UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique

Laboratoire d'Algèbre, de Cryptographie, de géométrie Algébrique et Applications

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Option : **Algèbre et Applications**

Titre :

« SUR LES SEMI-MODULES *R* - SEMI-SIMPLES, S-HOPFIENS ET S-CO-HOPFIENS »

Présentée et soutenue publiquement le mercredi 28 décembre 2011 à 14h à l'amphi 3

Par : **Landing Fall**

Sous la direction du Dr. Djiby SOW

Devant le jury composé de :

Jury				
Président	Mamadou	SANGHARE	Professeur	Univ. C. Anta Diop de Dakar
Rapporteurs	Moussa	OUATTARA	Professeur	Univ. Ouagadougou Burkina
	Abdelfattah	HAILY	Professeur	Univ. El Jadida Maroc
	Cheikh T	GUEYE	Maitre de Conférences	Univ. C. Anta Diop de Dakar
Examinateurs	Sidy Demba	TOURE	Maitre de Conférences	Univ. C. Anta Diop de Dakar
	Oumar	DIANKHA	Maitre de Conférences	Univ. C. Anta Diop de Dakar
Directeur de Thèse	Djiby	SOW	Maitre de Conférences	Univ. C. Anta Diop de Dakar

ANNEE ACADEMIQUE : 2011-2012

Nom et prénoms : FALL Landing

Titre de la thèse SUR LES SEMI-MODULES *R* SEMI-SIMPLES, S-HOPFIENS ET S-CO-HOPFIENS

Résumé : Cette thèse est composée d'un certain nombre de travaux dont les résultats portent essentiellement sur les semi-anneaux et semi-modules. Ces deux notions de l'algèbre, qui connaissent des applications intéressantes surtout en informatique, ont une particularité à savoir, le fait que leurs éléments non nuls ne sont pas nécessairement d'opposés. Beaucoup de travaux sont entrains d'être faits pour transformer les propriétés des modules sur les semi-modules.
C'est dans ce sens que nous avons essayé d'apporter:

- une contribution à la notion de semi-modules semi-simples en étudiant une nouvelle variante qui n'a pas été traité jusque là,
- un approfondissement sur l'étude d'une nouvelle classe de sous semi-modules essentiels, à savoir la classe des sous semi-modules semi-essentiels, et de montrer qu'aucune de ces classes n'est contenue dans l'autre et qu'elles sont non disjointes.
- et enfin, une introduction à la théorie de l'Hopicité et de la Co-Hopicité sur les semi-modules plus précisément nous introduisons pour la première fois les notions de semi-modules S-Hopfien et S-Co-Hopfien.

Mots clés : semi-modules, semi-anneaux, essentiel, semi-simple, Hopfien, Co-Hopfien, soustractif, simplifiable.

Name and first name: FALL Landing

Thesis title On *R* SEMI-SIMPLES, S-HOPFIENS AND S-CO-HOPFIENS SEMIMODULES

Summary: In this thesis, we study some properties in the theory of semirings and semi-modules. Specially, we look what happen if we translate some known properties from the theory of semimodules over semirings in the theory of rings and modules. The notion of semirings and semimodules have interesting properties which states that non zeros elements dot not have necessary opposites for the abelian semi-group law.
We have some good results in three domains:

- a characterization of a new variant of the notion of semisimples semimodules;
- a deep study of the two class of essentials subsemimodules,
- an introduction of the theory of Hopicity and Co-Hopicity on semimodules precisely we introduce for the first time the notions of S-hopfian and S-Co-Hopfian semimodules

Key words : semimodules, semirings, essentiel, semisimple, Hopfien, Co-Hopfien, substractive, concellative.

THESE DE DOCTORAT UNIQUE ES SCIENCES MATHEMATIQUES

OPTION : ALGEBRE

TITRE :

SUR LES SEMI-MODULES R-SEMI-SIMPLES, S-HOPFIENS ET S-CO-HOPFIENS

Landing FALL

28 Décembre 2011

DEDICACES

Qu'ALLAH soit Loué.

Je rends grâce à DIEU.

PAIX et SALUT sur le PROPHETE MOHAMED.

je dédie cette thèse :

- A mon père feu Samba Khary FALL, et à ma mère Yacine DIAGNE.

- A ma femme et à tous mes enfants.

- A mes frères et soeurs qui m'ont beaucoup aidé dans mes études.

- A mes amis et camarades.

- A mes collègues.

- A mes maîtres et professeurs.

- A mes élèves et étudiants.

- A tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

REMERCIEMENTS

Je remercie ALLAH Le Tout Puissant.

Le Clément et Le Miséricordieux.

Paix et Salue sur le Prophète.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur **Mamadou SANGHARE**, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

Je tiens à remercier sincèrement le Docteur **Djiby SOW** qui a dirigé mes travaux, en lui exprimant d'abord ma profonde gratitude pour tout ce qu'il a fait pour moi, mais aussi le remercier très sincèrement pour sa disponibilité entière de me recevoir à n'importe quel moment, ensuite pour l'excellente formation que j'ai reçue auprès de lui sur tous les plans (didactique, recherche). J'ai apprécié tout particulièrement sa générosité grandiose, sa patience, et sa capacité d'écoute.

Je remercie très sincèrement les Professeurs **Abdelfattah HAILY, Moussa OUATTARA et Cheikh Thiecoumba GUEYE** pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et examinateurs dans ce jury.

J'exprime ma profonde gratitude aux Professeurs **Sidy Demba Touré et Oumar Diankha** pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de siéger dans le jury de cette thèse.

Je remercie :

- tous les membres du Laboratoire d'Algèbre, de Cryptologie, de Géométrie Algèbrique et Applications (LACGAA),

- mes compagnons de tous les jours à la fac, je veux nommer : Jean Raoul TSIBA, Demba SOW, Ghouraission CAMARA, Amadou TALL,

- tous mes collègues et tout le personnel administratif et technique du Département de Mathématiques et Informatique et de la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar.

Mémoires et Publications

Mémoire de DEA

[1] L. FALL : *Sur le théorème de KRULL-SCHMILD et le problème de MATLIS* Mémoire de DEA. Bibliothèque universitaire UCAD (**octobre 1999**)

Thèse de doctorat unique

[2] L. FALL : *Sur les semi-modules R-semi-simples, s-hopfiens et s-co-hopfiens.* Thèse de doctorat unique ès sciences mathématiques. Bibliothèque universitaire UCAD (**Document actuel : 28 Décembre 2011**)

ARTICLES (3)

- ***articles déjà parus***

[3] : J. R. Tsiba, L. Fall and D. Sow : *Introduction to S-Hopfian and S-Co-Hopfian semimodules.* Journal of Algebra, Number Theory and Applications vol 22, Number 01, pp 81 - 109 (2011)

[4] J. R. Tsiba, L. Fall and D. Sow : *On Semiessential Subsemimodules.* Journal of Algebra, Number Theory and Applications vol 22, Number 02, pp 175 - 191 (2011)

- ***article soumis (au journal Communication in Algebra)***

[5] L. FALL and D. SOW : *On R-semisimples semimodules.*

Table des matières

INTRODUCTION

Cette thèse est un ensemble de travaux consacrés essentiellement à quelques résultats relatifs aux semi-anneaux et semi-modules. Plus précisément, nous avons essayé d'apporter :

1. une contribution à la notion de semi-module semi-simple en caractérisant une variante qui n'était pas étudiée jusque là,
2. un approfondissement sur l'étude des différentes variantes de sous semi-modules essentiels,
3. et enfin, de développer la théorie de l'hopicité et de la co-hopicité sur les semi-modules plus précisément nous introduisons pour la première fois les notions de semi-modules S-hopfiens et S-co-hopfiens.

Le premier ensemble sur lequel les algébristes ont commencé à travailler est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Et pourtant $(\mathbb{N}; +; \times)$, où $+$ et $\times$ sont respectivement les deux opérations naturelles que sont l'addition et la multiplication, est un exemple trés simple de semi-anneau. La particularité de cet ensemble est que les éléments non nuls n'admettent pas d'opposés (donc on ne peut pas transposer). C'est d'ailleurs ce qui fait la spécifité des semi-anneaux et donc des semi-modules.

Vues les nombreuses applications de ces deux notions notamment, en modèlisation mathématique et en informatique et tant d'autres, on juge intéressant d'apporter quelques contributions dans le domaine de la théorie des semi-modules sur les semi-anneaux.

Historiquement la notion de semi-anneau a été introduite implicitement pour la première fois par de brillants mathématiciens de l'école allemande du XIX^e siècle notament dans les travaux de $Julius$ $W.R.DEDEKIND$ (1894) et de $Wolfgang$ $KRULL$ (1924) relatifs à l'étude des idéaux d'un anneau. L'introduction explicite des semi-anneaux a été observée dans l'axiomatisation de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et l'ensemble des nombres rationnels positifs par le chercheur américain $Harry$ $VANDIVER$ vers 1956.

Mais avec les nombreuses applications des semi-anneaux et semi-modules en mathématique appliquée et en informatique, leurs études ont connu par la suite un développement trés rapide. Une nouvelle formulation de ces notions s'est alors imposée avec l'étude des semi-groupes d'abord puis celle des semi-anneaux. Cette dénomination de "semi-anneau" a connu plusieurs noms comme "hemiring"[17] ou "halfring" selon l'école allemande ou "dioide" pour dire double monoide, ou encore "binoide" pour parler de semi-anneau commutatif dans lequel l'addition est idempotent.

Pour l'essentiel, en théorie des semi-modules on tente de généraliser la théorie des modules.

Mais il faut faire trés attention pour les habitués de la théorie des modules. En théorie des semi-modules,

- chaque notion provenant de la théorie des modules peut souvent être généralisée de plusieurs façons non équivalentes.

- certaines propriétés élémentaires en théorie des modules ne marchent pas en théorie des semi-modules par exemple si $f : E \longrightarrow F$ est un homomorphisme de semi-modules, on a :

– $kerf = \{0\} \nRightarrow f$ injectif.

– $Imf = F \nRightarrow f$ surjectif

Pour de plus amples détails voir [17] ou la thèse de J. R. TSIBA co-auteur d'une partie de mes travaux (chapitres 4 et 5)

Cette thèse est organisée en cinq chapitres comme suit.

Le **chapitre 1** contient essentiellement des rappels de notions et résultats importants sur les modules et dont nous feront l'étude dans le cas des semi-modules.

Dans le **chapitre 2**, nous présentons principalement quelques résultats déjà connus sur les semi-anneaux et semi-modules.

Nous donnons d'abord les définitions de semi-anneau, de semi-module, d'homomorphisme de semi-modules et de semi-module quotient.

Nous exposons ensuite la notion de sous semi-module essentiel et par dualité la notion de sous semi-module superflu.

Le **chapitre 3** est une contribution apportée aux semi-modules R-semi-simples. La notion de semi-module simple a été étudiée différemment par plusieurs chercheurs selon les trois définitions suivantes :

1. d'abord un sous semi-module d'un R semi-module à gauche est dit soustractif si à chaque fois qu'il contient une somme de deux termes et l'un d'entre eux, alors il contient l'autre ;

   et un R semi-module à gauche $T \neq \{0\}$ est dit soustractif-simple si T n'admet aucun sous semi-module soustractif excepté $\{0\}$ et T ;
2. un R semi-module à gauche $T \neq \{0\}$ est dit austère-simple si l'ensemble de tous les sous semi-modules de T n'admet que deux éléments $\{0\}$ et T ;
3. un R semi-module à gauche $T \neq \{0\}$ est dit R-simple si l'ensemble de toutes les R relations de congruence sur T, $R - cong(T)$, contient les seuls éléments : $\equiv_t$ la R relation de congruence triviale, et $\equiv_u$ la R relation de congruence universelle.

On peut montrer que (3) $\Longrightarrow$ (1) et que si le semi-module est soustractif alors (3) $\Longrightarrow$ (2).

Selon ce qu'on veut étudier, on prend la définition la mieux adaptée. D'après nos recherches bibliographiques, toutes les propriétés liées à la semi-simplicité qui sont étudiées concernent les définitions (1) et (2).

Ce qui justifie qu'on ait décidé d'explorer les propriétés de semi-simplicité avec la définition (3).

Avec cette nouvelle approche, nous avons repris toute la théorie sur les semi-modules simples en suivant la même démarche dans le cas des modules[2].

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

Théorème :(Caractérisation des semi-modules R-semi-simples)

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille indexée de sous semi-modules R-simples d'un R semi-module à gauche simplifiable et soustractif M avec $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est R-semi-simple,
2. M est engendré par des semi-modules R-simples,
3. M est la somme de semi-modules R-simples,
4. tout sous semi-module de M est un facteur direct de M,
5. toute suite exacte : $\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\}$ de R semi-modules à gauche est scindée.

Remarques :

1. Pour avoir le maximum de propriétés dans ce théorème de caractérisation, on a imposé des hypothèses fortes sur le semi-module à savoir : soustractif et simplifiable. Mais on a pris le soin de montrer que de tels semi-modules existent de façon non trivial.
2. Comparativement à la théorie des modules semi-simples ou à la théorie des semi-modules soustractifs semi-simples, il y'a une propriété intéressante qu'on n'a pas pu retrouver à cause de la définition forte à laquelle

on s'intéresse. Celà est dû au fait que nous manipulons des relations d'équivalences qui ne permettent pas toujours (pour les semi-modules) de construire des sous semi-modules ou des semi-idéaux adéquats. Cette propriété est la suivante.

Module simple : Un R module M est simple si, et seulement si, il existe un idéal maximal I tel que $M \cong R/I$.

Semi-module soustractif simple : Un semi-module soustractif M sur un semi-anneau soustractif R est simple s'il existe un k-idéal maximal I, tel que $M \cong R/I$.

3. Ce travail offre beaucoup de perspectives car on peut réétudier tout ce qui utilise la semi-simplicité comme : le socle et les techniques de décomposition...

Le **chapitre 4** est consacré à l'étude des sous semi-modules semi-essentiels.

Dans nos recherches bibliographiques nous avons constaté qu'un lien n'était pas établi entre les sous semi-modules essentiels et les enveloppes injectives des semi-modules. Pour celà on a voulu en savoir davantage sur les sous semi-modules essentiels et on a vu que la définition de sous semi-modules essentiels a été abordée de deux façons différentes par certains auteurs dont *Golan* [17] et *Katsov* [22].

Nous avons alors décidé de clarifier et d'approfondir ces travaux. Les sous semi-modules essentiels ont été déjà étudiés dans le livre [17] et ont été définis comme suit :

1. d'abord un monomorphisme $f : M \longrightarrow N$ de R semi-modules à gauche est dit essentiel si, et seulement si, pour tout R homomorphisme $g : N \longrightarrow N'$, si $g \circ f$ est un R monomorphisme alors g est un R monomorphisme ;
2. et un sous semi-module M' d'un R semi-module à gauche M est dit

large ou essentiel dans M (on note $M' \trianglelefteq_e M$) si, et seulement si, l'inclusion canonique $i_{M'} : M' \longrightarrow M$ est un R homomorphisme essentiel.

$Katsov$ a, quant à lui, étudié ces notions en suivant un peu la démarche classique sur les modules. Il donne la définition suivante :

Soit M un R semi-module à gauche. Un sous semi-module K de M est dit semi-essentiel dans M, on note $K \trianglelefteq_s M$, si pour tout sous semi-module L de M : $L \cap K = \{0\} \Rightarrow L = \{0\}$.

Pour notre contribution nous avons fait la différence entre la classe des sous semi-modules essentiels et celle des sous semi-modules semi-essentiels. Et à travers des exemples on montre qu'aucune de ces deux classes n'est contenue dans l'autre et que leur intersection est non vide.

On a caractérisé auparavant les sous semi-modules semi-essentiels par le lemme suivant qui est trés important en théorie des modules mais n'avait d'équivalent en théorie des semi-modules jusque là.

Lemme Un sous semi-module K d'un R semi-module à gauche M est semi-essentiel si, et seulement si, pour tout $x \neq 0$, élément de M, il existe $r \in R$ tel que : $0 \neq rx \in K$.

Le **chapitre 5** est réservé à une contribution à l'étude de quelques propriétés des semi-modules S-hopfiens et S-co-hopfiens. Ici nous donnons les bases de la théorie de l'hopicité et de la co-hopicité sur les semi-modules. Ce vaste travail est fait en collaboration avec J. R. Tsiba un autre doctorant de notre laboratoire. Parmi les résultats principaux de ce chapitre on peut citer entre autres les deux versions du lemme de **Fitting** dont l'une est faite dans le cas des semi-modules soustractifs et l'autre en supposant que le R semi-module à gauche $M = f^t(M) + Ker(f^t)$ pour un entier positif t et f un endomorphisme rigide.

Chapitre 1

THEORIE DES MODULES

Ce chapitre contient essentiellement des rappels de résultats et de notions sur les modules que nous étudierons dans le cas des semi-modules et il contient aussi des notations dont nous ferons usage constamment.

Pour les notions et notations générales relatives à la théorie des anneaux et des modules, on pourra se refèrer à [2], [27], [15], [23], [57] et [58]. Mais nous donnons ici, les notations et notions couramment utilisées.

Les anneaux considérés ici sont non nuls, associatifs et unitaires ; les modules sont unitaires et les éléments unités des anneaux sont conservés par extensions d'anneaux (en considèrant que tout homomorphisme d'anneaux est une extension d'anneaux).

Pour éviter toute confusion, à chaque fois que l'on devra manipuler à la fois des homomorphismes linéaires à gauche et des homomorphismes linéaires à droite, on écrira les applications du côté opposé de celui des scalaires.

1.1 Décomposition en sommes directes

Définition 1.1.1. *Soient M_1, M_2 deux sous modules d'un R module à gauche M. Si $M = M_1 + M_2$ et $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, alors M est dit somme directe de*

M_1, M_2. On note alors $M = M_1 \oplus M_2$ et $M_1 \oplus M_2$ est une décomposition directe de M.

Remarque 1.1.1. *Si $M = M_1 \oplus M_2$, alors tout $m \in M$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $m = m_1 + m_2$ avec $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$. Et M_1, M_2 sont appelés facteurs directs de M.*

Remarque 1.1.2. *Un R module à gauche M est dit indécomposable si*

$M \neq \{0\}$ et ne peut pas s'écrire comme somme directe de sous modules non nuls.

Proposition 1.1.1. *Soient $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow M$ deux morphismes de R modules à gauche avec $f \circ g = id_N$. On a alors $M = Ker f \oplus Img$.*

Définition 1.1.2. *Soit M un R module à gauche et soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous modules de M.*

1. *$(M_i)_{i\in I}$ est dite indépendante si, et seulement si, pour tout $i \in I$,*
$$M_i \cap (\sum_{j\neq i} M_j) = \{0\}$$
2. *Si $M = \sum_{i\in I} M_i$ et que la famille $(M_i)_{i\in I}$ est indépendante, alors M est dit somme directe des sous modules $(M_i)_{i\in I}$. On écrit ainsi :*
$M = \oplus_{i\in I} M_i$, et chaque M_i est appelé facteur direct de M.
3. *Une famille $\mathfrak{M}$ de sous modules de M est dite co-indépendante si, pour toute sous famille $(M_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{M}$,*
$$M_i + (\bigcap_{j\neq i} M_j) = M, \text{pour tout } i \in I.$$

Remarque 1.1.3. *Si $M = \oplus_{i\in I} M_i$, alors tout $m \in M$ peut s'écrire de manière unique sous la forme : $m = m_{i_1} + m_{i_2} + ... + m_{i_r}$ avec les i_k différents ; $m_{i_k} \in M_{i_k}$ pour tout $1 \leq k \geq r$.*

NB : En théorie des semi-modules la notion de somme directe aura deux versions distinctes. Nous étudierons les propriétés dans les chapitres 3 et 5

1.2 Sous modules superflus - Sous modules essentiels

Les résultats de cette section restent valabes si M est un R module à droite. R désigne un anneau et M un R module à gauche.

Définition 1.2.1. *Soient K un sous module de M et N un R module à gauche.*

1. *K est dit superflu dans M et on note $K \ll M$, si pour tout sous module L de M,*

$$K + L = M \Longrightarrow L = M$$

2. *K est dit essentiel dans M et on note $K \trianglelefteq_e M$, si pour tout sous module L de M,*

$$K \cap L = \{0\} \Longrightarrow L = \{0\}$$

   On dit alors que M est une extension essentielle de K.

3. *Un monomorphisme $f : M \longrightarrow N$ est dit essentiel si, et seulement si, $Imf \trianglelefteq_e N$.*

4. *Un épimorphisme $f : M \longrightarrow N$ est dit superflu si, et seulement si, $Kerf \ll M$.*

Proposition 1.2.1. *Soit K un sous module de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$K \trianglelefteq_e M$*

2. *L'inclusion canonique $i_K : K \longrightarrow M$ est un monomorphisme essentiel.*

3. *Pour tout module N et pour tout $h \in Hom(M, N)$,*

$$(Kerh) \cap K = \{0\} \Longrightarrow Kerh = \{0\}$$

Corollaire 1.2.1. *Un monomorphisme $f : L \longrightarrow M$ de modules à gauche est essentiel si, et seulement si, pour tout homomorphisme $h : M \longrightarrow N$ de modules à gauche, si $h \circ f$ est un monomorphisme, alors h est un monomorphisme.*

Proposition 1.2.2. *Soit K un sous module de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$K \ll M$*
2. *La surjection canonique $p_K : M \longrightarrow M/K$ est un épimorphisme superflu.*
3. *Pour tout R module à gauche N et pour tout $h \in Hom(N, M)$,*

$$(Imh) + K = M \Longrightarrow Imh = M$$

Corollaire 1.2.2. *Un épimorphisme $f : M \longrightarrow N$ de modules à gauche est superflu si, et seulement si, pour tout homomorphisme $h : K \longrightarrow M$ de modules à gauche, si $f \circ h$ est un épimorphisme, alors h est un épimorphisme.*

Proposition 1.2.3. *Soit M un R sous module à gauche. Et soient K, N, et H des sous modules de M avec $K \leq N \leq M$. On a alors :*

1. *$K \trianglelefteq_e M$ si, et seulement si, $K \trianglelefteq_e N$ et $N \trianglelefteq_e M$.*
2. *$H \cap K \trianglelefteq_e M$ si, et seulement si, $H \trianglelefteq_e M$ et $K \trianglelefteq_e M$.*

Lemme 1.2.1. *Un sous module K d'un R module à gauche M est essentiel dans M si, et seulement si, pour tout $0 \neq x \in M$, il existe un $r \in R$ tel que $0 \neq rx \in K$*

Proposition 1.2.4. *Soit M un R sous module à gauche. Et soient K, N, et H des sous modules de M avec $K \leq N \leq M$. On a alors :*

1. *$N \ll M$ si, et seulement si, $K \ll M$ et $N/K \ll M/K$.*
2. *$H + K \ll M$ si, et seulement si, $H \ll M$ et $K \ll M$.*

Lemme 1.2.2. *Si* $K \ll M$ *et* $f : M \longrightarrow N$ *est un homomorphisme alors* $f(K) \ll N$*. En particulier si* $K \ll M \leq N$ *alors* $K \ll N$

Proposition 1.2.5. *Soit* M *un* R *sous module à gauche. Et soient* K_1*,* K_2*,* M_1*, et* M_2 *des sous modules de* M*.*

Supposons que $K_1 \leq M_1 \leq M$*,* $K_2 \leq M_2 \leq M$ *et* $M = M_1 \oplus M_2$*. On a alors :*

1. $K_1 \oplus K_2 \ll M_1 \oplus M_2$ *si, et seulement si,* $K_1 \ll M_1$ *et* $K_2 \ll M_2$ *;*
2. $K_1 \oplus K_2 \trianglelefteq_e M_1 \oplus M_2$ *si, et seulement si,* $K_1 \trianglelefteq_e M_1$ *et* $K_2 \trianglelefteq_e M_2$*.*

Définition 1.2.2. *Soit* N *un sous module d'un* R *module à gauche* M*. Si* N' *est un sous module maximal de* M *tel que* $N \cap N' = \{0\}$*, alors on dit que* N' *est un* M*-complément de* N*.*

Proposition 1.2.6. *Soit* M *un* R *module à gauche. Tout sous module* N *de* M *possède un* M*-complément. De plus si* N' *est un* M*-complément de* N*, on a alors :*

1. $N \oplus N' \trianglelefteq_e M$ *;*
2. $(N \oplus N')/N' \trianglelefteq_e M/N'$*.*

NB : Le corollaire 1.2.1 a servi de définition des semi-modules essentiels pour *Golan* [17]. Alors que la définition1.2.1 a servi de définition des semi-modules essentiels pour *Katsov* [22].

Nous nous intéressons à ces deux approches dans le chapitre 4

1.3 Modules semi-simples

Définition 1.3.1.
- *Un* R *module à gauche* T *non nul est dit simple s'il ne possède que deux sous modules* $\{0\}$ *et lui même* T*.*

- *Un R module à gauche T non nul est dit simple si, et seulement si, il n'y a que deux relations d'équivalences compatibles avec la structure de module à savoir la relation d'équivalence triviale et celle universelle.*
- *Un R module à gauche T non nul est dit simple si, et seulement si, il existe un idéal maximal I de R tel que $R/I \cong T$*
- *Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous modules simples d'un R module à gauche M tel que : $M = \oplus_{\alpha\in A}T_\alpha$.*

  $\oplus_{\alpha\in A}T_\alpha$ est appelé décomposition semi-simple de M. Et dans ce cas M est dit semi-simple.

NB : Les trois premières définitions cessent d'être équivalentes sur les semi-modules. Nous nous intéressons à ces propriétés dans le chapitre 3.

Proposition 1.3.1. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous modules simples d'un R-module à gauche M. Si $M = \sum_{\alpha\in A} T_\alpha$, alors pour tout sous module K de M, il existe un sous ensemble B de A tel que $(T_\beta)_{\beta\in B}$ est indépendante et $M = K \oplus (\oplus_{\beta\in B}T_\beta)$.*

Proposition 1.3.2. *Si un R module M est engendré par une famille de sous modules simples $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$, alors il existe un sous ensemble $B \subseteq A$ tel que*

$M = \oplus_{\beta\in B}T_\beta$. Et M est alors semi-simple.

Proposition 1.3.3. *Soit $M = \oplus_{\alpha\in A}T_\alpha$ un R module à gauche semi-simple avec T_α simple pour tout $\alpha \in A$. Si $\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\}$ est une suite exacte de R modules à gauche, alors la suite est scindée. De plus K et N sont semi-simples. En effet il existe un sous ensemble B de A tel que $N \simeq \oplus_{\beta\in B}T_\beta$ et $K \simeq \oplus_{\alpha\in A\setminus B}T_\alpha$.*

Corollaire 1.3.1. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de sous modules simples d'un R module à gauche M. Si T est un sous module simple de M, tel que*

$T \cap (\sum_A T_\alpha) \neq \{0\}$, alors il existe un $\alpha \in A$ tel que $T \simeq T_\alpha$.

La proposition suivante caractérise les modules semi-simples

Proposition 1.3.4. *Soit M un R module à gauche. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est semi-simple.*
2. *M est engendré par des modules simples.*
3. *M est la somme d'une famille de modules simples.*
4. *M est la somme de ses sous modules simples.*
5. *Tout sous module de M est un facteur direct de M.*
6. *Toute suite exacte courte : $\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\}$ de R modules à gauche est scindée.*

1.4 Modules hopfiens - Modules co-hopfiens

Définition 1.4.1. *Un R module à gauche M est dit noethérien si, et seulement si, il vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :*

1. *tout sous module de M est de type fini,*
2. *toute suite croissante de sous modules de M : $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ est stationnaire. Ou encore il existe un entier n_0 tel que pour tout $i \geq n_0$ on a : $M_{i+1} = M_i$,*
3. *toute famille non vide $\mathfrak{S}$ de sous modules de M possède un élément maximal.*

Proposition 1.4.1. *Soit M un R module à gauche. Nous avons les assertions suivantes :*

1. *si M est noethérien alors tout sous module ou module quotient de M est noethérien,*
2. *pour tout sous module N de M, si N et M/N sont noethériens alors M est noethérien,*

3. *si la suite* $\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow \{0\}$ *est exacte alors* M *est noethérien si, et seulement si,* N *et* K *sont noethériens.*

Corollaire 1.4.1. *Soit* M *un* R *module à gauche et soient* N *et* N' *deux sous modules de* M*. Si* $M = N \oplus N'$ *avec* N *et* N' *noethériens alors* M *est noethérien.*

Définition 1.4.2. *Soit* M *un* R *module à gauche.* M *est artinien s'il vérifie la condition de chaîne descendante sur les sous-modules. C'est à dire toute suite décroissante de sous-modules de* M *:*

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$$

est stationnaire. Ou encore il existe un entier n_0 *tel que pour tout* $i \geq n_0$*, on a :* $M_{i+1} = M_i$

Proposition 1.4.2. *Soit* $\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow \{0\}$ *une suite exacte de* R *modules à gauche.*

M *est artinien si, et seulement si,* N *et* K *sont artiniens.*

Remarque 1.4.1. *Soit* u *un endomorphisme d'un* R *module à gauche* M*. Nous avons :*

1. *La suite* $Imu \supset Imu^2 \supset Imu^3 \supset ...$ *est décroissante. De plus si* M *est artinien alors cette suite est stationnaire et pour* n *assez grand on a* $Imu^n = Imu^{n+1}$*.*

   Imu^n *sera noté par* $u^n(M)$*.*

2. *On a de même la suite* $Keru \subset Keru^2 \subset Keru^3 \subset ...$ *est croissante. De plus si* M *est noethérien alors cette suite est stationnaire et pour* n *assez grand on a :* $Keru^n = Keru^{n+1}$*.*

Proposition 1.4.3. ***(Lemme de Fitting)*** *Soit* M *un* R *module à gauche artinien et noethérien. Et soit* $u \in End(M)$*.*

M admet une décomposition en somme directe : $M = Imu^n \oplus Keru^n$, pour n assez grand.

De plus la restriction de u à Imu^n est un automorphisme et la restriction de u à $Keru^n$ est un endomorphisme nilpotent.

Définition 1.4.3.
- *Un R module à gauche M est dit de dimension finie s'il ne contient pas de famille indépendante infinie de sous modules. Dans ce cas, il existe un entier positif n tel que M admet une famille indépendante de n sous modules non nuls et toute autre famille indépendante contient au plus n sous modules. L'entier n est appelé dimension de Goldie ou rang de M. On note : $u.dim(M) = n$*
- *Un R module à gauche M est dit de co-dimension finie s'il ne contient pas de famille co-indépendante infinie. Si la famille est finie, alors son cardinal est appelé la co-dimension de Goldie de M. Et il est noté par : $Codim(M)$.*

Proposition 1.4.4. *Soient M_1 et M_2 deux sous modules d'un R-module à gauche M. On a :*

1. $$u.dim(M_1 \times M_2) = u.dim(M_1 \oplus M_2) = u.dimM_1 + u.dimM_2$$

2. $$codim(M_1 \times M_2) = codim(M_1 \oplus M_2) = codimM_1 + codimM_2.$$

Définition 1.4.4.
- *Un R module à gauche M est dit hopfien si tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme.*
- *Un anneau R est dit hopfien si le R module à gauche ${}_RR$ est hopfien*

Proposition 1.4.5. *Si R est un anneau commutatif, alors le R module à gauche ${}_RR$ est hopfien*

Proposition 1.4.6. *Si M un R module à gauche tel que M/N est hopfien pour tout sous module N de M, alors M est hopfien*

Proposition 1.4.7. *Soient M un R modules à gauche et N un sous module complètement invariant de M. Si N et M/N sont hopfiens alors M est hopfien.*

Proposition 1.4.8. *Soit M un R module quasi-projectif. Si $u.dim(M) < \infty$ ou $codim(M) < \infty$, alors M^n est hopfien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Corollaire 1.4.2. *Soient R un anneau et M un R module à gauche quasi-projectif tel que : $codim(M) < \infty$. Alors pour tout sous module N de M complètement invariant et pour tout entier $n \geq 1$, le R module $(M/N)^n$ est hopfien.*

Proposition 1.4.9. *Soient M un R module quasi-projectif et N un sous module de M complètement invariant et superflu dans M. Alors M est hopfien si, et seulement si, M/N est hopfien.*

Proposition 1.4.10. *Soit M un R module quasi-projectif de type fini. Alors M est hopfien si, et seulement si, $M/Rad(M)$ est hopfien.*

Théorème 1.4.1. *(Théorème de Vasconscelos)*

Pour tout anneau commutatif R, tout R module de type fini est hopfien.

Théorème 1.4.2. *Le R module à gauche $_RR$ est hopfien si, et seulement si, le R module à droite R_R est hopfien*

Définition 1.4.5.
- *Soit R un anneau et M un R module à gauche. On dit que M est co-hopfien si tout endomorphisme injectif de M est un automorphisme.*
- *Un anneau R est dit co-hopfien si le R module à gauche $_RR$ est co-hopfien.*

Proposition 1.4.11. *Soit M un R module quasi-injectif. Si $u.dim(M) < \infty$ ou $codim(M) < \infty$, alors M^n est co-hopfien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Corollaire 1.4.3. *Soient M un R module quasi-injectif et N un sous module complètement invariant et essentiel dans M. Alors N est co-hopfien si, et seulement si, M est co-hopfien.*

Théorème 1.4.3. *(Théorème de Vasconscelos)*

Pour un anneau commutatif R les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Tout R module de type fini est co-hopfien ;*
2. *Tout idéal premier de R est maximal.*

Chapitre 2

THEORIE DES SEMI-MODULES

2.1 Préliminaires

Dans cette section nous donnons quelques résultats préliminaires composés de définitions de : semi-anneau, semi-module, homomorphisme de semi-modules, semi-module quotient. Ces résultats sont aussi utilisés dans les chapitres 3, 4 et 5. Dans ce chapitre comme dans ceux qui suivent nous avons les considèrations suivantes :

- Pour les notions de base et notations dans la théorie des modules et semi-modules, nous suivrons [1], [2], [58], [17], [41] et [42].

- Tous les semi-anneaux sont associatifs avec comme élément unité 1

(Si R est un semi-anneau, nous supposons que $1 \neq 0$), tous les semi-modules sont unitaires et toutes les extensions de semi-anneaux contiennent le même élément identité.

- Les semi-modules sont considèrés comme étant des R semi-modules à gauche.

Définition 2.1.1. *1. Un semi-anneau R est un monoide commutatif $(R,+)$ admettant 0_R comme élément neutre pour l'addition et un semi-groupe $(R,.)$ tel que :*

$*$ $\forall a; b; c \in R$: $a(b+c) = ab + ac$ et $(b+c)a = ba + ca$.

$**$ $\forall a \in R$: $0_R a = a 0_R = 0_R$.

$***$ $\forall a \in R$: $1_R a = a 1_R = a$.

1_R est l'élément unité de R

2. Soit R un semi-anneau avec comme élément unité 1_R. Un R semi-module à gauche est un monoide commutatif $(M; +; 0_R)$ qui possède une opération : $R \times M \longrightarrow M$; $(a; x) \longmapsto ax$ tel que :

$*$ $\forall a; b \in R$, $\forall x; y \in M$: $a(x+y) = ax + ay$ et $(a+b)x = ax + bx$.

$**$ $\forall a; b \in R$, $\forall x \in M$: $(ab)x = a(bx)$

$***$ $\forall a \in R$, $\forall x \in M$: $1_R x = x$; $a 0_M = 0_R x = 0_M$.

3. Un sous ensemble non vide N d'un R semi-module à gauche M est un sous semi-module de M si N est clos pour l'addition dans M et la multiplication par un élément de R. On note $N \leq M$.

Remarque :

- Un R semi-module à droite est définie de manière analogue.

- Tout au long de ce chapitre, nous considèrons R comme étant un semi-anneau unitaire et les R semi-modules à gauche sont unitaires. On suppose aussi que : $0_R = 0_M = 0$, $1_R = 1_M = 1$ et $0 \neq 1$.

Définition 2.1.2. *Soient M et N des R semi-modules à gauche. Un homomorphisme est une application $f : M \longrightarrow N$ telle que :*

$*$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x; y \in M$.

$**$ $f(ax) = af(x)$ $\forall a \in R$ et $\forall x \in M$. (On note $f \in Hom_R(M; N)$)

- Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de R semi-modules à gauche. On note par :

1. $Ker f = \{m \in M / f(m) = 0\}$. $Ker f$ est le noyau de f.

2. $f(M) = \{f(m); m \in M\}$. $f(M)$ est l'image propre de f.

3. $Im f = \{n \in N / n + f(m) = f(m'); m, m' \in M\}$. $Im f$ est l'image de f

$Ker f$ est un sous semi-module de M ; $f(M)$ et $Im f$ sont des sous semi-modules de N. De plus $f(M) \subseteq Im f$. On peut avoir $f(M) \neq Im f$

Définition 2.1.3. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de R semi-modules à gauche. f est :*

1. *un monomorphisme si, $\forall\ g; h \in Hom_R(L; M)$; $f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$,*
2. *un épimorphisme si, $\forall\ g; h \in Hom_R(N; L)$; $g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$,*
3. *un semi-monomorphisme si, $Ker f = \{0\}$,*
4. *un isomorphisme si f est à la fois injectif et surjectif,*
5. *un semi isomorphisme si, $Ker f = \{0\}$ et f surjectif,*
6. *i-régulier (image-régulier),si $f(M) = Im f$*
7. *k-régulier (kernel-régulier),si $f(m) = f(m') \Longrightarrow m + k = m' + k'$ pour $k; k' \in Ker f$;*
8. *régulier,si f est à la fois i-régulier et k-régulier.*

Proposition 2.1.1. *Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de R semi-modules à gauche. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injectif;*
2. *f est k-régulier et $Ker f = \{0\}$;*
3. *f est k-régulier (semi)monomorphisme ;*
4. *f est un monomorphisme.*

Dans ce qui suit on rappelle quelques définitions classiques (voir[17]).

1) Un sous semi-module N d'un R semi-module à gauche M est dit soustractif dans M si : $\forall\ (m; m') \in M^2$;

$$(m + m' \in N \text{et } m \in N) \Longrightarrow m' \in N.$$

Et N est fortement soustractif si pour tout couple $(m, m') \in M^2$:

$m + m' \in N \Longrightarrow m \in N$ et $m' \in N$.

2) M est soustractif ou complètement soustractif, si tous ses sous semi-modules sont soustractifs (voir [39]). La catégorie de tous les R semi-modules compètement soustractifs est notée par $R - CSSMod$. C'est une classe importante dans la catégorie des R semi-modules à gauche. On peut remarquer que $R - CSSMod$ est close pour les sous semi-modules et les semi-modules quotients, mais non pour les sommes directes et produits directs.

3) Un R semi-module à gauche M est dit simplifiable si pour tous éléments m, m' et x de M :

$$(m + x = m' + x) \Longrightarrow m = m'.$$

4) Soit M un R semi-module à gauche. Une relation d'équivalence ρ sur M est une R relation de congruence si, et seulement si :

$m\,\rho\,m'$ et $n\,\rho\,n' \Longrightarrow (m+n)\,\rho\,(m'+n')$ et $(rm)\,\rho\,(rm'), \forall\, m, m', n, n' \in M$ et $\forall\ r \in R$.

L'ensemble de toutes les R relations de congruence sur M, $R - cong(M)$, est partiellement ordonné par la relation $\leq$ définie par : $\rho \leq \rho'$ si, et seulement si, $m\ \rho\ m' \Longrightarrow m\ \rho'\ m'\ \forall\ m, m' \in M$. Pour $m, m' \in M$, notons par $\rho_{(m,m')}$ l'unique plus petit élément ρ de $R - cong(M)$ satisfaisant $m\ \rho\ m'$.

5) Soit N un sous semi-module d'un R semi-module à gauche M. N induit sur M une R relation de congruence $\equiv_N$, connue sous le nom de relation de *Bourne* : $\forall\ m, m' \in M$; $m \equiv_N m' \Longleftrightarrow \exists\ n, n' \in N$ tel que : $m + n = m' + n'$.

- M/N désigne le R semi-module quotient $M/\equiv_N$, et $\bar{m} = [m] = m + N$ désigne un élément de M/N.

6) Soient M_1 et M_2 des sous semi-modules d'un R semi-module à gauche M.

6a) Si M_1 et M_2 sont indépendants et engendrent M ($i.e$ $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ et $M = M_1 + M_2$), alors M est la *somme directe faible* de ses sous semi-modules M_1 et M_2. Et on note $M = M_1 \bar{\oplus} M_2$. Pour tout $m \in M$, il existe $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$ tel que : $m = m_1 + m_2$.

Il est à noter que dans la théorie des semi-modules, la décomposition de $m \in M$ n'est pas unique.

6b) Si M_1 et M_2 engendrent M ($i.e$ $M = M_1 + M_2$), et que la restriction de $\equiv_{M_2}$ à M_1 et celle de $\equiv_{M_1}$ à M_2 sont triviales, alors M est la *somme directe* de ses sous semi-modules M_1 et M_2. Et on note $M = M_1 \oplus M_2$. Pour tout $m \in M$, il existe des éléments *uniques* $m_1 \in M_1$ et $m_2 \in M_2$ tels que : $m = m_1 + m_2$.

Exemples 2.1.1. *voir [52] ; [50] et [51].*

Soit $R = \{0, 1\}$ *le semi-anneau de Boole et l'ensemble* $M = \{0, 1, a, b\}$. *Définissons sur* M *les opérations comme suit :*

$0_R = 0_M = 0$; $1_R = 1_M = 1$

$1 + 1 = 1 + a = 1 + b = a + b = 1$; $a + 0 = a + a = a$; $0 + b = b + b = b$

$0 \times a = 0 \times b = 0$; $1 \times 1 = 1$; $1 \times a = a$; $1 \times b = b$.

Alors $(M, +, \times, 0, 1)$ *est un* R *semi-module à gauche commutatif.*

- $\{0, a\}$ *est un sous semi-module soustractif de* M.
- $\{0\}$ *est un sous semi-module fortement soustractif de* M.
- *Par contre* $\{0, 1, a\}$ *est un sous semi-module non soustractif de* M *en effet :* $1 + b = 1$ *et* b *n'appartient pas à* $\{0, 1, a\}$.
- $M = \{0, a\} + \{0, 1, b\}$ *et* $\{0, a\} \cap \{0, 1, b\} = \{0\}$. *Mais* $1 = 0 + 1 = a + b$ *avec* $0 \neq a$ *et* $b \neq 1$, *ainsi la décomposition de* 1 *n'est pas unique. Par conséquent* $M = \{0; a\} \bar{\oplus} \{0, 1, b\}$.
- $M = \{0, a\} + \{0; b\}$ *mais il n'existe pas* $x, y \in \{0, a\}/0 + x = b + y$ *donc* $m \equiv_{\{0,a\}} m' \Longleftrightarrow m = m'$ $\forall m, m' \in \{0, b\}$. *Anisi la restriction de*

$\equiv_{\{0,a\}}$ *à* $\{0, b\}$ *est triviale. De même la restriction de* $\equiv_{\{0,b\}}$ *à* $\{0, a\}$ *est triviale. D'où* $M = \{0, a\} \oplus \{0, b\}$

2.2 Sous semi-modules superflus - Sous semi-modules essentiels

Les résultats de cette section restent valables si M est un R semi-module à droite.

Soient R un semi-anneau et M un R semi-module à gauche.

Définition 2.2.1. *Soient* K *un sous semi-module de* M *et* N *un* R *semi-module à gauche.*

1. K *est dit superflu dans* M *et on note* $K \ll M$*, si pour tout sous semi-module* L *de* M*,*

$$K + L = M \Longrightarrow L = M$$

2. *Un épimorphisme* $f : M \longrightarrow N$ *est dit superflu si, et seulement si,* $Kerf \ll M$*.*

Proposition 2.2.1. *Soit* K *un sous semi-module de* M*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $K \ll M$
2. *Pour tout* R *semi-module à gauche* N *et pour tout* $h \in Hom_R(N, M)$*,*

$$h(N) + K = M \Longrightarrow h(N) = M$$

Définition 2.2.2. *Un homomorphisme* $f : M \longrightarrow N$ *de* R *semi-modules à gauche est dit k-quasi-régulier si, et seulement si, pour tout sous semi-module* K *de* M*, si* $m \in M \setminus K$*,* $m' \in K$*, et* $f(m) = f(m')$*, alors il existe* $a \in Kerf$ *tel que :* $m = m' + a$*.*

Corollaire 2.2.1. *Soit $f : N \longrightarrow P$ un épimorphisme k-quasi-régulier superflu de R semi-modules à gauche et soit $h \in Hom_R(M, N)$, si $f \circ h$ est un épimorphisme, alors h est un épimorphisme.*

Proposition 2.2.2. *Si N est un sous semi-module soustractif d'un R semi-module à gauche M et $N \ll M$, alors la projection canonique $p : M \longrightarrow M/N$ est un R épimorphisme superflu.*

Proposition 2.2.3. *Soit M un R semi-module à gauche. Et soient K, N, et H des sous semi-modules de M avec $K \leq N \leq M$. On a alors :*

1. *si $N \ll M$, alors $K \ll M$.*
2. *$H + K \ll M$ si, et seulement si, $H \ll M$ et $K \ll M$.*

Proposition 2.2.4. *Soit $K \ll M$ et soit $f : M \longrightarrow N$ un R épimorphisme. Si f est k-quasi-régulier (en particulier injectif), alors $f(K) \ll N$*

Nous proposons dans ce qui suit les définitions de sous semi-modules essentiels et de monomorphismes essentiels selon le document [17].

Définition 2.2.3.

1. *Un monomorphisme $f : M \longrightarrow N$ de R semi-modules à gauche est dit essentiel si, et seulement si, pour tout R homomorphisme $g : N \longrightarrow N'$, g est un R monomorphisme si $g \circ f$ est un R monomorphisme.*
2. *un sous semi-module M' d'un R semi-module à gauche M est dit large ou essentiel dans M on note $M' \leq_e M$ si, et seulement si, l'inclusion canonique $i_{M'} : M' \longrightarrow M$ est un R monomorphisme essentiel.*

Remarque 2.2.1.

1. *$f : M \longrightarrow N$ est un R monomorphisme essentiel si, et seulement si, $f(M)$ est un sous semi-module large dans N.*
2. *Un sous semi-module M' d'un R semi-module à gauche M est large dans M si, tout sous semi-module de M contenant M' est large dans M.*

Proposition 2.2.5. *Si N est un sous semi-module d'un R semi-module à gauche M, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *N est large dans M*
2. *Si ρ est une R relation de congruence sur M non triviale, alors la restriction de ρ à N est aussi non triviale.*
3. *Si m et m' sont deux éléments distincts de M, alors il existe des éléments distincts n et n' de N tels que $n \; \rho_{(m,m')} \; n'$. Où $\rho_{(m,m')}$ est la plus petite relation de congruence définie sur M reliant m et m'.*

Proposition 2.2.6. *Soit N un sous semi-module d'un R semi-module à gauche M. Et soit ρ la plus grande R relation de congruence sur M dont la restriction à N est triviale. Alors le R monomorphisme $f : N \longrightarrow M/\rho$ est essentiel.*

Chapitre 3

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SEMI-MODULES R-SEMI-SIMPLES

Ce chapitre est constitué essentiellement par l'article soumis au journal *communication in Algebra*. Nous allons donner au préalable quelques résultats préliminaires pour faciliter une meilleure compréhension du travail.

3.1 Introduction

Dans la théorie des semi-modules sur les semi-anneaux, la notion de semi-modules semi-simples a été étudiée différemment par plusieurs chercheurs.

Ce chapitre est organisé comme suit :

-Dans la section 1 : Nous donnons d'abord quelques notions de base relatives à l'étude des semi-modules.

-Dans la section 2 : Nous étudions une famille de sous semi-modules appelés sous semi-modules fortement indépendants.

-Dans la section 3 : Nous introduisons dans cette partie la notion de semi-module R-simple et, de semi-module R-semi-simple. Et nous donnons des propriétés caractérisant cette dernière classe de semi-modules.

3.2 Préliminaires

Dans cette section nous donnons quelques résultats préliminaires en plus de ceux qui figurent déjà dans le chapitre 2.

Définition 3.2.1. *Soient $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow P$ des homomorphismes de R semi-modules à gauche.*

La suite $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ est dite exacte si $Im\ f = Ker\ g$.

La suite (finie ou infinie) d'homomorphismes de R semi-modules à gauche :
$... \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow ...$

est une suite exacte si la suite $M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1}$ est une suite exacte pour tout i.

Proposition 3.2.1. *(voir[17])Soit M un R semi-module à gauche et soit N un sous semi-module de M. Le treillis des sous semi-modules de M/N est isomorphe au treillis des sous semi-modules de M qui contiennent N via l'application $n_N : L \longmapsto L/N$. De plus pour toute R relation de congruence $\equiv_N$ dans M on associe la R relation de congruence $\equiv_{L/N}$ définie dans M/N.*

Le treillis des semi-modules n'est pas toujours modulaire, mais on a la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *(voir[17]) Soit M un R semi-module à gauche. Si N, N' et N'' sont des sous semi-modules de M satisfaisant les conditions qui sont N est soustractif et $N' \subseteq N$, alors $N \cap (N' + N'') = N' + (N \cap N'')$.*

3.3 Sous semi–modules fortement indépendants

Dans cette section nous introduisons une nouvelle famille de sous semi-modules indépendants, en utilisant la restriction de la relation de congruence au sens de *Bourne* au sous semi-module, définie dans un semi-module.

Définition 3.3.1.
- *Deux sous semi-modules* T_1 *et* T_2 *d'un* R *semi-module à gauche* M *sont fortement indépendants si la restriction de* $\equiv_{T_1}$ *à* T_2 *et celle de* $\equiv_{T_2}$ *à* T_1 *sont triviales. On note ce fait par* *Res* $eq(T_1;T_2)$ *est triviale.*
- *Un ensemble indexé de* R *semi-modules à gauche* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est fortement indépendant si pour tout* $\alpha \in A$*, la restriction de* $\equiv_{T_\alpha}$ *à* $\tilde{T}_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha} T_\beta$ *et celle de* $\equiv_{\tilde{T}_\alpha}$ *à* T_α *sont triviales. On note ce fait par* *Res* $eq(T_\alpha;\tilde{T}_\alpha)$ *est triviale.*
- *Soit* $M = \sum_{\alpha\in A} T_\alpha$ *un* R *semi-module à gauche,* $M = \oplus_{\alpha\in A} T_\alpha$ *si, et seulement si,* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *est fortement indépendant.*

Dans l'exemple ci dessous on construit deux sous semi-modules d'un R semi-module à gauche qui sont fortement indépendants.

Exemples 3.3.1. *Voir[22][51][52]*

Soient $R = \{0;1\}$ *le semi-anneau Booléen et l'ensemble* $M = \{0;1;a;b\}$*. Définissons sur* M *les opérations comme suit :*

$0_R = 0_M = 0$; $1_R = 1_M = 1$

$0+0=0$; $0+1=1+1=1+a=1+b=a+b=1$; $a+0=a+a=a$; $0+b=b+b=b$

$0\times 0=0\times 1=0\times a=0\times b=0$; $1\times 1=1$; $1\times a=a$; $1\times b=b$.

Alors $(M,+,\times,0,1)$ *est un* R *semi-module à gauche commutatif.*

$\nexists\ x,y \in \{0;a\}$ *tel que* $0+x=b+y$ *donc* $m \equiv_{\{0;a\}} m' \Longleftrightarrow m=m'$ $\forall\ m;m' \in \{0;b\}$*. Ainsi la restriction de* $\equiv_{\{0;a\}}$ *à* $\{0;b\}$ *est triviale. De la même manière la restriction de* $\equiv_{\{0;b\}}$ *à* $\{0;a\}$ *est triviale, alors Res*

$eq(\{0;a\};\{0;b\})$ est triviale. Par conséquent $\{0;a\}$ et $\{0;b\}$ sont fortement indépendants.

De plus $M = \{0;a\} + \{0;b\}$ donc $M = \{0;a\} \oplus \{0;b\}$

Remarque 3.3.1. *Soient T_1 et T_2 deux sous semi-modules d'un R semi-module à gauche M. Si Res $eq(T_1;T_2)$ est triviale alors $T_1 \cap T_2 = \{0\}$.*

Proposition 3.3.1. *Soit M un R semi-module à gauche engendré par une famille $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ de sous semi-modules. Soit K un sous semi-module de M. Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous ensembles de A telle que*

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(T_\beta)_{\beta\in B_n}$ est fortement indépendant, et K et $\sum_{\beta\in B_n} T_\beta$ sont fortement indépendants, alors pour tout $\beta \in B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, Res $eq(T_\beta;\tilde{T_\beta})$ est triviale avec $\tilde{T_\beta} = \sum_{\gamma\in B\setminus\{\beta\}} T_\gamma$. De plus Res $eq(K;\sum_{\beta\in B} T_\beta)$ est triviale.

Démonstration.

(1) Prouvons que *Res* $eq(T_\beta;\tilde{T_\beta})$ est triviale pour tout $\beta \in B$.

(a) Soient $\beta \in B$ et $t_1, t_2 \in T_\beta$ tel que : $t_1 \equiv_{\tilde{T_\beta}} t_2$

$t_1 \equiv_{\tilde{T_\beta}} t_2 \iff \exists u_1, u_2 \in \tilde{T_\beta} = \sum_{\gamma\in B\setminus\{\beta\}} T_\gamma$ tel que :

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2$.

Puisque la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta \in B_{n_0}$ et $u_1, u_2 \in \sum_{\gamma\in B_{n_0}} T_\gamma$. Mais *Res* $eq(T_\beta;\sum_{\gamma\in B_n} T_\gamma)$ est triviale pour tout $n \in \mathbb{N}$, ceci implique que *Res* $eq(T_\beta;\sum_{\gamma\in B_{n_0}} T_\gamma)$ est triviale. Donc $t_1 \equiv_{\tilde{T_\beta}} t_2 \Longrightarrow t_1 = t_2$. D'où la restriction de $\equiv_{\tilde{T_\beta}}$ à T_β est triviale.

(b) Soit $t_1, t_2 \in \tilde{T_\beta} = \sum_{\gamma\in B\setminus\{\beta\}} T_\gamma$ tel que $t_1 \equiv_{T_\beta} t_2$.

Puisque $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\beta \in B_{n_1}$ et $t_1, t_2 \in \sum_{\gamma\in B_{n_1}} T_\gamma$. Mais *Res* $eq(T_\beta;\sum_{\gamma\in B_n} T_\gamma)$ est triviale pour tout $n \in \mathbb{N}$ ceci implique que *Res* $eq(T_\beta;\sum_{\gamma\in B_{n_1}} T_\gamma)$ est triviale. Donc $t_1 \equiv_{T_\beta} t_2 \Longrightarrow t_1 = t_2$. D'où la restriction de $\equiv_{T_\beta}$ à $\tilde{T_\beta}$ est triviale.

(2) Montrons que *Res* $eq(K;\sum_{\beta\in B} T_\beta)$ est triviale.

(a) Soit $t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B} T_\beta$ tel que : $t_1 \equiv_K t_2$.
$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $t_1, t_2 \in \sum_{\gamma \in B_{n_2}} T_\gamma$. Mais *Res eq*$(K; \sum_{\gamma \in B_n} T_\gamma)$ est triviale pour tout $n \in \mathbb{N}$ ceci implique que *Res eq*$(K; \sum_{\gamma \in B_{n_2}} T_\gamma)$ est triviale. Donc $t_1 \equiv_K t_2 \Longrightarrow t_1 = t_2$. D'où la restriction de $\equiv_K$ à $\sum_{\beta \in B} T_\beta$ est triviale.

(b) Soit $k_1, k_2 \in K$ tel que $k_1 \equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta} k_2$
$k_1 \equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta} k_2 \Longrightarrow \exists t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B} T_\beta$ tel que $k_1 + t_1 = k_2 + t_2$.
$t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B} T_\beta \Longrightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N}$ tel que $t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B_{n_3}} T_\beta$.
Mais *Res eq*$(K; \sum_{\gamma \in B_n} T_\gamma)$ est triviale pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ceci implique que *Res eq*$(K; \sum_{\gamma \in B_{n_3}} T_\gamma)$ est triviale.
Donc $k_1 \equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta} k_2 \Longrightarrow k_1 = k_2$.
D'où la restriction de $\equiv_{\sum_{\beta \in B} T_\beta}$ à K est triviale.

$\square$

3.4 Semi-modules R-semi-simples

Dans cette section nous étudions la notion de semi-module R-simple pour introduire après la classe des semi-modules R-semi-simples. Et nous finirons par donner une propriété caractéristique de cette dernière classe de semi-modules.

Définition 3.4.1. 1. *Un R semi-module à gauche $T \neq \{0\}$ est dit austère-simple s'il n'admet que deux sous semi-modules $\{0\}$ et T.*

2. *Un R semi-module à gauche $T \neq \{0\}$ est dit soustractif-simple si T n'admet aucun sous semi-module soustractif excepté $\{0\}$ et T.*

3. *Un R semi-module à gauche $T \neq \{0\}$ est dit R-simple si l'ensemble de toutes les R relations de congruence sur T, $R - cong(T)$ contient les seuls éléments : $\equiv_t$ la R relation de congruence triviale, et $\equiv_u$ la R relation de congruence universelle.*

Remarque 3.4.1. *Si $T \neq \{0\}$ est un R semi-module à gauche, alors :*

T R-simple $\Longrightarrow T$ soustractif-simple.

T R-simple et soustractif $\Longrightarrow T$ autère-simple.

Dans l'exemple qui suit nous construisons un semi-module soustractif-simple.

Exemples 3.4.1. *Soit $M = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et munissons M des deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ définies comme suit :*

- *$\forall\ x, x' \in \mathbb{R}$, $x \oplus x' = +\infty$,*
  et $\forall\ x \in M$, $x \oplus (+\infty) = (+\infty) \oplus x = +\infty$,
  $x \oplus (-\infty) = (-\infty) \oplus x = x$.
- *$\forall\ x \in M$; $0 \otimes x = -\infty$, $1 \otimes x = x$, $k \otimes x = +\infty$ si $k > 1$ et $x \neq -\infty$.*
  $k \otimes (-\infty) = -\infty\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

$(M, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{N}$ semi-module à gauche (voir[17]).

Montrons que M est soustractif-simple.

Soit I un sous semi-module de M tel que : $I \neq \{-\infty\}$ et $I \neq M$. Montrons que I n'est pas soustractif.

Soit $-\infty \neq x \in I$. $k \otimes x = +\infty\ \forall\ k > 1$ donc $+\infty \in I$.

Soit $y \in M \backslash I$ on a : $y \oplus (+\infty) = +\infty$ or y n'appartient pas à I. Donc I n'est pas soustractif. D'où M est soustractif-simple.

L'exemple qui suit est une construction de semi-modules R-simples.

Exemples 3.4.2. *Considèrons l'ensemble $R = \{0; 1\}$. $(R; +; \times)$ et $(R; +; \otimes)$, où pour tout $i, j \in R$, $i + j = max(i, j)$, $i \times j = 0$, $i \otimes j = 0$ excepté $1 \otimes 1 = 1$; sont des semi-anneaux (voir [62]).*

$({}_RR; +; \times)$ et $({}_RR; +; \otimes)$ deux R semi-modules à gauche.

Soit ρ une relation de congruence définie sur ${}_RR$. Supposons que ρ est non triviale. Dans ce cas, $0\ \rho\ 1$ et ρ est alors universelle.

Donc $({}_RR; +; \times)$ et $({}_RR; +; \otimes)$ sont R-simples.

Exemples 3.4.3. *Posons $R = \{0, 1\}$. On vérifie aisément que $(R, +, \times)$ est un semi-anneau avec les deux opérations addition et multiplication suivantes.*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

${}_RR$ est un semi-module simplifiable et soustractif.

Exemples 3.4.4. $(\mathbb{N}, +, \times)$ *;* $(\mathbb{Q}^+, +, \times)$ *et* $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ *sont des semi-modules simplifiables et soustractifs . Où* $\mathbb{N}$ *;* $\mathbb{Q}^+$ *;* $\mathbb{R}^+$ *désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des nombres rationnels positifs, des nombres réels positifs. " $+$ ", " $\times$ " sont les opérations naturelles dans ces ensembles.*

Définition 3.4.2. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille indexée de sous semi-modules R-simples d'un R semi-module à gauche M. Si $M = \oplus_{\alpha\in A} T_\alpha$, alors $\oplus_{\alpha\in A} T_\alpha$ est appelé décomposition R-semi-simple de M. Et un R semi-module à gauche M est dit R-semi-simple s'il possède une décomposition R-semi-simple.*

Proposition 3.4.1. *Soit M un R semi-module à gauche simplifiable engendré par une famille $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ de sous semi-modules R-simples tel que pour tout $B \subset A$ et $K \leq M$, $(T_\beta)_{\beta\in B}$ est fortement indépendant et K et $\sum_{\beta\in B} T_\beta$ sont fortement indépendants. Et soit $N_B = K \oplus (\oplus_{\beta\in B} T_\beta)$ un sous semi-module de M. Supposons que $\forall \alpha \in A$ la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale. Soit $\alpha_1 \in A \backslash B$ alors pour tout $\beta \in B_1 = B \cup \{\alpha_1\}$ on a : Res $eq(T_\beta; \tilde{T}_\beta)$ triviale et de plus Res $eq(K; \sum_{\beta\in B_1} T_\beta)$ est triviale.*

Démonstration. Soit $\alpha_1 \in A \backslash B$ et posons $B_1 = B \cup \{\alpha_1\}$.

(1) Montrons que *Res* $eq(T_\beta; \tilde{T}_\beta)$ est triviale pour tout $\beta \in B_1$.

(a) supposons que $\beta = \alpha_1$. Prouvons que la restriction de $\equiv_{T_{\alpha_1}}$ à $\tilde{T}_{\alpha_1}$ et la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_{\alpha_1}}$ à T_{α_1} sont triviales où $\tilde{T}_{\alpha_1} = \sum_{\beta\in B_1\backslash\{\alpha_1\}} T_\beta$.

(i) On sait que la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$ et $\tilde{T}_{\alpha_1} \leq N_B$, ceci implique que la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_{\alpha_1}}$ à T_{α_1} est triviale.

(ii) Soient $t_1, t_2 \in \tilde{T}_{\alpha_1}$ tels que $t_1 \equiv_{T_{\alpha_1}} t_2$.

$\exists u_1, u_2 \in T_{\alpha_1}$ tel que $t_1 + u_1 = t_2 + u_2$.

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2 \Longrightarrow u_1 \equiv_{\tilde{T}_{\alpha_1}} u_2$. Ceci implique que $u_1 = u_2$ car $\tilde{T}_{\alpha_1} \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Puisque M est simplifiable on a $t_1 = t_2$, d'où la restriction de $\equiv_{T_{\alpha_1}}$ à $\tilde{T}_{\alpha_1}$ est triviale.

(b) supposons que $\beta \neq \alpha_1$. Prouvons que la restriction de $\equiv_{T_\beta}$ à $\tilde{T}_\beta$ et celle de $\equiv_{\tilde{T}_\beta}$ à T_β sont triviales avec $\tilde{T}_\beta = \sum_{\gamma \in B_1 \setminus \{\beta\}} T_\gamma$.

(i) Soit $t_1, t_2 \in \tilde{T}_\beta$ tel que $t_1 \equiv_{T_\beta} t_2$.

$\exists u_1, u_2 \in T_\beta$ tel que $t_1 + u_1 = t_2 + u_2$. Soit $t_1 = x_1 + y_1$, $t_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma$ et $y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$.

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2 \Longrightarrow x_1 + y_1 + u_1 = x_2 + y_2 + u_2 \Longrightarrow y_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2$. Ceci implique $y_1 = y_2$ car $\sum_{\gamma \in B} T_\gamma \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Puisque M est simplifiable on a $x_1 + u_1 = x_2 + u_2$.

Et $x_1 + u_1 = x_2 + u_2 \Longrightarrow u_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma} u_2$.

Ceci implique $u_1 = u_2$ pour la même raison, donc $x_1 = x_2$ et ainsi $t_1 = t_2$ d'où la restriction de $\equiv_{T_\beta}$ à $\tilde{T}_\beta$ est triviale.

(ii) Soient $t_1, t_2 \in T_\beta$ tels que $t_1 \equiv_{\tilde{T}_\beta} t_2$.

$\exists u_1, u_2 \in \tilde{T}_\beta$ tel que $t_1 + u_1 = t_2 + u_2$.

Soient $u_1 = x_1 + y_1$, $u_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma$ et $y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$.

$t_1 + u_1 = t_2 + u_2 \Longrightarrow x_1 + y_1 + t_1 = x_2 + y_2 + t_2 \Longrightarrow y_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2$. Ceci implique que $y_1 = y_2$ car $\sum_{\gamma \in B} T_\gamma \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Puisque M est simplifiable on a $x_1 + t_1 = x_2 + t_2$.

Et $x_1 + t_1 = x_2 + t_2 \Longrightarrow t_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma} t_2$. Ceci implique que $t_1 = t_2$ car $\sum_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} T_\gamma \leq N_B$ et la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$. Donc la restriction de $\equiv_{\tilde{T}_\beta}$ à T_β est triviale.

(2) Montrons que $Res\ eq(K; \sum_{\beta \in B_1} T_\beta)$ est triviale.

(a) Soient $t_1, t_2 \in \sum_{\beta \in B_1} T_\beta$ tels que : $t_1 \equiv_K t_2$. Soient $t_1 = x_1 + y_1$ et $t_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B} T_\gamma$; $y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$

$t_1 \equiv_K t_2 \Longrightarrow \exists k_1, k_2 \in K$ tels que $x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2$.

$x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2 \Longrightarrow y_1 \equiv_{K + \sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2$.

Ce qui implique $y_1 \equiv_{N_B} y_2$ et donc $y_1 = y_2$ car la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_{α_1} est triviale. Puisque M est simplifiable on a $x_1 + k_1 = x_2 + k_2$. Et $x_1 + k_1 = x_2 + k_2 \Longrightarrow x_1 \equiv_K x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ car K et $\sum_{\gamma \in B} T_\gamma$ sont fortement indépendants. Ceci implique que $t_1 = t_2$. Donc la restriction de $\equiv_K$ à $\sum_{\beta \in B_1} T_\beta$ est triviale.

(b) Soient $k_1, k_2 \in K$ tels que : $k_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B_1} T_\gamma} k_2$.

Il existe $t_1, t_2 \in \sum_{\gamma \in B_1} T_\gamma$ tels que $k_1 + t_1 = k_2 + t_2$.

Soient $t_1 = x_1 + y_1$ et $t_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in \sum_{\gamma \in B} T_\gamma$ et $y_1, y_2 \in T_{\alpha_1}$

$k_1 \equiv_{\sum_{\gamma \in B_1} T_\gamma} k_2 \Longrightarrow x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2$.

$x_1 + y_1 + k_1 = x_2 + y_2 + k_2 \Longrightarrow y_1 \equiv_{K + \sum_{\gamma \in B} T_\gamma} y_2$.

Ce qui implique $y_1 \equiv_{N_B} y_2$ et donc $y_1 = y_2$ car la restriction de $\equiv_{N_B}$ à T_{α_1} est triviale.

Puisque M est simplifiable on a $x_1 + k_1 = x_2 + k_2$.

Et $x_1 + k_1 = x_2 + k_2 \Longrightarrow x_1 \equiv_K x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ car K et $\sum_{\gamma \in B} T_\gamma$ sont fortement indépendants.

Puisque M est simplifiable, on a $k_1 = k_2$. Ceci implique que la restriction de $\equiv_{\sum_{\beta \in B_1} T_\beta}$ à K est triviale.

$\square$

Proposition 3.4.2. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous semi-modules R-simples d'un R semi-module à gauche simplifiable M telle que $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$. Si M est de plus soustractif, alors pour tout sous semi-module K de M, il existe un sous ensemble B de A tel que $(T_\beta)_{\beta \in B}$ est fortement indépendant et $M = K \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$.*

Démonstration. Soit K un sous semi-module d'un R semi-module à gauche simplifiable M.

Posons $\pounds = \{B \subseteq A/(T_\beta)_{\beta\in B}$ et$(K; \sum_{\beta\in B} T_\beta)$sont fortement indépendants$\}$. Si $B = \varnothing$ alors $T_\beta = \{0\}$ donc $(T_\beta)_{\beta\in B}$ est fortement indépendant et K et $\sum_{\beta\in B} T_\beta$ sont fortement indépendants, par conséquent $\varnothing \in \pounds$. Donc $\pounds \neq \varnothing$. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\pounds$.

Soit $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \subseteq A$ donc $B \subseteq A$.

d'après la proposition3.3.1, $B \in \pounds$. Soit $L \in \pounds$ tel que $B_n \subset L\ \forall n \in \mathbb{N}$. Alors on a $B =\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset L$, donc B est la borne supérieure de $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Ainsi $\pounds$ est un ensemble inductif non vide. Donc $\pounds$ possède un élément maximal B.

Soit $N = K+\sum_{\beta\in B} T_\beta$. Comme $(T_\beta)_{\beta\in B}$ est fortement indépendant et K et $\sum_{\beta\in B} T_\beta$ sont fortement indépendants, alors $N = K \oplus (\oplus_{\beta\in B} T_\beta)$. N est un sous semi-module de M, prouvons que $N = M$.

Soit $\alpha \in A$. T_α simple implique que la restriction de $\equiv_N$ à T_α est triviale ou universelle.

Supposons que la restriction de $\equiv_N$ à T_α est triviale pour tout $\alpha \in A$.

Soit $\alpha_1 \in A\backslash B$ et $B_1 = B \cup \{\alpha_1\}$. On a $B \subseteq A$ et $\alpha_1 \in A$ ceci implique que $B_1 \subseteq A$. D'après la proposition 3.4.1 $(T_\beta)_{\beta\in B_1}$ est fortement indépendant et K et $\sum_{\beta\in B_1} T_\beta$ sont fortement indépendants, donc $B_1 \in \pounds$, ceci est en contradiction avec la maximalité de B. Donc la restriction de $\equiv_N$ à T_α est universelle pour tout $\alpha \in A$. Ceci implique que $\equiv_N$ est universelle dans M puisque $\bigcap T_\beta \neq \emptyset$. Et ainsi pour tout $m \in M$ on a $m \equiv_N 0$.

$m \equiv_N 0 \Longrightarrow \exists n \in N$ tel que $m + n \in N$. Et puisque M est soustractif, $m \in N$. D'où $M = N$

$\square$

Proposition 3.4.3. *Soit M un R semi-module à gauche à la fois simplifiable et soustractif engendré par une famille $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ de sous semi-modules R-simples. Il existe un sous ensemble $B \subseteq A$ tel que :*

$M = \oplus_{\beta\in B} T_\beta$. Et M est R-semi-simple.

Démonstration. Si $K = \{0\}$ alors d'après la proposition3.4.2, il existe $B \subseteq A$ tel que :

$M = \{0\} \oplus (\oplus_{\beta\in B} T_\beta)$ donc $M = \oplus_{\beta\in B} T_\beta$. □

Définition 3.4.3. *Voir [22]*

Soient $A; B; C$ trois R semi-modules à gauche, la suite exacte

$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *est scindée si $B = Imf \oplus K$ avec K sous semi-module de B.*

Proposition 3.4.4. *Soit M un R semi-module à gauche simplifiable et soustractif R-semi-simple avec comme décomposition R-semi-simple*

$M = \oplus_{\alpha\in A} T_\alpha$. Si la suite $\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\}$ de R semi-modules à gauche est exacte, alors la suite est scindée. Si de plus elle est régulière alors il existe un sous ensemble B de A tel que : N est isomorphe à $\oplus_{\beta\in B} T_\beta$ (N est R-semi-simple, $N \simeq \oplus_{\beta\in B} T_\beta$) et K est semi-isomorphe à $\oplus_{\alpha\in A\setminus B} T_\alpha$ ($K \simeq_s \oplus_{\alpha\in A\setminus B} T_\alpha$).

Démonstration. On sait que Imf est un sous semi-module de M, donc

d'après la proposition3.4.2, il existe $B \subseteq A$ tel que : $M = Imf \oplus (\oplus_{\beta\in B} T_\beta)$ où $\oplus_{\beta\in B} T_\beta$ est un sous semi-module de M, donc la suite exacte est scindée.

Supposons que la suite est de plus régulière alors g est régulier.

Et soit $g_1 : \begin{array}{ccc} M/Imf & \longrightarrow & Img = N \\ [m] & \mapsto & g_1([m]) = g(m) \end{array}$

Montrons que g_1 est bien définie.

Soient $[m_1]$ et $[m_2]$ deux éléments de M/Imf tels que : $[m_1] = [m_2]$.

$[m_1] = [m_2] \Longrightarrow \exists n_1, n_2 \in Imf$ tel que $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$.

$g_1(m_1 + n_1) = g_1(m_2 + n_2) \Longrightarrow g_1(m_1) + g_1(n_1) = g_1(m_2) + g_1(n_2)$

$n_1 \in Imf \Longrightarrow \exists k_1; k_2 \in K$ tels que $n_1 + f(k_1) = f(k_2)$.

$n_1 + f(k_1) = f(k_2) \Longrightarrow g(n_1) + g \circ f(k_1) = g \circ f(k_2)$.

Puisque la suite est exacte donc $Imf = kerg$ ce qui implique que $g \circ f = 0$. Ainsi $g(n_1) = 0$. De la même manière on obtient $g(n_2) = 0$.

Donc $g(m_1) = g(m_2)$ et ainsi $g_1([m_1]) = g_1([m_2])$. g_1 est un R homomorphisme clairement définie.

g régulier $\Longrightarrow Img = N = g(M)$ donc g_1 est surjectif.

Prouvons que g_1 est injectif.

$g_1[m] = g_1[m'] \Longleftrightarrow g(m) = g(m')$.

Puisque g est k-régulier,il existe $n, n' \in Kerg = Imf$ tel que :

$m + n = m' + n'$. Ceci implique que $[m] = [m']$, et ainsi g_1 est injectif, par conséquent g_1 est un isomorphisme, d'où $M/Imf \simeq N$.

Soit p_1 la première projection : $\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \oplus_{\beta \in B} T_\beta \\ m & \mapsto & p_1(m) = y \end{array}$

avec $m = x + y$; $x \in Imf$,$y \in \oplus_{\beta \in B} T_\beta$ et cette décomposition est unique.

Considèrons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & \oplus_{\beta \in B} T_\beta \\ M/Imf \arrow[ur, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{p}$: $[m] \longmapsto p_1(m)$ $p_1 = \tilde{p} \circ p_2$. Puique p_1 est surjectif, donc $\tilde{p}$ est surjectif.

Soit $[m]$ et $[m']$ deux éléments de M/Imf tels que : $\tilde{p}[m] = \tilde{p}[m']$.

$\tilde{p}[m] = \tilde{p}[m'] \Longrightarrow p_1(m) = p_1(m')$.

Soient $m = m_1 + m_2$ et $m' = m'_1 + m'_2$ avec $m_1, m'_1 \in Imf$ et

$m_2, m'_2 \in \oplus_{\beta \in B} T_\beta$.

Puisque $p_1(m) = m_2 = p_1(m') = m'_2$,

donc $m + m'_1 = m_1 + m_2 + m'_1 = m_1 + m'$. Ceci implique que $[m] = [m']$ et $\tilde{p}$ est injectif.

Par conséquent $\tilde{p}$ est un isomorphisme. Ainsi $M/Imf \simeq \oplus_{\beta \in B} T_\beta$.

D'où $N \simeq \oplus_{\beta \in B} T_\beta$.

$M = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$

$M = Imf \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta) = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$.

Soit $f_1 : \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & Imf \\ k & \mapsto & f(k) \end{array}$

Comme la suite est régulière donc f est régulier celà signifie que

$Imf = f(K)$ ainsi f_1 est surjectif.

Soient k et k' deux éléments de K tel que : $f_1(k) = f_1(k')$.

$f_1(k) = f_1(k') \Longrightarrow f(k) = f(k')$ et comme f est k-régulier donc

$k + m = k' + m'$ avec $m, m' \in Kerf$ ainsi $k = k'$ car $Kerf = \{0\}$ par conséquent f_1 est injectif . Ainsi f_1 est un isomorphisme d'où $K \simeq Imf$.

On a $M = Imf \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$.

Soient p_3 la première projection : $M \longrightarrow Imf$ et $\bar{p_3}$ la restriction de p_3 à $(\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha)$

$ker\bar{p_3} = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \cap kerp_3 = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \cap (\oplus_{\beta \in B} T_\beta) = \{0\}$.

Soit $m' \in Imf$, puisque p_3 est surjectif, donc il existe $m \in M$ tel que $p_3(m) = m'$. Mais $M = (\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \oplus (\oplus_{\beta \in B} T_\beta)$,

donc il existe $m_1 \in \oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$ et $m_2 \in \oplus_{\beta \in B} T_\beta$ tel que $m = m_1 + m_2$.

Et $m' = p_3(m) = p_3(m_1) = \bar{p_3}(m_1)$, donc $\bar{p_3}$ est surjectif par conséquent $(\oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha) \simeq_s Imf$. D'où $K \simeq_s \oplus_{\alpha \in A \setminus B} T_\alpha$. □

Proposition 3.4.5. *Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous semi-modules R-simples d'un R semi-module à gauche simplifiable et soustractif M. Si T est un sous semi-module R-simple de M, tel que la restriction de $\equiv_{\sum_A T_\alpha}$ à T n'est pas triviale alors il existe $\alpha \in A$ tel que : $T \simeq_s T_\alpha$.*

Démonstration. Si T est R-simple et que la restriction de $\equiv_{\sum_A T_\alpha}$ à T n'est pas triviale, alors la restriction de $\equiv_{\sum_A T_\alpha}$ à T est universelle.

Ainsi pour un $t \in T$ on a : $t \equiv_{\sum_A T_\alpha} 0$.

Ce qui implique qu'il existe $t_1, t_2 \in \sum_A T_\alpha$ tel que : $t + t_1 = t_2$.

Puisque $\sum_A T_\alpha$ est soustractif, on a $t \in \sum_A T_\alpha$ et ainsi $T \leq \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$.

Par conséquent on peut affirmer que $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$.

Ainsi d'après la proposition 3.4.1, il existe un sous-ensemble $B \subset A$ tel que : $M = \oplus_{\beta \in B} T_\beta$.

La suite : $\{0\} \longrightarrow T \xrightarrow{i_T} M \xrightarrow{\pi_T} M/T \longrightarrow \{0\}$ est exacte et régulière.

En effet : $Keri_T = 0$; $Imi_T = \{m + t_1 = t_2 ; t_1, t_2 \in T\}$ $m + t_1 \in T$;$t_1 \in T$ et T est soustractif donc $m \in T = i_T(T)$, par conséquent $Imi_T = i_T(T)$.

i_T est i-régulier et i_T est injectif ainsi, il est k-régulier.

$ker\pi_T = \{m \in M \backslash [m] = [0]\} = \{m \in M \backslash m + t_1 = t_2\} = Imi_T$.

π_T est surjectif ainsi π_T est i-régulier.

Montrons que π_T est k-régulier.

$\pi_T(m_1) = \pi_T(m_2) \Longleftrightarrow [m_1] = [m_2] \Longleftrightarrow m_1 + m'_1 = m_2 + m'_2$

avec $m'_1, m'_2 \in T = i_T(T) = Imi_T = ker\pi_T$, comme voulu.

Par conséquent d'après la proposition 3.4.3, il existe $\alpha \in A$ tel que : $T \simeq_s T_\alpha$. $\square$

Théorème 3.4.1. *(Caractérisation des semi-modules R-semi-simples)*

Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille indexée de sous semi-modules $\mathfrak{R}$-simples d'un R semi-module à gauche simplifiable et soustractif M avec $M = \sum_{\alpha \in A} T_\alpha$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *M est R-semi-simple.*
2. *M est engendré par des semi-modules R-simples.*
3. *M est la somme de semi-modules R-simples.*
4. *Tout sous semi-module de M est un facteur direct de M.*
5. *Toute suite exacte : $\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\}$ de R semi-modules à gauche est scindée.*

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (5) d'après la proposition3.4.4.

(5) $\Longrightarrow$ (4) Soit K un sous semi-module de M.

Considèrons la suite : $\{0\} \longrightarrow K \xrightarrow{i_K} M \xrightarrow{\pi_K} M/K \longrightarrow \{0\}$.

Cette suite est exacte (voir démonstration de la proposition3.4.5). Par conséquent $M = Imi_K \oplus L$ avec L sous semi-module de M. On sait que si K

est soustractif alors $Imi_{_K} = K$ donc $M = K \oplus L$ et ainsi K est un facteur direct de M.

$(4) \Longrightarrow (3)$ et $(3) \Longrightarrow (2)$ sont triviales.

$(2) \Longrightarrow (1)$ se déduit de la proposition3.4.3. $\square$

Chapitre 4

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SEMI-MODULES SEMI-ESSENTIELS

Ce chapitre est constitué exactement par l'article [38] avec quelques préliminaires.

4.1 Introduction

Dans la théorie des semi-modules sur les semi-anneaux, les sous semi-modules essentiels et les monomorphismes essentiels de semi-modules sont étudiés différemment suivant les auteurs.

Dans cette section nous proposons une extension des sous semi-modules essentiels aux sous semi-modules semi-essentiels en suivant le même procédé sur les sous modules essentiels dans la théorie des modules.

Nous avons défini et caractérisé en même temps quelques notions nouvelles comme : sous semi-modules semi-essentiels, monomorphismes semi-essentiels, monomorphismes quasi-essentiels, monomorphismes pseudo-essentiels et M-complément sous semi-modules.

Nous allons comparer également la classe des semi-modules semi-essentiels avec celle des semi-modules essentiels. Dans la théorie des semi-modules sur les semi-anneaux, nous n'avons pas rencontré de documents ayant traité de manière exhaustive les sous semi-modules essentiels. Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre une nouvelle classe de sous semi-modules similaires aux sous semi-modules essentiels avec de nouvelles variantes.

Nous suivons le même procédé proposé dans [2] sur les sous modules essentiels.

De nouvelles notions comme monomorphismes semi-essentiels, monomorphismes quasi-essentiels et monomorphismes pseudo-essentiels sont introduites dans cet ordre pour caractériser les notions de monomorphismes semi-essentiels relativement, à l'image de f Imf, à l'image propre $f(M)$ (d'un morphisme $f : M \to N$) restreint aux sous semi-modules soustractifs.

Nous prouvons que la classe des semi-modules semi-essentiels n'est pas contenue dans la classe des semi-modules essentiels.

De plus, d'autres résultats concernant les sous semi-modules semi-essentiels et somme directe faible sont étudiés.

Ce chapitre est organisé comme suit :

-Dans un premier temps nous utilisons les résultats du chapitre 2 pour construire un exemple non trivial de sous semi-module essentiel.

-Ensuite nous étudions les notions de sous semi-modules essentiels et de monomorphismes semi-essentiels.

4.2 Exemple de sous semi-module essentiel

A l'aide de la proposition2.2.5 caractérisant les sous semi-modules essentiels (voir chapitre 2), nous construisons un exemple non trivial de sous semi-module essentiel.

Exemples 4.2.1. *voir [17].*

Soit R le semi-anneau $(\mathbb{I}, max, min)$ où $\mathbb{I} = [0,1]$ est l'intervalle unité de la droite numérique avec l'addition (resp : la multiplication) de x et y définie par : $x \oplus y = max(x,y)$ (resp : $x \otimes y = min(x,y)$. R est un R semi-module à gauche. Considèrons $N = R \setminus \{1\}$, N est un sous semi-module de R.

Soit ρ une R relation de congruence non triviale sur R. Supposons que la restriction de ρ à N est triviale. 1 n'appartient pas à N et ρ est non triviale dans R, alors il existe $n \in N$ tel que : $n \ \rho \ 1$. Soit $n' \in N$ tel que $n < n' < 1$, nous avons $n \ \rho \ 1$ et $n' \ \rho \ n'$,

alors $min(n,n') \ \rho \ min(1,n')$ en effet R est un R semi-module.

D'où $n \ \rho \ n' \Longrightarrow n = n'$. ce qui est en contradiction avec le fait que $n < n'$.

Donc d'après la proposition 2.2.5, N est essentiel dans R.

La classe des sous semi-modules essentiels pour un R semi-modules est notée par : $\mathfrak{C}_{_RM}$.

4.3 Sous semi-modules et Monomorphismes semi-essentiels

Dans cette section nous donnerons les définitions et les caractérisations des notions de sous semi-modules semi-essentiels, et des monomorphismes semi-essentiels, quasi-essentiels, pseudo-essentiels de semi-modules.

Définition 4.3.1. 1. *Soit M un R semi-module à gauche. Un sous semi-module K de M est dit semi-essentiel dans M, on note $K \trianglelefteq_s M$, si pour tout sous semi-module L de M :*

   $L \cap K = \{0\} \Rightarrow L = \{0\}$.

   La classe de tous les sous semi-modules semi-essentiels pour un R semi-module M est notée par : $\overline{\mathfrak{C}}_{_RM}$.

   Nous disons aussi que M est une extention semi-essentielle de K

2. *Un monomorphisme (ou semi-monomorphisme)*
   $f : M \longrightarrow N$ *de* R *semi-modules à gauche est dit semi-essentiel si :*
   $f(M) \trianglelefteq_s N$.
3. *Un monomorphisme (ou semi-monomorphisme)*
   $f : M \longrightarrow N$ *de* R *semi-modules à gauche, est dit quasi-essentiel, si*
   $Imf \trianglelefteq_s N$.

Lemme 4.3.1. *Soit* $f : M \longrightarrow N$ *un* R *monomorphisme (ou semi-monomorphisme) de* R *semi-modules à gauche.*

Si f *est semi-essentiel alors* f *est quasi-essentiel.*

Démonstration. Supposons que f est semi-essentiel et soit L un sous semi-module de N tel que :

$Imf \cap L = \{0\}$. Puisque $f(M) \subset Imf \subset N$,

alors $Imf \cap L = \{0\} \Longrightarrow f(M) \cap L = \{0\}$. Et comme f est semi-essentiel

alors $f(M) \cap L = \{0\} \Longrightarrow L = \{0\}$ donc $Imf \trianglelefteq_s N$. D'où f est quasi-essentiel. □

Remarque 4.3.1. *Si* f *est i-régulier alors :* f *quasi-essentiel équivaut à* f *semi-essentiel.*

En effet, si f est i-régulier alors $f(M) = Imf$. Donc daprés la définition4.3.1, f quasi-essentiel $\Longleftrightarrow$ f semi-essentiel.

Définition 4.3.2. 1. *Soit* M *un* R *semi-module à gauche. Un sous semi-module* K *de* M *est dit pseudo-essentiel dans* M*, et on note* $K \trianglelefteq_p M$ *si, pour tout* R *sous semi-module soustractif* S *de* M *:*
   $K \cap S = \{0\} \Longrightarrow S = \{0\}$.
2. *Un monomorphisme(ou semi-monomorphisme)*
   $f : M \longrightarrow N$ *de* R *semi-modules à gauche est dit pseudo-essentiel si :*
   $f(M) \trianglelefteq_p N$.

3. *Un monomorphisme (ou semi-monomorphisme)* $f : M \longrightarrow N$ *de* R *semi-modules à gauche est dit i-pseudo-essentiel si :* $Imf \trianglelefteq_p N$.

Remarque 4.3.2. 1. *Si* N *est semi-essentiel dans* M*, alors* N *est pseudo-essentiel dans* M*.*

2. *Si* f *est un monomorphisme (ou semi-monomorphisme) semi-essentiel, alors* f *est pseudo-essentiel.*

3. *Si* f *est un monomorphisme (ou semi-monomorphisme) quasi-essentiel, alors* f *est i-pseudo-essentiel.*

4. *Si* f *est i-régulier alors :* f *pseudo-essentiel équivaut à* f *i-pseudo-essentiel.*

En effet, si N est semi-essentiel dans M alors N est semi-essentiel pour tous les sous semi-modules de M, en particulier pour ses sous semi-modules soustractifs, donc N est pseudo-essentiel dans M.

De même f semi-essentiel $\Longrightarrow f$ pseudo-essentiel.

Si f est un monomorphisme quasi-essentiel, alors Imf est semi-essentiel pour tous les sous semi-modules de N, en particulier pour ses sous semi-modules soustractifs , d'où f est i-pseudo-essentiel.

Si f est i-régulier alors $f(M) = Imf$,

donc f pseudo-essentiel $\Longleftrightarrow f$ i-pseudo-essentiel.

Proposition 4.3.1. *Soient* M *un* R *semi-module à gauche et* K *un sous semi-module de* M*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $K \trianglelefteq_s M$.
2. *L'injection canonique* $i_k : K \longrightarrow M$ *est un monomorphisme semi-essentiel.*

Démonstration. Nous avons $i_K(K) = K$ alors $K \trianglelefteq_s M \Longleftrightarrow i_K(K) \trianglelefteq_s M$. Donc (1) $\Longleftrightarrow$ (2) □

Proposition 4.3.2. *Soient M un R semi-module à gauche et K un sous semi-module soustractif de M, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$K \trianglelefteq_s M$.*
2. *L'injection canonique $i_K : K \longrightarrow M$ est un monomorphisme quasi-essentiel.*

Démonstration. Si K est soustractif alors $Imi_K = i_K(K) = K$ d'après [34], d'où (1) $\Longleftrightarrow$ (2). □

Proposition 4.3.3. *Soient M un R semi-module à gauche et K un sous semi-module de M.*

1. *Si $K \trianglelefteq_s M$ alors pour tout R semi-module à gauche N et pour tout $h \in Hom_R(M; N)$,*
   $(Kerh) \cap K = \{0\} \Longrightarrow Kerh = \{0\}$
2. *Si pour tout homomorphisme $h : M \longrightarrow N$ de R semi-modules à gauche,*
   $(Kerh) \cap K = \{0\} \Longrightarrow Kerh = \{0\}$*, alors $K \trianglelefteq_p M$*

Démonstration.
1. $K \trianglelefteq_s M \Longrightarrow \forall L \leq M$ si $L \cap K = \{0\}$ alors $L = \{0\}$.
   $(Kerh) \leq M$ donc $(Kerh) \cap K = \{0\} \Longrightarrow Kerh = \{0\}$.
2. Considèrons l'épimorphisme canonique $n_S : M \longrightarrow M/S$ où S est un sous semi-module soustractif de M. Montrons que $Kern_S = S$.
   Si $x \in Kern_S$ alors $[x] = [0]$. $[x] = [0] \Longrightarrow \exists (s, s') \in S^2$ tel que $x + s = s'$. Et comme S est soustractif, $(x + s \in S, s \in S) \Longrightarrow x \in S$.
   Réciproquement soit $x \in S, x = x + 0 = 0 + x$, on a $\langle 0, x\rangle \in S^2$ donc $[x] = [0] \Longrightarrow x \in Kern_S$. D'où $Kern_S = S$.
   $S \cap K = \{0\} \Longrightarrow (Kern_S) \cap K = \{0\} \Longrightarrow Kern_S = \{0\}$, donc $S = \{0\}$. D'où $K \trianglelefteq_p M$.

□

Proposition 4.3.4. *1. Soit $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme semi-essentiel de R semi-modules à gauche et soit $h \in Hom_R(M;N)$. Si $h \circ f$ est un semi-monomorphisme alors h est un semi-monomorphisme.*

2. Soient M un R semi-module à gauche simplifiable, $f : M \longrightarrow N$ un homomorphisme quasi-essentiel de R semi-modules à gauche et soit $h \in Hom_R(M;N)$. Si $h \circ f$ est un monomorphisme alors h est un semi-monomorphisme.

Démonstration. 1. Montrons que $Kerh \cap f(L) = \{0\}$.

Soit $x \in Kerh \cap f(L)$ donc $h(x) = 0$ et $x = f(l)$ avec $l \in L$.

$h(x) = 0 \Longrightarrow h \circ f(l) = 0$ donc $l \in Ker(h \circ f)$.

On a $h \circ f$ est un semi-monomorphisme alors $l = 0$ par conséquent $x = f(0) = 0$. Donc $Kerh \cap f(L) = \{0\}$.

On sait que f est semi-essentiel ainsi $Kerh = \{0\}$. Dóù h est un semi-monomorphisme.

2. f est quasi-essentiel ainsi $Imf \trianglelefteq_s M$.

Soit $h \in Hom_R(M;N)$ tel que $h \circ f$ est un monomorphisme.

Montrons que $Kerh \cap Imf = 0$. Soit $x \in Kerh \cap Imf$.

$x \in Kerh \cap Imf \Longrightarrow (x \in Kerh$ et $x \in Imf)$ donc $h(x) = 0$ et $x + f(l) = f(l')$ avec $(l, l') \in L^2$.

$x + f(l) = f(l') \Longrightarrow h(x) + h[f(l)] = h[f(l')]$.

Ainsi $h \circ f(l) = h \circ f(l')$ par conséquent $l = l'$ car $h \circ f$ est un monomorphisme. Donc $x + f(l) = 0 + f(l)$ et puisque M est simplifiable, on a $x = 0$. Ainsi $Kerh \cap Imf = \{0\}$.

On a aussi $Imf \trianglelefteq_s M$ et $Kerh \leq M$ donc $Kerh = \{0\}$. D'où h est un semi-monomorphisme.

□

Corollaire 4.3.1. *Soit $f : L \longrightarrow M$ un monomorphisme de R semi-modules à gauche et soit $h \in Hom_R(M; N)$. Si, $h \circ f$ monomorphisme $\Longrightarrow h$ monomorphisme, alors $Imf \trianglelefteq_p M$.*

Démonstration. Soit $K = Imf$ et supposons que $Kerh \cap K = \{0\}$.

$Kerh \cap K = \{0\} \Longrightarrow Ker(h \circ i_K) = \{0\} \Longrightarrow Kerh = \{0\}$. Par consèquent $K \trianglelefteq_p M$ d'après la proposition 4.3.3. D'où $Imf \trianglelefteq_p M$. □

Proposition 4.3.5. *Soit M un R semi-module à gauche, K, N et H des sous semi-modules de M tels que : $K \leq N \leq M$ et $H \leq M$. Alors on a :*

1. *$K \trianglelefteq_s M \Longleftrightarrow (K \trianglelefteq_s N$ et $N \trianglelefteq_s M)$.*
2. *$(H \cap K) \trianglelefteq_s M \Longleftrightarrow (H \trianglelefteq_s M$ et $K \trianglelefteq_s M)$.*

Démonstration. 1. – $\Longrightarrow$) Soit $L \leq N$ tel que : $L \cap K = \{0\}$. Puisque $L \leq M$ et $K \trianglelefteq_s M$ alors $L = \{0\}$ donc $K \trianglelefteq_s N$.
Soit $L' \leq M$ tel que $L' \cap N = \{0\}$.
$L' \cap N = \{0\} \Longrightarrow L' \cap K = \{0\} \Longrightarrow L' = \{0\}$ car $K \trianglelefteq_s M$.

– $\Longleftarrow$) Soit $L \leq M$ tel que : $L \cap K = \{0\}$.
$L \cap K = \{0\} \Longrightarrow L \cap K \cap N = 0 \Longrightarrow (L \cap N) \cap K = \{0\}$.
Nous avons $(L \cap N) \leq N$ et $K \trianglelefteq_s N$ alors $L \cap N = \{0\}$ par conséquent $L = \{0\}$ car $(L \cap N) \leq M$ et $N \trianglelefteq_s M$. D'où $K \trianglelefteq_s M$.

2. – $\Longrightarrow$) $(H \cap K) \leq H \leq M$, donc d'après (1) on a :
$(H \cap K) \trianglelefteq_s M \Longrightarrow H \trianglelefteq_s M$.
$(H \cap K) \leq K \leq M$, donc d'après (1) on a :
$(H \cap K) \trianglelefteq_s M \Longrightarrow K \trianglelefteq_s M$.

– $\Longleftarrow$) Soit $L \leq M$ tel que : $L \cap H \cap K = \{0\}$.
$L \cap H \cap K = \{0\} \Longrightarrow (L \cap K) \cap H = \{0\}$. Donc $L \cap K = \{0\}$ car $(L \cap K) \leq M$ et $H \trianglelefteq_s M$. Par conséquent $L = \{0\}$ car $(L \cap K) \leq M$ et $K \trianglelefteq_s M$. D'où $(H \cap K) \trianglelefteq_s M$

□

Lemme 4.3.2. *Un sous semi-module K d'un R semi-module à gauche M est semi-essentiel si, et seulement si, pour tout $x \neq 0$, éléments de M, il existe $r \in R$ tel que :* $0 \neq rx \in K$.

Démonstration.
- $\Longrightarrow$) Supposons que $K \trianglelefteq_s M$ et soit $0 \neq x \in M$.
  On sait que $(Rx) \leq M$ et $Rx \neq \{0\}$ donc $(Rx) \cap K \neq \{0\}$ car $K \trianglelefteq_s M$.
  Par conséquent il existe $r \in R$ tel que : $rx \in K$.
- $\Longleftarrow$) Soit $L \leq M$. Supposons que $L \neq \{0\}$, ainsi il existe $0 \neq x \in L$ et par hypothèse il existe $r \in R$ tel que : $rx \in K$. On a $rx \in L$ et $rx \neq 0$ donc $rx \in (L \cap K)$ et $rx \neq 0$.
  Par conséquent $L \cap K \neq \{0\}$. D'où $K \trianglelefteq_s M$.

□

Exemples 4.3.1. *Considèrons le R semi-module à gauche $R = (\mathbb{I}, max, min)$, avec $\mathbb{I} = [0;1]$. $N = R \setminus \{1\}$ est un sous semi-module de R essentiel (voir exemple4.2.1). Montrons que N est semi-essentiel.*
- *Let* $x \in]0;1[$, $\min(x;1) = x \in]0;1[\subset N \Longrightarrow 0 \neq x \otimes 1 \in N$.
- *Let* $x = 1$, $\min(0,5;1) = 0,5 \in]0;1[\subset N \Longrightarrow 0 \neq 0,5 \otimes 1 \in N$.
  Ceci montre que N est semi-essentiel dans R.

□

Exemples 4.3.2. *Dans cet exemple, Nous construisons un sous semi-module d'un semi-module qui est à la fois semi-essentiel et essentiel.*

Soit $M = \{0, 1, a, b\}$ et définissons sur M les deux opérations commutatives $(+, \times)$ comme suit :

1. $0_M = 0$; $1_M = 1$
2. $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 1 = 1 + a = 1 + b = 1$; $a + 0 = a + a = a$; $0 + b = b + b = b$; $a + b = 0$
3. $0 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times a = 0 \times b = a \times b = b \times b = a \times a = 0$; $1 \times 1 = 1$; $1 \times a = a$; $1 \times b = b$.

Alors $(M,+,0)$ et $(M,\times,1)$ sont des semi-groupes commutatifs.

En multipliant (2) successivement par a et b et en utilisant (3), on peut voir aisément que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Par conséquent $(M,+,\times,0,1)$ est un semi-anneau commutatif.

Maintenant, posons $N=\{0;a;b\}$, alors N est un idéal de M. Donc ${}_MN$ est un sous semi-module de ${}_MM$

- *Prouvons que $N=\{0;a;b\}$ est semi-essentiel. Soit $0\neq x\in M$ alors on peut trouver aisément $r\in M=\{0;1;a;b\}$ tel que $0\neq rx\in N$. Ceci montre que N est semi-essentiel dans M.*
- *Prouvons que $N=\{0;a;b\}$ est essentiel dans ${}_MM$. Soit ρ une R relation de congruence non triviale dans M.*
  Supposons que la restriction de ρ à N est triviale. Puisque ρ n'est pas triviale sur M donc il existe $x_0,y_0\in M$ avec $x_0\neq y_0$ tel que $x_0\ \rho\ y_0$. ρ triviale sur N implique $x_0\notin N$ ou $y_0\notin N$ donc $x_0=1$ ou $y_0=1$. Par conséquent il existe $c\neq 1$ tel que $1\ \rho\ c$ d'où $1\ \rho\ 0$ ou $1\ \rho\ b$ ou $1\ \rho\ a$.
  Nous allons maintenant prouver que tous ces trois cas sont impossibles en utilisant le fait que la restriction de ρ à N est triviale.
  - *cas 1 :* $1\ \rho\ 0$ *et* $a\ \rho\ a$ *impliquent que* $1\times a\ \rho\ 0\times a$ *donc* $a\ \rho\ 0$ *ce qui contredit le fait que la restriction de ρ à N est triviale.*
  - *cas 2 :* $1\ \rho\ b$ *et* $a\ \rho\ a$ *impliquent que* $1\times a\ \rho\ b\times a$ *donc* $a\ \rho\ 0$ *ce qui contredit le fait que la restriction de ρ à N est triviale.*
  - *cas 3 :* $1\ \rho\ a$ *et* $b\ \rho\ b$ *impliquent que* $1\times b\ \rho\ a\times b$ *donc* $b\ \rho\ 0$ *ce qui contredit aussi le fait que la restriction de ρ à N est triviale.*

  ceci prouve que la restriction de ρ à N est non triviale. Et ainsi N est essentiel dans M.

Remarque 4.3.3. *Soient $\overline{\mathfrak{C}}_{RM}$ la classe des sous semi-modules semi-essentiels dans un R semi-module M introduits dans ce chapitre, $\mathfrak{C}_{RM}$ la classe des sous semi-modules essentiels dans un R semi-module M comme traités dans le chapitre 2, voir aussi [17].*

Nous allons montrer dans les deux exemples qui suivent qu'aucune des deux classes n'est contenue dans l'autre.

Exemples 4.3.3. *Ici nous allons montrer que :* $\overline{\mathfrak{C}}_{RM} \nsubseteq \mathfrak{C}_{RM}$. *(voir [17]).*

Soit $n \geq 1$ *un nombre entier naturel. Considèrons l'ensemble*

$R = \{r \in \mathbb{Q}^+ / r \leq n\} \cup \{-\infty\}$ *où* $\mathbb{Q}^+$ *est l'ensemble des nombres rationnels positifs,* $-\infty$ *satisfait les conditions :* $-\infty \leq i$ *et* $-\infty + i = -\infty$, $\forall i \in R$. *Définissons sur* R *les opérations* $\oplus$ *et* $\otimes$ *comme suit :*

$\forall i; j \in R$ *;* $i \oplus j = \max(i; j)$ *et* $i \otimes j = \min(i + j; n)$

On vérifie alors aisément que $(R; \oplus; \otimes)$ *est un semi-anneau commutatif d'élément neutre* $-\infty$ *.*

R *est aussi un* R *semi-module à gauche. Posons* $R^* = R \setminus \{0\}$, *alors* R^* *est un idéal de* R. R^* *est un sous semi-module de* R.

- *Prouvons que* R^* *est semi-essentiel. Soit* $-\infty \neq x \in R$ *;* $\exists r \in \mathbb{Q}^*_+$ *avec* $r \leq n$ *tel que :* $r + x \leq n$.
  Et ainsi $r \otimes x = \min(r + x; n) = r + x$, *maintenant* $r + x \neq -\infty$ *et* $r + x \neq 0$ *ce qui implique* $r \otimes x \in R^*$ *donc* $R^* \trianglelefteq_s R$.
- *Prouvons que* R^* *n'est pas essentiel. Il suffirait de trouver une* R *relation de congruence qui n'est pas triviale sur* R *mais triviale sur* R^*.
  Soit ρ *une* R *relation de congruence sur* R *telle que :* $-\infty \; \rho \; 0$ *(* ρ *étant la plus petite* R*-relation de congruence pour laquelle les éléments* $-\infty$ *et* 0 *sont en relation). Supposons qu'il existe* $r \neq r' \in R^*$ *tel que :* $r \; \rho_{(-\infty,0)} \; r'$. *Alors* $r \; \rho_{(-\infty,0)} \; r' \Longrightarrow r \equiv_{\{-\infty;0\}} r'$.
  $r \equiv_{\{-\infty;0\}} r' \Longrightarrow r = 0$ *ou* $r' = 0$ *ou* $r = r'$ *ce qui est une contradiction.*
  D'où ρ *est triviale sur* R^*. *Ceci prouve d'après la proposition3.2.2 que* R^* *n'est pas essentiel dans* R.

Exemples 4.3.4. *Dans cet exemple, nous montrons que :* $\mathfrak{C}_{RM} \nsubseteq \overline{\mathfrak{C}}_{RM}$.

Soit $R = \{0, 1, a\}$ *et définissons sur* R *les deux opérations commutatives* $(+, \times)$ *comme suit :*

1. $0_R = 0$ *;* $1_R = 1$

2. $0 + 0 = 0$ *;* $0 + 1 = 1 + 1 = 1 + a = 1$ *;* $a + 0 = a + a = a$

3. $0 \times 0 = 0 \times 1 = 0 \times a = 0$ *;* $1 \times 1 = 1$ *;* $1 \times a = a \times a = a$.

Alors $(R, +, \times, 0, 1)$ *est un semi-anneau commutatif. Soit* $M = \{0, 1, a, b\}$ *avec les mêmes opérations définies dans* R *et* $1_M = 1_R = 1$, $0_M = 0_R = 0$, $b + 0 = b + b = b$, $b + 1 = b + a = a$, $0 \times b = b \times a = 0$, $b \times 1 = b \times b = b$. *Il est facile de voir que* $(M, +, \times, 0, 1)$ *est un* R *semi-module commutatif.*

Maintenant, posons $N = R = \{0; 1; a\}$, *alors* N *est un sous semi-module de* M

- <u>*Prouvons que* $N = \{0; 1; a\}$ *est essentiel dans* M</u>. *Soit* ρ *une* R *relation de congruence sur* M. *Supposons que la restriction de* ρ *à* N *est triviale.* ρ *n'est pas triviale sur* M *donc il existe* $x_0, y_0 \in M$ $x_0 \neq y_0$ *tel que* $x_0 \ \rho \ y_0$. ρ *triviale sur* N *implique* $x_0 \notin N$ *ou* $y_0 \notin N$ *donc* $x_0 = b$ *ou* $y_0 = b$. *Par conséquent il existe* $c \neq b$ *tel que* $b \ \rho \ c$ *donc* $b \ \rho \ 0$ *ou* $b \ \rho \ 1$ *ou* $b \ \rho \ a$.

  Maintenant nous allons montrer que ces trois cas sont impossibles en utilisant le fait que la restriction de ρ *à* N *est triviale.*

  - <u>*cas 1 :*</u> $b \ \rho \ 0$ *et* $a \ \rho \ a$ *impliquent que* $b + a \ \rho \ 0 + a$ *donc* $1 \ \rho \ a$ *ce qui contredit le fait que la restriction de* ρ *à* N *est triviale.*
  - <u>*cas 2 :*</u> $b \ \rho \ 1$ *impliquent que* $a \times b \ \rho \ a \times 1$ *donc* $0 \ \rho \ a$ *ce qui contredit le fait que la restriction de* ρ *à* N *est triviale.*
  - <u>*cas 3 :*</u> $b \ \rho \ a$ *et* $a \ \rho \ a$ *impliquent que* $b + a \ \rho \ a + a$ *donc* $1 \ \rho \ a$ *ce qui contredit le fait que la restriction de* ρ *à* N *est triviale.*

  Ceci prouve que la restriction de ρ *à* N *est non triviale. Et ainsi* N *essentiel dans* M.

- <u>*Montrons que* $N = \{0; 1; a\}$ *n'est pas semi-essentiel.*</u> $0 \neq b \in M$, *pour tout* $r \in R = \{0; 1; a\}$ *on a :* $r \times b = 0$ *ou* $r \times b = b$. *Ceci montre que* N *n'est pas semi-essentiel dans* M.

Proposition 4.3.6. *Soit M un R semi-module à gauche.*

Supposons que $K_1 \leq M_1 \leq M$; $K_2 \leq M_2 \leq M$ avec M_i soustractif $\forall i \in \{1;2\}$ et $M = M_1 \bar{\oplus} M_2$.

Alors $(K_1 \bar{\oplus} K_2) \trianglelefteq_s (M_1 \bar{\oplus} M_2) \Longleftrightarrow (K_1 \trianglelefteq_s M_1$ et $K_2 \trianglelefteq_s M_2)$.

Démonstration. – $\Longrightarrow$) Supposons par exemple $K_1 \ntrianglelefteq M_1$.

Alors il existe un sous semi-module $L_1 \neq \{0\}$ de M_1 tel que : $L_1 \cap K_1 = \{0\}$.

Ainsi montrons que : $L_1 \cap (K_1 + K_2) = \{0\}$

Soit $l_1 \in L_1 \cap (K_1 + K_2)$. Il existe $(k_1; k_2) \in K_1 \times K_2$ tel que : $l_1 = k_1 + k_2$. Nous avons : $l_1 \in L_1 \leq M_1$; $k_1 \in K_1 \leq M_1$ et comme M_1 est soustractif donc $k_2 \in M_1$ on a aussi $k_2 \in M_2$ ainsi $k_2 = 0$.

$k_2 = 0 \Longrightarrow l_1 = k_1 = 0$. Par conséquent $L_1 \cap (K_1 \bar{\oplus} K_2) = \{0\}$.

D'où $(K_1 \bar{\oplus} K_2) \ntrianglelefteq_s (M_1 \bar{\oplus} M_2)$.

– $\Longleftarrow$) Supposons que $K_i \trianglelefteq_s M_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

Soit $0 \neq x \in M_1 \bar{\oplus} M_2$. Alors, il existe $(0, 0) \neq (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ tel que : $0 \neq x = x_1 + x_2$.

Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que : $0 \neq x_1 \in M_1$.

Puisque $K_1 \trianglelefteq_s M_1$ donc d'après le lemme 4.3.1, il existe un $r_1 \in R$ tel que : $r_1 x_1 \in K_1$ et $r_1 x_1 \neq 0$.

– Si $r_1 x_2 \in K_2$ alors $r_1 x_1 + r_1 x_2 \in K_1 + K_2$ donc $r_1(x_1 + x_2) \in K_1 \bar{\oplus} K_2$ avec $r_1(x_1 + x_2) \neq 0$ car si $r_1 x_1 + r_1 x_2 = 0$ avec M_2 substractive et $M_2 \cap M_1 = \{0\}$, alors $r_1 x_1 = 0$, ce qui est absurde .

  Par conséquent $(K_1 \bar{\oplus} K_2) \trianglelefteq_s (M_1 \bar{\oplus} M_2)$.

– Si $r_1 x_2$ n'appartient pas à K_2 alors il existe $r_2 \in R$ tel que : $0 \neq r_2 r_1 x_2 \in K_2$.

  On sait que $r_2 r_1 x_1 \in K_1$ donc $r_2 r_1 (x_1 + x_2) \in K_1 \bar{\oplus} K_2$.

  Si on pose $r = r_2 r_1$ alors il existe $r \in R$ tel que : $r(x_1 + x_2) \in K_1 \bar{\oplus} K_2$ avec $r(x_1 + x_2) \neq 0$ car si $r x_1 + r x_2 = 0$ avec M_1 soustractif et

$M_2 \cap M_1 = \{0\}$ alors $rx_2 = 0$ ce qui implique que $rx_1 = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent $(K_1 \bar{\oplus} K_2) \trianglelefteq_s (M_1 \bar{\oplus} M_2)$.
D'où $K_i \trianglelefteq_s M_i$ pour tout $i \in \{1; 2\} \Longrightarrow (K_1 \bar{\oplus} K_2) \trianglelefteq_s (M_1 \bar{\oplus} M_2)$.

$\square$

Définition 4.3.3. *Soit N un sous semi-module d'un R semi-module à gauche M.*

Un sous semi-module N' de M est dit M-complément de N si N' est maximal et $N \cap N' = \{0\}$.

Dans ce qui suit, nous donnons un exemple non trivial de sous semi-module fortement soustractif.

Exemples 4.3.5. *Soit R, le semi-anneau $R([0, 1], max, min, 0, 1)$ où $[0, 1]$ est l'intervalle unité de la droite numérique muni de l'addition (resp : multiplication) de x et y est définie par $x \oplus y = max(x, y)$ (resp : $x \otimes y = min(x, y)$). R est un R semi-module à gauche. Considèrons l'idéal $N = R \setminus \{1\}$, N est un sous semi-module de R. Si $x \oplus y = max(x, y) \in N$ alors $x < 1$ et $y < 1$ donc $x \in N$ et $y \in N$. D'où N est fortement soustractif.*

Proposition 4.3.7.
1. *Tout sous semi-module N d'un R semi-module à gauche M possède un M-complément.*
2. *Si N' est un M-complément d'un sous semi-module fortement soustractif N de M alors : $N \bar{\oplus} N' \trianglelefteq_s M$*

Démonstration. 1. Posons $\pounds = \{A \leq M; A \cap N = \{0\}\}$.
$\{0\} \in \pounds$ donc $\pounds \neq \varnothing$.$(\pounds; \subseteq)$ est un ensemble ordonné non vide. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\pounds$ tel que : $A_i \subset A_{i+1}$; $\forall i \in \mathbb{N}$.
Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $A \leq M$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$A_n \cap N = \{0\} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap N) = \{0\}$. Donc $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap N = \{0\}$.
Par conséquent $A \cap N = \{0\}$ et donc $A \in \pounds$.

$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A$ donc A est la borne supérieure de $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$. Soit $K \in \pounds$ tel que $A_n \subset K$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc on a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset K$.

Ainsi $\pounds$ est un ensemble inductif non vide. Donc $\pounds$ possède un élément maximal N'. Et N' est un M-complément de N.

2. Soit $L \leq M$ tel que : $(N\bar{\oplus}N') \cap L = \{0\}$.

   $(N\bar{\oplus}N') \cap L = \{0\} \Longrightarrow N' \cap L = \{0\}$.

   On a aussi $(N\bar{\oplus}N') \cap L = \{0\} \Longrightarrow N \cap L = \{0\}$

   Soit $n \in N \cap (N' + L)$. Il existe $n' \in N', l \in L$ tel que : $n = n' + l$.

   $n' + l \in N$ avec N fortement soustractif donc $n' \in N$ et $l \in N$. On a $N \cap N' = \{0\}$ et $N \cap L = \{0\}$ donc $n' = l = 0$ et ainsi $n = 0$.

   D'où $N \cap (N' + L) = \{0\}$. D'autre part on a $N' \subset (N' + L)$ et N' est un M-complément de N donc $N' + L = N' \Longrightarrow L \subset N'$, mais $N' \cap L = \{0\}$ donc $L = \{0\}$. D'où $(N\bar{\oplus}N') \trianglelefteq_s M$.

$\square$

Chapitre 5

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SEMI-MODULES S-HOPFIENS ET S-CO-HOPFIENS

5.1 Introduction

Ce chapitre est constitué de l'article [37].

La théorie des semi-modules et semi-anneaux, vue comme étant une généralisation de la théorie des anneaux et modules, a été étudiée depuis les années 50.

Dans la théorie des modules, les notions de hopfiens et co-hopfiens sur les modules et les notions de I-anneau et S-anneau ont été intensément étudiées par plusieurs chercheurs.

De manière anologue à celle de la théorie des modules, dans ce chapitre, nous introduisons les notions de S-hopfiens et S-co-hopfiens sur les semi-modules soustractifs sur les semi-anneaux et nous étudions aussi quelques unes de leurs propriétés. De plus, nous donnons de nouvelles variantes du lemme de Fitting qui est déjà connue sur les semi-modules voir [17] .

En particulier, beaucoup de résultats sur les semi-anneaux et semi-modules restent valables pour les anneaux et modules, mais non réciproquement (voir par exemple dans les préliminaires).

La caractérisation des modules pour lesquels tout endomorphisme surjectif est un automorphisme (= module vérifiant la propriété S ou modules hopfien) et les modules pour lesquels tout endomorphisme injectif est un automorphisme (= modules vérifiant la propriété I ou modules co-hopfien) a été étudiée intensément depuis 1970 par plusieurs auteurs.

Dans ce chapitre, nous allons noter par $End(M)$, le semi-anneau des R endomorphismes d'un R semi-module à gauche M et nous considèrons $End(M)$ comme un domaine opérant à gauche de M.

Ce chapitre est organisé comme suit :

- Dans un premier temps nous donnons quelques résultats préliminaires que nous allons utiliser dans la suite de ce travail ;
- Ensuite nous terminons par les propriétés caractéristiques des semi-modules S-hopfiens et S-co-hopfiens complètement soustractifs et deux variantes du lemme de Fitting sur les semi-modules.

5.2 Préliminaires

Dans ces préliminaires nous donnons quelques définitions et résultats de base.

Il est à noter que les définitions des semi-modules artiniens et noethériens restent les mêmes dans le cas des modules (voir chapitre 1)

Définition 5.2.1. *Soit M un R semi-module à gauche.*

1. *La longueur* $\lambda(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *de* M *est définie comme suit :*

$$\lambda(M) = sup\{r \in \mathbb{N}; \exists \quad \{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_r = M\}$$

c'est à dire $\lambda(M)$ *est la plus grande des longueurs de chaînes strictement croissantes de sous semi-modules dans* M.

2. *Un* R *semi-module* M *de longueur* $\lambda(M) \leq 1$ *c'est à dire un* R *semi-module n'admettant pas de sous semi-modules propres est dit austère.*

Remarque 5.2.1. *Un* R *semi-module est à la fois artinien et noetherien si, et seulement si, sa longueur est finie.*

Dans ce chapitre nous utilisons le plus souvent des semi-modules complètement soustractifs (déjà définis dans le chapitre 2). C'est à cet effet que nous avons construis ici un exemple de semi-module complètement soustractif.

Exemples 5.2.1. *(voir [50]) Soit* $R_3 = \{0, 1, a\}$. *Alors* $(R_3, +, \times)$ *est un semi-anneau complètement soustractif avec l'addition et la multiplication ci dessous et* ${}_{R_3}R_3$ *est un semi-module complètement soustractif.*

$+$	0	1	a
0	0	1	a
1	1	1	1
a	a	1	a

$\times$	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	a

Exemples 5.2.2. *(voir [50])*

1. *Maintenant considèrons le semi-anneau commutatif* $(H, +, \times)$ *où* $H = \{0, 1, a\}$ *avec les opérations définies dans l'exemple 5.2.1 avec comme exception* $1 + a = a$. *Soit* $H' = \{0, a\}$ *un idéal de* H . *Supposons que* $h : H \to H'$ *est un homomorphisme de semi-anneaux tel que :* $Kerh = \{0, a\}$, *on voit que* $h(1) = 0$.
   Cependant, ceci contredit le fait que $Kerh = \{0, a\}$. *Donc, il n'existe pas d'homomorphisme de semi-anneau* $h : H \to H'$ *tel que :* $Kerh = \{0, a\}$.

2. *Considérons un $\mathbb{B}$ semi-module $M = \{0, 1, a, b\}$ où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ est le semi-anneau de Boole et son sous semi-module $N = \{0, 1, a\}$ alors définissons le $\mathbb{B}$-homomorphisme $g : M \to N$ tel que $g(0) = 0$,*

   $g(a) = a,\ g(b) = g(1) = 1$. On a $Kerg = \{0\}$, mais g n'est pas injectif. De plus, Soit $i : N \to M$ l'inclusion, on a $Im(i) = M$ et $i(N) = N$, cependant $\frac{M}{Im(i)} = \{\overline{0}\} = \frac{M}{i(N)}$.

Définition 5.2.2. *Rappellons que si $f : M \to N$ est un R homomorphisme de R semi-modules à gauche et $m, m' \in M$ tel que $m \equiv_{Ker(f)} m'$ alors certainement $m \equiv_f m'$, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie (voir [17]). Si les relations $\equiv_{Ker(f)}$ et $\equiv_f$ coincident, alors le R homomorphisme f est dit rigide.*

Exemples 5.2.3. *Dans la seconde partie de l'exemple ci dessus,*
- *on a g n'est pas injectif car $g(b) = g(1)$*
- *on a aussi $Ker(g) = \{0\}$*

alors $b \equiv_g 1$ mais $b \equiv_{Ker(g)} 1 \Leftrightarrow b \equiv_{\{0\}} 1 \Leftrightarrow b = 1$ ce qui est faux. D'où g n'est pas rigide.

Remarque 5.2.2. *(voir [17]) Un R homomorphisme rigide $f : M \to N$ est un monomorphisme si, et seulement si, $Ker(f) = \{0\}$*

Proposition 5.2.1. *Si f est un R endomorphisme rigide d'un R semi-module à gauche M, alors f^n est rigide pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. (voir [17]) □

Proposition 5.2.2. *Si f est un R endomorphisme rigide d'un R semi-module à gauche M, alors f est un endomorphisme k-régulier d'un R semi-module à gauche.*

Démonstration. évidente □

Définition 5.2.3. *1. Le semi-anneau R est dit π-régulier à droite si pour chaque $f \in R$ il existe $g, h \in R$ et un entier $n \geq 1$ tels que :*

$$f^n + f^{2n}g = f^{2n}h$$

2. Le semi-anneau R est dit π-régulier à gauche si pour chaque $f \in R$ il existe $g, h \in R$ et un nombre entier $n \geq 1$ tels que :

$$f^n + gf^{2n} = hf^{2n}$$

3. Le semi-anneau R est dit π-régulier s'il est π-régulier à la fois à gauche et à droite.

NB : Il existe d'autres définitions de la π-régularité pour les semi-anneaux.

Lemme 5.2.1. *Si M est complètement soustractif alors chaque endomorphisme de M est i-régulier.*

Démonstration. Cette preuve se déduit directement du lemme 1.12 voir [34] □

Définition 5.2.4. *Soit R un semi-anneau. Un R semi-module à gauche M est Fitting (resp : faible-Fitting) si pour tout endomorphisme rigide f de M il existe un entier $n \geq 1$ tel que : $M = f^n(M) \oplus Ker(f^n)$*
(resp : $M = f^n(M) \overline{\oplus} Ker(f^n)$).

Le lemme suivant est connu et bien utilisé dans la théorie des modules. La première version du lemme de Fitting dans la théorie des semi-modules a été proposée dans [17]. Dans ce chapitre, nous donnerons deux autres versions avec différentes considèrations (et en utilisant les différentes notions des sommes directes).

Lemme 5.2.2. ***Lemme de Fitting*** *(voir [17]) Soit M un R semi-module à gauche simplifiable satisfaisant à la fois la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante sur les sous semi-modules et soit*

$f \in End(M)$ un R endomorphisme rigide de M satisfaisant la condition qui est

$$M = f^n(M) + Ker(f^n)$$

pour un certain entier naturel n. Alors il existe un nombre entier naturel m pour lequel

$$M = f^m(M) \oplus Ker(f^m)$$

Démonstration. (voir [17]) □

5.3 Résultats fondamentaux

Rappelons que (voir [6])

Soit R un anneau, M un R-module et $f \in End(M)$. En théorie des modules, nous avons :

(1) $Imf(M) = Imf^2(M) \Leftrightarrow M = Imf(M) + Ker(f)$

(2) $Ker(f) = Ker(f^2) \Leftrightarrow \{0\} = Imf(M) \cap Ker(f)$

Dans ce qui suit nous allons généraliser ces propretés dans le cas des semi-modules.

Théorème 5.3.1. *Soient R un semi-anneau, M un R semi-module à gauche, f un endomorphisme de M et $n \geq 1$ un nombre entier naturel.*

(1) (a) *Si M est complètement soustractif et f est un endomorphisme rigide de M alors,*
$f^n(M) = f^{2n}(M) \Rightarrow M = f^n(M) + Ker(f^n)$

(b) $M = f^n(M) + Ker(f^n) \Rightarrow f^n(M) = f^{2n}(M)$

(2) $Ker(f^n) = Ker(f^{2n}) \Leftrightarrow \{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n)$

Démonstration. (1) (a) $f^n(M) = f^{2n}(M) \Longrightarrow M = f^n(M) + Ker(f^n)$

Soit $f^n \in End(M)$ et $m \in M$, il existe $m' \in M$ tel que :

$$f^n(m) = f^{2n}(m')$$

$$f^n(m) = f^n(f^n(m'))$$

$$m \equiv_{f^n} f^n(m') \Rightarrow m \equiv_{Ker(f^n)} f^n(m')$$

par le fait que f^n est rigide et on a

$$m + k = f^n(m') + k' \text{ pour certains } k, k' \in Ker(f^n)$$

$f^n(m') \in f^n(M), \quad k, k' \in Ker(f^n) \quad \Rightarrow \quad k, f^n(m') + k' \in f^n(M) + Ker(f^n)$ et $f^n(M) + Ker(f^n)$ est soustractif dans M alors $m \in f^n(M) + Ker(f^n)$. Donc

$$M = f^n(M) + Ker(f^n)$$

(b) Montrons que $M = f^n(M) + Ker(f^n) \Longrightarrow f^n(M) = f^{2n}(M)$. Soit $y \in f^n(M) \Rightarrow y = f^n(x)$ pour $x \in M$ on a $x = f^n(m) + k$ pour un certain $m \in M$ et $k \in Ker(f^n)$ et

$$y = f^n(x) = f^n(f^n(m) + k) = f^{2n}(m) \Rightarrow y \in f^{2n}(M)$$

alors

$$f^n(M) \subseteq f^{2n}(M)$$

donc

$$f^n(M) = f^{2n}(M)$$

(2) $Ker(f^n) = Ker(f^{2n}) \Leftrightarrow \{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n)$

*)) Montrons que : $Ker(f^n) = Ker(f^{2n}) \Rightarrow \{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n)$
Soit $y \in f^n(M) \cap ker(f^n)$ il existe $x \in M$ tel que $y = f^n(x)$.
Puisque $f^n(y) = f^{2n}(x) = 0$ on a $f^{2n}(x) = 0$ et
$x \in Ker(f^{2n}) = Ker(f^n) \Rightarrow f^n(x) = 0 \Rightarrow y = 0$.
D'où $f^n(M) \cap Ker(f^n) = \{0\}$

**)) Montrons que $\{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n) \Rightarrow Ker(f^n) = Ker(f^{2n})$.
Soit $x \in Ker(f^{2n})$ on a $f^{2n}(x) = 0$
et $f^n(f^n(x)) = 0 \Rightarrow f^n(x) \in Ker(f^n) \cap f^n(M)$ ce qui implique

$f^n(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f^n) \Rightarrow Ker(f^{2n}) \subseteq Ker(f^n)$.

D'où $Ker(f^{2n}) = Ker(f^n)$

$\square$

Lemme 5.3.1. *Soit R un semi-anneau. Si un R semi-module à gauche soustractif M possède une longueur finie, alors il est faible de Fitting.*

Démonstration. Soit f un endomorphisme rigide. Puisque les chaînes $(f^i(M))_{i\in\mathbb{N}}$ et $(Kerf^i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont finies, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $g = f^n$ satisfait $Kerg^2 = Kerg$ mais aussi $g^2(M) = g(M)$. Puisque M est soustractif et f est rigide alors $M = g(M)\overline{\oplus}Kerg$ d'après le théorème 5.3.1. $\square$

Rappelons que, dans la théorie des modules, un R-module à gauche M est dit hopfien (resp.co-hopfien) si tout endomorphisme surjectif (resp. injectif) de M est un automorphisme.

Puisque, dans la théorie des semi-modules,

injectif=monomorphisme $\neq$ semi-monomorphisme et surjectif $\neq$ épimorphisme (voir [1]), alors il est intéressant d'étudier les notions de hopfien et co-hopfien dans la théorie des semi-modules.

Ici nous proposons la définition ci dessous et notre résultat fondemental est de caractériser ces classes de semi-modules comme dans la théorie des modules.

Définition 5.3.1. *Soit R un semi-anneau . Un R semi-module à gauche M est dit S-hopfien-1 (resp.S-co-hopfien-1) si tout endomorphisme surjectif (resp. injectif) de M est un semi-automorphisme (resp. automorphisme).*

Remarquons que " semi-automorphisme rigide = automorphisme" d'après la proposition 5.2.2

Proposition 5.3.1. *Soient R un semi-anneau, M un R semi-module à gauche.*

(1) *Si M est un semi-module artinien et complètement soustractif, et f un endomorphisme rigide de M, alors il existe $n \in N$ tel que :* $M = f^n(M) + Ker(f^n)$.

(2) *Si M est un semi-module noethérien, et f un endomorphisme de M, alors il existe $n \in N$ tel que :* $\{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n)$.

Démonstration. (1) La condition de chaîne descendante garantit que

$$... \subseteq f^k(M) ... \subseteq f^2(M) \subseteq f(M) \subseteq M$$

n'est pas strictement décroissante c'est à dire que :

$$f^n(M) = f^{n+1}(M) = ... = f^{2n}(M) = ... \text{ pour un certain entier } n \geq 1$$

Pour $x \in M$, on a : $f^n(x) = f^{2n}(y)$ pour un certain $y \in M$

$$\Rightarrow f^n(x) = f^{2n}(y)$$

$$\Rightarrow f^n(x) = f^n(f^n(y))$$

$$\Rightarrow x \equiv_{f^n} f^n(y) \Rightarrow x \equiv_{Ker(f^n)} f^n(y)$$

d'après le fait que f est rigide et on a

$$x + k = f^n(y) + k' \text{ pour } k, k' \in ker(f^n)$$

$$f^n(y) \in f^n(M) \text{ et } k, k' \in ker(f^n) \;\Rightarrow\; k, f^n(y) + k' \in f^n(M) + Ker(f^n).$$

Puisque, $f^n(M) + Ker(f^n)$ est soustractif dans M donc $x \in f^n(M) + Ker(f^n)$ et on a : $M \subseteq f^n(M) + Ker(f^n)$. D'où

$$M = f^n(M) + Ker(f^n)$$

(2) De la même manière la condition de chaîne ascendante garantit que

$$\{0\} \subseteq Kerf \subseteq Kerf^2 \subseteq ... \subseteq Kerf^k \subseteq ...$$

n'est pas strictement croissante c'est à dire que

$$Kerf^n = Kerf^{n+1} = ... = Kerf^{2n} = ..., \text{pour un certain entier } n \geq 1.$$

Soit $x \in f^n(M) \cap Ker(f^n)$ alors $f^n(x) = 0$ et $x = f^n(y)$ pour un $x \in M$.
$f^n(x) = f^{2n}(y) = 0 \Rightarrow y \in Ker(f^{2n}) = Ker(f^n) \Rightarrow f^n(y) = x = 0$.
D'où $f^n(M) \cap Ker(f^n) = \{0\}$.

□

Dans le Golan [17], nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.3.2. *Soit R un semi-anneau et M un R semi-module à gauche. Soit α un endomorphisme rigide de M. Alors une condition suffisante pour que α soit un isomorphisme est qu'il soit un monomorphisme et M satisfait la CCA de M ou qu'il soit surjectif et M satisfait la CCD.*

Nous généralisons ce résultat dans le théorème qui suit.

Théorème 5.3.2. *Soit R un semi-anneau et M un R semi-module à gauche.*

(1) *Si M est un semi-module artinien, alors M est S-co-hopfien-1.*

(2) *Si M est un semi-module noethérien, alors M est S-hopfien-1.*

Démonstration. (1) Soit f un endomorphisme de M. Puisque M est artinien alors la condition de chaîne descendante garantit que

$$... \subseteq f^k(M) ... \subseteq f^2(M) \subseteq f(M) \subseteq M$$

n'est pas strictement décroissante c'est à dire que

$$f^n(M) = f^{n+1}(M) = ... = f^{2n}(M) = ... \text{ pour un certain entier } n \geq 1.$$

Soit $x \in M$on a$f^n(x) = f^{2n}(y)$ pour un certain $y \in M$

$$\Rightarrow f^n(x) = f^{2n}(y)$$

$$\Rightarrow f^n(x) = f^n(f^n(y))$$

Mais f est un endomorphisme implique que f^n est un endomorphisme, alors $x = f^n(y)$ et on a $M \subseteq f^n(M)$. D'où $M = f^n(M)$ qui implique que $M = f(M)$ et que f est surjectif donc M est S-co-hopfien-1.

(2) Soit f un endomorphisme surjectif alors d'après la seconde partie de la proposition 5.3.3, on a $\{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n)$ pour un certain n. Puisque f est surjectif donc f^n est surjectif par conséquent $f^n(M) = M$ qui implique que
$\{0\} = M \cap Ker(f^n) \Rightarrow Ker(f^n) = \{0\} \Rightarrow Ker(f) = \{0\}$, ceci implique que f est un semi-automorphisme, et M est S-hopfien-I.

□

Définition 5.3.2. *Soit R un semi-anneau et M un R semi-module à gauche. Un R sous semi-module à gauche H de M est dit totalement invariant dans M, si $f(H) \subseteq H$ pour chaque $f \in End(M)$.*

Proposition 5.3.3. *Soit R un semi-anneau et soit $M_j (j \in J)$ une famille non vide de sous semi-modules d'un R semi-module à gauche M tel que : $M = \oplus_{j \in J} M_j$.*

(1) *Si M est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1), alors M_j est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1) $\forall j \in J$*

(2) *Supposons que $\forall j \in J$, M_j est totalement invariant dans M. Si M_j est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1) pour chaque $j \in J$ alors M est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1).*

Démonstration. (1) (a) Supposons que M est S-hopfien-1, soit $i \in J$ et prouvons que M_i est S-hopfien-1.

Soit $f_i : M_i \to M_i$ un R-endomorphisme surjectif.

Définissons $f : M \to M : m = \sum_{j \in J} m_j \mapsto f(m) = \sum_{j \in J} f_i^{\delta_{ij}}(m_i)$, où $f_i^{\delta_{ij}} = f_i$ si $j = i$ et $f_i^{\delta_{ij}} = Id_{M_i}$ si $j \neq i$

f est bien définie.

Nous savons que f_i est surjectif.

Prouvons que f est surjectif.

Soit $n = (n_j)_{j\in J} \in M$; puisque f_i est surjectif, il existe $m_i \in M_i$ tel que $f_i(m_i) = n_i$, alors on a :

$n = (n_j)_{j\in J} = f_i(m_i) + \sum_{j\neq i} n_j = f\big(m_i + \sum_{j\neq i} n_j\big)$.

Posons $m = m_i + \sum_{j\neq i} n_j$ alors $n = f(m)$. Ceci implique que f est surjectif.

Puisque M est S-hopfien-1, alors f est un semi-automorphisme. Soit $m_i \in M_i$ tel que $f_i(m_i) = 0$. On a $f(m_i) = f_i(m_i) + 0 = 0$, donc $f(m_i) = 0 \Rightarrow m_i = 0$ (car f est un semi-automorphisme). D'où f_i est aussi un semi-automorphisme ce qui implique que M_i est S-hopfien-1 pour chaque $i \in J$ comme voulu.

(b) Supposons que M est S-co-hopfien-1, soit $i \in J$ et prouvons que M_i est S-co-hopfien-1.

Soit $f_i : M_i \to M_i$ R-endomorphisme injectif.

Définissons f comme suit :

$f : M \to M : m = \sum_{j\in J} m_j \mapsto f(m) = \sum_{j\in J} f_i^{\delta_{ij}}(m_i)$,

où $f_i^{\delta_{ij}} = f_i$ si $j = i$ et $f_i^{\delta_{ij}} = Id_{M_i}$ si $j \neq i$.

Prouvons que f est injectif. Soit $m, m' \in M$ tel que : $f(m) = f(m')$ avec $m = (m_j)_{j\in J}$ et $m' = (m'_j)_{j\in J}$.

$f(m) = f(m') \Rightarrow f_i(m_i) + \sum_{j\neq i} m_j = f_i(m'_i) + \sum_{j\neq i} m'_j$. Ce qui implique $f_i(m_i) = f_i(m'_i)$ et $m_j = m'_j$ pour $j \neq i$, d'après l'unicité de la décomposition. Puisque f_i est injectif alors on a $m_i = m'_i$ et $m = m'$ et ainsi f est injectif.

Nous savons que M est S-co-hopfien-1 donc f est surjectif.

Prouvons que f_i est surjectif .

Soit $n_i \in M_i$ alors il existe $m \in M$ tel que $f(m) = n_i$. Notons $m = (m_j)_{j\in J}$, on a $f_i(m_i) + \sum_{j\neq i} m_j = n_i + 0 \in M$, alors $f_i(m_i) = n_i$ et $m_j = 0$ pour $j \neq i$, puisque f_i est surjectif alors M_i est S-co-hopfien-1 pour chaque i.

(2) Supposons que $\forall j \in J$, M_j est pleinement invariant dans M.

(a) $f : M \to M : f_i : M_i \to M_i : x_i \mapsto f_i(x_i) = f(x_i)$ avec $f(M_i) \subseteq M_i$ f_i est linéaire. M_i est S-hopfien-1 , f est surjectif. Prouvons que chaque f_i est surjectif. Soit $y_i \in M_i$, alors il existe $x \in M$ tel que $y_i = f(x)$ où $x = \Sigma_{j\in J} x_j = x_i + \Sigma_{j\neq i} x_j$
($J \subset K$et card J $< \infty$) $y_i = f(x_i) + f(\Sigma_{j\neq i} x_j) = f(x_i) + \Sigma_{j\neq i} f(x_j)$
Ainsi on a $y_i = f(x_i)$ et $\Sigma_{j\neq i} f(x_j) = 0$ d'après l'unicité de la décomposition.
$y_i = f(x_i) \Longrightarrow y_i = f_i(x_i)$ donc f_i est surjectif.
Puisque M_i est S-hopfien-1 donc f_i est un semi-automorphisme. Soit $x \in M$ tel que $f(x) = 0$ où $x = \Sigma_{i\in J\subset K} x_i$ avec J fini. Alors on a $f(\Sigma_{i\in J\subset K} x_i) = 0$, ceci implique que $\Sigma_{i\in J\subset K} f(x_i) = 0$. D'aprés l'unicité de la décomposition $f(x_i) = 0$ et ceci implique $f_i(x_i) = 0$ mais f_i est un semi-automorphisme, d'où $x_i = 0$ pour chaque i et ainsi $x = 0$. D'où f est un semi-automorphisme. Ceci implique que M est S-hopfien-1.

(b) Supposons que M_i est S-co-hopfien-1 et f est injectif.
$f_i(x_i) = f_i(x_i') \Longrightarrow f(x_i) = f(x_i') \Longrightarrow x_i = x_i'$ car f est injectif.
D'où f_i est injectif pour chaque i.
M_i est S-co-hopfien-1 et f_i est injectif, donc f_i est surjectif.
Prouvons que f est surjectif. Soit $y \in M$ tel que $y = f(x)$ pour $x \in M$.
Posons $y = \Sigma_i y_i$ puisque f_i est surjectif , il existe $x_i \in M_i$ tel que $y_i = f_i(x_i)$ mais $f_i(x_i) = f(x_i)$ donc $y_i = f_i(x_i) = f(x_i)$.
D'où $y = f(\Sigma_i x_i) = f(x)$ où $x = \Sigma_i x_i$. Par conséquent f est surjectif et M est S-co-hopfien-1.

$\square$

Proposition 5.3.4. *Soit M un R semi-module produit de R sous semi-modules M_i $(i \in I)$. Alors*

(1) *si M est un S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1) alors pour tout ($i \in I$), M_i est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1).*

(2) *Supposons que $Hom_R(M_i, M_j) = \{0\}$ pour chaque couple $(i, j) \in I^2$ et $i \neq j$; si M_i est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1) pour tout $i \in I$, alors M est S-hopfien-1 (resp. S-co-hopfien-1).*

Démonstration. (1) (a) Supposons que M est un S-hopfien-1 et prouvons que M_i est un S-hopfien-1 pour tout i.

Soit $f_i : M_i \to M_i$ un R-endomorphisme surjectif, définie par : $f_i^{\delta_{ij}} = f_i$ si $i = j$ et $f_i^{\delta_{ij}} = Id_{M_i}$ si $i \neq j$.

Maintenant définissons

$$\begin{array}{rcl} f : M & \longrightarrow & M \\ (x_j)_{j\in J} & \mapsto & \big(f_i^{\delta_{ij}}(x_j)\big)_{j\in J} \end{array}$$

Soit $(y_j)_{j\in J} \in M$. f_i est surjectif donc il existe $x_i \in M_i$ tel que : $y_i = f_i(x_i)$.

Posons $x_j = y_j$ si $j \neq i$. On a $f\big((x_j)_{j\in J}\big) = \big(f_i^{\delta_{ij}}(x_j)\big)_{j\in J} = (y_j)_{j\in J}$.

Donc f est surjectif.

Puisque M est S-hopfien-1, donc f est un semi-automorphisme.

Soit $x_i \in M$, tel que $f_i(x_i) = 0$, posons $x_j = 0$, si $j \neq i$. Alors $f\big((x_j)_{j\in J}\big) = 0_M$. Mais f est un semi-automorphisme, donc $x_i = 0$, par conséquent f_i est un semi-automorphisme ce qui implique que M_i est S-hopfien-1.

(b) Supposons que M est un S-hopfien-1 et prouvons que M_i est un S-hopfien-1 pour tout i.

Soit $f_i : M_i \to M_i$ un R endomorphisme injectif et définissons $f_i^{\delta_{ij}} = f_i$ si $i = j$ et $f_i^{\delta_{ij}} = Id_{M_i}$ si $i \neq j$.

Maintenant, définissons

$$\begin{array}{rcl} f : M & \longrightarrow & M \\ (x_j)_{j\in J} & \mapsto & \big(f_i^{\delta_{ij}}(x_j)\big)_{j\in J} \end{array}$$

Soit $(x_j)_{j\in J}, (x'_j)_{j\in J} \in M$ tel que $f\big((x_j)_{j\in J}\big) = f\big((x'_j)_{j\in J}\big)$ donc $\big(f_i^{\delta_{ij}}(x_j)\big)_{j\in J} = \big(f_i^{\delta_{ij}}(x'_j)\big)_{j\in J}$ par conséquent

$\left\{\begin{array}{l} f_i(x_i) = f_i(x'_i) \\ x_j = x'_j, j \neq i \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_i = x'_i \\ x_j = x'_j, j \neq i \end{array}\right.$ car f_i est injectif.

On conclut que f est injectif.

Maintenant, puisque M est S-Co-hopfien-1 donc f est surjectif.

Soit $y_i \in M_i$ et $y_j = 0$ pour $j \neq i$. Puisque f est surjectif, donc il existe $(x_j)_{j\in J} \in M$ tel que $(y_j)_{j\in J} = f\big((x_j)_{j\in J}\big) = \big(f_i^{\delta_{ij}}(x_j)\big)_{j\in J}$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_i = f_i(x_i) \\ y_j = x_j = 0, i \neq j \end{array}\right.$

On en déduit que f_i est surjectif et M_i est S-co-hopfien-1 pour tout i.

(2) Supposons que $Hom_R(M_i, M_j) = 0$ pour chaque $(i,j) \in I^2$ et $i \neq j$.

On définie $\delta_{ik}x_i = x_i$ si $k = i$ et $\delta_{ik}x_i = 0$ si $k \neq i$.

On définit $\pi_i : M \to M_i : \pi_i\big((x_k)_{k\in J}\big) = x_i$ la projection naturelle et $j_i : M_i \to M : j_i(x_i) = (\delta_{ik}x_i)_{k\in J}$ l'injection canonique.

Donc $Id_M = \sum_{k\in J} j_k \circ \pi_k$ et $j_i \circ \pi_i = Id_{M_i}$ pour chaque $i \in J$.

(a) Supposons que M_i est S-hopfien-1 pour chaque i et prouvons que M est S-hopfien-1.

Soit $f : M \to M$ un endomorphisme surjectif où $M = \Pi_{k\in J} M_k$ et

$$f_i : M_i \to M_i$$

$$x_i \mapsto f_i(x_i) = \pi_i \circ f \circ j_i(x_i) = \pi_i \circ f(\delta_{ik}x_i)_k$$

Prouvons que f_i est surjectif.

Soit $y_i \in M_i$ et $(y_i, 0) \in M$, puisque f est surjectif donc il existe $x = (x_k)_{k\in J} \in M$ tel que $y = (\delta_{ik}y_i)_k = f(x_k)_{k\in J}$.

$\pi_i(y) = \pi_i \circ f(x_k)_{k\in J} = \pi_i \circ f[(\delta_{ik}x_i)_k + (\gamma_{ik}x_k)_k]$ où $\delta_{ik} = \left\{\begin{array}{ll} 1 \text{ if } i = k\,; \\ 0 \text{ if } i \neq k. \end{array}\right.$

et $\gamma_{ik} = \left\{\begin{array}{ll} 1 \text{ if } i \neq k\,; \\ 0 \text{ if } i = k. \end{array}\right.$

$y_i = \pi_i \circ f(\delta_{ik}x_i)_k + \pi_i \circ f(\gamma_{ik}x_k)_k = \pi_i \circ f \circ j_i(x_i) + \Sigma_{k\neq i}\pi_i \circ f \circ j_k(x_k)$
$= f_i(x_i)$ où $\pi_i \circ f \circ j_k = 0 : M_k \to M \to M_i$ car $Hom_R(M_k, M_i) = 0$
Puisque M_i est S-hopfien-1 et f_i est surjectif, donc f_i est un semi-automorphisme pour chaque i.
Prouvons que f est un semi-autoomorphisme.
Soit $x \in M$ alors $x = (x_i)_{i\in J} = \sum_{i\in J}(\delta_{ik}x_i)_{k\in J}$ et
$f(x) = \sum_i f(\delta_{ik}x_{ik}) = \sum_i f \circ j_i(x_i)$ mais on sait que
$Id_M = \sum_{k\in J} j_k \circ \pi_k \Rightarrow f = \Sigma_k j_k \circ \pi_k \circ f$ on en déduit que :
$f(x) = \sum_k j_k \circ \pi_k(\sum_i f \circ j_i(x_i)) = \sum_i j_i \circ \pi_i \circ f \circ j_i(x_i)$
$+ \sum_{k\neq i} j_k \circ (\pi_k \circ f \circ j_i)(x_i) = \sum_i j_i \circ f_i(x_i)$ car $Hom_R(M_k, M_i) = 0$.
Maintenant $f(x) = 0 \Rightarrow \sum_i j_i \circ f_i(x_i) = 0 \Rightarrow j_i \circ f_i(x_i) = 0 \quad \forall i$.
Ce qui implique $x_i = 0 \quad \forall i$ car f_i est un semi-automorphisme et j_i est injectif. D'où f est un semi-automorphisme et on en conclut que M est S-hopfien-1.

(b) Supposons que M_i est S-co-hopfien-1 pour chaque i et prouvons que M est S-co-hopfien-1.
Soit $f : M \to M$ un endomorphisme injectif où $M = \Pi_{k\in J}M_k$ et pour chaque $i \in J$, définissons

$$f_i : M_i \to M_i$$

$$x_i \mapsto f_i(x_i) = \pi_i \circ f \circ j_i(x_i) = \pi_i \circ f(\delta_{ik}x_i)_k$$

Prouvons que f_i est injectif, on a :

$$f_i(x_i) = f_i(x_i')$$

$$\pi_i \circ f \circ j_i(x_i) = \pi_i \circ f \circ j_i(x_i')$$

en outre on a $\pi_i \circ f \circ j_k(x_k) = \pi_i \circ f \circ j_k(x_k') = 0 \ \forall k \neq i$ car$Hom(M_i, M_k) = 0$

donc $\pi_i \circ f \circ j_k(x_k) = \pi_i \circ f \circ j_k(x_k')$ si $\forall k$

D'où $\displaystyle\sum_k \pi_i \circ f \circ j_k(x_k) = \sum_k \pi_i \circ f \circ j_k(x_k')$ si

$$\text{par conséquent } \pi_i \circ f[(x_k)_k] = \pi_i \circ f[(x'_k)_k]$$

$$\text{donc} \sum_i j_i \circ \pi_i \circ f[(x_k)_k] = \sum_i j_i \circ \pi_i \circ f[(x'_k)_k]$$

$$f[(x_k)_k] = f[(x'_k)_k]$$

Puisque f est injectif, donc

$$(x_k)_k = (x'_k)_k \Rightarrow x_k = x'_k \ \forall k$$

, ce qui signifie que f_k est injectif pour tout k
Puisque M_i est S-co-hopfien-1, donc f_i est surjectif pour chaque i.
Prouvons que f est surjectif.
Soit $y = (y_i)_{i \in J} \in M$ il existe $x_i \in M_i$ tel que $y_i = f_i(x_i)$ car f_i est surjectif et on a $y_i = \pi_i \circ f \circ j_i(x_i)$.

$$\text{Puisque } 0 = \pi_i \circ f \circ j_k(x'_k) = 0 \ \ \forall k \neq i \text{ car} Hom(M_i, M_k) = 0$$

. On a

$$\text{alors } \delta_{i,k} y_i = \pi_i \circ f \circ j_k(x'_k) \text{ si } \forall k$$

$$\text{Donc } \sum_k \delta_{i,k} y_i = \sum_k \pi_i \circ f \circ j_k(x'_k) \text{ si}$$

$$\text{D'où } y_i = \pi_i \circ f[(x'_k)_k]$$

$$\text{Par conséquent } y = (y_i)_{i \in J} = \sum_i j_i(y_i) = \sum_i j_i \circ \pi_i \circ f[(x'_k)_k] = f[(x'_k)_k]$$

Posons $x = (x_i)_i$ alors $y = f(x)$ et f est surjectif et on en conclut que M est S-co-hopfien-1 comme voulu.

$\square$

Il y a quelques différences entre ces deux nouveaux lemmes de Fitting et ceux donnés dans [17].

Lemme 5.3.2. ***(Lemme faible Fitting I)***

Soit M un R semi-module à gauche complètement soustractif satisfaisant à la fois la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante sur les sous semi-modules et soit f un endomorphisme rigide de M. Alors il existe un nombre entier naturel $n \geq 1$ tel que :

$$M = f^n(M)\overline{\oplus}Ker(f^n)$$

Démonstration. Puisque

$$... \subseteq f^k(M)... \subseteq f^2(M) \subseteq f(M) \subseteq M$$

et

$$\{0\} \subseteq Kerf \subseteq Kerf^2 \subseteq ... \subseteq Kerf^k \subseteq ...$$

On sait qu'il existe des nombres entiers naturels i et j tels que :

$f^i(M) = f^{2i}(M)$ et $Kerf^j = Kerf^{2j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$.

Soit $n = max\{i, j\}$ et on a :

$$\begin{cases} f^n(M) = f^{2n}(M) \\ Kerf^n = Kerf^{2n}. \end{cases}$$

Donc d'après le théorème 5.3.1 on a :

$$\begin{cases} M = f^n(M) + Kerf^n \\ \{0\} = Kerf^n \cap f^n(M). \end{cases}$$

Donc

$$M = f^n(M)\overline{\oplus}Kerf^n$$

□

Lemme 5.3.3. ***(Lemme faible Fitting II)***

Soit M un R semi-module à gauche satisfaisant à la fois la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante sur les sous semi-modules et soit f un R endomorphisme rigide de M satisfaisant la condition :

$$M = f^t(M) + Ker(f^t)$$

pour un entier naturel t. Alors il existe un nombre entier naturel p pour lequel

$$M = f^p(M)\overline{\oplus}Ker(f^p)$$

Démonstration. Puisque

$$... \subseteq f^k(M)... \subseteq f^2(M) \subseteq f(M) \subseteq M$$

et

$$\{0\} \subseteq Kerf \subseteq Kerf^2 \subseteq ... \subseteq Kerf^k \subseteq ...$$

on sait qu'il existe des nombres entiers naturels i et j tels que :

$f^i(M) = f^{i+k}(M)$ et $Kerf^j = Kerf^{j+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Posons $p = max\{t, i, j\}$ et soit $g = f^p$. Alors par construction $g = g^2$. Si $m \in M$ alors il existe $x_1 \in M$ et $y_1 \in Kerf^t$ satisfaisant $m = f^t(x_1) + y_1$. De la même manière il existe $x_2 \in M$ et $y_2 \in Kerf^t$ tel que $x_1 = f^t(x_2) + y_2$. Donc $f^t(x_1) = f^{2t}(x_2) + f^t(y_2) = f^{2t}(x_2), \quad x_2 = f^t(x_3) + y_3$

et $f^t(x_1) = f^t(x_2) = f^{2t}(x_3) = f^{4t}(x_3) = ... = f^{nt}(x_n) \quad$ tel que :

$nt > p$ et $m = f^{nt}(x_n) + y_1 = f^p(x) + y_1$ où $y_1 \in Kerf^t \subseteq Kerf^p$. Par conséquent

$$M = g(M) + Kerg$$

Soit $x \in g(M) \cap ker(g) \Rightarrow g(x) = 0$ et $x = g(y) \quad$ alors,

$g(x) = g^2(y) = 0 \Rightarrow y \in Ker(g^2)$ donc

$$g(y) = 0 \Rightarrow x = 0$$

et

$$\{0\} = g(M) \cap Ker(g)$$

. De ce fait

$$M = g(M)\overline{\oplus}Ker(g)$$

□

Remarque 5.3.1. *La différence entre le lemme faible de+– Fitting I et le lemme faible de Fitting II est que :*

- *dans le premier, les semi-modules sont complètement soustractifs ;*
- *et dans le second l'endomorphisme f doit verifier $M = f^t(M)+Ker(f^t)$ pour un certain entier naturel t.*

Théorème 5.3.3. *1. Si un R semi-module à gauche M est complètement soustractif et si $End(M)$ est π-régulier alors M est faible Fitting.*

2. Si un R semi-module à gauche M est faible Fitting alors $End(M)$ est π-régulier.

Démonstration. 1. Soit f un endomorphisme rigide. Supposons que $End(M)$ est π-régulier donc pour f il existe $g, h \in End(M)$ et un entier naturel n tel que $f^n + f^{2n}g = f^{2n}h$ et on a

$$(f^n + f^{2n}g)(M) = f^{2n}h(M) \subseteq f^{2n}(M)$$

$$f^n(M) + f^{2n}(g(M)) = f^n(M) \subseteq f^{2n}(M)$$

donc on a $f^n(M) = f^{2n}(M)$. Par conséquent d'après le théorème 5.3.1 on a

$$M = f^n(M) + Ker(f^n)(*)$$

Soit $x \in f^n(M) \cap Ker(f^n) \Rightarrow f^n(x) = 0$ et $x = f^n(y)$ alors, $f^n(x) = f^{2n}(y) = 0$

$$(f^n + gf^{2n})(y) = hf^{2n}(y)$$

$$f^n(y) + g(f^{2n}(y)) = h(f^{2n}(y))$$
$$f^n(y) + g(0) = h(0)$$
$$x + g(0) = h(0).$$

Finalement

$$x = 0.$$

Donc on a

$$\{0\} = f^n(M) \cap Ker(f^n)(**)$$

D'où d'après $(*)$ et $(**)$ M est faible Fitting.

2. Réciproquement supposons que M est faible Fitting alors en utilisant le théorème 5.3.1, on a $f^n(M) = f^{2n}(M)$ et donc si g est un morphisme, on a :
$$f^n(x) + f^{2n}g(x) = f^{2n}(x) + f^{2n}g(x)$$
$$f^n(x) + f^{2n}g(x) = f^{2n}(Id_M + g)(x)$$
$$f^n(x) + f^{2n}g(x) = f^{2n}h(x)$$
où $h(x) = Id_M + g(x)$ pour $g, h \in End(M)$ et $End(M)$ est π-régulier à droite .
Aussi soit $x \in M$, $f \in End(M)$ on a $f^n(x) = f^{2n}(x)$ donc si g' est un morphisme, on a :
$$f^n(x) + g'f^{2n}(x) = f^{2n}(x) + g'f^{2n}(x)$$
$$f^n(x) + g'f^{2n}(x) = (Id_M + g')f^{2n}(x)$$
$$f^n(x) + g'f^{2n}(x) = h'f^{2n}(x)$$
où $h'(x) = Id_M + g'(x)$ pour $g', h' \in End(M)$ et $End(M)$ est π-régulier à gauche.
On en conclut que $End(M)$ est π-régulier

□

Corollaire 5.3.1. *Un R semi-module à gauche complètement soustractif M est faible Fitting si, et seulement si, $End(M)$ est π-régulier.*

Proposition 5.3.5. *Si un R semi-module à gauche complètement soustractif M est faible Fitting alors M est S-hopfien-1 et S-co-hopfien-1.*

Démonstration. – Soit f un endomorphisme surjectif de M, d'après le théorème 5.3.3 $End(M)$ est π-régulier ($End(M)$ est π-régulier à gauche) il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n + gf^{2n} = hf^{2n}$ pour $g, h \in End(M)$. Soit $x \in M$ tel que $f(x) = 0$, il existe $y \in M$ tel que $x = f^n(y)$ car f est surjectif, donc

$$(f^n + gf^{2n})(y) = (hf^{2n})(y)$$

$$f^n(y) + gf^{2n}(y) = h(f^{2n}(y))$$

$$f^n(y) + gf(f^n(y)) = h(f(f^n(y)))$$

$$x + g(f(x)) = h(f(x))$$

$$x + g(0) = h(0)$$

Finalement

$$x = 0$$

f est un semi-automorphisme de M et M est S-hopfien-1.

– Aussi soit f un automorphisme de M, $End(M)$ est π-régulier $\big(End(M)$ est π-régulier à droite $\big)$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n + f^{2n}g = f^{2n}h$ pour $g, h \in End(M)$. Soit $x \in M$ on a

$$(f^n + f^{2n}g)(x) = f^{2n}h(x)$$

$$f^n(x) + f^{2n}g(x) = f^{2n}h(x)$$

$$f^n(Id_M + f^n g)(x) = f^n(f^n h(x)) \Rightarrow x + f^n g(x) = f^n h(x)$$

car f est un automorphisme.

$$\Rightarrow x + f^n g(x) \in f(M)$$

$$\Rightarrow x \in f(M) \quad \text{d'après le fait que } f(M) \text{ est soustractif}$$

donc

$$f(M) = M$$

et f est un endomorphisme surjectif de M. D'où M est S-co-hopfien-I.

□

Corollaire 5.3.2. *Soit M un R semi-module à gauche complètement soustractif. Si $End(M)$ est π-régulier, alors M est S-hopfien-1 et S-co-hopfien-1.*

Démonstration. Elle est immédiate en combinant le théorème 5.3.3 et la proposition 5.3.5 □

Lemme 5.3.4. *Soit $f \in End(M)$ et supposons que f est rigide. Donc la restriction de f^m à M' (notée par f^m/M'), où $M' = f(M)$, est rigide.*

Démonstration. Supposons que f est rigide et soit $x \equiv_{f^m/M'} y$.

$$x \equiv_{f^m/M'} y \Rightarrow \begin{cases} f^m(x) = f^m(y) \\ x, y \in M' = f^m(M). \end{cases}$$

où $x = f^m(x')$ et $y = f^m(y') \Rightarrow f^{2m}(x') = f^{2m}(y')$. Ce qui implique

$x' \equiv_{f^{2m}} y' \Leftrightarrow x' \equiv_{Kerf^{2m}} y' \Rightarrow x' + k_1 = y' + k_2$ où $k_1, k_2 \in kerf^{2m}$. Ce qui implique $f^m(x') + f^m(k_1) = f^m(y') + f^m(k_2) \Rightarrow x + k_3 = y + k_4$ où $k_3, k_4 \in Kerf^m \cap M'$.

□

Définition 5.3.3. *Voir [1]. On dit qu'un R semi-module à gauche est engendré de manière finie, s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un épimorphisme*

$R_R^{(n)} \xrightarrow{p}_R M$. Si de plus l'épimorphisme est i-régulier (resp. k-régulier, régulier), on dit que M est i-engendré (resp. k-engendré, r-engendré) de manière finie.

Lemme 5.3.5. *Soient M un semi-module à gauche engendré de manière finie et f un endomorphisme tel que $f^m(M) = f^{2m}(M)$ pour un certain entier m.*

Alors $M' = f^m(M)$ est engendré de manière finie comme un sous semi-module de M.

Démonstration. Soit $f \in End(M)$ et posons $M' = f^m(M)$ pour un certain m. Montrons que si M est engendré de manière finie alors M' est aussi engendré de manière finie. Puisque M est engendré de manière finie, il existe un entier n et un épimorphisme $R_R^{(n)} \xrightarrow{p}_R M$.

Soit $R_R^{(n)} \xrightarrow{q}_R M'$ définie par $q(a) = f^m p(a)$ et soit $f', g' : M' \longrightarrow N$ tel que $f'q(a) = g'q(a)$ donc $f'f^m p(a) = g'f^m p(a) \quad \forall \quad a \in R_R^{(n)}$.

Puisque M est engendré de manière finie donc,

$f'f^m(x) = g'f^m(x) \quad \forall \quad x \in M$.

Mais $f^m(M) = f^{2m}(M)$ implique que $M' = f^m(M')$, donc f^m/M' est surjectif. Donc $f'f^m = g'f^m \Rightarrow f' = g'$ et M' est engendré de manière finie.

□

Le théorème suivant donne un résultat qu'on peut regarder comme le lemme de Dischinger (voir [13] théorème 2 (b))

Théorème 5.3.4. *Soit R un semi-anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Tout R semi-module à gauche r-engendré de manière finie est S-co-hopfien-1.*

(2) *Tout endomorphisme rigide $f \in End(M)$ de R-semi-module à gauche M r-engendré de manière finie, est π-régulier.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) : Soit M un R semi-module à gauche, r-engendré de manière finie. Supposons que M est S-co-hopfien-1. Soit $f \in End(M)$ un endomorphisme rigide. Prouvons qu'il existe $m \in N^*$ et $g, h \in$

$End(M)$ tel que

$$f^m + f^{2m}g = f^{2m}h$$

. Nous avons la suite décroissante

$$\{0\} \subseteq Kerf \subseteq Kerf^2 \subseteq ... \subseteq Kerf^k \subseteq ... \subseteq Kerf^{2k}...$$

Posons $T = \cup_{t=1}^{\infty} Kerf^t$, on a $T \subseteq M$.
Soit $x \in T$ il existe $m_0 \in N^*$ tel que $x \in Kerf^{m_0} \quad \Rightarrow f^{m_0}(x) = 0 \quad \Rightarrow$ $f \circ f^{m_0}(x) = 0 \quad f^{m_0+1}(x) = f^{m_0} \circ f(x) = 0 \quad \Rightarrow f(x) \in Kerf^{m_0} \subseteq T$ alors T est un sous semi-module stable de M et pour tout $x \in M$ on a $x \in T \Rightarrow f(x) \in T$.
Aussi, si $f(x) \in T = \cup_{t=1}^{\infty} Kerf^t$ il existe $m_1 \in N^*$ tel que :
$f(x) \in Kerf^{m_1} \Rightarrow f^{m_1}f(x) = 0 \Rightarrow x \in Kerf^{m_1+1} \subseteq T$.
D'où $f(x) \in T \Rightarrow x \in T$.
Finalement

$$x \in T \Leftrightarrow f(x) \in T$$

et f induit un endomorphisme.

$$\overline{f} : M/T \to M/T$$

$$\overline{x} = x + T \mapsto \overline{f}(\overline{x}) = f(x) + T = \overline{f(x)}$$

et M/T est un R semi-module à gauche r-engendré de manière finie avec comme système générateur $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n})$ et on a $\overline{x} = \sum \overline{\lambda_i e_i} = \sum \lambda_i \overline{e_i}$.
Soient $x, y \in M$ tel que

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y}) \Leftrightarrow \overline{f(x)} = \overline{f(y)}$$

Alors $f(x) + t_1 = f(y) + t_2$ où $t_i \in T = \cup_{l=1}^{\infty} Kerf^l$ donc il existe $m_2 \in N^*$ tel que $t_i \in Kerf^{m_2}$, alors on a

$f(x) \equiv_{Kerf^{m_2}} f(y) \Rightarrow x \equiv_{f^{m_2+1}} y \Rightarrow x \equiv_{Kerf^{m_2+1}} y$ d'après le fait que f est rigide

Et on a $x + u_1 = y + u_2$ pour $u_1, u_2 \in Kerf^{m_2+1} \subseteq T \Rightarrow x \equiv_T y$.
Finalement $\overline{f}$ est injectif.
Puisque M/T est r-engendré de manière finie, alors par la propriété de S-co-hopfien-1, $\overline{f}$ est un automorphisme.
$\overline{f}$ est bijectif, alors il existe une suite $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de M tel que $\overline{f}(\overline{u_i}) = \overline{e_i}$.
Maintenant, définissons $v \in End_R(M)$ par $v(e_i) = u_i$.
On a : $\overline{f}(\overline{u_i}) = \overline{e_i} \Rightarrow \overline{f(u_i)} = \overline{e_i} \Rightarrow f(u_i) \equiv_T e_i$ donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $t_j^i \in Kerf^m \subseteq T$ tel que $e_i + t_1^i = f(u_i) + t_2^i$
$f^m(e_i + t_1^i) = f^m(f(u_i) + t_2^i) \Rightarrow f^m(e_i) = f^{2m}(u_i) = f^{2m}(v(e_i))$

$$f^m(e_i) = f^{m+1}(v(e_i)) \quad \text{pour tout} \quad e_i$$

$$f^m = f^{m+1}v$$

Par conséquent en composant par f à gauche et par v à droite successivement $m-1$ fois, on obtient

$$f^m = f^{2m}v^m$$

Posons $h = v^m$ et $g = 0$ alors $f^m + f^{2m}g = f^{2m}h$ comme voulu.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit M un R semi-module à gauche r-engendré de manière finie, alors tout endomorphisme rigide de $End(M)$ est π-régulier par hypothèse.
Soit f un injective endomorphisme injectif. Alors f est rigide. Donc par hypothèse, f est π-régulier par conséquent il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et deux endomorphismes $g, h \in End(M)$ tels que $f^n + f^{2n}g = f^{2n}h$ et on a

$$(f^n + f^{2n}g)(M) = f^{2n}h(M) \subseteq f^{2n}(M)$$

$$f^n(M) + f^{2n}(g(M)) = f^n(M) \subseteq f^{2n}(M)$$

. D'où $f^n(M) = f^{2n}(M)$

Soit $y \in M$ on a $f^n(y) = f^{2n}(x)$ (pour $x; y \in M$) donc $y = f^n(x)$ car f est injectif par conséquent $y \in f(M) \Rightarrow f(M) = M$. D'où f est surjectif et M est S-co-hopfien-1.

$\square$

Perspectives de recherche en théories des semi-modules

Les recherches menées durant cette thèse peuvent nous conduire à reprendre beaucoup de résultats, déjà connus dans la théorie des modules, dans celle des semi-modules. Vu le développement fait sur les sous semi-modules semi-essentiels et sur la notion de semi-simplicité dans les chapitres 3 et 4, nous comptons reprendre :

- tous les travaux faits sur les notions de *radical* et de *socle* en théorie des modules dans le cas des semi-modules,

- tous les résultats connus sur les *modules injectifs* et les *enveloppes injectives de modules* dans le cadre des semi-modules.

- d'une manière générale tous les principaux résultats du [2] dans la théorie des semi-modules.

Comme perspective de recherche nous comptons aussi nous orienter dans l'algèbre *max-plus* que nous avons beaucoup utilisé dans nos exemples de semi-modules.

Bibliographie

[1] J. Abuhlail : *Semirings and Semicomodules* (May 2008) http : faculty.kfupm.edu.sa/math/abuhlail/Projects/FT060010-FinalReport.pdf.

[2] F. W. Anderson and K. R. Fuller : *Rings and categories of modules 2nd Edition, GTM 13,* Springer-Verlag New York (1992).

[3] J. A. Beachy and W. D. Blair : *Finitely annihilated modules and orders in Artinian rings* ; Comm. in Algebra, vol. 6 No. 1, (1978), pp. 1 - 34.

[4] E. A. Behrens : *Ring theory.* Academic Press, Inc, New York (1972).

[5] S.K. Bhambri and M. K. Dubey : *Extentions of Semimodules and Injective Semimodules.* Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 34, No. 1, (2010), pp. 25 - 41.

[6] N. Bourbaki : *Algèbre II ,chapitre 8* Herman, (1973).

[7] N. Bourbaki : *Algèbre commutative , chapitres 3 et 4* Herman, (1973).

[8] N. Bourbaki : *Algèbre commutative , chapitres 8 et 9* Masson, (1983).

[9] S. Bourne and H. Zassenhauss : *On a Wedderburn-Artin structure theory of a potent semiring* Lehigh University ,Bethlehem ,Pennsylvania and Mc Gill University Canada (December 29 1956), pp. 613 - 615.

[10] S. U. Chase : *Direct products of modules.* Trans. Amer. Math. Soc. 97, (1960), pp. 457 - 473.

[11] A. W. Chatters and C. R. Hajarnavis : *Rings with chain conditions.* Boston Pitman Advanced Publi. Program. (1980).

[12] I.S Cohen and I. Kaplansky : *Ring for which every module is a direct sum of cyclic modules*, Math. Zeitschr Bd., 54(H2S), (1951), pp. 97 - 101.

[13] F. Dischinger : *Sur les anneaux fortements π- réguliers* Compte Rendu de l'Académie des Sciences Paris serie A 283, (1976), pp 571-573.

[14] S. Eilenberg and S. Mac Lane : *General theory of natural equivalences* , Trans. Amer. Math. Soc. 58, (1945), pp. 231 - 294.

[15] C. Faith : *Algebra : Rings, Modules, and Categories I.* Springer-Verlag New York (1973).

[16] C. Faith and E. Walker : *Direct sum representations of injective modules*, J. Algebra 5 (1967), pp. 203 - 221.

[17] J. S. Golan : *Semirings and Their Applications*, Springer-Verlag (1ère edition 1992).

[18] R. Gordon : *Rings faithfully represented on their left socle*, J.Algebra 7, (1967), pp. 303 - 342.

[19] V. Gupta and J. N. Chaudhari : *Right π- Regular Semirings.* Sarajevo Journal of Mathematics, 2(14), No. 1, (2006), pp. 3 - 9.

[20] J. Habeb : *On Azumaya's exact rings and Artinian duo-rings*, Comm. in Algebra, 17 (01), (1989), pp. 237 - 245.

[21] F. Kash : *Modules and modules.* Academic press, Inc, New York (1982)

[22] Y. Katsov, T. G. Nam and N. X. Tuyen : *On substractive Semisimple Semirings.* Algera Colloquium. 16, No. 3, (2009), pp. 415 - 426.

[23] T. Y. Lam : *Lectures on Modules and Rings* , Springer-Verlag New York (1998).

[24] G. Michler and O. E. Villamayor : *On rings whose simple modules are injective*. J. of Algebra Vol. 25 (1973), pp. 185 - 201.

[25] Y. Miyashita : *On Galois extension and crossed products*J. fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I 21, (1970), pp. 97 - 121.

[26] C. J. Monico : *Semirings and Semi-groupe Actions in Public-Key Cryptography*, PhD thesis, University of Notre dame, Indiana (2002).

[27] M. L. Ndiongue : *Modules Hopfiens Généralisés*. Mémoire de DEA d'algèbre. Univ. Cheikh Anta DIOP de DAKAR (09 Août 2010).

[28] H. C. Pop : *On the structure of Artinian rings*, Comm. in Algebra, 15(11), (1987), pp. 2327 - 2348.

[29] G. Renault : *Algèbre non commutative*. Gauthier Villars (1975).

[30] A. Rosenberg and D. Zelinsky : *Finitness of injective hull* , math. Zeitschr Bd 70,S (1951), pp. 372 - 380.

[31] M. Sanghare : *On S-Duo rings* Communications in Algebra, 20(8), (1992), pp. 2183-2189.

[32] M. Sanghare : *Sur les I-anneaux, S-anneaux et F-anneaux*. Thèse d'Etat, Bibliothèque Universtaire de Dakar (Décembre 1992).

[33] M. Sanghare : *Sur une classe de modules et d'anneaux liés aux conditions de chaîne* Thèse de doctorat de troisième cycle Universite MOHAMED V de RABAT (15 mars 1985).

[34] D. Sow and J. R. Tsiba : *On Generator and projective semimodules*. International Journal fo Algebras, 4, No. 21-24, (2010), pp. 1153 - 1167.

[35] B. O. Strenström : *Rings of quotients*. Springer-Verlag New York (1975).

[36] Y. Suziki : *On automorphisms of an injective module*. Proc. Japan. Acad. (1968) pp. 120 - 124.

[37] : J. R. Tsiba, L. Fall and D. Sow : *Introduction to S-Hopfian and S-Co-Hopfian semimodules.* Journal of Algebra, Number Theory and Applications vol 22, Number 01, (2011), pp. 81 - 109.

[38] J. R. Tsiba, L. Fall and D. Sow : *On Semiessential Subsemimodules.* Journal of Algebra, Number Theory and Applications vol 22, Number 02, (2011), pp 175 - 191.

[39] M. Takahashi : *A bordism category for the ordinary homology theory,* Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 7 (1979), pp. 547 - 572.

[40] M. Takahashi : *On the bordism categories. I.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 8, (1980), pp. 527 - 546.

[41] M. Takahashi : *On the bordism categories. II.* Elementary properties of semimodules. Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 9 (1981), pp. 495 - 530.

[42] M. Takahashi : *On the bordism categories. III.* Functors Hom and . for semimodules. Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 10, (1982), pp. 551 - 562.

[43] M. Takahashi : *Extensions of semimodules. I.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 10, (1982), pp. 563 - 592.

[44] M. Takahashi : *Extensions of semimodules. II.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. Vol. 11, (1983), pp. 83 - 118.

[45] M. Takahashi : *On semimodules. I.* Kobe J. Math. Vol. 1, (1984), pp. 67 - 97.

[46] M. Takahashi : *On semimodules. II. System of generators.* Kobe J. Math. Vol. 1, (1984), pp. 177 - 190.

[47] M. Takahashi : *On semimodules. III. Cyclic semimodules.* Kobe J. Math. Vol. 2, (1985), pp. 131 - 141.

[48] M. Takahashi and H.X. Wang : *On epimorphisms of semimodules.* Kobe J. Math. Vol. 6, (1989), pp. 297 - 298.

[49] S. D. Touré : *Thèse d'Etat de mathématiques pures : Sur les SCI-Anneaux, SCS-Anneaux et Anneaux à identités polynômiales*. thèse soutenue publiquement le 18 avril 2009, université Cheikh Anta Diop de Dakar.

[50] N. X. Tuyen and T. G. Nam : *On projective Covers of Semimodules in the category Λ-CSSMod and their Applications*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics,Vol. 31, No. 2, (2007), pp. 1 - 15.

[51] N. X. Tuyen and T. G. Nam : *On Radicals of semirings*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 31, No. 1, (2007), pp. 131 - 140.

[52] N. X. Tuyen and H. X. Thang : *On Superfluous Subsemimodules*. Georgian Mathematical Journal. 10, No. 4, (2003), pp. 763 - 770.

[53] P. Vamos : *Finitely generated Artinian and distributive modules are cyclic*. Bull. London Math. Soc 10, (1978), pp. 287 - 288.

[54] P. Vamos : *Rings with duality* Pro. London. Math. Soc. 34, (1977), pp. 275 - 289.

[55] W. V. Vasconcelos : *On finitely generated flat modules*. Trans.Amer.Math.Soc 138, (1969), pp. 505 - 512.

[56] W. V. Vasconcelos : *Injective endomorphisms of finitely generated modules*. Proc.Amer.Math.Soc 25, (1970), pp. 900 - 901.

[57] R. Wisbauer, N. V. Dung, D. V. Huynh and P. F. Smith : Σ *Extending Modules*. Pitman Research Notes 313 (Longman 1994)

[58] R. Wisbauer : *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach (Philadelphia 1991)

[59] W. Xue : *Artinian duo-rings and self duality*. Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), pp. 309 - 313.

[60] H. Yasuyuki : *On Injective Hulls of Simple Modules* Journal of Algebra, volume 225 (March 2000), pp. 299 - 308 (10).

[61] H. Yasuyuki : *On Fitting's Lemma* Hiroshima Math.J. No. 3, vol. 9, (1979), pp. 623 - 626.

[62] J. Zumbraegel : *Classification of finite congruence-simple semiring with zero.* Journal of Algebra and its Applications, 7(3), (2008), pp. 363 - 377.