{x_0}^\infty X = 0$. Soit X' le linéarisé de X dans le fibré $B_{p_0}^{p \times 0}$ perpendiculaire à la plaque P_{x_0} ; $j_{\exp_{p_{x_0}}^{-1} x_0}^\infty X' = 0$.

Montrons que ceci entraîne que X' est nul.

Si P_{x_0} est assez petit, soient Y_1, \dots, Y_q une base de sections de

$B_{p_0}^{p \times 0}$. Tout vecteur $v_x \in B_{p_0}^{p \times 0}$ s'écrit sous la forme $v_x = \sum_{i=1}^q a_i Y_i(x)$. De cette

façon on obtient une trivialisat

$$\begin{aligned}\Phi : B_\rho^{P \times 0} &\rightarrow P_{x_0} \times \mathcal{D}(0, \rho) \\ v_x &\mapsto (x, a_1, \dots, a_q)\end{aligned}$$

de $B_\rho^{P \times 0}$ au-dessus de P_{x_0} , $\mathcal{D}(0, \rho)$ étant la boule ouverte de \mathbb{R}^q et q la codimension de la feuille F_{x_0} .

Grâce à un système de coordonnées x_1, \dots, x_p sur P_{x_0} , on obtient un système de coordonnées sur $B_\rho^{P \times 0}$ en associant à v_x les coordonnées $x_1, \dots, x_p, a_1, \dots, a_q$.

Soit φ_{t_*} un élément du groupe local à un paramètre engendré par X' . Dans les coordonnées précédentes, φ_{t_*} s'écrit sous la forme

$$(x_1, \dots, x_p, a_1, \dots, a_q) \mapsto \left(x_1(t), \dots, x_p(t), (\beta_j^i(x, t)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix} \right)$$

$\beta_j^i(x, t)$ étant une (q, q) -matrice.

Si les coordonnées de X/P_{x_0} dans la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p} \right\}$ sont

$(X^1(x^i), \dots, X^p(x^i))$ celles de X' dans la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p}, \frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_q} \right\}$ sont $(X^1(x^i), \dots, X^p(x^i), \alpha_1(x) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \alpha_q(x) \cdot (a_1, \dots, a_q))$, les $\alpha_i(x)$ étant des 1-formes obtenues par dérivation des fonctions $\beta_j^i(x, t)$ par rapport à t .

Relativement à ces coordonnées, on a

$$\begin{aligned}j^1 X' (x_1, \dots, x_p, a_1, \dots, a_q) &= (x^1, \dots, x^p, a_1, \dots, a_q, X^1(x^i), \dots, X^p(x^i), \\ &\alpha^1(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \alpha_q(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \\ &\frac{\partial X^1}{\partial x^1}(x^i), \dots, \frac{\partial X^1}{\partial x^p}(x^i), \dots, \frac{\partial X^p}{\partial x^1}(x^i), \dots, \frac{\partial X^p}{\partial x^p}(x^i), \\ &0, \dots, 0, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^p}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \\ &\dots, \frac{\partial \alpha_q}{\partial x^1}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \frac{\partial \alpha_q}{\partial x^p}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \\ &\alpha_1^1(x^i), \dots, \alpha_q^1(x^i), \dots, \alpha_q^1(x^i), \dots, \alpha_q^q(x^i))\end{aligned}$$

où les $\alpha_j^i(x^i)$ désignent les coefficients des 1-formes $\alpha_j(x)$, $j=1, \dots, q$ dans la base da_1, \dots, da_q .

$$\begin{aligned}
 j^2 X' (x^1, \dots, x^p, a_1, \dots, a_q) = & \left(\dots, \frac{\partial^2 X^1}{\partial x^{12}}(x^i), \dots, \frac{\partial^2 X^1}{\partial x^{1p}}(x^i), \dots, \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^{12}}(x^i), \dots, \right. \\
 & \frac{\partial^2 X^p}{\partial x^{p2}}(x^i), 0, \dots, 0, \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^{12}}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \\
 & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^{1p}}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x^{p2}}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), 0, \dots, 0, \\
 & \left. \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial x^1}(x^i), \dots, \frac{\partial \alpha_1^p}{\partial x^p}(x^i), \dots, \frac{\partial \alpha_q^q}{\partial x^1}(x^i), \dots, \frac{\partial \alpha_q^q}{\partial x^q}(x^i), 0, \dots, 0 \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j^k X' (x^1, \dots, x^p, a_1, \dots, a_q) = & \left(\dots, \frac{\partial^k X^1}{\partial x^{1k}}(x^i), \dots, \frac{\partial^k X^p}{\partial x^{1k}}(x^i), 0, \dots, 0, \right. \\
 & \frac{\partial^k \alpha_1}{\partial x^{1k}}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q), \dots, \frac{\partial^k \alpha_q}{\partial x^{1k}}(x^i) \cdot (a_1, \dots, a_q) \\
 & \left. \frac{\partial^{k-1} \alpha_1^1}{\partial x^{1k-1}}(x^i), \dots, \frac{\partial^{k-1} \alpha_q^q}{\partial x^{1k-1}}(x^i), 0, \dots, 0 \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\partial^k}{\partial x^{1k}} = \frac{\partial^k}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}} / i_1 + \dots + i_j = k.$$

$$\begin{aligned}
 j^2 X' (x_0^1, \dots, x_0^p, 0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial x^1}(x_0^i) = \frac{\partial \alpha_1^p}{\partial x^p}(x_0^i) = \dots = \frac{\partial \alpha_q^q}{\partial x^p}(x_0^i) = 0 \\
 \Rightarrow j^1 X' (x_0^1, \dots, x_0^p, a_1, \dots, a_q) = 0, \forall a_1, \dots, a_q \in \mathcal{O}(0, \rho)
 \end{aligned}$$

de même

$$j^k X' (x_0^1, \dots, x_0^p, 0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow j^{k-1} X' (x_0^1, \dots, x_0^p, a_1, \dots, a_q) = 0.$$

d'où

$$j^{\alpha} X' (x_0^1, \dots, x_0^p, 0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow j^{\alpha} X' (x_0^1, \dots, x_0^p, a_1, \dots, a_q) = 0$$

En revenant par \exp_{p, x_0} dans le voisinage tubulaire $\mathbb{E}_p^{p \times \rho}$ de x_0 , on

voit que $j_{x_0}^\infty X = 0$ entraîne $j_x^\infty X = 0$ en tout point x de la fibre $\pi^{-1}(x_0)$, $\pi : \mathbb{B}_p^{x_0} \rightarrow P_{x_0}$ étant la projection orthogonale sur P_{x_0} . Comme, d'après le lemme 1.2, on décrit la nappe η_{x_0} en suivant les arcs de géodésiques perpendiculaires aux feuilles (qui sont tracés sur les fibres dans les voisinages tubulaires des points de N), l'hypothèse $j_{x_0}^\infty X = 0$ entraîne $j_x^\infty X = 0$ sur η_{x_0} . η_{x_0} étant dense dans N , $j_x^\infty X = 0$ sur N , c-à-d. $X = 0$ sur N .

c.q.f.d

II. Cas où la dimension de H est finie.

Dans les cas particuliers suivants, on montrera que H a une dimension finie.

II.1. Feuilletages presque isométriques réguliers.

Proposition 1. Soit (M, \mathcal{F}, g) un feuilletage presque isométrique régulier sur la variété connexe M . Si $N = \psi^{-1}(y)$ est une fibre de la fibration horizontale $\psi : M \rightarrow W$, l'algèbre de Lie structurale $H = \mathcal{J}(N, \mathcal{F}_W, H)$ est simplement transitive sur les feuilles de \mathcal{F}_W .

La démonstration est facile : \mathcal{F} étant régulier, le champ d'éléments de contact H perpendiculaire aux feuilles est différentiable. L'existence de $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ entraîne que les orbites du module \mathfrak{X}_H des champs de vecteurs tangents à H sont des sous variétés immergées de M de même dimension et coïncident avec les nappes.

Soit (X_1, \dots, X_p) une base locale de $\mathcal{J}(N, \mathcal{F}, H)$ et soit $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$.

Dans l'ouvert où sont définis les X_i , $i = 1, \dots, p$, on a $X = \sum_{i=1}^p f_i X_i$. Pour

tout $Z \in \mathfrak{X}_H$, on a $[X, Z] = \sum_{i=1}^p (-Zf_i)X_i + \sum_{i=1}^p f_i [X_i, Z]$. Le fait que $[X, Z]$ res-

te tangent à H entraîne $\sum_{i=1}^p (-Zf_i)X_i = 0$; d'où $Zf_i = 0$: les fonctions f_i sont constantes sur les orbites de Z . Par suite si $X(x_0) = 0$, alors X reste nul

sur l'orbite de Z passant par x_0 . Comme la nappe η_{x_0} est une orbite de \mathcal{X}_N , X est identiquement nul sur η_{x_0} , et par densité sur la fibre de ψ contenant η_{x_0} .

Remarque. Le fait que $\mathcal{J}(N, \mathcal{F}_N, H)$ est simplement transitive sur les feuilles de \mathcal{F}_N entraîne $\mathcal{J}(N, \mathcal{F}_N, H) = \mathcal{J}_c(N, \mathcal{F}_N, H)$. D'après un résultat classique de Palais, [Pa], il existe une structure de groupe de Lie sur le groupe G_N des transformations engendrées par cette algèbre de Lie, de façon que $\mathcal{J}_c(N, \mathcal{F}_N, H)$ soit l'algèbre de Lie des champs fondamentaux de l'action de G_N . Comme G_N opère de façon localement libre sur N , H apparaît comme une presque connexion au sens [Mo 2]. Soit $\{X_1, \dots, X_\ell\}$ une base de \mathcal{J}_c et g' une métrique sur N pour laquelle $\{X_1, \dots, X_\ell\}$ est orthonormée, donnant le même champ d'éléments de contact H perpendiculaire aux feuilles de \mathcal{F}_N . On a

$$(\mathcal{L}_Z g')(X_i, X_j) = Zg'(X_i, X_j) - g'([Z, X_i], X_j) - g'([Z, X_j], X_i) = 0$$

Par conséquent (N, \mathcal{F}_N, g') est à la fois riemannien et totalement géodésique.

II.2. (M, \mathcal{F}, g) a une feuille ponctuelle.

Soit $\{x_0\}$ une feuille ponctuelle. Considérons le voisinage $\mathcal{B}_\rho^{x_0}$ de x_0 , image par l'exponentielle de la boule $B(0, \rho)$ de rayon ρ dans $T_{x_0}(M) = H_{x_0}$. Au lemme 1.1 on a vu que \exp^{-1} échange H avec l'algèbre de Lie $\bar{\mathcal{J}}$ des linéarisés de ses éléments. Si $X' \in \bar{\mathcal{J}}$, le groupe à un paramètre de transformations (de $B(0, \rho)$) qu'il engendre respecte la métrique euclidienne de $T_{x_0}(M)$; d'où X' est une rotation infinitésimale autour de l'origine. Par suite la dimension de $\bar{\mathcal{J}}$ est $\leq \frac{n(n-1)}{2}$, avec $n = \dim M$. Il en est de même de celle de H , car d'après le théorème 1, un élément de H est entièrement déterminé par son germe en x_0 .

II.3. (M, \mathcal{F}, g) est un flot, c-à-d. la dimension des feuilles génériques est 1.

Soit $\psi : M \rightarrow W$ la fibration horizontale ; $\dim W \in \{0, 1\}$.

- Si $\dim W = 1$, les fibres de ψ sont les variétés intégrales du champ d'éléments de contact H , et l'algèbre de Lie structurale horizontale est réduite à 0.
- Si $\dim W = 0$, ou bien le flot est régulier et d'après la proposition 1 la dimension de H est 1 ; ou bien le flot possède une feuille ponctuelle et d'après 2) H est isomorphe à une algèbre de rotations autour d'une feuille

ponctuelle, et comme ses orbites génériques sont de dimension 1, on a $\dim H = 1$.

Proposition 2. *Si (M, \mathcal{F}, g) est un flot presque isométrique régulier sur une variété connexe M alors il existe une métrique g' sur M pour laquelle \mathcal{F} est isométrique.*

Démonstration. En effet il existe un élément $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ sans singularité : ceci est clair dans le cas où les nappes sont denses, \mathcal{J} étant alors de dimension 1 ; dans le cas contraire on peut relever un champ de vecteurs X_H sans singularité suivant un élément $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$. Soit g' la métrique obtenue sur M en changeant g le long des feuilles de sorte que $g'(X, X) = 1$ et en laissant la métrique transverse et le champ d'éléments de contact H perpendiculaire aux feuilles inchangés. On a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X g')(X, X) &= 0 \\ (\mathcal{L}_X g')(X, Z) &= Xg'(X, Z) - g'([X, Z], X) \\ &= Xg_T(X, Z) - g_T([X, Z], X) = 0 \\ (\mathcal{L}_X g')(Y, Z) &= (\mathcal{L}_X g_T)(Y, Z) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathcal{X}_H \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}_X g' = 0$$

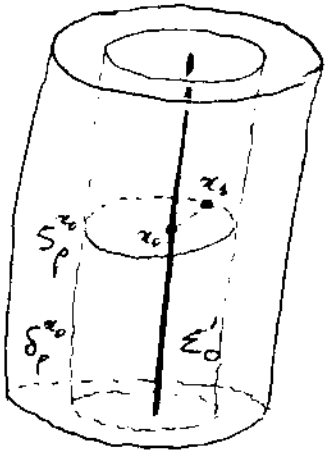
c. q. f. d.

Dans le cas singulier, on a le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit (M, \mathcal{F}, g) un flot presque isométrique singulier sur une variété compacte et connexe M . Si, en restriction à la strate Σ_1 , le champ d'éléments de contact H perpendiculaire aux feuilles est intégrable, alors \mathcal{F} résulte d'une action de S^1 . De plus la strate Σ_0 est une sous variété compacte de codimension 2.*

Démonstration. Soit Σ'_0 une composante connexe de Σ_0 . Σ'_0 est une sous variété compacte de M . Soient $\mathcal{B}_{\rho_0}^{\Sigma'_0}$ un voisinage tubulaire de Σ'_0 de rayon ρ_0 et

$\pi : \mathcal{B}_{\rho_0}^{\Sigma'_0} \rightarrow \Sigma'_0$ la projection orthogonale.



Soit x_1 , un point générique tel que $\pi(x_1) = x_0$ et $d(x_1, x_0) = \rho$. Comme les transformations engendrées par $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ laissent invariante la distance entre F_{x_1} et x_0 , la feuille F_{x_1} passant par x_1 est tracée sur la "sphère" $S_\rho^{x_0}$ intersection du tube $\delta_\rho^{x_0}$ avec la fibre $\pi^{-1}(x_0)$. \mathcal{F} induit donc sur $S_\rho^{x_0}$ un flot régulier \mathcal{F}_ρ . Soit $X \in \mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ sans singularité. X est tangent à \mathcal{F}_ρ et respecte la distribution H_ρ perpendiculaire aux feuilles dans

$S_\rho^{x_0}$. Supposons que la dimension de $S_\rho^{x_0}$ est strictement supérieure à 1 ; $S_\rho^{x_0}$ est alors simplement connexe. Considérons la forme ω définie sur $S_\rho^{x_0}$ par $\omega(X) = 1$ et $\omega(Z) = 0$ si Z est tangent à H_ρ .

$$d\omega(X, Z) = X\omega(Z) - Z\omega(X) - \omega([X, Z]) = 0$$

$$d\omega(Y, Z) = Y\omega(Z) - Z\omega(Y) - \omega([Y, Z])$$

$$= \omega([Y, Z]) = 0 \quad \text{si } Y \text{ et } Z \text{ sont tangents à } H_\rho.$$

Par suite $d\omega = 0$. $S_\rho^{x_0}$ étant simplement connexe, il existe une fonction différentiable f sur $S_\rho^{x_0}$ telle que $\omega = df$. Par compacité, df a une singularité. Ceci est impossible par construction de ω .

Ceci étant, l'hypothèse $\dim S_\rho^{x_0} > 1$ est absurde ; donc $S_\rho^{x_0}$ est un cercle qui coïncide avec la feuille F_{x_1} . Il en résulte que la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ a pour dimension 2, ce qui prouve la deuxième assertion.

On vient de prouver que les feuilles génériques voisines de Σ_0 sont des cercles. M étant compacte, les adhérences (des feuilles) de dimension maximale forment un ouvert dense. Par conséquent toutes les feuilles génériques sont des cercles.

Soit (Σ_1, \mathcal{F}) le flot induit sur la strate Σ_1 . D'après la proposition 2, le groupe \mathbb{R} des transformations engendrées par l'algèbre de Lie $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ (qui est de dimension 1) agit par isométries sur Σ_1 après un changement convenable de la métrique le long des feuilles. Comme celles-ci sont des cercles, le sous groupe d'isotropie en un point $x \in \Sigma_1$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

Rappelons que si un groupe de Lie G agit par isométries sur une variété connexe V , il existe un ouvert dense Ω de V , réunion des orbites dites principales, qui est défini par la condition suivante : si l'on note G_x le

sous groupe d'isotropie de G en un point $x \in M$, alors un point y de V appartient à Ω si, pour tout $x \in \Sigma$, G_x est contenu dans G_y à une conjugaison près.

Ceci étant si \mathbb{R}_{x_1} est le sous groupe d'isotropie d'une orbite principale de \mathbb{R} , alors on peut factoriser l'action de \mathbb{R} sur Σ_1 en une action de $\mathbb{R}/\mathbb{R}_{x_1} \simeq S^1$ sur Σ_1 . Mais puisqu'un élément de \mathbb{R}_{x_1} laisse aussi fixes les points de Σ_0 , cette factorisation se prolonge en une action différentiable de S^1 sur M ; d'où le résultat.

S^1 étant compacte, par moyennisation de la métrique initiale g , on obtient une nouvelle métrique g_1 sur M pour laquelle son action sur M est isométrique. $\mathcal{J}_c(M, \mathcal{F}, H)$ devient alors une algèbre de Lie d'isométries infinitésimales pour g_1 .

II.4. Les feuilles génériques sont de dimension 2.

Théorème 2. *Soit (M, \mathcal{F}, g) un feuilletage presque isométrique sur une variété connexe M . Si la dimension des feuilles génériques est 2, alors l'algèbre de Lie structurale horizontale H a une dimension finie.*

Démonstration. On sait, d'après 2, que le résultat est vrai si \mathcal{F} a une feuille ponctuelle. Il est également vrai, d'après la proposition 1, si \mathcal{F} est régulier. On supposera donc dans la suite que \mathcal{F} a des feuilles de dimensions 1 et 2.

Soit $\psi : M \rightarrow W$ la fibration horizontale et $N = \psi^{-1}(y)$ une fibre de ψ . Chaque feuille de \mathcal{F} est fibrée sur W par ψ de sorte que si $\dim W \neq 0$, (N, \mathcal{F}_N) est un flot presque isométrique singulier. Ce cas a été traité en 3).

Reste finalement à traiter le cas où (M, \mathcal{F}, g) est à nappes denses et feuilles de dimension 1 ou 2. On distinguera deux cas, la codimension des nappes étant au plus 1.

a) Les nappes sont de codimension 1. Elles forment un feuilletage de Lie à feuilles denses sur M . Les nappes étant denses, si $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ est tangent à une nappe en un point, il l'est partout. Ceci étant, la sous algèbre de Lie \mathcal{J}_n des champs de vecteurs dans \mathcal{J} tangents aux nappes a pour dimension 1. D'autre part $\mathcal{J}/\mathcal{J}_n$ a pour dimension 1. D'où $\dim \mathcal{J} = \dim H = 2$.

b) Nappes de codimension 0. On se placera désormais dans cette hypothèse, c-à-d. qu'il y a une seule nappe et on raisonnera par l'absurde en supposant

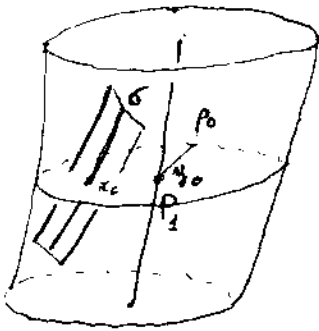
que la dimension de \mathcal{J} est infinie.

Soient Σ_2 la strate régulière formée des feuilles génériques de dimension 2, et Σ_1 la strate singulière. On a vu au chapitre I, que Σ_2 est un ouvert connexe dense et Σ_1 une sous variété plongée fermée de M .

Soient F_1 une feuille singulière, P_1 un ouvert connexe relativement compact de F_1 et $\mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1}$ un voisinage tubulaire de rayon ρ_0 assez petit. On a déjà vu que, via l'exponentielle, $\mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1}$ s'identifie au fibré en boules de rayon ρ_0 dans le fibré normal à P_1 , chaque $X \in \mathcal{J}$ s'identifiant à la transformation infinitésimale qu'il détermine. On notera $\pi : \mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1} \rightarrow P_1$ la projection orthogonale.

Lemme 2.1. Soit $x_0 \in \mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1} \cap \Sigma_2$. Si la dimension de \mathcal{J} est infinie, alors H_{x_0} est contenu dans $\text{Ker } \pi_*$.

Preuve du lemme 2.1. Sinon, au voisinage de x_0 , le champ d'éléments \mathcal{J} est transverse aux fibres de π . Soit $y_0 = \pi(x_0)$.



L'algèbre d'isotropie \mathcal{J}_{y_0} de \mathcal{J} en y_0 définit un flot presque isométrique singulier sur la fibre $\pi^{-1}(y_0)$; en appliquant II.3., on voit que la restriction de \mathcal{J}_{y_0} à cette fibre est une algèbre de dimension 1. Par suite si $X(x_0) = 0$, alors X reste nul sur la fibre $\pi^{-1}(y_0)$.

D'autre part si $X(x_0) = 0$, alors X reste nul sur tout chemin σ perpendiculaire aux feuilles passant par x_0 et contenu dans Σ_2 (Proposition 1). En choisissant σ transverse aux fibres de π , on déduit de la première partie de la démonstration que X est nul dans un voisinage de x_0 . D'où $j_{x_0}^\infty X = 0$. D'après le théorème 1, X est identiquement nul.

On a donc montré que \mathcal{J} est simplement transitive sur les feuilles génériques. Celles-ci étant des sous variétés de dimension 2, l'on a aussi $\dim \mathcal{J} = 2$. D'où la contradiction.

c.q.f.d.

Soit $x_0 \in \mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1} \cap \Sigma_2$. On note P la plaque de x_0 dans $\mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1}$. Comme on l'a vu au chapitre I, la restriction $\pi : P \rightarrow P_1$ de la projection π à P est une submersion surjective. Les fibres de π définissent sur P un feuilletage \mathcal{F}_0 invariant par la restriction \mathcal{J}_P de \mathcal{J} à P . Via l'identification $\mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1} \simeq \mathbb{B}_{\rho_0}^{P_1}$,

les feuilles de f_0 sont munies d'une métrique g_0 invariante par \mathcal{J}_p . Si P est assez petit, considérons un champ de vecteurs Y_0 tangent à f_0 de norme 1 pour g_0 .

$$\forall X \in \mathcal{J}_p, \text{ on a } (\mathcal{L}_X g)(Y_0, Y_0) = -2g_0([X, Y_0], Y_0) = 0 \Rightarrow [X, Y_0] = 0$$

Lemme 2.2. f_0 est l'unique feuilletage sur P invariant par \mathcal{J}_p . Il s'étend à Σ_2 en l'unique feuilletage, noté encore f_0 , de dimension 1 contenu dans \mathcal{F} et \mathcal{J} -invariant.

Preuve du lemme 2.2. Remarquons d'abord que la première assertion entraîne la deuxième. En effet soit f_0 un feuilletage \mathcal{J}_p -invariant sur P ; notons Δ le champ d'éléments de contact tangent à f_0 . On prolonge d'abord Δ sur la feuille F contenant P de la façon suivante: soit $y \in F$, comme \mathcal{J} est transitive sur F il existe un élément φ du groupe G des transformations qu'elle engendre et un point $x \in P$ tels que $y = \varphi(x)$. On pose alors $\Delta y = \varphi_*(\Delta x)$. Si z est un autre point de P et $\psi \in G$ qui vérifient $y = \psi(z)$, alors $\psi_*(\Delta z) = \varphi_*(\Delta x)$: ceci découle du fait que $\psi^{-1} \circ \varphi \in G$ entraîne $(\psi^{-1} \circ \varphi)_*(\Delta x) = \Delta z$, Δ étant \mathcal{J}_p invariant. La distribution Δ est donc bien définie sur F . Elle est différentiable: si $y = \varphi(x)$, alors $\varphi: P \rightarrow \varphi(P)$ est un difféomorphisme; Δ étant différentiable, $\varphi_*(\Delta)$ l'est aussi sur $\varphi(P)$. On prolonge maintenant Δ sur Σ_2 par glissement de f_0 le long du champ d'éléments horizontal.

Ceci étant, il suffit de démontrer la première assertion. Comme F est régulière, \mathcal{J}_p est de dimension infinie. Remarquons qu'il ne peut pas exister trois feuilletages f_0, f_1 et f_2 sur P , \mathcal{J}_p invariants: dans le cas contraire \mathcal{J}_p respecte sur P un "tissu" et ne peut être de dimension infinie, voir par exemple [Du].

Supposons qu'il y ait sur P un second feuilletage f_1 \mathcal{J}_p -invariant. Il sera transverse à f_0 . Observons également que la propriété pour f_0 d'être localement engendré par un champ Y_0 commutant avec \mathcal{J}_p entraîne que l'idéal \mathcal{J}_p^1 de \mathcal{J}_p tangent à f_1 est de dimension infinie, alors que l'idéal \mathcal{J}_p^0 tangent à f_0 est de dimension ≤ 1 .

Comme on l'a remarqué dans la première partie de la preuve, f_0 et f_1 s'étendent à la feuille F toute entière. En outre, la différence de dimension entre \mathcal{J}_p^1 et \mathcal{J}_p^0 entraîne que, par glissement le long du champ d'éléments horizontal, f_0 et f_1 s'étendent à Σ_2 toute entière [si l'on revient par glis-

sement sur la feuille initiale, on ne peut avoir échangé f_0 et f_1].

Notant Tf_0 la distribution tangente aux feuilles de f_0 , considérons sur Σ_2 le champ d'éléments de contact $H_1 = Tf_0 \oplus H$. En vertu du lemme 2.1, H_1 se prolonge différentiablement sur M en posant $H_1 = H$ sur la strate Σ_1 . H_1 est laissé invariant par J^1 .

Le champ d'éléments de contact H_1 ne peut être intégrable, sinon ses variétés intégrales contiendraient les nappes. Mais si $X_1 \in J^1$ est nul en $x \in M$, il reste nul sur les courbes intégrales des champs de vecteurs tangents à H_1 , et est donc identiquement nul sur M . Ceci contredit le fait que J^1 est de dimension infinie.

Fin de la démonstration du théorème 2.

Le feuilletage $(\Sigma_2, \mathcal{F}_{\Sigma_2}, g)$ induit par (M, \mathcal{F}, g) sur Σ_2 est presque isométrique. Soit η_2 le feuilletage de Σ_2 par ses nappes. η_2 est de codimension 0, 1 ou 2.

- Si η_2 était de codimension 0, $J(\Sigma_2, \mathcal{F}_{\Sigma_2}, H)$ serait simplement transitive sur les feuilles transverse à f_0 d'après la proposition 1. Par suite, $\dim J(\Sigma_2, \mathcal{F}_{\Sigma_2}, H) = 2$. Comme $J(M, \mathcal{F}, H)$ est contenu dans $J(\Sigma_2, \mathcal{F}_{\Sigma_2}, H)$, on aboutit à une contradiction.

- Si η_2 était de codimension 1, ses feuilles rencontreraient celles de \mathcal{F} suivant un feuilletage J -invariant, donc suivant f_0 . Le champ d'éléments de contact H_1 défini ci-dessus serait alors complètement intégrable. Or ses variétés intégrales maximales contiendraient les nappes, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle M est réduit à une nappe.

- Si η_2 était de codimension 2, c-à-d. si H était intégrable dans Σ_2 , comme les éléments de J tangents à f_0 laissent invariant H , le champ d'élément de contact H_1 serait encore complètement intégrable, et on retrouve la même contradiction que dans le cas précédent.

Chapitre III. Feuilletages presque isométriques singuliers
de dimension générique 2 sur M^4 .

Ce chapitre est consacré à l'étude des feuilletages presque isométriques (M^4, \mathcal{F}^2, g) dont la dimension maximale des feuilles est 2 sur une variété compacte et connexe M^4 de dimension 4 ; la dimension minimale des feuilles est 0 et 1. Dans le premier cas on montre, après avoir modifié la métrique initiale g , que \mathcal{F}^2 est isométrique et provient d'une action du tore \mathbb{T}^2 ou du groupe $SU(2)$. Dans le second cas les nappes sont ou bien denses, ou les fibres d'une fibration localement triviale sur S^1 . On envisagera dans cette étude la deuxième situation. \mathcal{F}^2 est alors le feuilletage défini par les orbites d'une action de \mathbb{T}^2 sur M^4 lorsque les feuilles sont compactes ; sinon les feuilles singulières sont denses dans les composantes connexes de la strate Σ_1 et celles-ci sont des tores \mathbb{T}^2 ; les feuilles sont alors les orbites d'un sous groupe dense de \mathbb{T}^3 .

I. Feuilletages presque isométriques de dimension générique 2 ayant une
feuille ponctuelle.

Théorème 3. Soit (M^4, \mathcal{F}^2, g) un feuilletage presque isométrique de dimension générique 2 sur la variété compacte et connexe M^4 . Si \mathcal{F}^2 possède une feuille ponctuelle alors il résulte d'une action de

- $SU(2)$ si $M^4 = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$
- \mathbb{T}^2 si $M^4 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,

Σ_i étant la strate des feuilles de dimension i .

Démonstration.

Rappelons (chap. 2, Lemmel) qu'un feuilletage presque isométrique est linéarisable au voisinage des feuilles ponctuelles. Soit $a \in \Sigma_0$; pour ρ assez petit, l'application exponentielle $\exp : B(0, \rho_0) \rightarrow \mathbb{B}_\rho^a$ réalise un difféomorphisme de la boule $B(0, \rho)$ dans $T_a(M)$ sur un voisinage convexe de a . Comme les éléments de $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$ respectent la métrique transverse g_τ définie par g , l'application \exp^{-1} les échange avec leurs linéarisés ; de

plus pour la métrique g_0 , image par \exp de la métrique euclidienne de $B(0, \rho)$, $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ devient une algèbre de Lie de rotation infinitésimales.

Soit maintenant (M^4, \mathcal{F}^2, g) un feuilletage presque isométrique singulier dont la dimension maximale des feuilles est 2. Si $\rho < \rho_0$, notons S_ρ^a la "sphère" formée des points à la distance ρ de a . Comme S_ρ^a est simplement connexe, cette variété ne supporte pas de feuilletage transversalement parallélisable de codimension 1. Ceci étant, le feuilletage \mathcal{F}_ρ induit sur la sphère S_ρ^a n'est pas régulier : dans le cas contraire, $(S_\rho^a, \mathcal{F}_\rho)$ serait transversalement orientable et un champ de vecteurs perpendiculaire aux feuilles et de norme 1, définissant une orientation transverse de \mathcal{F}_ρ , commuterait avec tous les éléments de $\mathcal{J}(S_\rho^a, \mathcal{F}_\rho, H_\rho)$ et laisserait \mathcal{F}_ρ invariant. Grâce à cette observation, on peut affirmer que :

- si $M^4 = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$, alors $\Sigma_0 \cap S_\rho^a$ est non vide. Par conséquent les feuilles génériques sont difféomorphes à S^2 . Comme pour la métrique g_0 , $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$ est une algèbre de Lie de champs de Killing transitive sur ces feuilles, on en déduit qu'elle est isomorphe à $\mathfrak{SO}(3)$. Le groupe de Lie connexe et simplement connexe $SU(2)$ ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{SO}(3)$ opère donc sur M^4 de façon que $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}, H)$ apparaisse comme l'algèbre de Lie des champs fondamentaux pour cette action. $SU(2)$ étant compact, le feuilletage défini par ses orbites sera isométrique après moyennisation de la métrique initiale g .
- si $M^4 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, alors $S_\rho^a \cap \Sigma_0$ est vide : dans le cas contraire, il existerait des feuilles génériques difféomorphes à S^2 . Puisque toutes les feuilles ont une caractéristique d'Euler nulle si la variété basique de la fibration horizontale $\psi_2 : (\Sigma_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow W^2$ a pour dimension 1 ou 0, on peut supposer, pour démontrer le résultat annoncé, que $\dim W^2 = 2$. Les feuilles génériques sont alors des revêtement de W^2 et ont donc même revêtement universel \tilde{W} .

Le fait que $(S_\rho^a, \mathcal{F}_\rho)$ est singulier entraîne que toutes les feuilles de (M, \mathcal{F}^2) sont compactes : les feuilles de \mathcal{B}_ρ^a sont homothétiques et les adhérences (des feuilles) de dimension maximale forment un ouvert dense. Comme on l'a vu ci-dessus (chap. 2, Prop.3), sur chaque composante connexe Σ_i de Σ_1 , le flot presque isométrique induit par \mathcal{F}^2 sur Σ_1 peut être défini par un champ de vecteurs X_1 sans singularité. Si F est une feuille contenue dans Σ_i , on peut relever X_1 dans un voisinage tubulaire \mathcal{B}_r^F de F suivant un champ de vecteurs X sans singularité.

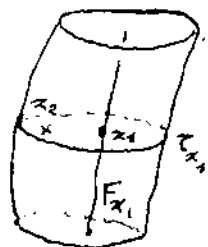
Ceci entraîne que les feuilles génériques dans \mathcal{B}_r^F , et par suite \tilde{W} , ont une caractéristique d'Euler nulle. D'où il résulte que $\Sigma_0 \cap S_\rho^a$ est

vide. a est donc l'unique point de Σ_0 dans S_ρ^a . Par suite la strate Σ_0 , qui est compacte, est un ensemble fini.

On peut maintenant montrer que $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$ est une algèbre de Lie abélienne de dimension 2. Comme S_ρ^a est saturé de feuilles, il suffit de prouver que la restriction de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ à S_ρ^a a les mêmes propriétés, le glissement dans les directions perpendiculaires aux feuilles déterminant entièrement un élément de $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}, H)$ à partir de ses valeurs sur une feuille.

Pour la métrique induite par g_0 sur S_ρ^a , $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)/S_\rho^a$ est formée de champs de Killing. D'autre part pour le feuilletage induit par \mathcal{F}^2 , S_ρ^a est réunion de deux strates σ_1 et σ_2 qui sont les traces respectives de Σ_1 et Σ_2 sur S_ρ^a .

Soit F_{x_1} une feuille contenue dans σ_1 et soit $\mathcal{B}_r^{x_1}$ un voisinage tubulaire de F_{x_1} dans S_ρ^a . Supposons qu'un élément $Y \in \mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}, H)$ s'annule en un point $x_2 \in \sigma_2 \cap \mathcal{B}_r^{x_1}$. Alors Y est nul sur la transversale $\tau_{x_1} = \pi^{-1}(x_1)$, π étant la projection orthogonale de $\mathcal{B}_r^{x_1}$ sur F_{x_1} : l'isotropie $\mathcal{J}_{x_1}(M^4, \mathcal{F}, H)$ de



$\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}, H)$ en x_1 induit sur τ_{x_1} un flot isométrique singulier et a donc pour dimension 1 d'après II.3. chap. 2. D'autre part $X(x_1) = 0$ entraîne $X = 0$ sur toute la feuille F_{x_1} , l'algèbre de champs de Killing sur une variété de dimension 1 ayant pour dimension 1.

$$\left. \begin{array}{l} Y/\tau(x_1) = 0 \\ Y/F_{x_1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X = 0 \text{ sur l'ouvert } W = \exp D(0, h), \text{ où } D(0, h) \text{ est une boule}$$

de rayon h assez petit dans $T_{x_1}(\tau_1) \otimes T_{x_1}(F_1) = T_{x_1}(S_\rho^a)$. Par conséquent X est identiquement nul. Ceci prouve que $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$ restreint à S_ρ^a opère de façon simplement transitive sur les feuilles génériques, d'où $\dim \mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H) = 2$.

On vient de voir que si un élément $Y \in \mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$ est nul en x_1 , il reste nul sur toute la feuille F_{x_1} ; l'algèbre d'isotropie $\mathcal{J}_{x_1}(M^4, \mathcal{F}, H)$ en x_1 est donc un idéal de $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$.

Supposons que l'algèbre d'isotropie soit la même en tout point de σ_1 , c-à-d. égale à $\mathcal{J}_{x_1}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$; notons p la distribution engendrée par $\mathcal{J}_{x_1}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$ sur S_ρ^a et $K = H_\rho + p$, H_ρ étant le champ d'éléments de contact orthogonal aux feuilles dans S_ρ^a . K est différentiable : dans un voisinage

d'une feuille dans σ_1 , il coïncide avec la distribution tangente aux fibres ; et il est clair que K est différentiable en dehors de σ_1 . De plus K est transversalement de Lie : il est laissé invariant par tout élément de $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)/S_p^a$ sans singularité dans σ_1 . Comme on l'a vu ci-dessus, une telle distribution n'existe pas sur S_p^a .

Par conséquent l'isotropie n'est pas la même pour tous les points de σ_1 . Ceci étant $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)/S_p^a$ est somme de deux idéaux de dimension 1 ; d'où $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)/S_p^a$ est abélienne.

Ainsi \mathcal{F}^2 résulte d'une action

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 \times M^4 &\rightarrow M^4 \\ (t, s, x) &\rightarrow \varphi_t^1 \circ \varphi_s^2(x) \end{aligned}$$

de \mathbb{R}^2 sur M^4 , $(\varphi_t^i)_{t \in \mathbb{R}}$ étant les flots engendrés par les éléments d'une base fixée (X_1, X_2) de $\mathcal{J}(M^4, \mathcal{F}^2, H)$.

Considérons la restriction $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ de cette action à la strate Σ_2 . On va changer la métrique initiale g de la façon suivante :

1. On laisse inchangée la métrique transverse g_T .
2. Sur le fibré tangent aux feuilles, on met la métrique g_V définie par $g_V(X_i, X_j) = \delta_j^i$.
- 3) Soit $g' = g_V + g_T$ la métrique sur Σ_2 pour laquelle le champ d'éléments de contact H orthogonal aux feuilles reste inchangé.

On a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_i} g')(X^k, X^\ell) &= X_i \cdot g_V(X^k, X^\ell) - g_V([X_i, X^k], X^\ell) - g_V([X_i, X^\ell], X^k) \\ &= X_i \cdot \delta_k^\ell = 0 \quad \text{avec } (i, \ell, k) = (1, 2) \end{aligned}$$

$$(\mathcal{L}_{X_i} g')(X^k, Z) = -g'([X_i, Z], X^k) = 0$$

$$(\mathcal{L}_{X_i} g')(Z_1, Z_2) = (\mathcal{L}_{X_i} g_T)(Z_1, Z_2) = 0 \quad \text{si } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ sont tangents à } H.$$

Ceci signifie que les champs de vecteurs X_1 et X_2 sont des isométries infinitésimales pour la métrique g' et que \mathbb{R}^2 agit par isométries sur Σ_2 . Notons \mathbb{R}_x^2 le sous groupe d'isotropie de \mathbb{R}^2 en un point $x \in \Sigma_2$ d'une orbite principale. Un élément de \mathbb{R}_x^2 laisse fixe tous les points de Σ_2 . Par continuité il laisse fixe tous les points de M^4 . Par suite Φ se factorise suivant

une action de $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}_x^2$ sur M^4 . \mathbb{R}_x^2 étant un réseau, on a $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}_x^2 = \mathbb{T}^2$. Maintenant grâce à une mesure de Haar sur \mathbb{T}^2 , on peut moyenniser la métrique initiale g de façon à obtenir une métrique \bar{g} sur M^4 invariante par \mathbb{T}^2 , d'où le résultat.

II. Feuilletages presque isométriques sur M^4 ayant deux strates Σ_1 et Σ_2 .

Dans ce paragraphe, (M^4, \mathcal{F}^2, g) est un feuilletage presque isométrique pour la métrique g et la dimension des feuilles varie entre 1 et 2. On suppose que la base de la fibration horizontale est S^1 , on note $\psi : M \rightarrow S^1$ cette fibration. g_T désigne toujours la métrique transverse définie par g .

Lemme 1. Sur chaque fibre $N = \psi^{-1}(\theta)$, $\theta \in S^1$, \mathcal{F} induit un flot presque isométrique singulier qui provient d'une action de S^1 .

Démonstration. Comme nous l'avons vu au chapitre I, par transversalité \mathcal{F} induit sur chaque fibre N un feuilletage presque isométrique \mathcal{F}_N pour la métrique induite g_N , et dont les feuilles sont les composantes connexes des traces des feuilles de \mathcal{F} sur N . Puisque la dimension des feuilles de \mathcal{F} varie entre 1 et 2, celle des feuilles de \mathcal{F}_N varie entre 0 et 1, autrement dit \mathcal{F}_N est un flot singulier. D'où $\mathcal{J}(N; \mathcal{F}_N, H_N)$ est une algèbre de Lie réelle de dimension 1.

N est réunion de deux strates σ_0 et σ_1 . Soit $x_0 \in \sigma_0$ et $\mathcal{B}_0^{x_0}$ un voisinage convexe de x_0 dans (N, g_N) , image par \exp de la boule $B_\rho^{x_0}$ dans $T_{x_0}(N)$. Soit $X \in \mathcal{J}(N; \mathcal{F}_N, H_N)$ et soit X' son linéarisé dans $B_\rho^{x_0}$. X' détermine un sous groupe à un paramètre de $SO(3, \mathbb{R})$: $(T_{x_0}(N), g_{TN} x_0)$ s'identifie à \mathbb{R}^3 muni de la métrique standard. Les orbites de X' sont donc des cercles. En revenant par \exp^{-1} dans $\mathcal{B}_0^{x_0}$, on en déduit que les feuilles de \mathcal{F}_N , orbites de l'algèbre de Lie $\mathcal{J}(N; \mathcal{F}_N, H_N)$ sont compactes. De plus la strate σ_0 est une réunion finie de cercles. On démontre alors de la même manière que pour la proposition 3, chap. II, que \mathcal{F}_N est défini par une action de S^1 sur N .

Soit $\theta_0 \in S^1$ fixé une fois pour toutes et soit $N_0 = \psi^{-1}(\theta_0)$ la fibre au-dessus de θ_0 . Les champs fondamentaux définis par l'action de S^1 sur N_0 - les éléments de $\mathcal{J}(N_0; \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0})$ - sont périodiques. Notons X_{N_0} l'unique élé-

ment de $\mathcal{J}(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0})$ de période 1.

Considérons un relevé Y de $\frac{\partial}{\partial \theta}$ dans $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ et notons $(\varphi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ son flot. Puisque $\frac{\partial}{\partial \theta}$ est périodique de période 1 - on identifie S^1 à \mathbb{R}/\mathbb{Z} et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ est la projection du champ $\frac{\partial}{\partial t}$ - on a $\varphi_1(N_0) = N_0$. Notons φ la restriction de φ_1 à N_0 .

Proposition 2. *Si φ laisse invariante l'orientation des feuilles de \mathcal{F}_{N_0} définie par X_{N_0} , alors X_{N_0} s'étend dans M suivant un champ de vecteurs $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$.*

Démonstration.

1. Si $s \in \mathbb{R}$ et si $\varphi_s(N_0) = N_0$, alors $(\varphi_s/N_0)_*(X_{N_0}) = X_{N_0}$: Comme φ_s laisse invariant H , $(\varphi_s/N_0)_*(X_{N_0})$ appartient à $\mathcal{J}(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0})$; d'où il existe un réel λ tel que $(\varphi_s/N_0)_*(X_{N_0}) = \lambda X_{N_0}$. Le fait que $(\varphi_s/N_0)_*(X_{N_0})$ a même période que X_{N_0} et que $\varphi_s/N_0 = \varphi^s$ laisse invariante l'orientation de \mathcal{F}_{N_0} entraîne que $\lambda = 1$.

2. Si N est une autre fibre de ψ , il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $N = \varphi_s(N_0)$.

1. entraîne que le champ de vecteurs X dont la restriction à chaque fibre N est $(\varphi_s)_*(X_{N_0})$ si $N = \varphi_s(N_0)$ est bien défini sur M .

3. X est différentiable: considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times N_0 &\rightarrow M \\ (t, x) &\rightarrow \varphi_t(x) \end{aligned}$$

X est l'image par Φ du champ de vecteurs $0 + X_{N_0}$.

Il est clair que $X \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ et commute avec Y par construction.

D'autre part X et Y engendrent une sous algèbre de Lie réelle \mathcal{G} de $\mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$ transitive sur les feuilles de \mathcal{F} . Soit alors $Z \in \mathcal{J}(M, \mathcal{F}, H)$, il existe deux fonctions basiques f et g telles que $Z = fX + gY$.

$[X, Z] = (X \cdot f)X + (X \cdot g)Y = 0$ car X étant tangent aux fibres, on a

$$Xf = Xg = 0.$$

c.q.f.d.

On supposera dans la suite que l'hypothèse de la proposition 2 est satisfaite [On peut toujours s'y ramener par passage à un revêtement à deux feuillets de M].

Remarque. X est un champ périodique de même période que X_{N_0} . On peut le regarder comme un champ fondamental provenant d'une action de S^1 sur M^4 .

Notons g_h la métrique induite par g sur les fibres de ψ . Si grâce à une mesure de Haar sur S^1 , on moyennise g_h , on obtient sur les fibres une nouvelle métrique g'_h invariante par S^1 .

Considérons sur M la métrique g' définie par les conditions suivantes :

- g' coïncide avec g'_h sur les fibres
- $g'(Y, Y) = 1$
- Y est orthogonal aux fibres.

g' détermine la même métrique transverse g_T que g et le même champ d'éléments de contact orthogonal aux feuilles de \mathcal{F} . S^1 opère par isométries sur (M, g') et $X \in \mathcal{K}(M, g')$. (M, \mathcal{F}) est presque isométrique pour g' et a pour nappes les fibres de ψ .

Dans la suite, M sera munie de la métrique g' .

III. Géométrie globale du feuilletage.

Nous avons vu au cours de la démonstration du lemme 1 que la strate singulière Σ_1 rencontre les fibres suivant une réunion finie de cercles. Puisque les feuilles sont transverses à ces fibres, ceci entraîne que Σ_1 est une sous variété compacte de dimension 2 de M .

Soit F une feuille de Σ_1 et supposons F compacte ; soit \mathcal{B}_ρ^F un voisinage tubulaire de F de rayon ρ . Les feuilles dans \mathcal{B}_ρ^F sont tracées sur les tubes δ_r^F , $r < \rho$. De ce que dimension de $\Sigma_1 = 2$, il découle que chaque intersection $\delta_r^F \cap \Sigma_1$ est non vide. \mathcal{F} induit donc sur chaque δ_r^F un feuilletage singulier de codimension générique 1. Par conséquent toutes ses feuilles sont compactes.

Par ailleurs une feuille de \mathcal{F} est compacte si et seulement si sa trace sur chaque fibre de ψ est compacte. En particulier les traces des

feuilles singulières sur la fibre N_0 sont les orbites du groupe $\langle \varphi \rangle$ engendré par la restriction φ de φ_1 à N_0 . Puisque φ est engendré par le flot du champ de vecteurs Y , il appartient au groupe des automorphismes de \mathcal{F}_{N_0} qui respecte H_{N_0} et g_T , qu'on notera $\text{Aut}(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0}, g_{T_{N_0}})$.

Il est facile de voir que l'espace des feuilles de (N_0, \mathcal{F}_{N_0}) est une variété à bord $(S, \partial S)$. Notons $p : N_0 \rightarrow (S, \partial S)$ la projection canonique. φ se factorise suivant un homéomorphisme $\bar{\varphi}$ de $(S, \partial S)$. Notant $\langle \bar{\varphi} \rangle$ le groupe engendré par $\bar{\varphi}$, on distinguera deux cas.

a) $\langle \bar{\varphi} \rangle$ est un groupe fini : il existe alors un entier p - l'ordre de $\bar{\varphi}$ - tel que φ^p respecte chaque feuille de \mathcal{F}_{N_0} . Alors $\varphi^p \in \text{Iso}(N_0, g'_{N_0})$: on sait déjà que φ , donc φ^p , respecte X_{N_0} . Puisque X_{N_0} est une isométrie infinitésimale de (N_0, g'_{N_0}) , le fait que x et $\varphi^p(x)$ appartiennent à la même feuille de \mathcal{F}_{N_0} entraîne que

$$g'_{N_0}(\varphi_x^p(X_{N_0}(x)), \varphi_x^p(X_{N_0}(x))) = g'_{N_0}(X_{N_0}(\varphi^p(x)), X_{N_0}(\varphi^p(x))) = g'_{N_0}(X_{N_0}(x), X_{N_0}(x))$$

pour tout $x \in N_0$, la norme de X_{N_0} étant constante sur ses orbites. D'autre part φ^p respecte la métrique transverse g'_{N_0} . Par conséquent

$\varphi^p \in \text{Iso}(N_0, g'_{N_0})$. De façon équivalente, l'application φ_1^p , qu'on peut définir à partir de φ^p par transport à l'aide du flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du champ Y , est une isométrie de (M, g') .

Soit $x \in N_0$ un point générique de \mathcal{F}_{N_0} ; puisque φ^p respecte \mathcal{F}_{N_0} , il existe $\theta_x \in S^1$ tel que $\theta_x(x) = \varphi^p(x)$. $\varphi^p \circ \theta_x^{-1}$ laisse fixe x et σ_0 , d'où $\varphi^p \circ \theta_x^{-1} = \text{id}_{N_0}$. Par suite θ_x est une constante θ_0 qui ne dépend pas du point x dans N_0 . Comme N_0 est une sous variété de codimension 1, le fait que $\varphi_1^p = \varphi$ coïncide avec θ_0 entraîne que $\varphi_1^p = \theta_0$.

Soit \sim la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R} \times S^1$ par

$$(t, \theta) \sim (t', \theta') \iff t' = t + n, \theta' = \theta - n\theta_0$$

L'espace quotient de cette relation est le tore \mathbb{T}^2 construit par suspension à partir de la translation $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$ de S^1 .

L'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times S^1 \times M &\rightarrow M \\ (t, \theta, x) &\rightarrow \varphi_{pt}(\theta \cdot x)\end{aligned}$$

est équivariante pour \sim : en effet

$$\begin{aligned}\varphi_{pt+np}(\theta - n\theta_0(x)) &= \varphi_{pt} \circ \varphi_{np} \circ \theta \circ \theta_0^{-n}(x) \\ &= \varphi_{pt} \circ \varphi_{np} \circ \theta_0^{-n} \circ \theta(x) \\ &= \varphi_{pt} \circ (\varphi_p \circ \theta_0^{-1})^n \circ \theta(x) \\ &= \varphi_{pt} \circ \theta(x) \quad \forall x \in M\end{aligned}$$

D'où Φ se factorise suivant une action de \mathbb{T}^2 sur M^4 ayant pour orbites les feuilles de \mathcal{F} . On peut à nouveau moyenniser la métrique g' de façon à obtenir une métrique g'' invariante par \mathbb{T}^2 . Comme les éléments de \mathbb{T}^2 laissent g_T et H invariants, le champ d'éléments de contact orthogonal aux feuilles de \mathcal{F} pour g'' reste inchangé et est égal à H , de même la métrique transverse g'_T reste égale à g_T . Le flot défini par Y est isométrique, ce qui entraîne que les fibres de ψ sont des sous variétés géodésiques. Les orbites de Y sont aussi géodésiques, g'' est donc localement une métrique produit.

Maintenant on peut reconstruire la variété feuilletée (M^4, \mathcal{F}) par suspension de la façon suivante: on considère la variété produit $\mathbb{R} \times N_0$, munie du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ préimage de \mathcal{F}_{N_0} par la projection $p_2 : \mathbb{R} \times N_0 \rightarrow N_0$, et l'homomorphisme

$$\begin{aligned}h : \mathbb{Z} &\rightarrow \text{Aut}(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, g''_{N_0}) \\ n &\rightarrow \varphi^n\end{aligned}$$

Via h , \mathbb{Z} opère proprement et librement sur $\mathbb{R} \times N_0$ comme suit :

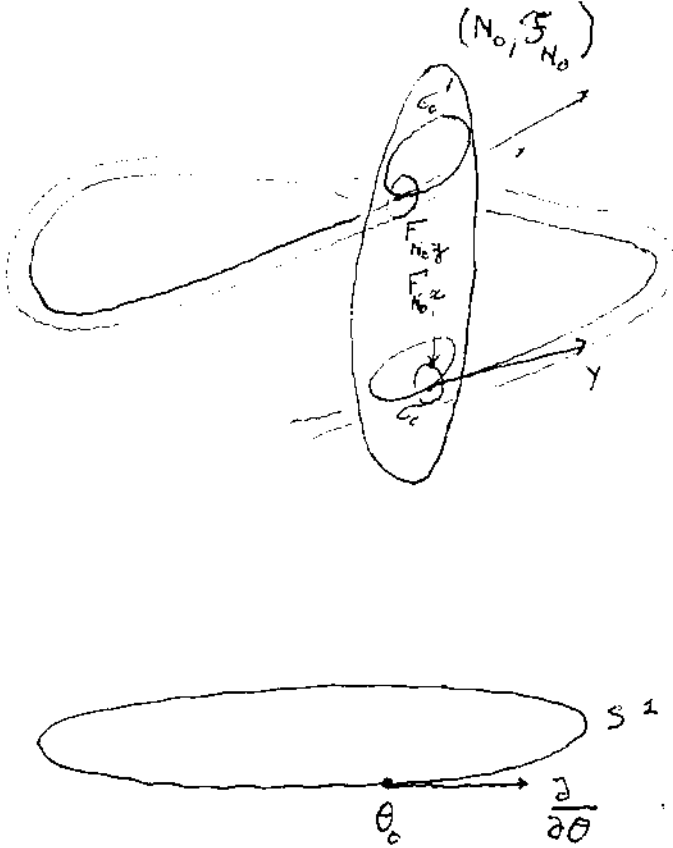
$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times N_0 &\rightarrow \mathbb{R} \times N_0 \\ (n, t, x) &\rightarrow (t+n, \varphi^{-n}(x))\end{aligned}$$

L'espace quotient de cette action est une variété compacte $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} N_0$ diffeomorphe à M et la projection $\pi : \mathbb{R} \times N_0 \rightarrow \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} N_0$ est un revêtement.

Puisque φ respecte \mathcal{F}_{N_0} , \mathbb{Z} laisse invariant $\tilde{\mathcal{F}}$; $\tilde{\mathcal{F}}$ se projette donc suivant un feuilletage \mathcal{F}' de $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} N_0$.

Si l'on munit $\mathbb{R} \times N_0$ de la métrique \tilde{g} produit de la métrique stan-

dard de \mathbb{R} par g_{N_0}'' , alors \tilde{g} est laissée invariante par l'action de \mathbb{Z} . \tilde{g} se projette donc sur $\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} N_0$ suivant une métrique \bar{g} . Le feuilletage $\bar{\mathcal{F}}$ est isométrique pour la métrique \bar{g} , donc il en est de même de \mathcal{F}' pour $(\mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} N_0, \bar{g})$. La fibration $q : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ induit une fibration $\tilde{q} : \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} N_0 \rightarrow S^1 : \tilde{q}(t, x) = q(t)$, avec pour fibre type N_0 et groupe structural $\langle \varphi \rangle$. Par construction de \bar{g} , les fibres sont géodésiques. De plus le champ d'éléments de contact perpendiculaire aux feuilles est tangent aux fibres. Celles-ci coïncident donc avec les nappes de \mathcal{F}' .



b) $\langle \varphi \rangle$ est infini :

Observons que la métrique transverse g_{TN_0} détermine une métrique riemannienne g_S sur la variété à bord, et que $\mathcal{G} = \text{Aut}(N_0, \mathcal{F}_{N_0}, H_{N_0}, g_{TN_0})$ se projette dans le groupe $\text{Iso}(S, \partial S, g_S)$ des isométries de $(S, \partial S, g_S)$, avec pour noyau le sous-groupe S^1 engendré par X . D'où une suite exacte de groupes de Lie

$$1 \rightarrow S^1 \xrightarrow{\pi} \mathcal{G} \rightarrow \text{Iso}(S, \partial S, g_S)$$

Vérifions que $\tilde{\mathcal{G}} = \pi(\mathcal{G})$ est un sous-groupe compact du groupe de Lie compact $\text{Iso}(S, \partial S, g_s)$: on remarque pour cela que la strate Σ_1 de N_0 est un S^1 -fibré principal sur l'ouvert régulier U_s de S , H_{N_0} définissant une connexion sur ce fibré, et la restriction \mathcal{G}_1 de \mathcal{G} à Σ_1 , étant formée de morphismes de fibré principal qui respectent la connexion.

Soit alors une suite (φ_n) dans \mathcal{G} . Quitte à passer à une suite extraite, on peut supposer que la suite $(\bar{\varphi}_n = \pi(\varphi_n))$ converge vers $\bar{\varphi}$, et que, x_0 étant un point fixé de Σ_1 , $\varphi_n(x_0) \rightarrow x_1$. On vérifie alors immédiatement que, pour tout $x \in \Sigma$, $\varphi_n(x)$ tend vers une limite que l'on notera $\varphi(x)$ [il suffit de passer aux points projetés sur S , et de relever un chemin horizontalement]. A priori, φ n'est défini que dans Σ_1 , mais en se plaçant dans un voisinage tubulaire de σ_0 , on vérifie que φ se prolonge en un élément de \mathcal{G} .

Ceci étant, $(\bar{\varphi})$ engendre un sous-groupe abélien de $\text{Iso}(S, \partial S, g_s)$; comme ce dernier groupe est de dimension 1, son adhérence contient la composante connexe de l'identité. Il existe donc un champ de vecteurs Z_s sur S qui se relève en un champ de vecteurs Z_{N_0} sur N_0 , dont le flot est dans \mathcal{G} .

A l'aide du flot de Y , on prolonge Z_{N_0} en un champ global Z sur M^4 commutant avec X et Y . Ceci étant l'algèbre de Lie engendrée par $\{X, Y, Z\}$ est transitive sur les adhérences des feuilles de \mathcal{F} , et respecte à la fois H et g_T . On définit par factorisation une action de \mathbb{T}^3 sur M^4 .

Finalement, on voit que \mathcal{F} sera défini par les orbites d'un sous-groupe dense de \mathbb{T}^3 .

Exemple : Considérons la sphère $S^3 = \left\{ (\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2}) / \rho_1^2 + \rho_2^2 = 1 \right\} \in \mathbb{C}^2$.

On munit S^3 de la métrique g_1 induite par la métrique standard de \mathbb{C}^2 . Sur S^3 , on définit une action de S^1 par

$$t \left(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2} \right) = \left(\rho_1 e^{i(\theta_1+t)}, \rho_2 e^{i\theta_2} \right)$$

Soit l'isométrie de (S^3, g_1) $\varphi : \left(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i\theta_2} \right) \rightarrow \left(\rho_1 e^{i\theta_1}, \rho_2 e^{i(\theta_2+\alpha)} \right)$, où α est irrationnel.

Considérons la variété produit $\mathbb{R} \times S^3$ muni du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}} = p_2 \star \mathcal{F}_1$, où \mathcal{F}_1 est le feuilletage défini sur S^3 par l'action ci-dessus de S^1 et p_2 la projection sur S^3 . Si l'on munit $\mathbb{R} \times S^3$ de la métrique $\tilde{g} = g_0 \times g_1$, où g_0 est la métrique standard de \mathbb{R} , $\tilde{\mathcal{F}}$ devient isométrique pour g_2 .

De la même manière qu'en a), $\pi_1(S^1)$ agit sur $\mathbb{R} \times S^3$ en respectant le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ et la métrique \tilde{g} . D'où $\tilde{\mathcal{F}}$ se projette sur la variété quotient $\mathbb{R}_{\pi_1(S^1)} \times S^3$ suivant un feuilletage \mathcal{F} qui est isométrique pour la métrique g , image de \tilde{g} par la projection $p : \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\pi_1(S^1)} \times S^3$. Les nappes de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont les fibres de la projection $p_1 : \mathbb{R} \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Donc celles de \mathcal{F} sont les fibres de la fibration

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}_{\pi_1(S^1)} \times S^3 &\rightarrow S^1 \\ (\widetilde{t, z}) &\rightarrow q(t) \end{aligned}$$

q étant le revêtement $q : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, et $(\widetilde{t, z})$ la classe de (t, z) .

Puisque α est irrationnel, les adhérences des feuilles singulières passant par les points de la forme $(t, e^{i\theta_2})$ rencontrent chaque fibre de ψ suivant des cercles. Ce sont donc des tores \mathbb{T}^2 .

Les feuilles génériques passant par les points $(t, e^{i\theta_1})$ sont compactes. Les adhérences des autres feuilles coupent les fibres suivant des tores \mathbb{T}^2 : ce sont donc des tores \mathbb{T}^3 .

Bibliographie

[Bl-He] R. Blumenthal - J. Hebda, Complementary distributions which preserve the leaf geometry, and applications to totally geodesic foliations, Quart. Jour. Math. Oxford (1984), 383-392.

[Bo] J. Bolton, Transnormal systems, Quart. Jour. Math. Oxford, 24 (1973) 385-395.

[Ca] G. Cairns, A general description of totally geodesic foliations, Tohoku Math. Journal, 38 (1986), 37-55.

[C.D-P.M] C. Diop - P. Molino, Une observation sur les feuilletages presque

isométriques, Séminaire G. Darboux 1990-1991, Montpellier, 45-53.

[Du] J.P. Dufour, Introduction aux Tissus, Séminaire G. Darboux 1990-91, Montpellier, 59-75.

[Fe] E. Fédida, Feuilletages du plan, feuilletages de Lie, Thèse Strasbourg (1972).

[Mo 1] P. Molino, Etude des feuilletages transversalement complets et applications, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris 10 (3) (1977) 289-307.

[Mo 2] P. Molino, Action de groupes de Lie et presque connexions, Lecture Notes in Math. n°484 Springer (1979) 153-161.

[Mo 3] P. Molino, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, Ned. Akad. Van Wet, Indag. Math., 44 (1982), 45-76.

[Mo 4] P. Molino, Feuilletages riemanniens réguliers et singuliers in "Géométrie Différentielle", Travaux en Cours, Hermann, (1988).

[Mo 5] P. Molino, Riemannian foliations, Progress in Math., Birkhäuser, 1988.

[Mo 6] P. Molino, Feuilletages presque isométriques et structures de Poisson-Riemann, Séminaire G. Darboux 1989-1990, Montpellier 57-69.

[Pa] R. Palais, A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Mémoires A.M.S., 22 (1957).

[Re] B. Reinhart, Foliated Manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math., 69 (1959) 119-132.

[St] P. Stefan, Accessible Sets, Orbits and foliations with singularities Proc. London. Math. Soc., 29 (1974), 699-713.

[Su] H.T. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, Trans. A.M.S., 180 (1973) 171-188.