UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE DE DOCTORAT DE 3e CYCLE EN MATHEMATIQUES PURES
OPTION : ALGEBRE / THEORIE DES ANNEAUX

SUJET :

EXTENSIONS QUASI-FROBENIUSIENNES AVEC EQUIVALENCE ET DUALITE DE MORITA

PRESENTE PAR :

DJIBY SOW

DIRECTEUR DE THESE *MAMADOU SANGHARE*

SOUTENANCE LE **SAMEDI 11 MARS 2000** A L'AMPHI **7** A **10H**

COMPOSITION DU JURY :

PRESIDENT : Chérif **BADJI** professeur UCAD

EXAMINATEURS : Akry **KOULIBALY** professeur Université de Ouagadougou

Hamet **SEYDI** professeur Howard University -UCAD

Mamadou M. **DIOP** Maître-assistant UCAD

Mamadou **SANGHARE** Maître de Conférence UCAD

ANNEE ACADEMIQUE 1999-2000

TABLE DES MATIERES

REMERCIMENTS

Je remercie ALLAH Le Tout Puissant
Le Clément et le Miséricordieux
Paix et Salut sur Le Prophète

Je remercie très sincèrement Monsieur Mamadou **SANGHARE** pour tout ce qu'il fait pour le 3^{e} cycle d'Algèbre. Il a accepté avec générosité, patience et disponibilité de m'initier à la recherche fondamentale. Je lui exprime ainsi toute ma reconnaissance .

Je remercie Monsieur le professeur Chérif **BADJI** de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury

Je remercie Messieurs les Professeurs Hamet **SEYDI** , Akry **KOULIBALY** et Mamadou M. **DIOP** d'avoir bien voulu accepter de participer à ce jury

Mes sincères remerciements à Monsieur Cheikh Mbacké Diop de m'avoir initier au Latex

Mes très sincères remerciements à :

Mes parents
Mes amis
Mon tuteur Ndiawar Sow
Alioune M P Camara
Mamadou Ndiaye
Mamadou M Diop
Au personnel du département
Aux participants au séminaire d'algèbre
Tous ceux qui sans leurs aides et leurs conseils très précieux ce travail n'aurait jamais abouti

INTRODUCTION

La théorie des anneaux et des modules, occupe de nos jours une place de choix en mathématique. Nous travaillons ici sur la notion d'extension qui est essentielle en algèbre. On entend par extension d'anneaux, la donnée de deux anneaux A et B dont l'un est un sous-anneau de l'autre. On définit un type donné d'extension entre A et B si on se donne une relation vérifiée simultanément par A et B ou faisant intervenir A et B Quand on plonge un anneau B dans un anneau A on élimine certaines contraintes pour en créer d'autres et du même coup on perd certaines propriétés pour en gagner d'autres . Dès lors qu'un type d'extension est donné on peut se poser plusieurs questions dont les suivantes :

- quand est-ce qu'une propriété vérifiée par l'anneau B, est vérifiée par A et vis versa
- quand est-ce qu'une propriété vérifiée dans la catégorie des B modules est vérifiée dans la catégorie des A-modules et vis versa
- quand est-ce qu'un certain type d'extension est vérifié par deux anneaux A et B

Ainsi si on arrive à définir un « bon » type d'extension , le travail qu'on peut se donner est presque inépuisable car tout ce qui est défini dans la théorie des anneaux , des modules et même des groupes peut être étudié par rapport à cette extension .

Au delà des mathématiques, l'étude de la conservation et du transfert de propriétés est fondamentale dans les autres domaines de la science.

Nous nous intéressons dans cette thèse à l'étude de quelques propriétés relativement à une extension dite **E**xtension **q**uasi-**f**robeniusienne (Eqf).

La théorie des Eqf est relativement récente car à notre connaissance , les premiers articles publiés sur ce sujet datent des années 60 . Beaucoup de mathématiciens sont intervenus (directement ou indirectement) dans la construction des Eqf ; on peut entre autres citer : Osofky, Kash, Müller, Nakayama, Kitamura , Morita, Azumaya, Vamos ... Précisément la théorie générale sur la dualité et l'équivalence sur les catégories de modules est établie principalement par Morita [8] et Azumaya [9]. La notion d'extension qF est introduite par Muller [10] comme une généralisation de la notion d'extension frobeniusienne établie à partir des algèbres de Frobenius (Kash [11])

L'étude des anneaux avec dualité à partir des anneaux qF (Tachikawa [14]) qui sont aussi une généralisation des algèbres de Frobenius est introduite par Nakayama [12] . Vamos dans [13] s'intéresse à la dualité de certains types d'anneaux d'endomorphismes . Kitamura généralise dans [4] ces travaux de Vámos en relation avec les extensions qF

L'objet de notre travail était d'étudier le cas dual des résultats de l'article [4] de Yoshimi Kitamura ce qui, peut être, permettrait aussi d'étudier le cas dual et d'approfondir certains résultats connus sur les Eqf.

Cette thèse est divisée en 4 chapitres.

Chap I: Généralité sur la théorie des modules.

Chap II: Equivalence et dualité au sens de Morita.

Chap III: Extensions quasi-frobeniusiennes (Eqf)

Chap IV : Eqf avec équivalence ou dualité de Morita

Ce dernier chapitre est divisé en trois sections

Dans les chapitres I et II nous avons rappelé sans démonstrations quelques résultats et techniques à connaître pour pouvoir lire les chapitres suivants ; dans le chapitre III, nous avons énoncé quelques résultats de base sur les Eqf et en fin dans le chapitre IV nous avons donné les résultats de nos travaux repartis en trois sections.

Dans la section 1 nous avons démontré le théorème suivant :

Soit A/B une extension finiment normalisée

si $_{\wedge}U_B$ définit une dualité de Morita et A/B est une Eqf (resp : Ef) alors

$_{\Gamma^*}U_B \otimes A_A$ définit une dualité de Morita et $\Gamma^*/\wedge$ est une Eqf (resp : Ef)

avec $\Gamma^* = End(U_B \otimes A_A)$

Ce théorème constitue le principale résultat de cette section. Il généralise le théorème [4, 2.7] de Y. Kitamura.

Dans la section 2 nous établissons le résultat suivant :

Soit A/B une extension finiment normalisée

on pose $\wedge = End(E(B)_B)$, $\Gamma^* = End(E(A)_A)$ et $\Omega = End(E(A_A)_B)$

a) Si A/B est une Eqf à droite (resp : Eqf, Ef)

alors $\Gamma^*/\wedge$ est une Eqf à droite (resp : Eqf, Ef)

b) Si A/B est une Eqf (resp : Ef) alors $\Gamma/\wedge$ est une Eqf (resp : Ef)

c) *Si A/B est une Eqf (resp : Ef) alors Ω/Γ^* est une Eqf (resp : Ef).* □

Dans la section 3 nous étudions le cas dual des résultats de Y.Kitamura donnés dans [4] et établissons le résultat suivant :

Soit A/B une extension finiment normalisée et ${}_BP_\wedge$ *un bimodule avec* $\wedge = End\,({}_BP)$

on pose $P'_A = Hom_B({}_BP, {}_BA)_A$, $Q_B = Hom_B({}_BP, B)_B$, $Q'_A = Hom_B(A_B, Q_B)_A$

$\Gamma = End(P'_A)$ *et* $\Omega = End(Q'_A)$

(1) Si ${}_BP$ *est un progénérateur et A/B est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef)*

alors P'_A *est un progénérateur et* $\Gamma/\wedge$ *est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef)*

1) Si* ${}_BP$ *est un progénérateur et A/B est une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef)*

alors Q'_A *est projectif de type finie et* $\Omega/\wedge$ *est Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef)*

Actuellement nous avons plusieurs pistes de travail dont les suivants :

- définir un nouveau type d'extension
- rechercher des invariants pour un type donné d'extension
- étudier la conservation de certaines propriétés par une Eqf
- étudier le cas dual de certains résultats connus sur les Eqf en les approfondissant

Dans ces deux derniers cas les résultats obtenus sont encourageants .

CHAP I : GENERALITE SUR LA THEORIE DES MODULES

I . 1 Définitions et notations [1]

I.1.1 Les anneaux considérés sont associatifs et unitaires. Si $f : B \to A$ est un homomorphisme d'anneaux alors $f(1_B) = 1_A$ où 1_B et 1_A sont les éléments unités de B et A respectivement . Si M_A est un A- module à droite alors $m.1_A = m$, $\forall$ $m \in M$

Soit M_A un A- module à droite , on note Biend(M_A) l'anneau des endomorphismes de M qui sont End(M_A) linéaires à droite .De même pour $_BM$, on définit Biend($_BM$).

$_BM_A$ signifie que M a une structure de (B, A) bimodule définie par : (bm)a=b(ma) pour tout $b \in B$, $a \in A$ et $m \in M$

Soit A un anneau , la catégorie des A-modules à droite est la catégorie dont les objets sont les A- modules à droite et si M_A et N_A sont deux objets de cette catégorie alors l'ensemble des flèches $M_A \xrightarrow{f} N_A$ est l'ensemble homomorphismes A-linéaires à droite de M_A dans N_A . Cette ensemble est noté $Hom_A(M_A, N_A)$. On désigne par Mod-A la catégorie des A-modules à droite . Si $m \in M$, $f \in Hom_A(M_A, N)$ et $g \in Hom_A(N_A, P)$ alors l'image de m par f est noté f(m) et l'image de m par la composée de g et f est notée g(f(m)) = (gof)(m) . Soient $_BM_A$ et $_CN_A$ deux bimodules alors $Hom_A(M_A , N)$ est muni d'une structure de groupe abélien par l'addition des homomorphismes et on peut définir sur ce groupe une structure de (C , B) bimodule de la manière suivante : (cfb)(m)=c[f(bm)] pour tout $c \in C$, $b \in B$ et $m \in M$ .De la même manière , on définit la catégorie des A-modules à gauche notée A-Mod. Soient $_AM_B$ et $_AN_C$ deux bimodules, si $f \in Hom_A(M, {}_AP)$, $g \in Hom_A(N_A ,P)$ alors l'image de m par f est noté (m)f et l'image de m par la composée de g et f est noté ((m)f)g =(m)fog .$Hom_A({}_AM, N)$ a une structure de (B,C) bimodule définie par : (m)(bfc)=[(mb)f]c , pour tout $c\in C$, $b\in B$ et $m\in M$.

Soient ${}_BM_A$ et ${}_BN_A$ deux bimodules : ${}_BM_A$ / ${}_BN_A$ signifie que ${}_AM_B$ est isomorphe à un facteur direct d'une somme directe finie de copies de ${}_BN_A$ et on dit que M est semi-similaire à N. Si ${}_BM_A$ / ${}_BN_A$ et ${}_BN_A$ / ${}_BM_A$ alors on note simplement ${}_BM_A \sim {}_BN_A$ et on dit que ${}_BM_A$ et ${}_BN_A$ sont similaires .

Une suite de deux homomorphismes $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ est dit exacte si Imf = kerg

Une suite exacte de la forme : $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est dite courte exacte . Dans ce cas g est un épimorphisme et f est un monomorphisme .

Si f : M $\to$ N et g : N $\to$ M sont des homomorphismes tels que fg = 1_N alors f est un monomorphisme , g est un épimorphisme et M = Imf $\oplus$kerg .Dans ce cas on dit que f est un monomorphisme scindé et g est un épimorphisme scindé .

Une suite courte exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est dite scindée si f est un monomorphisme scindé et g est un épimorphisme scindé .

I.1.2 Modules générateurs et cogénérateurs [1]

Soient U_A et M_A deux A-modules

On dit que U_A génère [resp : cogénère] M_A s'il existe un ensemble $\wedge$ et un épimorphisme [resp : monomorphisme] $U_A^{(\wedge)} \xrightarrow{epim} M_A$ [resp : $M_A \xrightarrow{mono} U_A^{(\wedge)}$]

U_A est un générateur [resp : cogénérateur] de Mod-A si U_A génère [resp : cogénère] M_A pour tout M_A de Mod-A . Idem pour A-Mod

I.1.3 Modules projectifs et injectifs [1]

Soient U_A et M_A deux A-modules .

On dit que U est M-projectif [resp : M-injectif] si pour tout épimorphisme

[resp : monomorphisme] $g : M_A \xrightarrow{epim} N_A$ [resp : $f : K_A \xrightarrow{mono} M_A$] et pour tout homomorphisme $\gamma : U_A \to N_A$ [resp : $\lambda : K_A \to U_A$] il existe un A-homomorphisme $\gamma' : U_A \to M_A$ [resp : $\lambda' : M_A \to U_A$] tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "\gamma'"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{resp :} \qquad \begin{tikzcd} & & U \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "g"] & M \arrow[u, "\lambda'"'] \end{tikzcd}$$

On dit qu'un A-module U_A est projectif [resp : injectif] si U_A est M-projectif [resp : M-injectif] pour tout A-module M .

Enveloppe injective

Soit M_A un A-module à droite .On appelle enveloppe injective de M une extension injective minimale de M Elle existe et est unique à un isomorphisme près. On la note $E(M_A)_A$ ou E(M) simplement si aucune confusion n'est à craindre

I.1.4 Modules plats [1]

Un A-module U_A est dit M-plat ssi pour tout sous module ${}_AK$ de ${}_AM$, la suite

$0 \to U \otimes_A K \xrightarrow{U \otimes i_K} U \otimes_A K$ est exacte .

On dit qu'un A-module U_A est plat s'il est M-plat pour tout A-module ${}_AM$.

I.1.5 Modules U-reflexifs [1]

Soient ${}_BU_A$ un bimodule et M_A un A-module . ${}_BM^* = {}_B\mathrm{Hom}_A$ (M_A, ${}_BU_A$) est appelé le « U-dual » de M ou «dual » simplement si B =A=U

$M^{**}_A = \mathrm{Hom}_A ({}_BM^*, {}_BU_A)_A$ est appelé le double « U-dual » de M ou «bidual» simplement si B =A=U

On dit M_A est U-reflexif ssi l'homomorphisme canonique

$$\begin{array}{llllll} \sigma : M_A & \rightarrow & M^{**} & & & \\ \quad m & \mapsto & \sigma(m) & : {}_BM^* & \rightarrow & U \\ & & & \quad \gamma & \mapsto & \gamma(m) \end{array}$$

est un isomorphisme .Par exemple tout A-module projectif P_A de type fini est A-reflexif

.

I.2 ANNEAU DES BIENDOMORPHISMES : BIEND(-)

Soit M_A un A-module à droite et M'_A un facteur directe de M_A , alors M' est stable par Biend (M_A) et tout endomorphisme de M' se prolonge en un endomorphisme de M. Donc tout biendomorphisme de M se restreint en un biendomorphisme de M' et l'application restriction notée : Res : Biend (M_A) $\rightarrow$ Biend (M'_A) est un homomorphisme d'anneaux [cf : 1 , p.158] .On a les résultats suivants

I.2.1 Lemme [cf : 1 ,p. 58]

Soit M_A , un A-module à droite avec une décomposition $M=M'\oplus M''$, alors l'application restriction *Res* est un homomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda'"] & \\ \mathrm{Biend}\,(M_A) \arrow[rr, "\mathrm{Res}"] & & \mathrm{Biend}\,(M'_A) \end{tikzcd}$$

ou λ_a et λ_a' sont les multiplications à droite dans M_A et M'_A respectivement par un élément a de A c'est-à-dire : $\lambda : A \rightarrow$ Biend (M_A) et $\lambda' : A \rightarrow$ Biend (M'_A)

$a \mapsto \lambda_a : m \mapsto ma \qquad a \mapsto \lambda'_a : m' \mapsto m'a$

De plus si M' génère ou cogénère M'' alors *Res* est un isomorphisme.

I.2.2 Proposition [1 , p.159]

Soit M un A-module (non nul) et $\wedge$ un ensemble non vide alors on a un isomorphisme

$\mu : \text{Biend}(M_A) \rightarrow \text{Biend}(M_A{}^{(\wedge)})$

$b \mapsto \mu(b)$

où $\mu(b) : {}_{\Gamma}M^{(\wedge)} \rightarrow {}_{\Gamma}M^{(\wedge)}$ est défini par $(x_\alpha)_{\alpha\in M} \mapsto [(x_\alpha)_\alpha]\mu(b) = (x_\alpha b)_\alpha$

I.2.3. Proposition [1]

Soit X_A et Y_A deux A-modules tels que $X_A \sim Y_A$ alors

1) X_A est finiment généré (finiment cogénéré) ssi Y_A l'est.

2) X_A est projectif (injectif) ssi Y_A l'est.

3) X_A est générateur (cogénérateur) ssi Y_A l'est

4) Si B est un sous-anneau de A alors $X_B \sim Y_B$

I.3 TRANSFORMATIONS NATURELLES ET FONCTEURS

Soit C = (C , mor C , o) et D = (D , mor D , o) deux catégories F et G deux foncteurs covariants de C dans D alors une transformation naturelle de F dans G est une application $\eta : C \rightarrow \text{mor } D$ telle que pour chaque $M \in C$, $\eta_M : F(M) \rightarrow G(M)$ et pour chaque $f \in M \rightarrow N$, dans mor C , le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(f)} & F(N) \\ \eta(M)\downarrow & & \downarrow \eta(N) \\ G(M) & \xrightarrow{G(f)} & G(N) \end{array}$$

soit commutatif

Si F et G sont contravariants , on renverse les flèches de F(f) et G(g) dans le diagramme précédant . Si η_M est un isomorphisme pour tout M de C, on dit que la transformation naturelle notée $\eta : F \mapsto G$ est un isomorphisme naturel .Si F et G sont deux foncteurs de même variance entre deux catégories C et D, on dit que F et G sont isomorphes et on note $F \cong G$, s'il existe un isomorphisme naturel $\eta : F \mapsto G$. Cet isomorphisme définit une relation d'équivalence sur la classe des foncteurs de C dans D

I.3.1Proposition : [1 ,p. 240]

Soit M_A , ${}_AW_B$ et N_B trois modules , il existe un isomorphisme :

η : Hom $(M_A , Hom_B (W , N)) \rightarrow Hom_B (M\otimes_A W , N)$ défini par

$\varphi(\gamma)(m\otimes w) = [\gamma(m)](w)$ pour $\gamma\in Hom(M_A , Hom_B(W , N))$, $m\in M$ et $w\in W$

Cette isomorphisme est naturel en chacune des trois variables M , N et W.

I.3.2 Proposition [1 ,p. 250]

Soit M_A , ${}_BU_A$ et ${}_BN_C$ trois modules alors il existe un isomorphisme

$\eta : Hom_A(M_A , Hom_B({}_BN , {}_BU)) \rightarrow Hom_B(N , Hom_A(M ,U))$ défini par :

$[\eta(\gamma)](n) : m \mapsto [\gamma(m)](n)$ pour $\gamma\in Hom_A(M_A , Hom_B({}_BN , {}_BU))$, $m\in M_A$, $n\in {}_BN$, qui est naturel en chacune des variables M , N et U.

I.3.4 Proposition [1 ,p. 243]

Soit P_A , ${}_BU_A$ et N_B trois modules alors il existe un homomorphisme

$\eta : N_B\otimes Hom_A(P_A, U) \rightarrow Hom_A(P_A, (N\otimes_B U))$ défini par :

$\eta(\gamma\otimes n) : p \mapsto \gamma(p)\otimes n$ pour $\gamma\in Hom_A(P_A, U)$ $p\in P_A$ et $n\in N_B$. Si P_A est projectif de type fini alors η est un isomorphisme .

I.3.5 Proposition [1 ,p. 243]

Soit P_A , ${}_BU_A$ et ${}_BN$ trois modules alors il existe un homomorphisme

$\nu : P_A \otimes Hom_B(U_A , {}_BN) \rightarrow Hom_B(Hom_A(P , U_A) , {}_BN)$ défini par

$\nu(p\otimes\gamma) : \delta \mapsto \gamma(\delta(p))$ pour $\gamma \in Hom_A(U_A , {}_BN)$, $p \in P_A$ et $\delta \in Hom_A(P_A , U)$.

Si P_A est projectif de type fini , alors ν est un isomorphisme

I.3.6 Proposition [1 ,p. 245]

Si ${}_AP_S$ est un (A , S) bimodule tel que ${}_AP$ est projectif de type fini

$\sigma : {}_AP_S \rightarrow {}_AHom({}_SHom({}_AP_S , {}_AA)_A , {}_AA_A)_S$ est un (A , S) isomorphisme où

$\sigma(p) : Hom_A({}_AP , {}_AA)_A \rightarrow A_A$ est défini par $\sigma(p)(f) = f(p)$ pour $p \in P$, $f \in Hom_A(P , A)$

${}_AHom({}_AHom({}_AP , {}_AA_A) , {}_AA_A)$ est appelé le biduale de ${}_AP$

I.3.7 Proposition [2 ,p. 45]

Soit X_B un B-module à droite alors $\nu : X\otimes_B A_A \rightarrow Hom_B({}_AHom({}_BA_A , B) , X_B)_A$

défini par :$\nu(x\otimes a) : f \mapsto xf(a)$ pour $x \in X$, $a \in A$ et $f \in Hom(A, B)$ est un

A-isomorphisme . De plus si $\Gamma = End(X_B)$ alors ν est un (Γ, A) isomorphisme .

I.3.8 Proposition [1 ,p. 240]

Soit ${}_BM_A$ un bimodule , N_B et K_A deux modules alors

$\phi : Hom(N_B\otimes M_A , K_A) \rightarrow Hom_B(N_B , Hom_A(M , K))$ défini par :

$[\phi(\gamma)(n)](m) = \gamma(n\otimes m)$ pour $\gamma \in Hom(N_B\otimes M_A , K_A)$ $n \in N_B$, $m \in M$

est un isomorphisme de groupe abéliens

I.3.9 Proposition [1 ,p.240]

Soit ${}_AW_B$ un bimodule et M_A et ${}_BN$ deux modules alors

$v : M_A\otimes(W_B\otimes N) \to (M_A\otimes W)\otimes_B N$ défini par

$v[m\otimes({}_Aw\otimes_B n)]=(m\otimes_A w)\otimes_B n$, pour $m\in M$,$w\in W$ et $n\in N$

est un isomorphisme qui est naturel en chacune des variables M, W et N

I.3.10 Proposition [1 , p.248]

De l'isomorphisme $Hom_A(-, Hom_B(N,U_B))\cong Hom_A(N, Hom_B(-, {}_AU_B))$,on déduit que

a) Si N_A est projectif et U_A est injectif alors $Hom_A(N , {}_AU_B)$ est injectif

b) Si N_A est générateur et $Hom_B(N , {}_AU_B)$ est injectif alors U_B est injectif .

c) Si N_A est générateur et ${}_BU$ est cogénérateur alors $Hom_A(N_A , {}_BU_A)$ est cogénérateur

I.3.1 Proposition [1 , p.232]

Soit $\phi : B \to A$ un homomorphisme d'anneau alors A est muni d'une structure de

(B , A) et (A , B) bimodule à travers ϕ

a) Si ${}_BP$ est projectif alors ${}_AA\otimes_B P$ est projectif

b) Si ${}_BE$ est injectif alors ${}_AHom_B({}_BA_A , {}_BE)$ est injectif

I.3.11Proposition [1 , p.232]

Soit ${}_AV_B$ un bimodule et ${}_AC$ un cogénérateur injectif alors les conditions suivantes sont équivalentes : (a) V_B est plat (b) ${}_BHom_A({}_AV_B , {}_AQ)$ est injectif.

(c) il existe un cogénérateur ${}_AC$ tel que ${}_BHom_A(V_B, {}_AE)$ est injectif pour tout ${}_AE$ injectif

Le lemme suivant sera très utilisé dans le chapitre 4

I.3.13 Lemme de Miyashita [7 . lemme : 3.6]

Soit A un anneau et B un sous anneau de A. Soit X_A et Y_A deux A-modules tels que

$X_A \setminus Y_A$ alors il existe $f_i : X \to Y$ et $g_i : Y \to X$, $1 \le i \le n$, des homomorphismes

de A- modules tels que $\sum_{i=1}^{n} g_i o f_i = id_X$. De plus si Z_B est un B-module, en posant

W =End (X_A), Γ=End(Y_A) et Ω =End(Z_B) alors

1) $Hom_A(Y,X) \otimes_\Gamma Hom_B(Z,Y) \cong Hom_B(Z,X)$ en tant que (W ,Ω) bimodules

par : $g \otimes k \mapsto gok$. L'isomorphisme réciproque est : $h \mapsto \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes (f_i o h)$

2) $Hom_B(Z_B , X) \cong Hom_\Gamma[Hom_A(X ,Y) , Hom_B (Z ,Y)]$ en tant que (W ,Ω) bimodules

par $h \mapsto \varphi(h) : f \mapsto (f)(\varphi(h)) = foh$. L'isomorphisme réciproque est : $\omega \mapsto \sum_{i=1}^{n} g_i o[(f_i)\omega]$

I.3.15 Proposition [1 ,p. 261]

Soit B un sous anneau d'un anneau A

-Si ${}_BA$ et ${}_AM$ sont [resp : finiment générés] projectifs alors ${}_BM \cong {}_BA \otimes_A M$ est [resp : finiment généré] projectif .

-Si A_B et ${}_AM$ sont des générateurs alors ${}_BM \cong {}_BA \oplus_A M$ est un générateur

CHAP II : EQUIVALENCE ET DUALITE AU SENS DE MORITA

II.1 EQUIVALENCE ENTRE CATEGORIES

Soient C et D deux catégories. Un foncteur covariant $F : C \to D$ est une équivalence de catégorie s'il existe un foncteur (nécessairement covariant) $G : D \to C$ tels qu'on ait les isomorphismes naturels : $GF \cong 1_C$ et $FG \cong 1_D$

Un foncteur G vérifiant la propriété précédente est appelé "équivalence inverse" de F.

Deux catégories C et D sont dites "équivalentes" s'il existe un foncteur d'équivalence entre elles . Dans ce cas on note $C \approx D$. La relation "être équivalent à" est une relation d'équivalence dans la classe des catégories .

II.1.1 Définitions et notations [1 , p.251]

Deux anneaux A et B sont équivalents au sens de Morita si A-Mod $\approx$ B-Mod et on note $A \approx B$ autrement dit $A \approx B$ ssi il existe un foncteur d'équivalence entre A-Mod et B-Mod . Les catégories A-Mod et B-Mod sont équivalentes si et seulement si Mod-A et Mod-B sont équivalentes . Si A et B sont équivalents alors il existe

F : A-Mod $\to$ B-Mod et G : B-Mod $\to$ A-Mod deux facteurs covariants tels que

$\eta : GF \cong 1_{A\text{-Mod}}$ et $\nu : FG \cong 1_{B\text{-Mod}}$ c'est à dire η et ν sont des isomorphismes naturels

Pour η , cela signifie que pour chaque ${}_AM$ dans A-Mod il existe un isomorphisme $\eta(M) = \eta_M : GF(M) \to M$ dans A-Mod tel que pour tout M' de A-Mod et pour tout $f : M \to M'$ le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \eta(M)\uparrow & & \uparrow\eta(N) \\ GF(M) & \xrightarrow{GF(f)} & GF(N) \end{array}$$

Pour v : même remarques .

Pour chaque $_AM$ et $_BN$, il existe deux Z- homomorphismes

$\phi = \phi_{MN} : \mathrm{Hom}_B(N , F(M)) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(G(N) , M)$

$\theta = \theta_{MN} : \mathrm{Hom}_B(F(M) , N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M , G(N))$ définis par

$\phi_{MN} : \gamma \mapsto \eta_M o\, G(\gamma)$ et $\theta_{MN} : \delta \mapsto G(\delta) o\, \eta^{-1}{}_M$

II.1.2 Proposition [1, p.252]

Soit F : A-Mod → B-Mod une catégorie d'équivalence .Alors pour tout M et M' dans A-Mod la restriction de F à $\mathrm{Hom}_A(M , M')$ est un isomorphisme de groupes abéliens : $F : \mathrm{Hom}_A(M , M') \rightarrow \mathrm{Hom}_A(F(M) , F(M'))$

tel que F(f) est une épimorphisme (monomorphisme) dans B-Mod si et seulement si f est un épimorphisme (monomorphisme) dans A-Mod .De plus , si M≠o alors la restriction $F : \mathrm{End}\,({}_AM) \rightarrow \mathrm{End}\,({}_BF\,(M))$ est un isomorphisme d'anneau.

II.1.3 lemme fondamental [1 ,p. 253]

Si A et B sont équivalents à travers F et G alors les deux homomorphismes de groupes abéliens définis dans I.1.1 : $\phi : \mathrm{Hom}_B(N , F(M)) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(G(N) , M)$

$\theta : \mathrm{Hom}_B(F(M) , N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M , G(N))$ sont des isomorphismes .

II.1.4 Proposition [1, p.254]

Soit A et B deux anneaux équivalents à travers le foncteur F : A-Mod → B-Mod .

Soit M et U deux A-modules , alors

1) U est M-projectif [M-injectif] ssi F(U) est F(M) - projectif [F(M) - injectif]

2) U est projectif (injectif) ssi F(U) l'est

3) U génère (cogénère) M ssi F(U) génère (cogénère) F(M).

4) U est un générateur (cogénérateur) (fidèle) ssi F(U) l'est

5) $f : M \to M'$ est une enveloppe injective ssi

$F(f) : F(M) \to F(M')$ est une enveloppe injective .

6) $f : M \to M'$ est un monomorphisme (épimorphisme) ssi $F(f) : F(M) \to F(M')$ l'est .

II.1.5 Proposition [1, p.256]

Soit A et B deux anneaux équivalents par le biais d'un foncteur

F : A-Mod $\to$ B-Mod .Alors pour tout A-module ${}_AM$, la fonction

$\Lambda_M : K \to \mathrm{Im}F(i_K)$, où $i_K : K \to M$ est l'injection canonique , est un isomorphe du treillis des sous modules de M sur le treillis des sous-module de F(M)

II.1.6 Proposition [1, p.258]

Soient A et B deux anneaux équivalents par le biais d'un foncteur

F : A-Mod $\to$ B-Mod . Soit ${}_AM$, un A-module alors

1) M est simple(semisimple) ssi F(M) est simple (semisimple)

2) M est finiment généré (cogénéré) ssi F(M) est finiment génère (cogénéré) .

3) M est indécomposable ssi F(M) est indécomposable .

II.1.7 Proposition [1, p. 258]

Soient A et B deux anneaux équivalents par le biais d'un foncteur

F : A-Mod $\to$ B-Mod . On pose pour tout idéal (bilatère) I de A : $\phi(I) = \mathrm{Ann}_B(F(A/I))$

où $\mathrm{Ann}_B(X) = \{b \in B \ / \ bx = o \ \forall \ x \in X\}$ est l'annulateur à gauche de X dans B

Alors la fonction $\phi : I \mapsto \phi(I)$ est un isomorphisme du treillis des idéaux A dans le treillis des idéaux de B .De plus pour tout idéal I de A on a l'équivalence $(A/I) \approx (B/\phi(I))$.

II.2 CARACTERISATION DE L'EQUIVALENCE AU SENS DE MORITA

II.2.1 Théorème de Morita[1 , 264]

On rappel qu'un progénérateur est un générateur projectif de type fini

Soit A et B deux anneaux , F : A-Mod $\to$ B-Mod et G : B-Mod $\to$ A-Mod , deux foncteurs additifs . Alors F et G sont des foncteurs d'équivalence ssi il existe ${}_BP_A$ tel que

1) ${}_BP$ et P_A sont des progénérateurs

2) ${}_BP_A$ est équilibré

3) $F \cong (P \otimes_A -)$ et $G \cong \mathrm{Hom}_B(P , -)$.

De plus s'il existe un bimodule ${}_BP_A$ satisfaisant ces conditions , alors en posant

$Q= \mathrm{Hom}_A(P , A)$ on a Q est un (A , B) bimodule , ${}_BQ$ et Q_A sont des progénérateurs et

$F \cong \mathrm{Hom}_A(Q ,-)$ et $G \cong (Q \otimes_B -)$

II.2.2 Corollaire [1 ,p. 265]

Pour deux anneaux A et B , les conditions suivantes sont équivalentes

(a) $A \approx B$

(b) il existe un progénérateur P_A tel que $B \cong \mathrm{End}(P_A)$

(c) il existe un progénérateur Q_B tel que $A \cong \mathrm{End}({}_BQ)$

II.2.3 Corollaire (2) [1 , p.265]

Soit A un anneau .Si P_A est un progénérateur alors A et $\Gamma=\mathrm{End}\ (P_A)$ sont équivalents .

En fait si $P^{\otimes}= \mathrm{Hom}_A(P , A)$ alors ${}_\Gamma P_A$ et ${}_AP^{\otimes}{}_\Gamma$ sont des bimodules et

$(P_A\otimes -)$: A-Mod $\to$ Γ- Mod

$(P^{\otimes}\otimes_\Gamma -)$: Γ- Mod $\to$ A-Mod sont des équivalences inverses

II.3 DUALITE ENTRE CATEGORIES

Soient C et D deux catégories alors un couple (H' , H'') de foncteurs contravariants

H' : C $\to$ D et H'' : D $\to$ C définit une dualité entre C et D s'il existe des isomorphismes naturels η : H''H'$\cong 1_C$ et ν : H'H''$\cong 1_D$.

Les théories générales de dualité et d'équivalence dans ce sens , sont réellement duales c'est à dire si op : C $\to$ C^{op} est le foncteur contravariant canonique de la catégorie C dans la catégorie opposée C ^{op} de C, alors le couple (H' , H'') définit une dualité entre C et D ssi (op)o H' : C $\to$ D^{op} et H''o(op) : D^{op} $\to$ C sont des équivalences inverses

II.3.1 Lemme fondamentale [1 , p.269]

Soient $_AC$ et D_B deux sous-catégories pleines de A-Mod et Mod-B respectivement .

Soit H' : $_AC$ $\mapsto$ D_B et H'' : D_B $\to$ $_AC$ deux foncteurs de dualité entre $_AC$ et D_B

alors il existe deux isomorphismes naturels η : H''H' $\cong 1_C$ et υ : H'H'' $\cong 1_D$

En particulier , pour η , cela signifie que pour tout $_AM$ dans $_AC$, il existe un isomorphisme η_M : H''H'(M) $\to$ M tel que pour tout M_1 , M_2 dans $_AC$ et pour tout A-homomorphisme f : M_1 $\to$ M_2 le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ \uparrow \eta(M_1) & & \uparrow \eta(M_2) \\ H''H'(M_1) & \xrightarrow{GF(f)} & H''H'M_2) \end{array}$$

<u>Pour υ</u> : mêmes remarques

Pour chaque $_AM$ dans $_AC$ et chaque N_B dans D_B il existe des Z-homomorphismes

$\mu = \mu_{MN}$: Hom_B(N , H'(M)) $\to$ Hom_A(M , H''(H))

$\Psi = \Psi_{MN}$: Hom_B (H'(M) , M) $\to$ Hom_A(H''(N) , M) définis par

$\mu_{MN} : \gamma \mapsto H''(\gamma) \circ n^{-1}_M$

$\Psi_{MN} : \delta \mapsto n_M \circ H''(\delta)$

II.3.2 Proposition [1 , p.272]

Soit (H' , H'') une dualité entre deux sous-catégories pleines ${}_AC$ et D_B de A-Mod et Mod-B . Alors pour tout M_1 , M_2 dans ${}_AC$ et N_1 , N_2 dans D_B les restrictions de H' à $Hom_A(M_1 , M_2)$ et de H'' à $Hom_B(N_1 , N_2)$ sont des isomorphismes de groupes abéliens

$$H' : Hom_A(M_1 , M_2) \to Hom_A(H'(M_2) , H'(M_1))$$

$$H'' : Hom_B(N_1 , N_2) \to Hom_A(H''(N_2) , H''(N_1))$$

Si M est dans ${}_AC$ et N dans D_B (et sont non nuls) alors on a les isomorphismes d'anneaux suivants : $End({}_AM) \to End(H'(M)_B)$ et $End(N_B) \to End({}_AH''(N))$

II.3.3 Proposition [1 , p.272]

Soit (H', H'') un couple de foncteur définissant une dualité de Morita entre ${}_AC$ et D_B deux catégories pleines de A-Mod et Mod-B , alors les homomorphismes de II.3.1 deviennent des isomorphismes

$\mu = \mu_{MN} : Hom_B(N , H'(M)) \to Hom_A(M , H''(H))$

$\Psi = \Psi_{MN} : Hom_B(H'(M) , M) \to Hom_A(H''(N) , M)$

II.4 CARACTERISATION DE LA DUALITE AU SENS DE MORITA ENTRE CATEGORIES DE MODULES

II.4.1 Définition [1]

Soit ${}_AU_B$ un bimodule . On dit que ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita ou que les foncteurs $Hom_A(- , U)$ et $Hom_B(- , U)$ définissent une dualité si

1) ${}_AA$ et B_B sont U-reflexifs

2) Tout sous-module et tout module quotient d'un module U-reflexif est U-reflexif .

II.4.2 Théorème [1 , p.273]

Soit A et B deux anneaux . Alors pour un bimodule ${}_AU_B$, les conditions suivantes sont équivalentes

a) ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita

b) Tout module quotient de ${}_AA$, B_B , U_B et ${}_AU$ est U-reflexif

c) ${}_AU_B$ est équilibré tel que ${}_AU$ et U_B soient des cogénérateurs injectifs .

II.4.3 Proposition [4]

Si ${}_\Gamma U_A$ définit une dualité de Morita avec Γ=End(U_A) alors U_A est cofiniment généré et est un cogénérateur injectif .

CHAP III : EXTENSIONS QUASI-FROBENIUSIENNES

III. 1. GENERALITES

Pour la démonstration des résultats de cette partie on pourra aussi se référer à notre mémoire de DEA (juillet 1998-UCAD)

III.1.1 définitions et propositions [2,p.41]

Soit $\rho : B \to A$ un homomorphisme d'anneaux alors $Hom_B(A_B,B)$ est muni d'une structure de (B , A) bimodule par $(bfa)(x) = bf(ax)$ pour $b \in B$, $a \in A$ et $x \in A$.

De même $Hom_B({}_BA , B)$ est muni d'une structure de (A , B) bimodule par

$(x)(agb) = (xag)b$ pour $b \in B$, $a \in A$ et $x \in A$

On dit que $\rho : B \to A$ est une extension frobeniusienne (noté :Ef) si A_B est projectif de type fini et si ${}_BA_A \cong {}_BHom_B(A , B_B)_A$.

Si A_B est projectif de type fini et si ${}_BA_A / {}_BHom_B(A_B , B)_A$, on dit alors que $\rho : B \to A$ est une extension quasi-frobeniusienne (noté : Eqf) à droite .

De manière symétrique on définit une Eqf à gauche .

Une Eqf est une Eqf à gauche et à droite . Si ρ est injectif , l'extension est notée : A / B

III.1.2. Proposition [2 , p.41]

A/B est une Eqf à droite ssi ${}_BA$ et A_B sont projectifs de type fini et ${}_BHom({}_BA, {}_BB)_B \backslash {}_AA_B$

III.1.3 Corollaire [2, p. 41]

A/B est une Eqf ssi $A_B \backslash B_B$, ${}_BA / {}_BB$, ${}_BA_A \sim {}_BHom_B(A_B , B)_A$ et ${}_AA_B \sim {}_AHom_B({}_BA , {}_BB)_B$

III.1.4 définitions et propositions [4]

${}_\Omega M_A$ est finiment normalisé s'il existe $n \in N^*$, $m_i \in M$, $1 \leq i \leq n$ tels que

$M=\sum_{i=1}^{n} m_i A$ avec $m_i A = \Omega m_i$. Si $\rho : B \to A$ est un homomorphisme d'anneaux et ${}_B A_B$ finiment normalisé, on dira simplement que A_B ou ${}_B A$ ou A/B est finiment normalisé.

Soit ${}_A W_A$ un(A , A) bimodule , on dit que ${}_A W_A$ est finiment centralisé s'il existe $n \in N^*$ et un épimorphisme ${}_A A_A{}^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_A W_A$

III.1.5 lemme [5,p.1194] et [2,p.44]

Soit ${}_\Omega M_A$, un $(\Omega$, A) bimodule , finiment normalisé , X un A-module à droite et Y_A un sous-module de X_A .

Si Y_A est essentiel dans X_A alors $Hom_A({}_\Omega M_A , Y)_\Omega$ est essentiel dans $Hom_A({}_\Omega M , X_A)_\Omega$

III.1.6. lemme [5,p.1194]

Soit A/B une Eqf à droite finiment normalisé et X un B-module à droite :

Si Y_A est essentiel dans X_A alors $Y \otimes_B A_B$ est essentiel dans $X_B \otimes_B A_B$ et donc $Y_B \otimes_B A_A$ essentiel dans $X_B \otimes_B A_A$

III.1.7 Proposition [5,p.1196] et [2,p.46]

Soit A/B une Eqf alors :

1) Tout A-module injectif , est injectif en tant que B-module
2) A_A est injectif si B_B l'est
3) A_B est générateur ssi ${}_B A$ l'est

III.1.8 Proposition [5 , p.1194]

Soit A/B une Eqf finiment normalisée et E(B) l'enveloppe injective de B_B Alors $E(B) \otimes_B A$ est une extension essentielle de A_B et est l'enveloppe injective de A_A

III.1.9 Proposition [4 , 277]

Soit ${}_SM_A$ un (S , A) bimodule finiment normalisé . Si M_A est fidèle et projectif alors M_A est générateur

De cette proposition on tire le corollaire suivant

III.1.10 Corollaire

Si A/B est une extension finiment normalisée et A_B (resp : ${}_BA$) projectif alors A_B (resp : ${}_BA$) est générateur . Donc si A/B est une Eqf à droite ou à gauche finiment normalisée alors A_B et ${}_BA$ sont des générateurs

III.2 EXTENSION QUASI-FROBENIUSIENNES ET DUALITE DE MORITA

Dans cette partie nous rappelons les résultats de Y. KITAMURA dans son article [4] « Quasi-frobenius extension with Morita duality » point de depart de nos travaux que nous exposons au chapitre IV . Nous donnerons systématiquement les démonstrations dont la connaissance des techniques utilisées est importante pour la suite .

Soit M_B un B-module à droite , on pose $\overline{M}_A = \mathrm{Hom}_B(A , M)$, $\wedge=\mathrm{End}(M_B)$ et $\Gamma=\mathrm{End}(\overline{M}_A)$ alors on a un homomorphisme d'anneau

$j : \wedge \to \Gamma$ défini par $j(\lambda)(f)=\lambda o f$ avec $\lambda\in\wedge$ et $f\in \overline{M}_A$ (cf :1, 109)

Si A_B est générateur , alors j est injectif (cf :1, 109) et donc $\wedge$ peut être regardé comme un sous-anneau de Γ.

De même en posant $\overline{\overline{M}} = M\otimes_B A$, $\Gamma^*=\mathrm{End}(\overline{\overline{M}}_A)$ alors $j^* : \wedge \to \Gamma^*$ défini par $j^*(\lambda)=\lambda\otimes A$ $(\lambda\in\wedge)$ est un homomorphisme d'anneau . Si ${}_BA$ est générateur alors j^* est injectif (cf :1, 233) d'où $\wedge$ peut être regardé comme un sous anneau de Γ^*

Avec les notation ci-dessus , on a les propositions suivantes

III.2.1 Proposition [4 , p.279]

Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) $\overline{M}_A \backslash M_B$

ii) ${}_{\wedge}\mathrm{Hom}_B(A , M)_A \backslash (\text{resp} : \cong , \sim) : {}_{\wedge}M_B \otimes A_A$

alors $j : \wedge \rightarrow \Gamma$ est une Eqf à gauche (resp : Ef , Eqf)

III.2.2 Proposition [4 , p.279]

Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i*) $\overline{\overline{M}} = {}_{\wedge}M_B \otimes A_B \backslash M_B$

ii*) ${}_{\wedge}M_B \otimes A_A \backslash (\text{resp} : \equiv , \sim)\ {}_{\wedge}\mathrm{Hom}_B(A , M)_A$

alors $j^* : \wedge \rightarrow \Gamma^*$ est une Eqf à droite (resp : Ef , Eqf)

Dans le Chap IV nous donnerons le cas dual de ces deux propositions .

Preuve de la Proposition III.2.1

$\Gamma = \mathrm{Hom}_A(\overline{M}_A , \overline{M}_A) = \mathrm{Hom}_A(\overline{M}_A , \mathrm{Hom}_B({}_A A_B, M_B)_A] \cong \mathrm{Hom}_B(\overline{M}_A \otimes A_B , M_B)$ (cf :I.3.1)

$\Gamma \cong \mathrm{Hom}_B(\overline{M}_B, M_B)$ en tant que $(\wedge, \Gamma)$ bimodules (1)

d'après (i) on a $\overline{M}_B \backslash M_B$ donc

${}_{\wedge}\Gamma \backslash\ {}_{\wedge}\mathrm{Hom}(M_B, M_B) = {}_{\wedge}\wedge$ c'est-à-dire ${}_{\wedge}\Gamma \backslash {}_{\wedge}\wedge$ (2)

En appliquant le lemme de Miyashita avec $Z = M$, $X = \overline{M}$, $Y = M$, on a

$\mathrm{Hom}_B(M , \overline{M}_B) \cong \mathrm{Hom}_{\wedge}[\mathrm{Hom}_B(\overline{M} , M) , \mathrm{Hom}(M_B, M_B)]$

$\mathrm{Hom}_B(M , \overline{M}_B) \cong \mathrm{Hom}_{\wedge}[\mathrm{Hom}_B(\overline{M} , M) , \wedge]$ en tant que $(\Gamma, \wedge)$ bimodules (3)

alors $\mathrm{Hom}_B(M , \overline{M}_B) \cong \mathrm{Hom}({}_{\wedge}\Gamma_{\wedge}, \wedge_{\wedge}]$ en tant que $(\Gamma, \wedge)$ bimodules (4)

On a les isomorphismes suivants :

$\Gamma = \mathrm{Hom}_A(\overline{M}_A, \overline{M}_A)$ (resp : $\cong$, ~) $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_B A, \overline{M}_A)$ d'après (ii)

$\cong \mathrm{Hom}_B[M, \mathrm{Hom}_A(A_B, \overline{M}_A)_B]$ d'après I.3.1

$\cong \mathrm{Hom}_B[M_B, \overline{M}_B]$

$\cong \mathrm{Hom}_\wedge[{}_\wedge\Gamma_\Gamma, {}_\wedge\wedge_\wedge]$ d'après (4)

Ainsi ${}_\Gamma\Gamma_\wedge \setminus$ (resp : $\cong$,~)${}_\wedge\wedge_\wedge$ (5)

De (5) et (2) on conclut que : $j : \wedge \rightarrow \Gamma$ est une Eqf à gauche (resp : Ef , Eqf)

Preuve de la proposition III.2.2

$\Gamma^* = \mathrm{Hom}_A(\overline{\overline{M}}_A, \overline{\overline{M}}_A) = \mathrm{Hom}_B(M_B \otimes A_A, \overline{M}_A)$

$\cong \mathrm{Hom}_B[M_B, \mathrm{Hom}_A({}_BA_A, \overline{\overline{M}}_A)]$ d'après III.3.1

$\Gamma^* \cong \mathrm{Hom}_B(M_B, \overline{\overline{M}}_B)$ en tant que $(\Gamma^*, \wedge)$ bimodules (1*) .

En utilisant (i*) on a $\Gamma^*{}_\wedge \setminus \mathrm{Hom}_B(M, M_B)_\wedge = \wedge_\wedge$ (2*)

En appliquant le lemme de Miyashita avec $X = \overline{M}$, $Y = M$ et $Z = M$ on a

$\mathrm{Hom}_B(M, \overline{\overline{M}}_B) \cong \mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}_B \overline{\overline{M}}, M_B), \wedge_\wedge]$ en tant que $(\Gamma^*, \wedge)$ bimodules (3*)

D'où $\mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}(M, \overline{\overline{M}}_B), \wedge_\wedge] \cong \mathrm{Hom}_\wedge\{\mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}_B, M), {}_\wedge\wedge], \wedge_\wedge\}$ (3**)

Mais ${}_\wedge\mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}, M_B)$ est projectif de type fini car

${}_\wedge\mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}_B, M) \setminus {}_\wedge\mathrm{Hom}_B(M_B, M) = {}_\wedge\wedge$

Donc le membre de droite de (3**) est isomorphisme à ${}_\wedge\mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}_B, M)$

Il en resulte que $\mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}(M, \overline{\overline{M}}_B), \wedge_\wedge] \cong {}_\wedge\mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}, M_B)$ (3***)

ainsi avec (1*) et (3***) on a

$\mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}, \overline{\overline{M}}_B) \cong \mathrm{Hom}_\wedge(\Gamma^*{}_\wedge, \wedge_\wedge)$ en tant que $(\wedge, \Gamma^*)$ bimodules (4*)

Maintenant on a les isomorphismes suivants

$\Gamma^* = \mathrm{Hom}_\wedge(\overline{\overline{M}}, \overline{\overline{M}}) \setminus (\text{resp} : \cong, \sim)\ \mathrm{Hom}_A(\overline{\overline{M}}_A, \overline{M})$ d'après (ii*)

On a $\mathrm{Hom}_A(\overline{\overline{M}}_A, \overline{M}) = \mathrm{Hom}_A[\overline{\overline{M}}_A, \mathrm{Hom}({}_AA_B, M_B)_B] \cong \mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}_A \otimes_A A_B, M_B)$

$\mathrm{Hom}_A(\overline{\overline{M}}_A, \overline{M}) \cong \mathrm{Hom}_B(\overline{\overline{M}}, M_B) \cong \mathrm{Hom}_\wedge(\Gamma^*, \wedge)$ en tant que $(\wedge, \Gamma^*)$ bimodules d'après (4*) donc ${}_\wedge\Gamma^*{}_{\Gamma^*} \setminus (\text{resp} : \cong, \sim)\ \mathrm{Hom}_\wedge(\Gamma^*{}_\wedge, \wedge_\wedge)$ (5*)

De (5*) et (2*) on conclut que : $j^* : \wedge \rightarrow \Gamma^*$ est une Eqf à droite (resp : Ef , Eqf)

III.2.3 Proposition [4 , p.281]

Soit N_A un A- module à droite , $\Sigma = \mathrm{End}(N_A)$ et $\Omega = \mathrm{End}(N_B)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(iii) $\overline{N} = \mathrm{Hom}_B({}_AA_B, N_B) \setminus N_A$

(iv) ${}_\Omega N \otimes_B A_A \setminus (\text{resp} : \cong \sim)_\Omega\ \mathrm{Hom}_B(A_B, N)_A = {}_\Omega\overline{N}_A$

alors Ω / Σ est une Eqf à droite (resp :Ef, Eqf)

Preuve

$\Omega = \mathrm{End}(N_B) = \mathrm{Hom}_B(N_B, N_B)$

$\cong \mathrm{Hom}_B(N_A \otimes A_B, N_B)$

$\cong \mathrm{Hom}_A[N_A, \mathrm{Hom}_B({}_AA_B, N_B)]$, en tant que (Ω, Σ) bimodules

c'est-à-dire ${}_\Omega\Omega_\Sigma = {}_\Omega\mathrm{Hom}_A(N_A, \overline{N}_A)_\Sigma$ (1)

d'après (iii) on a $\overline{N}_A \setminus N_A$ d'où en utilisant (1)

$$\Omega_\Sigma \setminus \Sigma_\Sigma \qquad (2)$$

En appliquant le lemme de Miyashita avec $X = \overline{N}$, $Y = N$ et $Z = B$

l'application $\varphi : \mathrm{Hom}_A(N, \overline{N}) \otimes_\Sigma \mathrm{Hom}_B(B, M) \rightarrow \mathrm{Hom}_B(B, M)$

défini par : $g \otimes k \mapsto g \circ k$ est bijective et conduit donc à la bijectivité

$\overline{\varphi} : \mathrm{Hom}_A(N, \overline{N}) \otimes_{\Sigma} N \rightarrow \overline{M}$

donnée par : $g \otimes n \mapsto g(n)$

qui est un (Ω, A) homomorphisme donc $\quad {}_{\Omega}\Omega \otimes_{\Sigma} N_A \cong {}_{\Omega}\overline{N}_A \quad (3)$

$\Omega = \mathrm{Hom}_B[N_B, N_B]$

$\cong \mathrm{Hom}_B(N_B, \mathrm{Hom}_A({}_AA_B, N_A)]$

$\cong \mathrm{Hom}_B(N_B \otimes_B A_A, N_A)$ en tant que (Σ, Ω) bimodules

or $\ {}_{\Sigma}\mathrm{Hom}_B(N_B \otimes_B A_A, N_A)_{\Omega} \backslash$ (resp : $\cong$, ~) $\mathrm{Hom}_A({}_{\Omega}\overline{N}, {}_{\Sigma}N_A)$ d'après (iv)

Donc $\ {}_{\Omega}\Omega_{\Sigma} \backslash$ (resp : $\cong$, ~) $\mathrm{Hom}_A({}_{\Omega}\overline{N}, {}_{\Sigma}N_A)$ (4)

Par ailleurs nous avons :

$\mathrm{Hom}_A({}_{\Omega}\overline{N}, {}_{\Sigma}N_A) \cong \mathrm{Hom}_A({}_{\Omega}\otimes_{\Sigma} N, N)$ d'après (3)

$\cong \mathrm{Hom}_{\Sigma}(\Omega_{\Sigma}, \mathrm{Hom}_A({}_{\Sigma}N_A, {}_{\Sigma}N_A)]$

$= \mathrm{Hom}_{\Sigma}({}_{\Omega}\Omega_{\Sigma}, {}_{\Sigma}\Sigma_{\Sigma})$ en tant que (Σ, Ω) bimodules (5)

De (4) et (5) on tire : $\quad {}_{\Sigma}\Omega_{\Omega} \backslash$ (resp : $\cong$, ~) ${}_{\Sigma}\mathrm{Hom}({}_{\Omega}\Omega_{\Sigma}, \Sigma)_{\Omega}$ (6)

De (6) et (2) on déduit $\Omega \backslash \Sigma$ est une Eqf à droite (resp :Ef , Eqf)

III.2.3 Proposition [4 ,p. 282]

Soit A/B une extension finiment normalisée

1) Si ${}_AU_B$ définit une dualité de Morita alors ${}_{\Gamma}\mathrm{Hom}_B(A, U)_A$, définit une dualité de Morita avec $\Gamma = \mathrm{End}(\mathrm{Hom}_B(A, U)_A)$

2) Si A_B et ${}_BA$ sont projectifs et si ${}_{\Sigma}V_A$ définit une dualité de Morita alors ${}_{\Omega}V_B$ définit une dualité de Morita avec $\Omega = \mathrm{End}(V_B)$

III.2.4 Proposition [4, 277 et 278]

Soit A/ B une extension finiment normalisée

1) Si X_B est finiment cogénéré alors $Hom_B(A , X)$ est finiment cogénéré en tant que B-module donc en tant que A-module

3) Si Y_A est finiment cogénéré alors Y_B l'est

III.2.5 Proposition [4 , p.283]

Soit A/B une extension finiment normalisée

1) Si ${}_\wedge U_B$ définit une dualité de Morita et A /B est une Eqf à gauche (resp: Ef , Eqf) alors ${}_\Gamma Hom_B(A , U)_A$ définit une dualité de Morita et $\Gamma/\wedge$ est une Eqf à gauche (resp: Ef , Eqf) , avec Γ=End($Hom_B(A , U)_A$)

2) Si A_B et ${}_BA$ sont projectifs, ${}_\Sigma V_A$ définit une dualité de Morita et A /B est une Eqf à gauche (resp: Ef , Eqf) alors ${}_\Omega V_B$ définit une dualité de Morita Ω/Σ est une Eqf à gauche (resp: Ef , Eqf), avec Ω=End(V_B)

Dans le Chapitre IV nous prolongerons ce théorème puis nous prouverons le cas dual .

Preuve

1) Si ${}_\wedge U_B$ définit une dualité de Morita et A\B est une Eqf à gauche (resp : Ef, Eqf) alors U_B est un cogénérateur , injectif , cofiniment généré en tant que B-module d'après II.4.3.et III.2.3. Comme ${}_BA$ est projectif alors $\overline{U}_B$=$Hom_B({}_BA_B , U_B)$ est injectif d'après I.3.11 Comme U_B est un cogénérateur et $\overline{U}_B$ est cofiniment généré alors il existe un monomorphisme $\varphi : \overline{U}_B \to U_B^{(n)}$ où n est un entier

Comme $\overline{U}_B$ est injectif alors φ est scindé donc

$$\overline{U}_B \backslash U_B \qquad (1)$$

De plus A\B est une Eqf à gauche (resp : Ef , Eqf) alors

${}_{A}A_{A}\backslash$ (resp , $\cong$, ~) $Hom_B({}_{B}A_{B}, B)$ donc

${}_{\wedge}\overline{U}_{A}$ $Hom_B({}_{B}A_{B}, U_B) \backslash$ (resp : , $\cong$, ~) $Hom_B(Hom_B({}_{B}A_{B}, B), U_B)$

Mais $Hom_B(Hom_B({}_{B}A_{B}, B), U_B) \cong {}_{\wedge}U_B \otimes A_A$

alors ${}_{\wedge}\overline{U}_{A} \backslash$(resp : $\cong$,~) ${}_{\wedge}U_B \otimes A_A$ (2)

De (1) et (2) on tire $\Gamma \backslash \wedge$ est une Eqf à gauche (resp :Ef , Eqf)

en utilisant alors le théorème III.2.3, on déduit que : ${}_{\Gamma}\overline{U}_{A}$ définit une dualité de Morita

2) on suppose que ${}_{\Sigma}V_A$ définit une dualité de Morita et A\B est une Eqf à droite (resp : Ef, Eqf). On pose $\overline{V} = Hom_B({}_{A}A_{B}, V_B)$. V_A est cofiniment généré donc V_B l'est par suite $\overline{V}_A$ l'est d'après III.2.3 . Comme V_A injectif alors $\overline{V}_A$ est injectif , de plus V_A est un cogénérateur

donc $\overline{V}_A \backslash V_A$ (1*)

Par ailleurs A\B est une Eqf à droite (resp:Ef ,Eqf) alors

${}_{B}A_{A}\backslash$ (resp : $\cong$, ~) $Hom_B({}_{A}A_{B}, B)$

d'où ${}_{\Omega}V_B \otimes_B A_A \backslash$ (resp : $\cong$,~) ${}_{\Omega}V_B \otimes Hom_B({}_{A}A_{B}, {}_{B}B_{B})$

mais A_B est projectif de type fini donc d'après I.3.4 on a

$${}_{\Omega}V_B \otimes Hom_B({}_{A}A_{B}, {}_{B}B_{B}) \cong Hom_B({}_{A}A_{B}, {}_{\Omega}V_B \otimes_B B_B)$$

$$\cong Hom_B({}_{A}A_{B}, {}_{\Omega}V_B)$$

ainsi ${}_{\Omega}V_B \otimes_B A_A \backslash$ (resp : $\cong$,~) $Hom_B({}_{A}A_{B}, {}_{\Omega}V_B)$ (2*)

De (1*) et (2*) on tire : $\Gamma^* \backslash \Omega$ est une Eqf à droite (resp :Ef , Eqf)

en utilisant alors le théorème III.2.3 , on conclut que : ${}_{\Omega}\overline{V}_A$ définit une dualité de Morita

III.2.6 Proposition [4 , 284]

Soit A/B une extension finiment centralisée, U_B un B-module injectif . On pose

Γ=End(Hom_B(A , U)$_A$) et $\wedge$=End(U_B) alors $\Gamma_\wedge$ est finiment centralisé .

Dans le Chap IV nous donnerons le cas dual cette proposition sous forme d'un lemme .

Du théorème III.2.5 et de la proposition III.2.6 résulte la proposition suivante

III.2.7 Proposition [4 , 284]

Si ${}_\wedge U_B$ définit une dualité de Morita et A /B est une Eqf à gauche (resp: Ef , Eqf) finiment centralisé , alors ${}_\Gamma Hom_B(A, U)_A$ définit une dualité de Morita et $\Gamma/\wedge$ est une Eqf à gauche (resp: Ef , Eqf) finiment centralisé , avec Γ=End(Hom_B(A , U)$_A$)

III.2.8 Lemme [4 , 1194]

Si est ${}_B A_B$ finiment normalisé (centralisé) alors ${}_B Hom_B(A , B)_B$ l'est .

III.2.9 Théorème [6 , p.112]

Soit A/B une extension , M_A un A-module à droite , Σ=End(M_A) , Ω=End(M_B)

Si A/B est une Eqf et $M\otimes_B A_A \backslash M_A$ alors Ω/Σ est une Eqf et ${}_\Omega\Omega\otimes_\Sigma M \backslash {}_\Omega M$

CHAP IV : EXTENSIONS QUASI-FROBENIUSIENNES AVEC EQUIVALENCE OU DUALITE DE MORITA

Dans ce chapitre tous les résultats exposés sont les nôtres sauf les lemmes IV.1.2 et IV.1.3 pour les quels nous proposons une démonstration faute de ne pouvoir donner de bonnes références. Ce chapitre est composé de 3 sections .

SECTION 1 EQF AVEC DUALITE DE MORITA

En guise de complément à la proposition I.2.3 on a le lemme suivant

Lemme : IV.1.1

Soient X_A et Y_A deux A-modules

Si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite

a) $X_A \cong Y_A$

b) - X_A est facteur direct de $Y^{(n)}{}_A$ pour un certain entier non nul n et

- X_A génère et cogénère Y_A

c) $X_A \sim Y_A$

alors X_A est fidèle (resp : équilibré) ssi Y_A est fidèle (resp : équilibré) .

De plus on a l'isomorphisme naturel $Biend(X_A) \cong Biend(Y_A)$

Preuve

a) On pose $\Gamma=End(X_A)$, $\Omega=End(Y_A)$.

Soit $\varphi : X_A \to Y_A$ un isomorphisme de A-modules à droite alors

- $\psi : \Gamma \to \Omega$ défini par $\psi(\gamma)= \varphi \gamma \varphi^{-1}$ pour tout γ de Γ

est un isomorphisme d'anneaux

- X (resp : Y) peut être muni d'une structure de Ω (resp : Γ)-module par :

$w.x = \psi^{-1}(w)(x) = (\varphi^{-1} w \varphi)(x)$ pour tout w de Ω et x de X

[resp : $\gamma.y = \psi(\gamma)(y) = (\varphi \gamma \varphi^{-1})(y)$ pour tout γ de Γ et y de Y]

en remarquant que $w.(w'.x)=(\varphi^{-1}w\varphi)[(\varphi^{-1} w' \varphi)(x)]=(\varphi^{-1}w\, w'\varphi)(x)=(ww').x$

[resp : $\gamma.(\gamma'.y) = (\varphi \gamma \varphi^{-1})[(\varphi \gamma' \varphi^{-1})(y)] = (\varphi \gamma\gamma'\varphi^{-1})(y) = (\gamma \gamma').y$]

- $\rho : {}_{\Omega}X \rightarrow {}_{\Omega}Y$ défini par $(x)\rho = \varphi(x)$ pour tout x de X

est un isomorphisme de Ω-module à gauche

En effet l'additive est triviale et la linéarité est donnée par

$(w.x)\rho = \varphi(w.x) = \varphi[\psi^{-1}(w)(x)] = \varphi[\varphi^{-1}w\varphi(x)] = w(\varphi(x)) = w[(x)\rho]$

- Cet isomorphisme de modules permet de construire un isomorphisme d'anneaux

$T : \mathrm{Biend}(X_A) \rightarrow \mathrm{Biend}(Y_A)$ défini par : $T_\alpha = T(\alpha) = \rho^{-1}\alpha\rho$ pour tout α de Biend(X)

remarquant que :

$(wy)T_\alpha = (wy)\rho^{-1}\alpha\rho = (w(y)\rho^{-1})\alpha\rho = [\psi^{-1}(w)\{(y)\rho^{-1}\}]\alpha\rho$

$= [\psi^{-1}(w)\{(y)\rho^{-1}\alpha\}]\rho = [w.\{(y)\rho^{-1}\alpha\}]\rho = w[(y)\rho^{-1}\alpha]\rho$

$= w(y)T_\alpha$ pour la Ω-linéarité de T_α

- T rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda'"] & \\ \mathrm{Biend}(X_A) \arrow[rr, "T"] & & \mathrm{Biend}(Y_A) \end{tikzcd}$$

où λ et λ' sont les multiplications à droite par les éléments de A c'est-à-dire

$\lambda : A \rightarrow \mathrm{Biend}(X)$ défini par : $(x)\lambda(a)=(x)\lambda_a=xa$ pour tout a de A et x de X.Idem pour λ'

En effet : $(y)T[\lambda_a] = (y)\rho^{-1}\lambda_a\rho = [\varphi^{-1}(y)]\lambda_a\rho = [\varphi^{-1}(y)a]\rho = [\varphi^{-1}(ya)]\rho$

$= \varphi[\varphi^{-1}(ya)] = ya = (y)\lambda_a'$.

Donc $T\lambda = \lambda'$. Comme T est un isomorphisme alors λ est injectif (surjectif) si et seulement si λ' est injectif (surjectif)

b) X_A est facteur direct de $Y^{(n)}{}_A$ pour un certain entier non nul n alors il existe L_A un A-module tel que $Y_A{}^{(n)} = X_A \oplus L_A$

d'où d'après la proposition I.2 l'application restriction

Res : $\mathrm{Biend}(Y^{(n)}{}_A) \to \mathrm{Biend}(X)$ définie par : *Res*(b) = b/X

est un homomorphisme d'anneaux rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\lambda'"'] \arrow[dr, "\lambda''"] & \\ \mathrm{Biend}(Y^{(n)}) \arrow[rr, "Res"] & & \mathrm{Biend}(X) \end{tikzcd}$$

Comme $L_A \backslash Y_A$ alors Y_A génère et cogénère L_A et comme de plus X_A génère et cogénère Y_A donc X_A génère et cogénère L_A ainsi *Res* est un isomorphisme d'après I.2.1 . Mais l'homomorphisme naturel

$\mu : \mathrm{Biend}(Y) \to \mathrm{Biend}(Y^{(n)})$ défini par : $b \mapsto \mu(b)$ pour tout $b \in \mathrm{Biend}(Y)$

où $\mu(b) : Y^{(n)} \to Y^{(n)}$ est donné par $(y_1,\dots,y_n) \mapsto (y_1,\dots,y_n)(\mu(b)) = (y_1 b,\dots,y_n b)$

est un isomorphisme d'anneaux d'après I.2.2 .

Ainsi Biend(X) $\cong$ Biend (Y) canoniquement .

μ rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda'"] & \\ \mathrm{Biend}(Y) \arrow[rr, "\mu"] & & \mathrm{Biend}(Y^{(n)}) \end{tikzcd}$$

où λ , λ' sont les multiplications à droite par les éléments de A .

En effet : $(y_1,\dots,y_n)(\mu(\lambda_a)) = (y_1\lambda_a,\dots,y_n\lambda_a) = (y_1 a,\dots,y_n a) = (y_1,\dots,y_n)a = (y_1,\dots,y_n)\lambda_a'$

Ainsi on a : $\lambda''=Res \circ \lambda'$ et $\lambda'=\mu \circ \lambda$ d'où $\lambda''=Res \circ \mu \circ \lambda$

Comme Res et μ sont des isomorphismes alors λ'' est injectif (surjectif)

si et seulement si λ injectif (surjectif)

b)$X_A \sim Y_A$ donc $Y_A \setminus X_A \setminus Y_A$ Par suite de $X_A \setminus Y_A$ on déduit qu'il existe Z_A est facteur direct de $Y^{(n)}{}_A$ pour un certain entier n non nul tel que $X_A \cong Z_A$

De $Y_A \setminus X_A \cong Z_A$ on déduit que Z_A génère et cogénère Y_A . Ainsi Z_A est fidèle (resp : équilibré) ssi Y_A est fidèle (resp : équilibré) d'après (b) .

Comme $X_A \cong Z_A$ on utilise (a) pour conclure

Lemme : IV.1.2

$Y_A \setminus X_A$ ssi il existe $f_k : Y \to X$ et $g_k : X \to Y$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} g_k o f_k = id_Y \text{ où } 1\leq k\leq n \text{ avec } n\in N^*$$

Preuve

$\Rightarrow$)$Y_A \setminus X_A$ alors il existe $n\in N^*$, K_A un A- module tels que $Y \oplus K \cong X^{(n)}$.

Soit $X_k = X$, $1 \leq k \leq n$, $i_k : X_k \to X^{(n)}$, $i_Y : Y \to X^{(n)}$, $P_k : X^{(n)} \to X_k$ $P_Y : X^{(n)} \to Y$

les injections et les surjections canoniques respectives alors

$\sum_{k=1}^{n} i_k o P_k = id_{X^{(n)}}$ et $P_Y o\, i_Y = id_Y$ d'où $\sum_{k=1}^{n} (P_Y o i_k) o (P_k o i_Y) = P_Y o\, id_{X^{(n)}} o\, i_Y = id_Y$ alors en posant $g_k = P_Y o\, i_k : X \to Y$ et $f_k = P_k o\, i_Y : Y \to X$ on a $\sum_{k=1}^{n} g_k o f_k = id_Y$

$\Leftarrow$)Si $g_k : X \to Y$ et $f_k : Y \to X$ avec $\sum_{k=1}^{n} g_k o f_k = id_Y$

on pose $f = (f_1, \ldots, f_n) : Y \to X^{(n)}$ défini par : $y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_n(y))$

et $g = \oplus g_k : X^{(n)} \to Y$ défini par : $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \sum_{k=1}^{n} g_k(x_k)$

alors $gof(y) = \sum g_k f_k(y) = y$ donc $gof = 1_Y$ d'où Y est facteur directe de $X^{(n)}$

Lemme : IV.1.3

si $X_A \sim Y_A$ alors $\omega = End(X_A)$ et $\Gamma = End(Y_A)$ sont équivalents au sens de Morita à travers le foncteur d'équivalence $F = Hom_\Gamma({}_\Gamma P_\omega, -)$ où ${}_\Gamma P_\omega = Hom_A(X_A, Y)$.

De plus ${}_\omega X \cong f({}_\Gamma Y)$

Preuve :

Pour prouver que ω et Γ sont équivalents à travers F , il suffit de montre que :

- P_ω est un progénérateur
- $\varphi : \Gamma \to End(P_\omega)$ défini par :$h \mapsto \varphi(h) : f \mapsto hof$ est un isomorphisme

Montrons que P_ω est un progénérateur

Comme $X_A \sim Y_A$ alors $Hom_A({}_\omega X_A, X) \sim Hom_A({}_\omega X_A, Y)$ c'est à dire $\omega_\omega \sim P_\omega$

Montrons que φ est un isomorphisme :

Comme $Y_A \backslash X_A$, on définit g_k et f_k de la même manière que dans le lemme IV.1.2 précédant .

Si $\varphi' : End(P_\omega) \to \Gamma$ est défini par : $\psi \mapsto \varphi'(\psi) = \sum \psi(g_k) o f_k$

alors φ' est un homomorphisme d'anneaux et on a d'une part

$\varphi'\varphi(h) = \sum \varphi(h)(g_k) o f_k = \sum (h g_k) f_k = h \sum g_k f_k = h \text{ o } id_Y = h$ pour tout $h \in \Gamma$, d'après le lemme IV.1.2 donc $\varphi \circ \varphi' = id_\Gamma$ (*)

D'autre part $\varphi\,\varphi'(\psi) = \varphi(\sum\psi(g_k)f_k)$ et pour tout $f\in P$, on a

$\varphi \circ \varphi'(\psi)(f) = \varphi(\sum\psi(g_k)f_k)(f) = \sum\psi(g_k)(f_k o f)$

or $f_k o f \in \omega$ et ψ est ω-linéaire à droite alors $\varphi \circ \varphi'(\Psi)(f) = \psi(\sum g_k f_k f) = \psi(f)$

d'où $\varphi \circ \varphi'(\psi) = \psi$ pour tout $\psi \in End(P_\omega)$ d'après le lemme IV.1.2

donc $\varphi \circ \varphi' = id_{(End(P\omega))}$ (**)

Par suite de (*) et (**) on déduit que φ est un isomorphisme .

Montrons que $F({}_\Gamma Y) \cong {}_\omega X$

$F({}_\Gamma Y) = Hom_\Gamma[\,{}_\Gamma Hom_A(X_A, Y)_\omega, {}_\Gamma Y\,]$

$\cong Hom_\Gamma[\,{}_\Gamma Hom_A(X_A, Y), Hom_A(A,Y)\,]$

on applique alors le lemme de Miyashita avec B =A , Z =A donc

$End(Z_B) = End(A_A) \cong A$ et on obtient $F({}_\Gamma Y) \cong Hom_A(A_A, {}_\omega X) \cong {}_\omega X$

d'où $F({}_\Gamma Y) \cong {}_\omega X$

Théorème : IV.1.4 :

Soient X_A et Y_A deux A-modules. On pose $\omega = End(X_A)$ et $\Gamma = End(Y_A)$

Si $X_A \sim Y_A$ alors ${}_\omega X_A$ définit une dualité de Morita si et seulement si

${}_\Gamma Y_A$ définit une dualité de Morita

Preuve

Comme $X_A \sim Y_A$ alors X_A est fidèlement équilibré ssi Y_A et fidèlement équilibré d'après le lemme IV.1.1 . De plus X_A est un cogénérateur injectif ssi Y_A est cogénérateur injectif d'après I.2.3 .

$X_A \sim Y_A$ alors ω et Γ sont équivalents à travers un foncteur d'équivalence F tel que $F({}_\Gamma Y) \cong {}_\omega X$ d'après le lemme IV.1.3 d'où ${}_\Gamma Y$ est un cogénérateur injectif ssi ${}_\omega X$ est un cogénérateur injectif .

Quelques notations

Soit U_B un B-module ,on pose $\wedge = End(U_B)$, $U' = Hom_B(A_B,U)$,$\hat{U} = U_B \otimes A$

$\Gamma = End(U'_A)$ et $\Gamma^* = End(\hat{U}_A)$

On considère les deux homomorphismes d'anneaux suivants

$j : \wedge \to \Gamma$ défini par : $\lambda \mapsto j(\lambda) : f \mapsto \lambda o f$ pour tout $\lambda \in \wedge$ et $f \in U'$

$j^* : \wedge \to \Gamma^*$ défini par : $\lambda \mapsto j^*(\lambda) = \lambda \otimes 1_A$

alors on sait que d'après III.2 , j (resp : j^*) est une injection d'anneaux si A_B (resp : ${}_BA$) est un générateur .

Ces notations restent valables pour la suite de la section.

Lemme : IV.1.5

si A/B est une extension finiment centralisée et U_B est projectif alors

$j^* : \wedge \to \Gamma^*$ est finiment centralisé

Preuve

A/B est finiment centralisé ssi il existe $n \in N$ et un épimorphisme ${}_BB_B^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_BA_B$

d'où ${}_\wedge U_B \otimes B_B^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_\wedge U_B \otimes A_B$ or ${}_\wedge U_B^{(n)} \cong {}_\wedge U_B \otimes B_B^{(n)}$ donc ${}_\wedge U_B^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_\wedge U_B \otimes A_B$

comme U_B est projectif alors $Hom_B(U_B,U^{(n)}) \xrightarrow{\text{épim}} {}_\wedge Hom_B(U_B,U_B \otimes A)_\wedge$ or

${}_\wedge \wedge_\wedge^{(n)} \cong {}_\wedge Hom_B(U_B,U^{(n)})_\wedge$ d'où

${}_\wedge \wedge_\wedge^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_\wedge Hom_B(U_B,U_B \otimes A)_\wedge$ (*)

Maintenant on a les isomorphismes suivants de $(\wedge, \wedge)$ bimodules

$\Gamma^* = Hom_A({}_{\wedge}U_B \otimes A_A, {}_{\wedge}U_B \otimes A_A)$

$\cong Hom_B[U_B, Hom_A(A, U_B \otimes A_A)_B]$

$\cong Hom_B(U_B, U_B \otimes A_B)$ (**)

De (*) et (**) on conclue que : ${}_{\wedge}\wedge_{\wedge}^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_{\wedge}\Gamma_{\wedge}^*$ d'où le résultat

Théorème : IV.1.6

Soit A/ B une extension finiment normalisé d'anneaux .

On suppose que ${}_BA$ est projectif de type fini et ${}_AA_B \sim {}_AHom_B({}_BA, B)_B$.

Si ${}_BU_{\wedge}$ définit une dualité de Morita alors il en est de même pour

${}_{\Gamma^*}U_B \otimes A_A$ *avec* $\Gamma^* = End(U_B \otimes A_A)$

Preuve

${}_BA$ projectif de type fini alors ${}_{\wedge}U_B \otimes A_A \cong {}_{\wedge}Hom_B[Hom_B({}_BA, B)_B, U_B]_A$

et comme ${}_AA_B \sim {}_AHom_B({}_BA, B)_B$ donc ${}_{\wedge}U_B \otimes A_A \sim {}_{\wedge}Hom_B(A_B, U_B)_A$

d'où comme ${}_{\wedge}U_B$ définit une dualité de Morita alors ${}_{\Gamma}Hom_B(A_B, U_B)_A$ définit une dualité de Morita avec $\Gamma = End(Hom_B(A_B, U)_A)$ d'après le théorème III.2.3

et donc ${}_{\Gamma^*}U_B \otimes A_A$ définit une dualité de Morita avec $\Gamma^* = End(U_B \otimes A_A)$

d'après le théorème IV.1.4

Le principal résultat de cette section est le théorème suivant qui prolonge dans un certain sens le théorème III.2.4

Théorème : IV.1.7

Si ${}_{\wedge}U_B$ définit une dualité de Morita et A/B est une Eqf (resp:Ef) finiment normalisée alors ${}_{\Gamma^*}U_B\otimes A_A$ définit une dualité de Morita avec $\Gamma^* = End(U_B\otimes A_A)$ et $\Gamma^*/\wedge$ est Eqf (resp :Ef).

De plus si A/B est finiment centralisé et U_B projectif alors $\Gamma^*/\wedge$ est finiment centralisé.

Preuve

A/B est une Eqf (resp :Ef) .Donc ${}_AA_B\sim$ (resp $\cong$)${}_AHom_B({}_BA, B)$ et A_B est projectif de type fini .Comme A/B est une extension finiment normalisée et ${}_{\wedge}U_B$ définie une dualité de Morita , alors il en est de même pour ${}_{\Gamma^*}U_B\otimes A_A$ avec $\Gamma^*=End(U_B\otimes A_A)$ d'après le théorème IV.1.6 . A/B Eqf (resp : Ef) alors ${}_{\wedge}U_B\otimes A_A \sim$ (resp $\cong$) ${}_{\wedge}Hom_B(A_B,U_B)_A$ (*) donc en particulier $U_B\otimes A_B \backslash Hom_B(A_B,U_B)_B$ (α)

${}_{\wedge}U_B$ définit une dualité de Morita, donc U_B est cofiniment généré et alors $Hom_B(A_B,U_B)_B$ est cofiniment généré d'après III.2.7 . Comme U_B est un cogénérateur injectif et ${}_BA$ projectif alors $Hom(A_B,U_B)_B$ est injectif d'où $Hom_B(A_B,U_B)\backslash U_B$ (β) car $Hom_B(A_B,U_B)$ est cofiniment généré . De(α) et (β) on déduit $U_B\otimes A_B\backslash U_B$ (**)

De (*) et (**) et de la proposition III.2.2 on conclue que

$j^* : \wedge \to \Gamma^*$ défini par :$\lambda \mapsto \lambda\otimes id_A$ est une Eqf (resp : Ef) .

Le reste découle du corollaire III.1.10 et du lemme IV. 1.5

Question

Est-ce que le théorème ci-dessus reste vrai pour une Eqf à droite ou à gauche ?

Comme A_B est générateur alors l'homomorphisme d'anneaux

$\Psi: \wedge \rightarrow \Gamma$ défini par : $\lambda \mapsto \Psi(\lambda) : f \mapsto \lambda o f$ est injectif

ainsi avec (α') et (β') et la proposition III.2.1 on tire :

$\Gamma / \wedge$ est une Eqf (resp :Ef).

La proposition III.2.5 prouve que $\Gamma/\wedge$ est finiment centralisé si A/B est finiment centralisé

b) A/B est une Eqf à droite finiment normalisée alors

$E(A_A)_B \backslash E(B)_B$ d'après le corolaire IV.2.1 d'où

$E(A_A)_B \otimes A_A \backslash E(B) \otimes_B A_A = E(A_A)_A$ (*)

A / B est une Eqf (resp : Ef) alors

${}_\Omega E(A_A) \otimes_B A_A \sim$ (resp : $\cong$) $Hom_B[A_B , E(A)_B]$ (β") et en particulier

$Hom_B(A_B, E(A_A)_B)_A \backslash E(A_A) \otimes_B A_A$ (**).

De (*) et (**) on déduit $Hom_B(A_B , E(A_A)_B)_A \backslash E(A)_A$ (α") .

De (α") et (β") et de la proposition III.2.7 on tire :

Ω / Γ^* est une Eqf (resp : Ef)

Remarque :(autre preuve pour (c))

D'après le corollaire IV.2.1

on a $E(A_A)_B = E(A_B)_B$ et $E(A_B) \otimes_B A_A \backslash E(B) \otimes_B A_A = E(A_A)_A$ d'après ci-dessus .

Alors $E(A_A)_B \otimes A_A \backslash E(A_A)_A$ et A/B est Eqf (resp : Ef) alors Ω/Γ^*

est une Eqf (resp : Ef) d'après le théorème III.2.9

SECTION : 2 : EQF ET ANNEAUX DES ENDOMORPHISMES DE MODULES INJECTIFS :

De la proposition III.1.8 , résulte le corollaire suivant.

Corollaire : IV.2.1

Soit A/B une Eqf à droite finiment normalisée alors

a) $E(A_A)_B = E(A_B)_B = E(B)\otimes A_B \backslash E(B)_B$

b) *E(B) est un facteur direct de* $E(A_A)_B$

Preuve

a) A/B est une Eqf finiment normalisée, alors A_B est projectif de type fini et de plus A_B est essentiel dans $E(B)\otimes A_B$ et $E(A_A)_A = E(B)\otimes A_A$ d'après la proposition III.1.8

A_B est projectif de type fini alors $A_B \backslash B_B$ donc $E(A_B)_B \backslash E(B)_B$.

A_B est essentiel dans $E(B)\otimes A_B$ qui est injectif puisque injectif en tant que A-module alors $E(A_B) = E(B)\otimes A_B = E(A_A)_B$

b) B_B est un sous module A_B donc $E(B)_B$ est un facteur direct de $E(A_B)$

Le principal résultat de cette section est le théorème suivant

Théorème : IV.2.2

a) *Soit A/B une Eqf à droite [resp ,Eqf, Ef] finiment normalisée*

on pose $\wedge = End(E(B)_B)$ *et* $\Gamma^* = End(E(A_A)_A)$ *alors*

$\Gamma^*/\wedge$ *est une Eqf à droite (resp :Eqf, Ef)*

b) *Soit A/B une Eqf (resp : Ef) finiment normalisée*

On pose $\wedge = End\ E(B)_B$ *et* $\Gamma = End\ [Hom_B(A_B, E(B))_A]$ *alors*

$\Gamma/\wedge$ *est une Eqf (resp : Ef)*

De plus si A/B est finiment centralisé alors $\Gamma/\wedge$ est finiment centralisé

c) Soit A/B une Eqf (resp : Ef) finiment normalisée

on pose $\Gamma^* = End(E(A_A)_A)$ et $\Omega = End(E(A_A)_B)$ alors

Ω/Γ^* est une Eqf (resp : Ef).

Preuve

a) A/B est une Eqf à droite finiment normalisée alors $E(B)\otimes A_B \setminus E(B)_B$ (α)

d'après le corolaire IV.2.1 et $E(A_A)_A = E(B)\otimes_B A_A$

On pose $\Gamma^* = End(E(A_A)_A) = End(E(B)\otimes_B A_A)$ alors

$\varphi : \wedge \to \Gamma^*$ défini par $\varphi(\lambda) = \lambda\otimes id_A$ est un homomorphisme d'anneaux injectifs puisque ${}_BA$ est générateur (cf : III.1.10 et III.2)

A/B est une Eqf à droite (resp ; Eqf , Ef) alors

${}_A Hom_B(A_B , B)_B \setminus (resp : \sim , \cong)_A A_B$

d'où comme ${}_BA$ est projectif de type fini on a :

${}_\wedge E(B)\otimes_B A_A \cong {}_\wedge Hom_B[Hom_B({}_BA , B) , E(B)]_A$

$\setminus (resp : \sim , \cong)_\wedge Hom_B({}_BA , E(B))_A$ (β)

De(α) et (β) et de la proposition III.2.2 on tire :

$\Gamma^*/\wedge$ est une Eqf à droite (resp :Eqf, Ef)

A /B est une Eqf (resp : Ef) alors

${}_\wedge Hom_B(A_B , E(B))_A \sim (resp : \cong)_\wedge E(B)\otimes_B A_A$ (β')

D'après le (β) de (a) ci-dessus on a

$Hom_B(A_B , E(B))_B \setminus E(B)\otimes_B A_B \setminus E(B)_B$ (α') d'après le corolaire IV.2.1

Comme A_B est générateur alors l'homomorphisme d'anneaux

$\Psi: \wedge \rightarrow \Gamma$ défini par : $\lambda \mapsto \Psi(\lambda) : f \mapsto \lambda o f$ est injectif

ainsi avec (α') et (β') et la proposition III.2.1 on tire :

$\Gamma / \wedge$ est une Eqf (resp :Ef).

La proposition III.2.5 prouve que $\Gamma/\wedge$ est finiment centralisé si A/B est finiment centralisé

b) A/B est une Eqf à droite finiment normalisée alors

$E(A_A)_B \backslash E(B)_B$ d'après le corolaire IV.2.1 d'où

$E(A_A)_B \otimes A_A \backslash E(B) \otimes_B A_A = E(A_A)_A$ (*)

A / B est une Eqf (resp : Ef) alors

${}_\Omega E(A_A) \otimes_B A_A \sim$ (resp : $\cong$) $Hom_B[A_B , E(A)_B]$ (β") et en particulier

$Hom_B(A_B, E(A_A)_B)_A \backslash E(A_A) \otimes_B A_A$ (**).

De (*) et (**) on déduit $Hom_B(A_B , E(A_A)_B)_A \backslash E(A)_A$ (α") .

De (α") et (β") et de la proposition III.2.7 on tire :

Ω / Γ^* est une Eqf (resp : Ef)

Remarque :(autre preuve pour (c))

D'après le corollaire IV.2.1

on a $E(A_A)_B = E(A_B)_B$ et $E(A_B) \otimes_B A_A \backslash E(B) \otimes_B A_A = E(A_A)_A$ d'après ci-dessus .

Alors $E(A_A)_B \otimes A_A \backslash E(A_A)_A$ et A/B est Eqf (resp : Ef) alors Ω/Γ^*

est une Eqf (resp : Ef) d'après le théorème III.2.9

SECTION 3 : EQF ET EQUIVALENCE DE MORITA

Dans cette section nous étudions le cas dual (dans un certain sens) des résultats de Y. Kitamura dans [4] c'est à dire le dual des résultats du chapitre III .

Préliminaires et notations .

Soit ${}_BP_\wedge$ un (B, $\wedge$) bimodule avec $\wedge$=End(P_B) . On pose ${}_\wedge P'_A = {}_\wedge \mathrm{Hom}_B({}_BP, {}_BA)_A$

${}_\wedge Q_B = {}_\wedge \mathrm{Hom}_B({}_BP, {}_BB)_B$, ${}_\wedge Q'_A = {}_\wedge \mathrm{Hom}_B({}_AA_B, {}_\wedge Q_B)$, $\wedge^* = \mathrm{End}(Q_B)$

$\Gamma=\mathrm{End}(P'_A)$ et $\Omega=\mathrm{End}(Q'_A)$

a) Soit $\Psi : \wedge \to \Gamma$ défini par : $\lambda \mapsto \Psi_\lambda : k \mapsto \Psi_\lambda(k)= \lambda k$.

avec $(p)(\lambda .k) = (p\lambda)k$ pour tout $p\in P$

alors Ψ est un homomorphisme d'anneaux . De plus Ψ est injectif si ${}_BA$ cogénère ${}_BP$ en particulier si ${}_BP$ est projectif et ${}_BA$ est générateur .

b*) Soit $\rho : \wedge \to \wedge^*$ défini par : $\lambda \mapsto \Psi_\lambda : f \mapsto \Psi_\lambda(f) = \lambda f$

avec $(p)(\lambda f) = (p\lambda)f$ pour tout $p\in P$

alors Ψ est un homomorphisme d'anneaux . De plus Ψ est injectif si ${}_BB$ cogénère ${}_BP$ en particulier si ${}_BP$ est projectif .

b**) Si $\sigma : \wedge^* \to \Omega$ est défini par : $\lambda^* \mapsto \sigma_{\lambda^*} : g \mapsto \sigma_{\lambda^*}(g) = \lambda^*_g$

avec $(\lambda^*_g)(a)=\lambda^*(g(a))$ pour tout $a\in A$

alors σ est un homomorphisme d'anneaux . σ est injectif si A_B génère Q_B en particulier si A_B est générateur .

b)Avec (b*) et (b**) on pose $\Psi = \sigma \circ \rho : \wedge \to \Omega$ alors Ψ est un homomorphisme d'anneaux .Ψest injectif si ${}_BB$ cogénère ${}_BP$ et A_B génère Q_B en particulier si A_B est générateur et P_B est projectif .

Les notations ci dessus restent valables dans la suite de cette section 3.

Les deux propositions suivantes dualisent les propositions III.2.1 et III.2.2

Proposition : IV. 3.1

Si les trois conditions suivantes sont vérifiées

$1_1)$ *${}_BP$ est un progénérateur*

$1_2)$ *A_B est projectif de type fini*

$1_3)$ ${}_\wedge P'_A \setminus (resp: \sim , \cong) {}_\wedge Q'_A$

alors les deux assertions suivantes sont aussi vérifiées

$2_1)$ *P'_A est un progénérateur*

$2_2)$ $\Psi : \wedge \to \Gamma$ *est un Eqf à droite (resp :Eqf , Ef)*

Proposition : IV.3.2

Si les trois conditions suivantes sont vérifiées

$1_{1^*})$ *${}_BP$ est un progénérateur*

$1_{2^*})$ *A_B est projectif de type fini*

$1_{3^*})$ ${}_\wedge Q'_A \setminus (resp :\sim,\cong) {}_\wedge P'_A$

alors les deux assertions suivantes sont aussi vérifiées

$2_1*)$ *Q'_A est projectif de type fini*

$2_{2^*})$ $\Psi : \wedge \to \Omega$ *est une Eqf à gauche (resp Eqf , Ef)*

Preuve de la proposition IV.3.1

2_1•) ${}_BP$ progénérateur $\Leftrightarrow {}_BP \sim B_B$ d'où $P'_A = \mathrm{Hom}_B({}_BP, A_A) \sim \mathrm{Hom}_B({}_BB, A_A) \cong A_A$

2_2•) d'après I_3) on a : ${}_\wedge\Gamma_\Gamma = \mathrm{Hom}_A({}_\Gamma P'_A, {}_\wedge P') \setminus$ (resp : $\sim$, $\cong$) $\mathrm{Hom}_A({}_\Gamma P'_A, {}_\wedge Q')$.

On a les isomorphismes de $(\wedge, \Gamma)$ bimodules suivants

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A({}_\Gamma P'_A, {}_\wedge Q') &= \mathrm{Hom}_A[P'_A, \mathrm{Hom}_B(A, Q_B)] \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(P'_A \otimes A_B, Q) \qquad \text{(cf : I.3.1)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_B(P'_B, Q) \\ &\cong \mathrm{Hom}_B[P'_B, \mathrm{Hom}_B({}_BP, B)] \qquad \text{(cf : I.3.2)} \\ &\cong \mathrm{Hom}_B[{}_BP, \mathrm{Hom}_B(P'_B, B)]\end{aligned}$$

On pose ${}_BH'_\Gamma = \mathrm{Hom}_B({}_\Gamma P'_B, B)$ alors on a

$${}_\wedge\Gamma_\Gamma \setminus (\text{resp} : \sim, \cong)\ {}_\wedge\mathrm{Hom}_B({}_BP, H')_\Gamma \qquad \text{(a)}$$

Comme P'_A et A_B sont projectif de type fini , alors

$P'_B \cong P'_A \otimes A_B$ est projectif de type fini (cf : I.3.15) d'où ${}_BH'$ est projectif de type fini

or ${}_BP$ est générateur donc ${}_BH \setminus {}_BP$.

Ainsi en appliquant le lemme de Miyashita avec $\Sigma = \mathrm{End}({}_BH')$ on a :

$\mathrm{Hom}_B({}_BP, H') \cong \mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}_B({}_BH', P)_\wedge, \mathrm{Hom}_B({}_BP, P)]$ en tant que $(\wedge, \Sigma)$ bimodules

d'où $\mathrm{Hom}_B({}_BP, H') \cong \mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}_B({}_BH', P), \wedge_\wedge]$ en tant que $(\wedge, \Sigma)$ bimodules (b)

Posons $W = \mathrm{End}(P'_B)$ alors Γ est un sous anneau de W.

Soit $\Psi : W \to \Sigma$ défini par : $\omega \mapsto \Psi_\omega : h \mapsto (h)\Psi_\omega = h\omega$.

Alors Ψ est un homomorphisme d'anneaux .

Comme P'_B est projectif de type fini alors B_B cogénère P_B d'où Ψ est injectif .

Ainsi W (donc aussi Γ) peut être regardé comme un sous-anneau de $\sum$ et

alors (b) donne , en tant que ($\wedge$, Γ) bimodules :

$_{\wedge}\mathrm{Hom}_B({}_BP, H')_{\Gamma} \cong {}_{\wedge}\mathrm{Hom}_{\wedge}[\mathrm{Hom}_B(H', {}_BP) , \wedge_{\wedge}]_{\Gamma}$ (b')

Par ailleurs on a :

$_{\Gamma}\Gamma_{\wedge} = \mathrm{Hom}({}_{\wedge}P'_{A} , {}_{\Gamma}P') = {}_{\Gamma}\mathrm{Hom}_A[\mathrm{Hom}_B({}_BP,A), P'_A]_{\wedge}$

comme $_BP$ est projectif de type fini alors

$_{\Gamma}\Gamma_{\wedge} \cong \mathrm{Hom}_A({}_BA , P'_A)\otimes_B P_{\wedge} \cong {}_{\Gamma}P'_B\otimes P_{\wedge}$ (cf : I.3.5)

d'où $_{\Gamma}\Gamma_{\wedge} \cong {}_{\Gamma}P'_B\otimes P_{\wedge}$ (c).

On a aussi $_{\Gamma}\Gamma \cong {}_{\Gamma}P'_B\otimes P_{\wedge} \cong {}_{\wedge}P'_B\otimes \mathrm{Hom}_B(B, {}_BP)_{\wedge}$

comme P'_B est projectif de type fini alors

$_{\Gamma}\Gamma_{\wedge} \cong \mathrm{Hom}_B[\mathrm{Hom}_B (P'_B , B), {}_BP]_{\wedge}$ (cf : I.3.5)

d'où $_{\Gamma}\Gamma_{\wedge} \cong \mathrm{Hom}_B({}_BH', {}_BP)_{\wedge}$ (c')

Par suite d'après (a) on a

$_{\wedge}\Gamma_{\Gamma} \backslash$ (resp : $\sim$, $\cong$) $_{\wedge}\mathrm{Hom}_B({}_BP , H')_{\Gamma}$, en utilisant (b') on a

$_{\wedge}\Gamma_{\Gamma} \backslash$ (resp : $\sim$, $\cong$) $_{\wedge}\mathrm{Hom}_{\wedge}[\mathrm{Hom}_B({}_BH', P), \wedge_{\wedge}]_{\Gamma}$, et en utilisant (c') on a

$_{\wedge}\Gamma_{\Gamma} \backslash$ (resp : $\sim$, $\cong$) $_{\wedge}\mathrm{Hom}_{\wedge}[{}_{\Gamma}\Gamma_{\wedge} , \wedge_{\wedge}]_{\Gamma}$ (1)

De (c) on tire : $\Gamma_{\wedge} \cong P'_B\otimes P_{\wedge}$

or $P'_B \backslash B_B$ d'où $\Gamma_{\wedge} \backslash P_{\wedge}$

or $_BP$ est un progénérateur et $\wedge = \mathrm{End}({}_BP)$ alors

$P_{\wedge} \backslash \wedge_{\wedge}$ d'où $\Gamma_{\wedge} \backslash \wedge_{\wedge}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $\Psi: \wedge \to \Gamma$ est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef)

Preuve de la proposition IV.3.2

2_1*) D'après 1_{3*} on a $Q'_A \backslash P'_A$ et d'après le 2_1) de la proposition IV.3.1 on a

$P'_A \backslash A_A$ donc $Q'_A \backslash A_A$ d'où le résultat .

2_2*) D'après 1_{3*} on a ${}_\Omega\Omega_\wedge = \mathrm{Hom}_A({}_\wedge Q'_A , {}_\Omega Q') \backslash$ (resp : $\sim , \cong$)$\mathrm{Hom}_A({}_\Omega P'_A , {}_\Omega Q'_A)$

on a ${}_\Omega\mathrm{Hom}_A(P'_A, Q')_\wedge = {}_\Omega\mathrm{Hom}_A[\mathrm{Hom}_B({}_BP, A) , Q'_A]_\wedge$

or ${}_BP$ est projectif de type fini d'où

${}_\Omega\mathrm{Hom}_A(P'_A, Q')_\wedge \cong \mathrm{Hom}_A({}_BA , Q'_A)\otimes_B P_\wedge$ (cf : I.3.5)

$\cong {}_\Omega Q'_B \otimes P_\wedge \cong {}_\Omega Q'_B \otimes \mathrm{Hom}_B(B , {}_BP)_\wedge$

or Q'_A et A_B sont projectifs de type fini alors

$Q'_B \cong Q'_A \otimes A_B$ est projectif de type fini d'où

$\mathrm{Hom}_A(P'_A, Q')_\wedge \cong {}_\Omega\mathrm{Hom}_B[\mathrm{Hom}_B(Q'_B , B) , {}_BP]_\wedge$

On pose alors ${}_BK'_\Omega = {}_B\mathrm{Hom}_B(Q'_B , B)_\Omega$

Ainsi ${}_\Omega\Omega_\wedge \backslash$ (resp : $\sim , \cong$)${}_\Omega\mathrm{Hom}_B({}_BK'_\Omega , {}_BP_\wedge)$ (a*)

Q'_B est projectif de type fini donc ${}_BK'$ l'est or ${}_BP$ est générateur alors ${}_BK' \backslash {}_BP$

ainsi en appliquant le lemme de Miyashita avec $\Sigma = \mathrm{End}\ ({}_BK')$ on a :

en tant que $(\wedge , \Sigma)$ bimodules

$\mathrm{Hom}_B({}_BP , {}_BK') \cong \mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}_B({}_BK', P) , \wedge_\wedge]$ (b*)

$\Omega = \mathrm{End}\ (Q'_A)$ est un sous-anneau de $\mathrm{End}(Q'_B)$ qui s'injecte dans Σ puisque

B_B cogénère Q'_B par suite de (b*) on tire :

$\mathrm{Hom}_B({}_BP , {}_BK') \cong \mathrm{Hom}_\wedge[\mathrm{Hom}_B({}_BK', P) , \wedge_\wedge]$ (b'*) en tant que $(\wedge , \Omega)$ bimodules

Par ailleurs ${}_BK' \backslash {}_BP$ d'où $\mathrm{Hom}_B({}_BK' , P)_\wedge \backslash \mathrm{Hom}_B({}_BP,P)_\wedge = \wedge_\wedge$ ainsi

$Hom_B({}_BK', {}_BP)$ est projectif de type fini alors en utilisant le bidual on a:

${}_\Omega Hom_\wedge \{{}_\wedge Hom_\wedge [Hom_B({}_BK', P), \wedge_\wedge]_{\Omega, \wedge}\wedge\}_\wedge \cong {}_\Omega Hom_B({}_BK', P)$ (cf :I.3.6)

Par suite (b'*) donne

${}_\Omega Hom_\wedge [Hom_B({}_BP, K'), {}_\wedge\wedge]_\wedge \cong {}_\Omega Hom_B(K', P)_\wedge$ (b"*) en tant que $(\Omega, \wedge)$ bimodules

Maintenant on a les isomorphismes de $(\wedge, \Omega)$ bimodules suivants :

$${}_\wedge\Omega_\Omega = {}_\wedge Hom_A(Q'_A, Q')_\Omega$$
$$= Hom_A[Q'_A, Hom_B(A_B, Q)]$$
$$\cong Hom_B[Q'_A \otimes A_B, Q_B] \qquad \text{(cf : I.3.1)}$$
$$\cong Hom_B(Q'_B, Q_B)$$
$$\cong Hom_B[Q'_B, Hom_B({}_BP, B)]$$
$$\cong Hom_B[{}_BP, Hom_B(Q'_B, B)] \qquad \text{(cf : I.3.2)}$$
$$= Hom_B({}_BP, K')$$

par suite ${}_\wedge\Omega_\Omega \cong {}_\wedge Hom_B({}_BP, K')_\Omega$ (c*)

En fin d'après (a*) on a :

${}_\Omega\Omega_\wedge \setminus$ (resp : $\sim, \cong$) ${}_\Omega Hom_B({}_BK'_\Omega, {}_BP_\wedge)_\wedge$, en utilisant(b"*) on a :

${}_\Omega\Omega_\wedge \setminus$ (resp : $\sim, \cong$) ${}_\Omega Hom_\wedge [Hom_B({}_BP, K'), {}_\wedge\wedge]_\wedge$ et en utilisant (c*) on a :

${}_\Omega\Omega_\wedge \setminus$ (resp : $\sim, \cong$) ${}_\Omega Hom_\wedge({}_\wedge\Omega_\Omega, \wedge)_\wedge$ (1*)

D'après (c*) : ${}_\wedge\Omega \cong Hom_B({}_BP, K')$ or ${}_BK' \setminus_B P$ d'où

${}_\wedge\Omega \setminus Hom_B({}_BP, P) = {}_\wedge\wedge$ ainsi ${}_\wedge\Omega \setminus {}_\wedge\wedge$ (2*)

De (1*) et (2*) on déduit que $\Psi : \wedge \to \Omega$ est une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef)

Question

Dans les hypothèses de la proposition IV.3.2 est -ce que Q'_A est un générateur ?

Théorème : IV.3.3

1)Si $_BP$ est un progénérateur et A/B est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef) alors P'_A est un progénérateur et $\Psi : \wedge \to \Gamma$ est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef)

1) si $_BP$ est un progénérateur et A / B est une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef) alors Q'_A est projectif de type fini et $\Psi : \wedge \to \Omega$ est une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef)*

Preuve

1)A / B est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef) alors A_B est projectif de type fini et

$_BA_A \setminus (\text{resp} : \sim , \cong)_B\mathrm{Hom}_B(A_B , B)_A$ d'où

$_\wedge P'_A = {}_\wedge\mathrm{Hom}_B(_BP , A) \setminus (\text{resp} : \sim , \cong) \mathrm{Hom}_B[_BP , \mathrm{Hom}_B(A_B , B)]$

$\cong \mathrm{Hom}_B [A_B , \mathrm{Hom}_B (_BP , B)] = {}_\wedge Q'_A$

donc $_\wedge P'_A \setminus (\text{resp} : \sim , \cong)_\wedge Q'_A$.

On utilise IV.3.1 pour conclure

1*) A/B est une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef) alors $_BA$ et A_B sont projectifs de type fini et $_AA_B \setminus (\text{resp} : \sim, \cong)_\wedge\mathrm{Hom}_B(_BA_A , B)_B$ d'où

$_\wedge Q'_A = \mathrm{Hom}_B[_AA_B, \mathrm{Hom}_B(_BP_\wedge, B_B)]_A \setminus (\text{resp} : \sim ,\cong)\mathrm{Hom}_B[\mathrm{Hom}_B(_BA, B), \mathrm{Hom}\ (_BP, B)]$

$\cong \mathrm{Hom}_B[_BP_\wedge, {}_B\mathrm{Hom}_B\{\mathrm{Hom}_B (_BA, B), B\}_A]$

Or $\mathrm{Hom}_B\{\mathrm{Hom}_B (_BA , B), B\} \cong {}_BA_A$ car $_BA$ est projectif de type fini ainsi

$_\wedge Q'_A \setminus (\text{resp} : \sim , \cong)_\wedge\mathrm{Hom}_B(_BP , {}_BA)_A = {}_\wedge P'_A$.

On utilise IV.3.2 pour conclure .

D'après les préliminaires , comme ${}_BP$ est projectif de type fini , on sait que Ψ (resp: φ) est injectif si A_B (resp: ${}_BA$) est générateur , or d'après le corollaire I.1.10 si A\B est une Eqf à droite ou à gauche , finiment normalisée alors A_B et ${}_BA$ sont des générateurs ainsi avec le théorème précédant , on a le principal résultat de cette section sous la forme suivante :

Théorème : IV.3.4

1) Si ${}_BP$ est un progénérateur et A /B une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef) finiment normalisée alors P'_A est un progénérateur et $\Gamma /\wedge$ est une Eqf à droite (resp : Eqf, Ef).*

2) Si ${}_BP$ est un progénérateur et A /B une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef) finiment normalisée alors Q'_A est projectif de type fini et $\Omega /\wedge$ est Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef).*

Question :

Sous les hypothèses du théorème IV.4.4 est-ce que $\Gamma /\wedge$ et $\Omega /\wedge$ sont finiment normalisés ?

Lemme : IV.3.5

α*) Si ${}_BP$ est projectif de type fini alors ${}_\wedge\Gamma_\wedge \cong Hom_B({}_BP , A_B\otimes P_\wedge)$*

β*) Si ${}_BP$ et A_B sont projectifs de type fini alors ${}_\wedge\Omega_\wedge \cong Hom_B({}_BP , A_B\otimes_B P)_\wedge$*

Lemme : IV.3.6

Si ${}_BP$ et ${}_BA$ sont projectifs de type fini alors ${}_\wedge\Gamma_\wedge \cong {}_\wedge\Omega_\wedge$ et sont finiment centralisés si ${}_BA_B$ est finiment centralisé

Preuve du lemme IV.3.5

α) D'après la preuve de la proposition IV.3.2 , on a

${}_\wedge\Omega_\wedge \cong {}_\wedge\mathrm{Hom}_B({}_BP , K')_\wedge = \mathrm{Hom}_B[{}_BP , \mathrm{Hom}_B(Q'_B , B)]$ (a)

Mais $Hom_B(Q'_B , B) = {}_B Hom_B[Hom_B(A , Q_B) , B]_\wedge$

$$\cong {}_B A_B \otimes Hom_B(Q_B , B)_\wedge$$

car A_B est projectif de type fini d'où

$Hom_B(Q'_B , B) \cong {}_B A_B \otimes Hom_B[Hom_B({}_B P , B) , B]$

$$\cong {}_B A_B \otimes P_\wedge$$

car ${}_B P$ est projectif de type fini ainsi

$Hom_B(Q'_B , B)_\wedge \cong {}_B A_B \otimes P_\wedge$ (b)

De (a) et (b) on tire

${}_\wedge\Omega_\wedge \cong {}_\wedge Hom_B({}_B P , A_B \otimes P)_\wedge$ (1)

(β) on a ${}_\wedge\Gamma_\wedge = {}_\wedge Hom_A(P'_A , P')_\wedge = Hom_A[P'_A , Hom_B ({}_B P , A)]$

$$\cong Hom_A[{}_B P , Hom_A(P'_A , {}_B A)] \qquad \text{(cf : I.3.2)}$$

$$\cong Hom_B[{}_B P , Hom_A \{Hom_B ({}_B P , A), {}_B A_A\}]$$

or $Hom_A\{Hom_B({}_B P, A) , {}_B A_A\} \cong {}_\wedge Hom_A({}_B A_A , A) \otimes_B P_\wedge$

$$\cong {}_B A_B \otimes P_\wedge$$

car ${}_B P$ est projectif de type fini (cf : I.3.5) d'où

${}_\wedge\Gamma_\wedge \cong Hom_B[{}_B P , {}_B A_B \otimes P_\wedge]$ (2)

Preuve du lemme IV.3.6

D'après le lemme IV.3.5 , de (α) et (β) on tire

${}_\wedge\Gamma_\wedge \cong {}_\wedge\Omega_\wedge \cong {}_\wedge Hom_B({}_B P , A_B \otimes P)_\wedge$

A / B finiment centralisé $\Leftrightarrow \exists\, n \in N^*$ et un épimorphisme $B^{(n)} \xrightarrow{\text{épim}} {}_BA_B$

D'où ${}_BP_\wedge{}^{(n)} \cong B^{(n)} \otimes_B P_\wedge \xrightarrow{\text{épim}} {}_BA_B \otimes_B P_\wedge$

comme ${}_BP$ est projectif alors on a

${}_\wedge\wedge_\wedge{}^{(n)} \cong {}_\wedge\mathrm{Hom}_B\,({}_BP\,,\,P^{(n)})_\wedge \xrightarrow{\text{épim}} {}_\wedge\mathrm{Hom}_B\,({}_BP\,,\,{}_BA_B \otimes_B P)_\wedge \cong {}_\wedge\Gamma_\wedge \cong {}_\wedge\Omega_\wedge$

ainsi ${}_\wedge\Gamma_\wedge$ et ${}_\wedge\Omega_\wedge$ sont finiment centralisés

En utilisant le lemme IV.3.6 et le lemme IV.3.4 on a la proposition suivante .

Proposition : IV.3.7

Soit A / B une extension finiment centralisée.

1) Si ${}_BP$ est un progénérateur et A /B est une Eqf à droite (resp : Eqf , Ef) alors P'_A est un progénérateur et Γ /$\wedge$ est une Eqf à droite (resp :Eqf , Ef) finiment centralisée*

1) Si ${}_BP$ est un progénérateur et A /B est une Eqf à gauche (resp : Eqf , Ef) alors Q'_A est projectif de type fini et Ω /$\wedge$ est une Eqf à droite (resp :Eqf , Ef) finiment centralisée*

Références bibliographiques

[1] **ANDERSON W, FULLER K** . R : Rings and category of moduls .Springer-Verlag. New-York (1974)

[2] **SOW DJIBY** 'Extensions Quasi-frobeniusiennes et anneaux des quotients' Memoire DEA , Bibliothèque universitaire UCAD (juillet 1998)

Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.New York , !973

[3] **SOW DJIBY and SANGHARE MAMADOU** 'Quasi-Frobenius extensions with Morita equivalence and duality' J.Algebra (à soumettre)

[4] **KITAMURA .Y** 'Quasi-Frobenius extensions with Morita duality'

Journal of algebra **73**,275-286(1981)

[5] **KITAMURA .Y** 'finit normalizing quasi-frobenius extensions'

Math. J Okayama Univ **17** (1975)103-123

[6] **KITAMURA .Y** 'A note on quotient rings over a quasi-frobenius extensions'

Math.J Okayama Univ **18** (1975)57-67

[7] **MIYASHITA .Y** ,'On Galois extensions and crossed products', J.Fac.Sci.Hokkaido Univ. Ser. I **21** (1970) , 97-121

[8] **MORITA .K** 'Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition', Sci. Rep. Tokyo Kyoto Daigaku Sect . **A .6** (1958), 83-142

[9] **AZUMAYA .G**'A duality theory for injectives modules'J.Math.**81** (1959),249-278

[10] **MULLER .B** 'Quasi-Frobenius-Erweiterungen' Math .Z.**85** (1964) , 345-368

[11] **KASH.F** Projective frobenius-Erweiterungen' Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.. (1960/1961),89-109

[12] **NAKAYAMA.T** 'On Frobenius algebras' I.ann.of Math, **40** (1939), 611-633.

[13] **VÁMOS .P** 'Rings with duality' Pro.LondonMath.Soc. **34** (1977) , 275 289.

[14] **TACHIKAWA.H** 'Quasi-Frobenius rings and generalisations' Lecture notes in Math . , **351**,