

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP-DAKAR

N° d'ordre :



THESE

présentée à :
l'Ecole Supérieure Polytechnique
(E.S.P.)

en vue de l'obtention
du diplôme de DOCTEUR-INGENIEUR
Spécialité : PHYSIQUE

présentée par

Ahmed Ben Bella BAH

**CARACTERISATION DE MATERIAUX
PAR PHENOMENES THERMIQUES TRANSITOIRES**
Application à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire

Soutenue le 21 Décembre 1996 devant la commission d'examen :

Président :	<i>Oumar</i>	SOCK	UCAD
Examineurs :	<i>Mansour</i>	KANE	UCAD
	<i>Siméon</i>	FONGANG	UCAD
	<i>Boubacar</i>	KEITA	UCAD
	<i>Dorothe</i>	AZILINON	UCAD
	<i>Mamadou</i>	ADJ	UCAD
	<i>Grégoire</i>	SISSOKO	UCAD

AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Energétique Appliquée (L.E.A.) de l'Ecole Supérieure Polytechnique (E.S.P.), de l'Université Cheikh Anta Diop (U.C.A.D.) de Dakar.

Nous tenons à exprimer nos remerciements à Monsieur **Oumar Sock**, Maître de Conférences, Directeur de cette Ecole, pour l'honneur qu'il nous fait de juger ce travail et de présider ce Jury.

Nous tenons également à remercier Messieurs :

- le Professeur **Mansour KANE**, Chef du Département de Physique, Directeur du C.E.R.E.R et Responsable du Laboratoire des Semi-conducteurs et Energie Solaire ; nous sommes honorés par sa présence dans ce Jury ;
- le Professeur **Siméon FONGANG**, Responsable des Laboratoires L.P.A., L.E.A. et L.E.R., pour l'honneur qu'il nous fait de juger ce travail et de participer à ce Jury ;
- Dr. **Boubacar KEITA**, Chargé d'Enseignements au Département de Physique, pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail et sa présence à ce jury ;
- Dr **Dorothé AZILINON**, Maître Assistant à l'E.S.P., pour avoir accepté de juger ce travail et de participer à ce jury.

Messieurs **Grégoire SISSOKO** Maître de conférences à la Faculté des Sciences et Techniques (Directeur de thèse) et **Mamadou ADJ** Maître Assistant à l'E.S.P. (codirecteur de thèse), nous ont fait l'honneur de diriger ce travail avec un souci permanent de rigueur et de réussite. Au delà d'un simple encadrement, ils n'ont ménagé aucun effort pour la recherche des délicates solutions nécessaires à la conduite de cette thèse, tant sur le plan moral que matériel. Qu'ils en soient remerciés et également assurés de notre profonde gratitude.

Nous remercions Dr. Y. MANDIANG et Dr A. CISS, pour avoir su apporter un dynamisme apprécié dans la vie du laboratoire L.E.A,

Nous associons à ces remerciements :

- les collègues du Laboratoire L.E.A. : K. GUEYE, M. KELLY, S. GAYE, I. BOCANDE, A. CORREA, E. NANEMA, V. SAMBOU, A. BA, A. THIAM, P. I. SANE, O. NDIAYE, M. DIOP et B. DIENG ;
- tous les collègues travaillant dans les autres laboratoires de recherche de l'E.S.P ;
- les collègues enseignants et techniciens de l'E.S.P ;
- tout le personnel de la direction de l'E.S.P ;
- tout le personnel du Service d'Information Documentaire ;
- le Service de la scolarité particulièrement : Mme E. GAYE et O. NDAW ;
- les autres services de l'E.S.P ;
- tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

A

mes chers parents Maman et Papa

*mes chers frères, soeurs, beaux frères,
belles soeurs et enfants*

mes chers amis

je dédie ce modeste travail.

REMERCIEMENTS

L'aboutissement de ce présent travail n'a été rendu possible qu'avec l'association de multiples contributions aussi bien sur le plan intellectuel que social et matériel.

Aussi je ne saurais terminer cette rédaction sans adresser quelques mots aux personnes qui me sont chères.

Il m'est agréable d'exprimer ma sympathie et mes remerciements à l'endroit de :

- Monsieur et Madame SISSOKO qui ont accepté de m'accueillir et de me faire un des leurs ; qu'ils trouvent ici, l'expression de mes sentiments de reconnaissance ; mes remerciements s'adressent également aux autres membres de la famille ;*
- Monsieur et Madame ADJ, auxquels j'exprime ma profonde gratitude et toute ma reconnaissance, pour le soutien moral et matériel qu'ils m'ont toujours apporté ; je remercie également toute la famille ;*
- la famille KAMARA de Sicap Dieuppeul III, pour sa sympathie et son assistance ;*
- la famille BA aux Parcelles Assainies pour sa sympathie à mon égard ;*
- Monsieur et Madame CAMARA et famille pour leur assistance et leurs conseils ;*
- Monsieur et Madame PILLONE, pour leurs conseils et leur sympathie ;*
- tous mes amis sans exception aucune, pour leurs conseils.*

SOMMAIRE

Page

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX.....	2
I.1. INTRODUCTION.....	3
I.2. MESURE DE LA DIFFUSIVITE DE MATERIAUX.....	3
I.2.1. Méthodes du régime dynamique fréquentiel : le modèle de Maréchal et Devisme.	3
I.2.2. Méthodes du régime dynamique transitoire.....	6
I.2.2.1. Méthodes impulsionnelles ou Méthodes Flash.....	6
I.2.2.2. Méthode du fil chaud.....	8
I.2.2.3. Méthode du régime régulier.....	9
I.2.3. Remarque sur les méthodes de mesure de la diffusivité.....	11
I.3. DETERMINATION DU COEFFICIENT D'ECHANGES THERMIQUES.....	12
I.3.1. Méthode du bilan thermique en régime permanent.....	12
I.3.2. Méthode du bilan thermique en régime transitoire.....	13
I.3.2.1. Coefficients d'échange constants.....	13
I.3.2.2. Coefficients d'échange non constants.....	13
I.3.2.3. Ecoulement laminaire.....	14
I.3.2.4. Ecoulement turbulent.....	15
I.3.3. Méthodes de corrélations empiriques.....	15
I.3.4. Méthodes des abaques.....	17
I.3.5. Remarque sur les méthodes de mesure du coefficient d'échanges thermiques.....	18
I.4. CONCLUSION.....	18
CHAPITRE II : ETUDE DE L'INFLUENCE DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR.....	19
II.1. INTRODUCTION.....	20
II.2. RAPPELS.....	20
II.2.1. Loi de Fourier.....	20
II.2.2. Conductivité thermique.....	21
II.2.3. Flux et densité de flux thermique.....	21
II.2.4. Analogie entre les phénomènes thermique et électrique.....	21
II.3. EQUATION DE CONDUCTION MONODIMENSIONNELLE DE LA CHALEUR (MUR PLAN).....	22
II.3.1. Diffusivité thermique.....	23
II.3.2. Conditions aux limites du milieu.....	24

II.4. MODELES ELECTRIQUES EQUIVALENTS AU MUR PLAN SANS SOURCE NI PUITTS THERMIQUES INTERNES ($P_s=P_p=0$).....	24
II.4.1. Modèle résistif du mur avec des températures imposées aux limites.....	24
II.4.2. Profil du flux de chaleur et de la température en fonction de λ (conditions aux limites type Dirichlet).....	27
II.4.3. Modèle résistif du mur avec des conditions convectives aux limites.....	28
II.4.4. Profil du flux de chaleur et de la température en fonction de λ et h (conditions aux limites type Neuman-Fourier).....	31
II.4.5. Modèle résistif du mur avec des conditions convectives et radiatives aux limites	33
II.4.6. Profil du flux de chaleur et de la température en fonction de λ et h (conditions aux limites mixte).....	37
II.5. MODELES ELECTRIQUES EQUIVALENTS AU MUR PLAN AVEC SOURCE THERMIQUE INTERNE DE CHALEUR ($P_s \neq 0, P_p=0$).....	40
II.5.1. Définitions	40
II.5.2. Modèle résistif et puissance thermique de la source	42
II.5.3. Modèle résistif équivalent du mur avec des conditions convectives aux limites..	44
II.5.4. Etude du profil du flux de chaleur en fonction de λ et h	46
II.6. CONCLUSION	48
CHAPITRE III : TECHNIQUE DE CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX.....	49
III.1. INTRODUCTION	50
III.2. EQUATION DIFFERENTIELLE REGISSANT LE CHAMP THERMIQUE DU MUR.....	50
III.2.1. Puissance volumique P_s de la source de chaleur.....	51
III.2.2. Equation adimensionnelle de la chaleur	52
III.3. ETUDE DU MUR PLAN EN REGIME PERMANENT.....	55
III.3.1. Equation réduite de conduction de chaleur du mur plan en régime permanent..	55
III.3.2. Etude des profils de la température du mur pour des conditions aux limites de type Dirichlet	56
III.3.2.1. Effet de la température de la source T_s	57
III.3.2.2. Influence du coefficient d'échanges thermiques interne de la source h_{cit}	58
III.3.2.3. Effet des nombres de Biot des faces avant et arrière du mur plan.....	60
III.3.3. Conclusion partielle sur l'étude en régime permanent.....	63
III.4. ETUDE DU MUR EN REGIME TRANSITOIRE.....	63
III.4.1. Equation réduite de conduction de chaleur du mur plan en régime transitoire..	63
4.1.1. Détermination de la température réduite $\delta\theta(u,0)$	68
4.1.2. Etude de la convergence de la série	71
III.4.2. Conclusion partielle sur l'étude en régime transitoire	73

III.5. TECHNIQUE DE CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX.....	73
III.5.1. Technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction caractéristique $FT_0(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine de la courbe de relaxation $\delta\theta(0)$	74
III.5.2. Etude de la fonction caractéristique du mur plan $FT_0(\omega)$	74
III.5.3. Détermination de $\delta\theta(0)$ et t_{do}	75
III.5.4. Détermination de la valeur propre ω_0 et du nombre de Biot Bi_2	77
III.5.6. Calcul du coefficient de diffusivité α	78
III.5.7. Calcul du coefficient de conductivité λ	79
III.5.8. Calcul du coefficient d'échanges thermiques h_2	79
III.6. CONCLUSION	79

CHAPITRE IV : APPLICATION DE LA NOUVELLE TECHNIQUE DE CARACTERISATION THERMIQUE A UNE DALLE EN BETON RECUPERATRICE D'ENERGIE SOLAIRE..... 80

IV.1. INTRODUCTION	81
IV.2. DALLE EN BETON RECUPERATRICE D'ENERGIE SOLAIRE.....	81
IV.3. EQUATION DIFFERENTIELLE DU CHAMP THERMIQUE D'UNE DALLE EN BETON RECUPERATRICE D'ENERGIE SOLAIRE.....	82
IV.4. ETUDE DE LA PARTIE INFÉRIEURE DE LA DALLE EN BETON ($x=0$ à $x=L_2$).....	84
IV.4.1. Equation du champ thermique de la partie inférieure de la dalle.....	84
IV.4.2. Etude en régime transitoire de la partie inférieure de la dalle.....	88
IV.4.3. Etude de la convergence de la série $\delta\theta_i(u,0,t_1)$	95
IV.4.4. Application de la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction caractéristique $FT_{i0}(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_i(0)$	97
IV.4.4.1. Détermination de la température $T_i(x,t)$ à l'aide de l'intégrale de Duhamel.....	98
IV.4.4.2. Détermination de la valeur caractéristique propre ω_{i0}	100
IV.4.4.3. Détermination du coefficient d'échange réduit Bi_j	101
IV.5. ETUDE DE LA PARTIE SUPERIEURE DE LA DALLE EN BETON ($x=0$ à $x=-L_1$).....	101
IV.5.1. Equation du champ thermique de la partie supérieure de la dalle.....	101
IV.5.2. Etude en régime transitoire de la partie supérieure de la dalle.....	104
IV.5.3. Etude de la convergence de la série $\delta\theta_s(u,t,t_1)$	105
IV.5.4. Application de la technique de l'intersection du mode fondamental de $FT_{s0}(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_s(0)$	106
IV.5.4.1. Détermination de la température $T_s(x,t)$ à l'aide de l'intégrale de Duhamel	107
IV.5.4.2. Détermination de ω_{s0}	108
IV.5.4.3. Détermination de Bi_{av}	109

IV.6. CARACTERISATION THERMIQUE DE LA DALLE EN BETON.....	160
IV.6.1. Détermination de α	109
IV.6.2. Détermination de λ	109
IV.6.3. Détermination de h_j	109
IV.6.4. Détermination de h_{av}	110
IV.7. CONCLUSION.....	110
CHAPITRE V : EXPERIMENTATION	111
V.1. INTRODUCTION.....	112
V.2. DISPOSITIF EXPERIMENTAL	112
V.3. COURBES EXPERIMENTALES.....	113
V.4. EXPLOITATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.....	114
V.4.1. Détermination de la constante de temps de décroissance t_{do}	114
V.4.2. Détermination de l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_{iexp}(0)$	114
V.4.3. Application de la technique de l'intersection de la fonction caractéristique FTi $_{\omega}$ et de l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_{iexp}(0)$	115
V.4.4. Détermination des paramètres caractéristiques de la dalle en béton.....	116
V.4.4.1. Diffusivité	116
V.4.4.2. Conductivité	117
V.4.4.3. Coefficients globaux d'échanges thermiques.....	118
V.5. PRECISION DE LA METHODE DE CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX.....	121
V.5.1 Précision sur la diffusivité α	121
V.5.2 Précision sur la conductivité λ	122
V.5.3 Précision sur le coefficient global d'échanges thermiques h_j	122
V.5.4 Précision sur le coefficient global d'échanges thermiques h_{av}	122
V.6. DISCUSSION DES RESULTATS OBTENUS.....	122
V.7. CONCLUSION	123
CONCLUSION GENERALE.....	124
BIBLIOGRAPHIE.....	125

NOTATIONS

SYMBŒLE	DEFINITION	UNITES
Bi	nombre de Biot	
C	chaleur massique	J.(kg.°C) ⁻¹
d	diamètre	m
E	force électromotrice (f.é.m)	V
l'a	température équivalente	°C
Fo	nombre de Fourier	
FT	fonction caractéristique	
G	conductance	
h	coefficient de couplage thermique	W.(m ² .°C) ⁻¹
L	épaisseur	m
N	norme	
P	puissance volumique	W.m ⁻³
Q	charge électrique	C
R	résistance thermique	°C.W ⁻¹
S	Surface	m ²
T	température	°C
t	temps	s
U	fonction d'espace	
u	espace réduit	
V	volume	m ³
x	espace	m

LETTRES GRECQUES

α	coefficient de diffusivité thermique	m ² /s
δ	écart	
Φ	flux de chaleur	
φ	densité de flux de chaleur	
λ	coefficient de conductivité thermique	W.(m.°C) ⁻¹
θ	température réduite	
ρ	masse volumique	kg.m ⁻³
τ	temps réduit	
ω	valeur propre réduite	
∂	différentielle partielle	

INDICES

0	mode fondamental (rang zéro)
a	ambient
ar	arrière
av	avant
c	convectif
cont	contact
do	décroissance
exp	expérimental
g	global
i	inférieur
J	jonction béton-plaque
n	mode de rang n
p	paroi, puits
r	radiatif
s	supérieur, source
t	tube, tuyau

LISTE DE TABLEAUX

Page

Tableau 1 : Valeurs des paramètres A, B et n dans le cas d'une paroi verticale.....	16
Tableau 2 : Expressions correspondantes de l'analogie thermique/électrique.....	22
Tableau 3 : Valeurs de ω_n solutions de l'équation transcendante.....	65
Tableau 4 : Valeurs de ω_{in} solutions de l'équation transcendante.....	90
Tableau 5 : Valeurs des constantes et paramètres caractéristiques thermophysiques	120
Tableau 6 : Valeurs obtenues des coefficients d'échanges.....	120
Tableau 7 : Valeurs moyennes des paramètres caractéristiques.....	121
Tableau 8 : Précision sur les calculs des paramètres thermophysiques (α , λ et h_g).....	122
Tableau 9 : Valeurs des paramètres α et λ pour différents bétons.....	122

LISTE DE FIGURES

Page

Figure 1.1 : Propagation unidirectionnelle d'un signal thermique cosinusoidal	4
Figure 1.2 : Thermogrammes chronologiques aux points $x_1=0$ et $x_2 \neq 0$	4
Figure 1.3 : Dispositif expérimental du modèle de MARECHAL et DEVISME.....	5
Figure 1.4 : Schéma de principe de la méthode de Flash (Modèle de PARKER)	7
Figure 1.5 : Schéma de principe du fil chaud (cas d'échantillon cylindrique).....	8
Figure 1.6 : Courbe utilisée pour la mesure de la diffusivité	9
Figure 1.7 : Schéma de principe de la méthode du régime régulier.....	9
Figure 1.8 : Thermogramme chronologique.	10
Figure 1.9 : Profils du coefficient convectif h pour une vitesse du fluide $v \leq 2$ (m/s).....	16
Figure 1.10 : Profils du coefficient convectif h pour une vitesse du fluide $v > 2$ (m/s).	17
Figure 2.1 : Elément de surface isotherme	20
Figure 2.2 : Mur plan	23
Figure 2.3 : Mur plan avec des températures imposées aux limites.....	25
Figure 2.4 : Modèle résistif du mur plan avec des températures imposées aux limites.....	26
Figure 2.5 : Modèle résistif discrétisé du mur avec des températures imposées aux limites	27
Figure 2.6 : Profil du flux en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de T_{p1}	27
Figure 2.7 : Profil du flux en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de T_{p2}	28
Figure 2.8 : Mur plan avec des conditions convectives aux limites	28
Figure 2.9 : Modèle résistif du mur plan avec des conditions convectives aux limites.....	30
Figure 2.10 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs des coefficients h_{c1} et h_{c2}	31
Figure 2.11 : Profil du flux $\Phi(h_{c1})$ en fonction de h_{c1} pour différentes valeurs de h_{c2}	31
Figure 2.12 : Profil de la température $T(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs de la profondeur x	32
Figure 2.13 : Profil de la température $T(h_{c1})$ en fonction du coefficient d'échange h_{c1} pour différentes valeurs de h_{c2}	33
Figure 2.14 : Mur plan avec des conditions convectives et radiatives aux limites.....	33
Figure 2.15 : Modèle résistif du mur plan avec des conditions convectives et radiatives aux limites	35
Figure 2.16 : Modèle résistif du mur plan avec des conditions convectives et radiatives aux limites	36
Figure 2.17 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de h_{r1} , h_{r2} , h_{c1} et h_{c2}	37
Figure 2.18 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de h_{r1} , h_{r2} , h_{c1} et h_{c2}	38
Figure 2.19 : Profil du flux $\Phi(h_{c1})$ en fonction de h_{c1} pour différentes valeurs de h_{r1}	38
Figure 2.20 : Profil de la température $T(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs de la profondeur x	39

Figure 2.21 : Profil de la température $T(h_{c1})$ en fonction du coefficient d'échange h_{c1} pour différentes valeurs du coefficient h_{r2}	39
Figure 2.22-a : Mur plan avec source thermique interne	41
Figure 2.22-b : Zoom sur la source thermique interne	41
Figure 2.23 : Modèle résistif équivalent du tronçon entre la source interne et le mur	44
Figure 2.24 : Modèle résistif équivalent du mur plan avec source thermique interne et conditions convectives aux limites du mur	45
Figure 2.25 : Profil du flux de chaleur $\Phi_o(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs de la position de la source.....	47
Figure 2.26 : Profil du flux de chaleur $\Phi_o(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs du coefficient d'échange hc_2	47
Figure 3.1-a : Mur plan avec source thermique interne	51
Figure 3.1-b : Zoom sur la source thermique interne	51
Figure 3.2 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de T_s et pour $Bi_1=Bi_2=0$	57
Figure 3.3 : Profil de la température réduite en fonction de u pour différentes valeurs de T_s et pour $Bi_1=Bi_2=8$	57
Figure 3.4 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de T_s et pour $Bi_1=Bi_2=1000$	58
Figure 3.5 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de h_{cit} et pour $Bi_1=Bi_2=0$	59
Figure 3.6 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de h_{cit} et pour $Bi_1=Bi_2=8$	59
Figure 3.7 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de h_{cit} et pour $Bi_1=Bi_2=1000$	60
Figure 3.8 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_1 et pour $Bi_2=0$	60
Figure 3.9 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_1 et pour $Bi_2=8$	61
Figure 3.10 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_1 et pour $Bi_2=1000$	61
Figure 3.11 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_2 et pour $Bi_1=0$	62
Figure 3.12 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_2 et pour $Bi_1=8$	62
Figure 3.13 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_2 et pour $Bi_1=1000$	63
Figure 3.14 : Représentation des solutions de l'équation transcendante.....	65
Figure 3.15 : Représentation des différents modes en fonction du temps réduit.....	72
Figure 3.16 : Représentation de la série et du mode fondamental en fonction du temps..	72
Figure 3.17 : Représentation de la température réduite correspondant au mode fondamental en fonction de la profondeur à différents instants τ/τ_d	73
Figure 3.18 : Représentation de l'amplitude $FTio(\omega)$ pour différentes valeurs de Bi_1	74
Figure 3.19 : Représentation sémi-logarithmique de la courbe expérimentale de relaxation de la température $\ln(T_a \cdot \delta\theta_{exp}(\tau))$	76
Figure 3.20 : Courbe expérimentale de relaxation de la température réduite $T_a \cdot \delta\theta_{exp}(\tau)$..	76
Figure 3.21 : Technique de l'intersection du mode fondamental et de l'ordonnée à l'origine.....	78

Figure 4.1 : Schéma de la dalle en béton.....	81
Figure 4.2 : Vue de profil de la dalle en béton.....	83
Figure 4.3 : Coupe transversale de la dalle en béton.....	84
Figure 4.4 : Schéma de la partie inférieure de la dalle en béton.....	84
Figure 4.5 : Représentation des solutions de l'équation transcendante.....	89
Figure 4.6 : Représentation des différents modes en fonction du temps réduit τ	96
Figure 4.7 : Représentation de la série $\delta\theta_i(\tau)$ et du mode fondamental $\delta\theta_{i0}(\tau)$ en fonction du temps réduit τ	96
Figure 4.8 : Représentation de la température réduite $\delta\theta_{i0}(\tau)$ en fonction de la profondeur à différents instants réduits.....	97
Figure 4.9 : Représentation de la fonction $FTi_0(\omega)$ pour différentes valeurs de Bi_{ar}	98
Figure 4.10 : Technique de l'intersection du mode fondamental et de l'ordonnée à l'origine.....	100
Figure 4.11 : Schéma de la partie supérieure de la dalle en béton.....	101
Figure 4.12 : Représentation des différents modes en fonction du temps réduit τ	105
Figure 4.13 : Représentation de la série $\delta\theta_s(\tau)$ et du mode fondamental $\delta\theta_{s0}(\tau)$ en fonction du temps réduit τ	105
Figure 4.14 : Représentation de la de la température réduite $\delta\theta_{s0}(\tau)$ en fonction de la profondeur à différents instants réduits.....	106
Figure 4.15 : Technique de l'intersection du mode fondamental et de l'ordonnée à l'origine.....	109
Figure 5.1 : Schéma de la dalle en béton.....	112
Figure 5.2 : Dispositif expérimental.....	113
Figure 5.3 : Courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\delta T_{exp}(x_o, t)$ à $x_o=2 ; 4 ; 6$ et 8 cm.....	113
Figure 5.4 : Courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\delta T_{iexp}(x_i, t)$ à $x_i=4$ cm.....	114
Figure 5.5 : Représentation sémi-logarithmique de la courbe expérimentale de relaxation de la température en fonction du temps $\ln(\delta T_{iexp}(x_i, t))$ à $x_i=4$ cm.....	114
Figure 5.6 : Courbe de régression exponentielle de $\delta T_{iexp}(x_i, t)$ à $x_i=4$ cm.....	115
Figure 5.7 : Technique de l'intersection de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{iexp}(0)$ et de la fonction caractéristique $FTi_0(\omega)$	116
Figure 5.8 : Courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\delta T_{iexp}(x_s, t)$ à $x_o=4 ; 6$ et 8 cm.....	117
Figure 5.9 : Représentation sémi-logarithmique des courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\ln(\delta T_{iexp}(x_o, t))$ à $x_o=4 ; 6$ et 8 cm.....	118
Figure 5.10 : Courbes de régression exponentielle de $\delta T_{iexp}(x_o, t)$ à $x_o=4 ; 6$ et 8 cm.....	118
Figure 5.11 : Technique de l'intersection de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{sexp}(0)$ et de la fonction caractéristique $FTs_0(\omega)$	119

INTRODUCTION GENERALE

La mise en oeuvre des matériaux locaux (solution qui devrait abaisser sensiblement le coût des constructions de bâtiments dans les pays en développement) ne devrait pas se faire au détriment du confort thermique, encore moins à celui d'économie d'énergie.

La prise en compte des aspects de confort dans l'énergétique de l'habitat implique une maîtrise du comportement thermique des habitations. Ceci passe par une meilleure connaissance des transferts de chaleur, conséquence des différentes sollicitations thermiques (apports solaires, environnement, etc...). Ces transferts de chaleur dépendent de l'orientation et des ouvertures du bâtiment d'une part, et de la qualité des parois mises en oeuvre d'autre part). En effet les déperditions des parois dépendent de leurs paramètres caractéristiques thermophysiques (la diffusivité et la conductivité). Les transferts de chaleur dépendent également des coefficients globaux d'échanges thermiques entre les parois des enveloppes et leur environnement (l'ambiance).

Pour la vulgarisation des matériaux locaux, il est donc nécessaire de connaître leurs caractéristiques thermophysiques et leurs coefficients d'échanges pariétaux, afin de prévoir leurs comportements thermiques lors des analyses énergétique du bâtiment.

Notre travail apporte une nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux. La méthode de caractérisation développée est appliquée à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire, afin d'en déterminer ses paramètres thermophysiques (diffusivité conductivité et coefficients globaux d'échanges thermiques).

Cette étude s'inscrit dans les axes de recherches du Laboratoire d'Energétique Appliquée (L.E.A.) de l'Ecole Supérieure Polytechnique (E.S.P.) de l'U.C.A.D., en matière de Thermique du bâtiment.

Pour mener à bien ce travail, nous l'avons subdiviser en cinq chapitres :

- dans le premier chapitre nous avons fait une étude bibliographique relative à la détermination de la diffusivité α et des coefficients globaux d'échanges thermiques entre les parois et leur environnement ;
- le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'influence des paramètres caractéristiques thermophysiques sur les transferts de chaleur ;
- dans le troisième chapitre nous développons une nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux ;
- dans le quatrième chapitre nous appliquons cette nouvelle méthode de caractérisation thermique à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire ;
- le cinquième et dernier chapitre est consacré à l'expérimentation.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX

I.1. INTRODUCTION

La prévision du comportement thermique de matériaux nécessite la connaissance de leurs caractéristiques thermophysiques : la diffusivité et la conductivité thermiques.

La mise en oeuvre des matériaux de construction doit prendre en compte les aspects de confort thermique et d'économie d'énergie dans l'habitat. Ces deux aspects sont sensibles à la réponse dynamique des parois (de l'habitat) aux différentes sollicitations climatiques comme l'ensoleillement, la température de l'air extérieur, l'environnement, etc....

En plus des coefficients intrinsèques (diffusivité et conductivité), la réponse dynamique des parois aux différentes sollicitations climatiques dépend également des coefficients d'échanges thermiques entre les parois du matériau et l'environnement.

Ces coefficients d'échanges thermiques globaux (radiatifs et convectifs) dépendent de plusieurs facteurs : nature du matériau, dimensions et état de la surface d'échange, conditions expérimentales (température, vitesse et viscosité du fluide environnant), etc.... La détermination de la composante (du coefficient d'échanges) qui dépend uniquement du matériau (nature du matériau, dimensions et état de la surface d'échange) constitue un paramètre caractéristique de plus pour ce dernier. Dans ce travail nous ne nous intéresserons pas à une composante du coefficient d'échanges thermiques, mais à sa valeur globale.

Cela étant, et par abus de langage, nous considérons tout au long de ce travail, le coefficient d'échanges thermiques global, comme l'un des paramètres caractéristiques du matériau.

Ainsi les coefficients de diffusivité, de conductivité et d'échanges thermiques constituent les paramètres caractéristiques thermophysiques du matériau.

Nous allons dans ce chapitre faire une étude bibliographique sur les principales méthodes de mesure de la diffusivité et des coefficients d'échanges thermiques.

I.2. MESURE DE LA DIFFUSIVITE DE MATERIAUX

De nombreux travaux ont été effectués sur les méthodes de mesure de la diffusivité des matériaux.

La plupart de ces méthodes exploitent des thermogrammes chronologiques pour remonter à la valeur de la diffusivité en s'appuyant sur les solutions analytiques exactes fournies par la théorie.

Ces méthodes sont classées en deux groupes : celles du régime dynamique fréquentiel et celles du régime dynamique transitoire.

I.2.1. Méthodes du régime dynamique fréquentiel : le modèle de Maréchal et Devisme

Les méthodes du régime dynamique fréquentiel dans leur principe, imposent une variation sinusoïdale ou tout simplement périodique de flux ou de température, sur l'une des faces d'un échantillon considéré comme un milieu semi-infini (Fig. 1.1). La connaissance de l'atténuation de l'amplitude et de la variation de phase du signal thermique en régime établi en deux profondeurs distinctes x_1 et x_2 du matériau permet de déterminer la diffusivité.

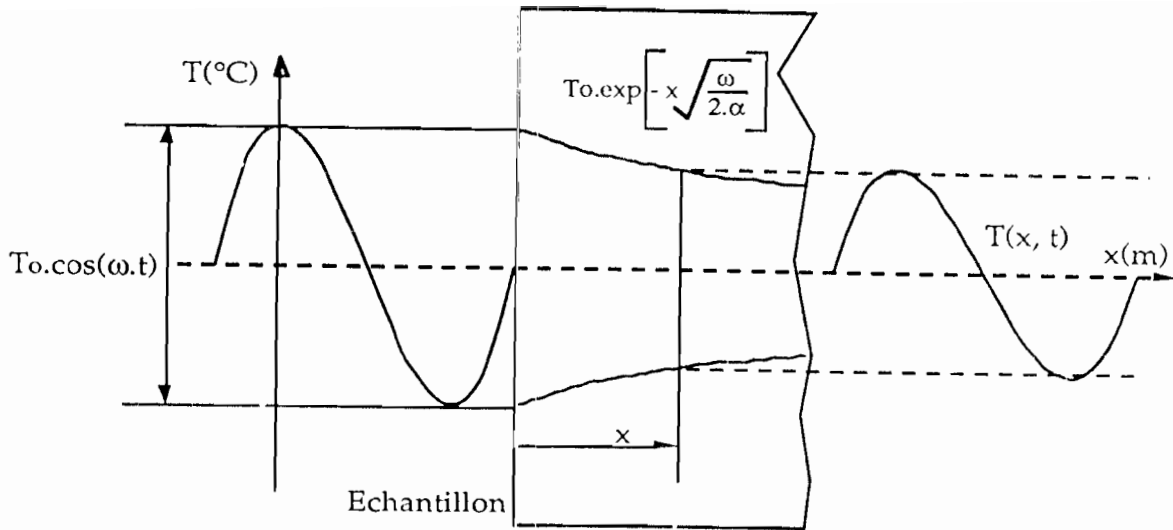


Figure 1.1 : Propagation unidirectionnelle d'un signal thermique cosinusoidal

Dans le cas d'un signal sinusoïdal, de pulsation ω , l'équation à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

munie des conditions aux limites :

$$T(0,t) = T_0 \cos(\omega t) \quad (\text{I.2})$$

$$T(\infty,t) = 0 \quad (\text{I.3})$$

La solution de l'équation (I.1) est [1] :

$$T(x,t) = T_0 \exp\left[-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right] \cos\left[\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right] \quad (\text{I.4})$$

La figure 1.2 ci-dessous représente les thermogrammes chronologiques en deux points $x_1=0$ et $x_2 \neq 0$.

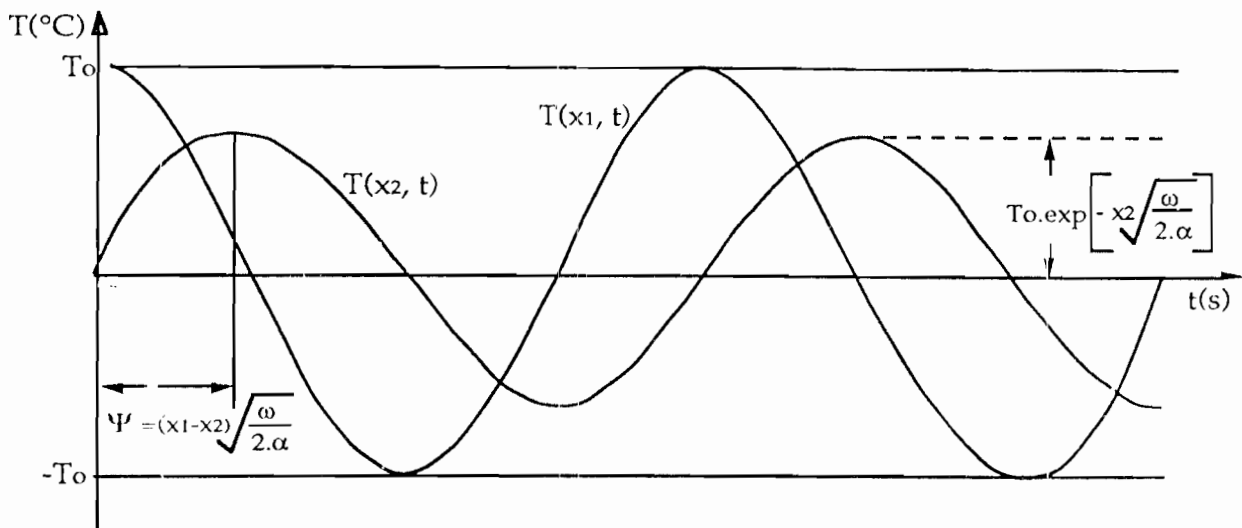


Figure 1.2 : Thermogrammes chronologiques aux points $x_1=0$ et $x_2 \neq 0$

De la relation (I.4) nous constatons qu'entre les températures instantanées aux points $x_1=0$ et $x_2 \neq 0$, il existe un déphasage Ψ d'expression :

$$\Psi = (x_1 - x_2) \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \quad (I.5)$$

La mesure du déphasage Ψ permet de remonter à la diffusivité thermique [1]:

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \left(\frac{x_1 - x_2}{\Psi} \right)^2 \quad (I.6)$$

où : ω : pulsation du signal périodique

Ψ : déphasage entre les températures instantanées aux points à $x_1=0$ et $x_2 \neq 0$

A partir d'une mesure des amplitudes $T_{\max}(x_1)$ et $T_{\max}(x_2)$ pour les profondeurs respectives x_1 et x_2 il est également possible de remonter à la diffusivité du matériau :

$$\alpha = \frac{\omega}{2} \left(\frac{x_2 - x_1}{\ln \left[\frac{T_{\max}(x_1)}{T_{\max}(x_2)} \right]} \right)^2 \quad (I.7)$$

L'analyse critique de cette méthode a été faite par P. VERNOTTE [2] et J. MARTINET [3]. Ils ont fait ressortir notamment la difficulté d'obtenir une température variant sinusoidalement de façon rigoureuse, et les erreurs induites par l'appréciation du repérage des points singuliers sur les thermogrammes de mesures.

Des améliorations ont été apportées à la méthode par J. M. MERICQ [4], J. C. MARECHAL & J. M. DEVISME [5, 6] pour l'adapter respectivement sur des échantillons cylindriques de matériaux conducteurs et sur des échantillons plans de matériaux de construction.

Le modèle de MARECHAL & DEVISME utilise un dispositif (Fig. 1.3) qui comprend deux échantillons plans identiques et accolés, placés entre deux plaques chauffantes identiques. Un flux calorifique périodique non nécessairement sinusoidal est dissipé dans les plaques chauffantes. L'ensemble échantillons-plaques chauffantes est disposé entre deux plaques de refroidissement maintenues à température constante par la circulation régulée d'un fluide. Une isolation latérale permet la canalisation du flux de chaleur pour avoir un écoulement unidimensionnel.

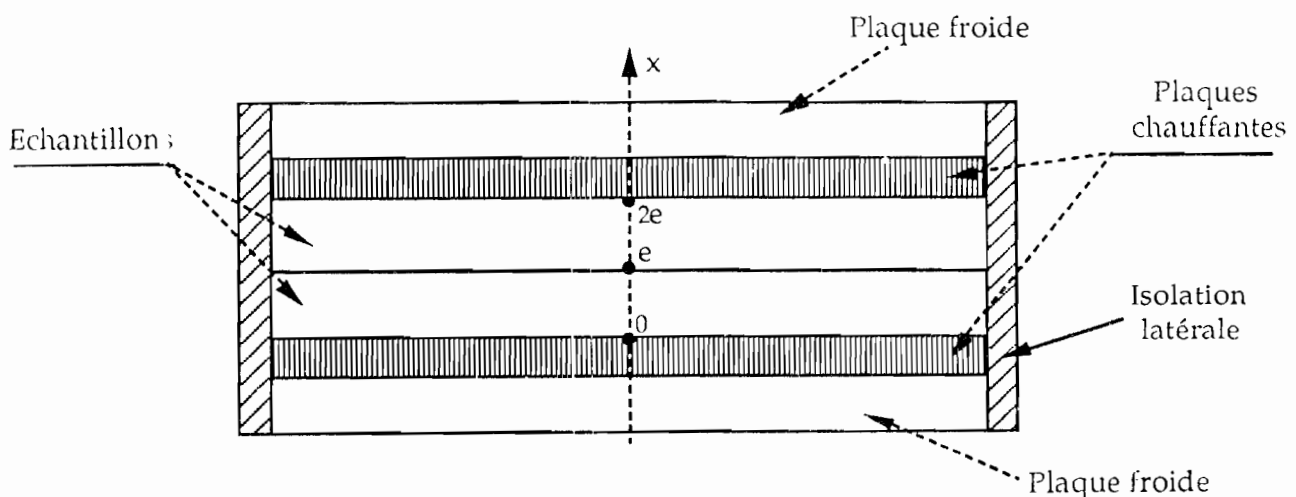


Figure 1.3 : Dispositif expérimental du modèle de MARECHAL et DEVISME

Pour un signal thermique sinusoïdal établi de période p , les températures T_1 (des faces $x=0$ et $x=2.e$) et T_2 (de la face $x=e$) s'écrivent [5] :

$$T_1 = T_{1m} \cdot \sin [2 \cdot \pi \cdot t / p] \quad (I.8)$$

$$T_2 = T_{2m} \cdot \sin [(2 \cdot \pi \cdot t / p) - \Psi] \quad (I.9)$$

MARECHAL ET DEVISME montrent que la diffusivité thermique est donnée par :

$$\alpha = \frac{e^2}{z^2} \frac{\pi}{p} \quad (I.10)$$

avec : e : épaisseur de l'échantillon

p : période des signaux thermiques

z : grandeur caractéristique du matériau, solution des équations transcendentes [5]

:

$$A(z) = \frac{T_{2m}}{T_{1m}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{\cosh(2 \cdot z) - \cos(2 \cdot z)}{\cosh(4 \cdot z) - \cos(4 \cdot z)}} \quad (I.11)$$

$$\Psi(z) = \arctan\left[\frac{\tanh(z)}{\tan(z)}\right] - \arctan\left[\frac{\tanh(2 \cdot z)}{\tan(2 \cdot z)}\right] \quad (I.12)$$

où : $A(z)$ est l'affaiblissement et $\Psi(z)$ le déphasage entre T_1 et T_2

Dans le cas des signaux périodiques quelconques, le déphasage $\Psi(z)$ et l'affaiblissement $A(z)$ sont calculés en s'intéressant uniquement au terme fondamental du développement en série de Fourier de ces signaux.

Notons que cette méthode nécessite des temps d'expérimentation très longs, compte tenu des temps de mise en régime (quelques heures à plusieurs jours selon la nature de l'échantillon).

1.2.2. Méthodes du régime dynamique transitoire

Ces méthodes sont basées sur des solutions analytiques du champ thermique en régime dynamique transitoire dans des éprouvettes de géométrie connue avec des conditions initiales et des conditions aux limites imposées. Nous distinguons principalement trois méthodes que nous présentons ci-dessous.

1.2.2.1. Méthodes impulsionnelles ou Méthodes Flash

Le principe des méthodes impulsionnelles ou méthodes Flash consiste à produire une impulsion thermique de courte durée sur l'une des faces (face 1) d'un échantillon (Fig. 1.4) cylindrique parfaitement isolé à sa périphérie et à observer la réponse de ce signal sur l'autre face [7].

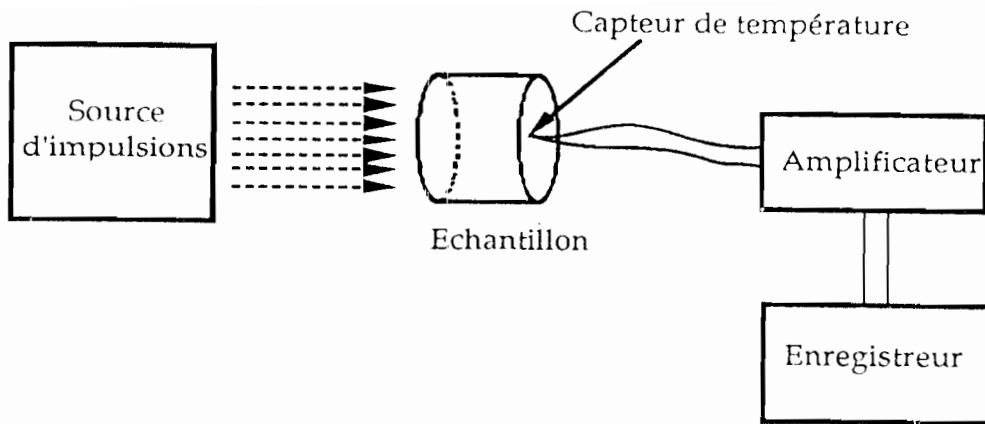


Figure 1.4 : Schéma de principe de la méthode de Flash (Modèle de PARKER)

L'évolution de la température en fonction du temps t sur la face 2 non exposé au rayonnement est donnée par l'expression [8, 9 et 10] :

$$T(e,t) = \frac{q}{\rho \cdot C \cdot e} \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp((-n \cdot \pi / e)^2 \alpha \cdot t) \right) \quad (I.13)$$

où : e : épaisseur de l'échantillon (m)

q : densité d'énergie absorbée ($J \cdot m^{-2}$)

ρ : masse volumique de l'échantillon ($kg \cdot m^{-3}$)

α : coefficient de diffusivité thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$)

C : chaleur spécifique de l'échantillon ($J \cdot (kg \cdot ^\circ C)^{-1}$)

L'exploitation, pour des valeurs élevées de temps, de l'expression (I.13) conduit à la relation explicite de la diffusivité (formule de PARKER [11]) :

$$\alpha = \frac{\ln(4)}{\pi^2} \frac{e^2}{t_{1/2}} \quad (I.14)$$

où : $t_{1/2}$: temps expérimental correspondant à la demi-élévation de température maximale enregistrée sur la face 2 tel que : $(T(e,t) = q/2 \cdot \rho \cdot C \cdot e)$

Le modèle de PARKER et JENKINS [11] est une amélioration du modèle précédent, par introduction d'un coefficient d'échange thermique sur la face recevant le signal.

Le modèle de DEGIOVANNI [12] prend en compte les pertes thermiques sur toutes les faces de l'échantillon ; il fait intervenir les trois coefficients d'échanges thermiques relatifs à la face recevant l'impulsion, à la face opposée et aux bords de l'échantillon. La diffusivité est alors donnée par les relations suivantes [3, 4 et 7] :

$$\alpha = \frac{e^2}{(t_{5/6})^2} [1,15 \cdot t_{5/6} - 1,25 \cdot t_{2/3}] \quad (I.15)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{(t_{5/6})^2} [0,761 \cdot t_{5/6} - 0,926 \cdot t_{1/2}] \quad (I.16)$$

$$\alpha = \frac{e^2}{(t_{5/6})^2} [0,617 \cdot t_{5/6} - 0,862 \cdot t_{1/3}] \quad (I.17)$$

où : t_i représente le temps au bout duquel la température de la face non irradiée est i fois la température maximale observée sur cette même face.

I.2.2.2. Méthode du fil chaud

La méthode du fil chaud consiste à placer à l'intérieur du matériau un fil chauffant parcouru par un courant électrique d'intensité I (Fig. 1.5), dissipant un flux linéaire de chaleur Φ_L (W/m).

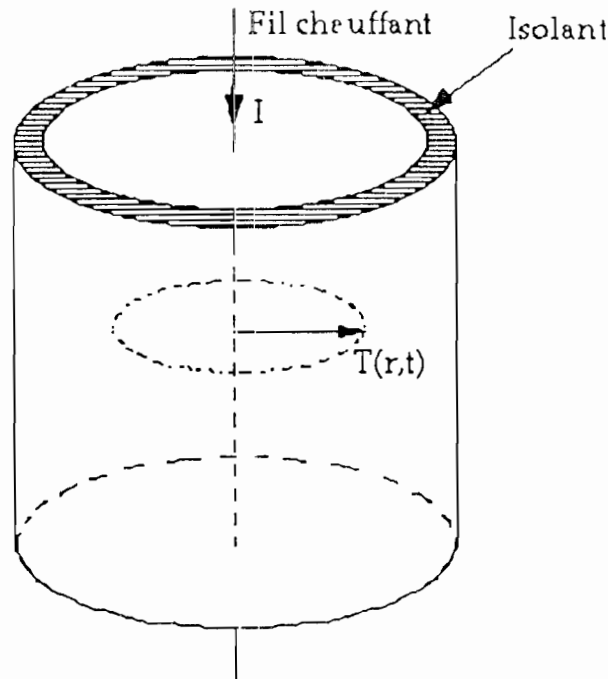


Figure 1.5 : Schéma de principe du fil chaud (cas d'échantillon cylindrique)

Avec les hypothèses :

- le fil chauffant est très long et infiniment fin assimilable donc à une source linéique continue ;
- le champ thermique est radial :

$$T(r,t) = \frac{\Phi_L}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \int_{\frac{r^2}{4 \cdot \alpha \cdot t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (I.18)$$

où : u est une variable réduite ($u = r^2 / 4 \cdot \alpha \cdot t$) introduite lors de la résolution de l'équation différentielle du problème : $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right]$

Dans ces conditions et pour un temps de chauffage t_c donné, la mesure du temps t_m au bout duquel la température à la distance r de la source passe par un maximum (Fig. 1.6), permet de remonter à la diffusivité [13, 14 et 15] :

$$\alpha = \frac{-r^2}{4} \left[\frac{t_c}{(t_m - t_c) \cdot t_m \cdot \ln \left[\frac{t_m - t_c}{t_m} \right]} \right] \quad (I.19)$$

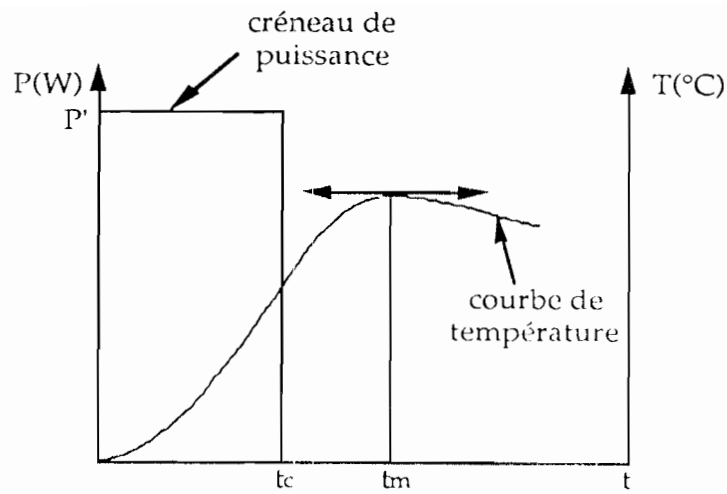


Figure 1.6 : Courbe utilisée pour la mesure de la diffusivité

Cette méthode qui a fait l'objet de la norme DIN 51046 en Août 1976 est connue depuis longtemps et a été largement utilisée par un grand nombre de chercheurs dont PERRIN [13], PONSOT [15], BLACKWELL [16], FOURES [17], JAVELAS [18], [19], BASTIANT [20], LAURENT [21].

L'utilisation de cette méthode sans discernement des conditions appropriées conduit à des résultats erronés, notamment dans le cas de l'existence d'une résistance de contact non négligeable entre sonde et matériau.

L'incertitude sur l'entre-axe réel entre élément chauffant et thermocouple induit également une erreur la détermination de la diffusivité par cette méthode.

1.2.2.3. Méthode du régime régulier

Le principe de la méthode du régime régulier consiste à plonger dans un bain thermostaté de température T_f homogène et brassé (Fig. 1.7), un échantillon cylindrique (de rayon R_0 , d'épaisseur $2.e$) du matériau à étudier initialement à la température uniforme T_0 .

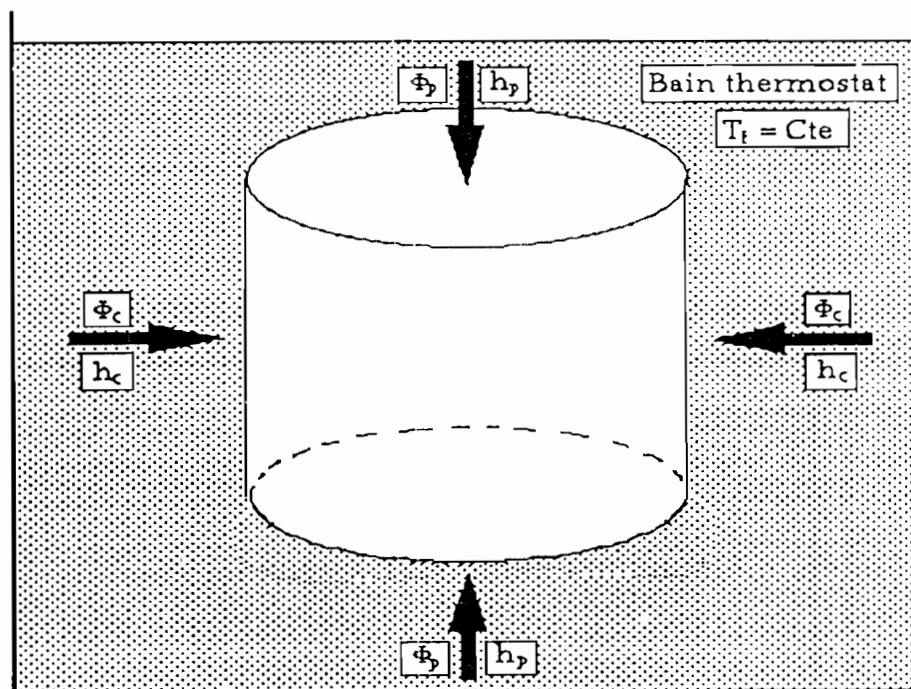


Figure 1.7 : Schéma de principe de la méthode du régime régulier

L'exploitation des thermogrammes enregistrés conduit, pour l'évolution exponentielle (régime régulier) de la solution analytique du problème, à la diffusivité thermique du matériau [22] :

$$\alpha = \frac{m}{\left(\frac{n_{1p}}{e}\right)^2 + \left(\frac{n_{1c}}{R_0}\right)^2} \quad (1.20)$$

où :

m : pente de la zone linéaire de la courbe expérimentale $\ln(\Delta T) = f(t)$

e : demi épaisseur de l'échantillon

R_0 : rayon de l'échantillon cylindrique

n_{1p} , n_{1c} : premières racines des équations transcendantes respectives :

$$\text{ctan}(n_{1p}) = \frac{n_{1p}}{Bi_p} \quad \text{et} \quad \frac{J_0(n_{1c})}{J_1(n_{1c})} = \frac{n_{1c}}{Bi_c}$$

J_0 et J_1 : fonctions de Bessel de 1^{ère} espèce respectivement d'ordre 0 et 1.

Bi_p et Bi_c : respectivement nombres de Biot relatifs à la plaque rectangulaire et au cylindre infinis.

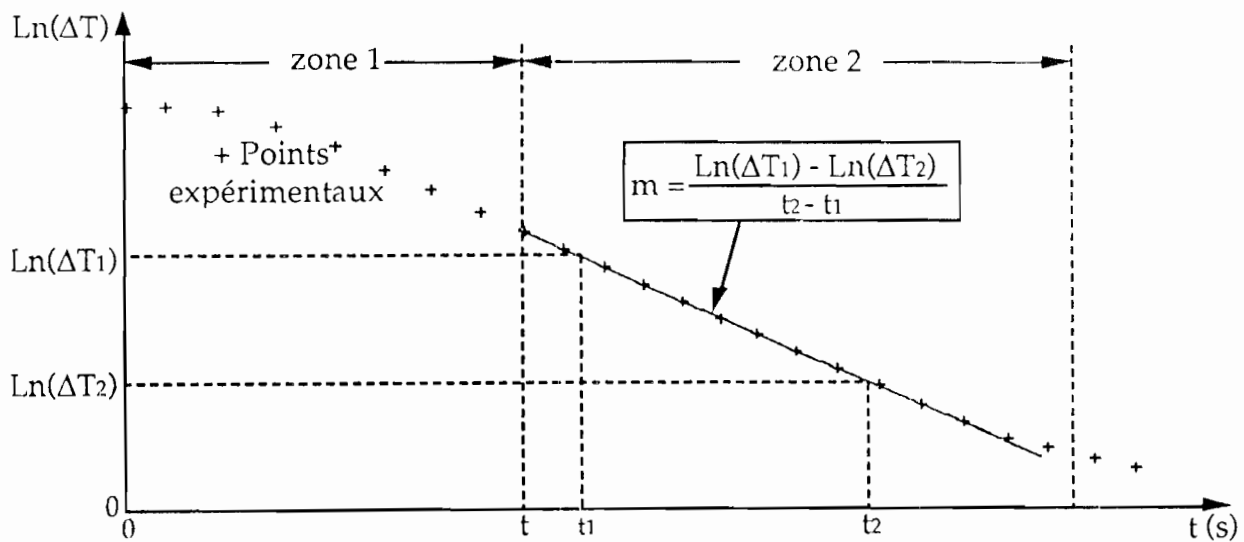


Figure 1.8 : Thermogramme chronologique.

zone 1: zone du processus non stationnaire (désordonné)

zone 2 : zone du régime régulier (décroissance exponentielle)

$$\Delta T_1 = T(x,r,t_1) - T_f \quad \text{et} \quad \Delta T_2 = T(x,r,t_2) - T_f$$

ΔT_1 et ΔT_2 sont les écarts de température entre le bain thermostaté et un point $M(x,r)$ de l'échantillon, aux instants t_1 et t_2 respectivement, pendant la phase du régime régulier.

Notons que cette méthode est valable pour des nombres expérimentaux de Biot élevés ($Bi \geq 100$), pour lesquels [22] : $n_{1p} \# 1,57$ et $n_{1c} \# 2,40$. Ceci impose des conditions expérimentales difficiles en plus de la régulation du bain thermostaté.

I.2.3. Remarque sur les méthodes de mesure de la diffusivité

Nous remarquons :

- qu'il n'existe pas de méthode universelle permettant de mesurer avec précision la diffusivité de n'importe quel matériau dans tous les domaines de températures. La marge d'erreur des méthodes ci-dessus dépend de leurs hypothèses simplificatrices;
- ces méthodes utilisent un repérage des points singuliers sur les thermogrammes. L'appréciation des coordonnées de ces points induit des erreurs qui influent sur les résultats ;
- elles font parfois recours à l'utilisation d'un système d'abaques [9] ;
- certaines de ces méthodes ne sont pas affranchies des problèmes d'incertitude sur le positionnement des sondes dans le matériau (exemple : connaissance de l'entre-axe réel entre élément chauffant et thermocouple dans la méthode du fil chaud) ;
- toutes ces méthodes exploitent des mesures réalisées en laboratoire, dans des conditions expérimentales bien définies, différentes le plus souvent des conditions réelles d'exploitation de ces matériaux ;

Les méthodes transitoires conduisent à la valeur de la diffusivité thermique à partir des thermogrammes chronologiques en s'appuyant sur la solution analytique munies des conditions initiales et des conditions aux limites imposées. Ces conditions aux limites solide-fluide sont caractérisées par des coefficients d'échanges thermiques h supposés connus dans les méthodes de détermination de la diffusivité. A ce titre :

- la méthode du régime régulier [22] fait intervenir des conditions aux limites convectives introduisant les coefficients d'échange latéral h_c et de base h_p d'un cylindre ;
- le modèle de DEGIOVANNI [23] introduit trois coefficient d'échanges thermiques relatifs à la face recevant l'impulsion, à la face opposée et aux bords de l'échantillon;
- J. M. DEVISME, H. (P) et J.C. MARECHAL [24] utilisent des coefficients d'échanges thermiques dans leur étude de l'influence de l'effusivité thermique et de position des matériaux sur la réponse thermique des murs multicouches en régime variable. Ils choisissent les valeurs suivantes $h_{ext}=16,7 \text{ W/m}^2.\text{K}$ et $h_{int}=9,1 \text{ W/m}^2.\text{K}$ qui sont celles préconisées par le Document Technique Unifié (D.T.U) pour les coefficients moyens d'échange à l'extérieur et à l'intérieur d'un bâtiment.

Nous remarquons ainsi que des méthodes de mesure de la diffusivité en régime dynamique transitoire font intervenir des coefficients d'échanges thermiques qui sont supposés connus.

L'évaluation précise du coefficient h est difficile compte tenu de la complexité des phénomènes régissant les échanges thermiques entre le fluide environnant et la paroi. Plusieurs études théoriques et expérimentales ont été effectuées pour l'évaluation de ce coefficient h . Nous présentons les principales méthodes.

I.3. DETERMINATION DU COEFFICIENT D'ÉCHANGES THERMIQUES

Les transferts de chaleur fluide-paroi jouent un important rôle dans les échangeurs, les chaudières, la trempe des alliages, le stockage thermique de l'énergie, le refroidissement de composants électroniques, le confort thermique dans l'habitat, etc...

Les transferts de chaleur fluide-paroi dépendent de plusieurs facteurs dont :

- la géométrie de la paroi ;
- les dimensions de la paroi ;
- l'état de la surface de la paroi ;
- la température du fluide environnant ;
- la vitesse de l'air ambiant.

Il existe plusieurs méthodes de détermination des coefficients d'échanges thermiques h entre une paroi et son fluide environnant. Ces méthodes peuvent être classifiées en trois groupes :

- les méthodes de bilan thermique en régime permanent ;
- les méthodes de bilan thermique en régime transitoire ;
- les méthodes empiriques : corrélation et/ou abaques.

I.3.1. Méthode du bilan thermique en régime permanent

En régime permanent, les mesures du flux de chaleur ϕ et des températures de paroi T_p et du fluide (au loin de la paroi) T_a , permettent par bilan thermique de remonter au coefficient d'échange par convection h .

Le flux de chaleur échangé par convection entre la paroi de surface S et le fluide environnant s'écrit [25] :

$$\phi = S.h(T_p - T_a) = S.h.\Delta T \quad (I.21)$$

De cette relation le coefficient d'échange de chaleur s'exprime par :

$$h = \frac{\phi}{S(T_p - T_a)} = \frac{\phi}{S.\Delta T} \quad (I.22)$$

où : ϕ : flux de chaleur échange (W)

S : surface d'échange (m^2)

$\Delta T = (T_p - T_a)$: différence de températures de la paroi et du fluide

T_p : température de paroi (K)

T_a : température caractéristique du fluide au loin de la paroi (K)

h : coefficient d'échange convectif ($W/m^2.K$)

I.3.2. Méthode du bilan thermique en régime transitoire

Nous présentons successivement en revue les principales méthodes de détermination des coefficients d'échange par convection fluide-paroi en régime transitoire.

I.3.2.1. Coefficients d'échange constants

- N. M. TSIREL'MAN, F. G. BAKIROV et Z. G. SHAIKHUT-DINOV [26] déterminent le coefficient d'échange fluide-paroi à partir de la loi de refroidissement d'un milieu semi-infini initialement à la température uniforme T_0 pour lequel, à la surface $x=0$, on a une condition aux limites de Fourier imposée par la circulation du fluide à la température T_f . A partir du thermogramme enregistré en un point du milieu à une distance x de la surface, ils mesurent un temps t_ε qui correspond à la variation $[\varepsilon.(T_0-T_f)]$ de la température. Cette valeur t_ε , associée à (T_0-T_f) leur permet, avec l'expression analytique de la température $T(x,t)$, de déterminer h .

- R. C. MEHTA [27] évalue le coefficient h en partant des variations de température dans un mur d'épaisseur e , initialement à la température uniforme, isolé sur une face et avec des conditions de Fourier sur l'autre face. En mesurant la température sur la face isolée, il obtient à chaque instant t donné, par identification une valeur de h .

- N. M. TSIREL'MAN [28] propose une méthode fondée sur la vitesse de déplacement des isothermes dans un solide soumis à un chauffage constant et en contact avec un fluide.

- R.R. DILS et P.S. FOLLANSBEE [29] utilisent les fluctuations aléatoires de température des gaz dans les turbines. Ces fluctuations, ainsi que celles de la paroi sont relevées puis décomposées en fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont comprises entre 10 et 100 Hz. Le coefficient d'échange h est alors déterminé pour chaque fréquence à partir des amplitudes de ces fonctions sinusoïdales sur la surface du solide en contact avec le gaz et dans le gaz lui-même. Dans l'intervalle de fréquences étudié, les auteurs constatent que h est indépendant de la fréquence et de l'amplitude.

- V. HLAVACKA [30] évalue le coefficient d'échange moyen h entre un ensemble de cylindres placés dans un canal isolé latéralement et un fluide s'écoulant perpendiculairement aux axes des cylindres. La température varie sinusoïdalement à l'entrée du canal. Le rapport des amplitudes de température et le déphasage entre l'entrée et la sortie, permettent, séparément, de calculer un coefficient d'échange moyen.

I.3.2.2. Coefficients d'échange non constants

- H.T. STERNFELD et J. REINKENHOF [31] représentent le champ thermique dans un solide en contact avec un fluide par une fonction polynomiale. Les températures mesurées dans le mur permettent, par une méthode de moindres carrés, de calculer les coefficients du polynôme. La température du fluide, la conductivité et la masse volumique sont également représentées par des polynômes. Ils déterminent le coefficient h en introduisant tous ces polynômes dans une relation obtenue à partir d'un bilan d'énergie établi entre les faces extérieures du solide.

- A.V. FAFURIN et K.R. SHANGAREEV [32] font une étude d'un tube cylindrique de fine épaisseur, composé de plusieurs éléments isolés électriquement les uns des autres. Au milieu de chaque élément sont soudés des thermocouples. La température dans l'épaisseur du tube est considérée comme pratiquement uniforme. Pour une décroissance brutale de la température du gaz dans le cylindre, le flux quittant la paroi est donné par la dérivée de la température de cette paroi en fonction du temps. Connaissant les températures du gaz, de la surface en contact avec le fluide et le flux, le coefficient

d'échange h est déterminé à chaque instant. Celui-ci varie en fonction du temps et passe par une valeur maximale double de celle du régime permanent.

- A.N. SHCHERBAN, N.I. FURMAN & V.N. TARASEVICH [33] ont examiné le comportement de circuits électroniques chauffés par effet Joule. Les différents modèles thermocinétiques tenaient compte des variations, en fonction de la température, de la résistance électrique, de la chaleur volumique, et du coefficient d'échange thermique h . L'expérimentation permettait à la fois d'enregistrer, en fonction du temps, la puissance Joule délivrée et la température du composant. La comparaison entre les résultats analytiques des modèles et les résultats expérimentaux a montré l'importance des variations du coefficient d'échange lors du calcul des températures des composants électroniques en régime transitoire.

- V.L. POKHORILER [34] utilise la méthode de résolution des problèmes de conduction inverse qui consiste, pour des transferts unidimensionnels, à déterminer les champs thermiques, à partir des températures et de leur dérivées successives en un ou deux points. L'auteur propose de se limiter aux températures et leurs dérivées premières par rapport au temps en multipliant les points de mesure ; l'examen de cas théoriques réalistes prouvent que la précision obtenue est satisfaisante pour des applications technologiques.

- V.A. MAKHIN et A.A. SHUKIN [35] développent une méthode générale permettant de résoudre des problèmes de conduction inverse, en vue d'interpréter des résultats expérimentaux de transfert thermiques. Cette méthode a été utilisée pour la détermination de coefficients d'échange h .

- V.N. KOZLOV [36] impose sur une face d'un mur une température fonction du temps. Ne pouvant expérimentalement accéder aux températures extrêmes de la paroi, il calcule un certain nombre de termes d'une série numérique à partir de mesures de température à l'intérieur du mur, en divers endroits. Son modèle thermocinétique lui permet d'évaluer le coefficient h .

- D. PETIT, J. DARD & A. DEGIOVANNI [37] utilisent une méthode d'évaluation du coefficient h basée sur une technique impulsionnelle qui permet d'analyser les échanges de chaleur fluide-paroi, en régime thermique transitoire. Leur méthode expérimentale consiste à augmenter brusquement la température dans le matériau de la paroi grâce à la décharge électrique d'un condensateur ; ce matériau est refroidi par une circulation de fluide (eau ou air). L'enregistrement de l'évolution de la température en un point de cette paroi, sur la face non soumise au passage du fluide, donne le thermogramme. L'étude théorique du régime transitoire permet de déterminer à partir de ce thermogramme le coefficient d'échange thermiques fluide-paroi du matériau.

Remarque

Les méthodes de détermination du coefficient d'échanges thermiques ci-dessus concernent les échanges s'effectuant entre les parois du milieu et un fluide gazeux.

Nous allons dans la suite présenter les méthodes concernant un fluide liquide .

I.3.2.3. Ecoulement laminaire

- R. SIEGEL et M. PERLMUTTER [38] traitent le problème des transferts de chaleur dans un canal limité par deux surfaces planes et parallèles. Le fluide est incompressible, ses propriétés thermiques sont constantes. L'écoulement est laminaire et l'on suppose que sa vitesse est uniforme dans l'épaisseur du canal. Cette vitesse peut être fonction du temps. ~~Les conceptions axiales et les dissipations visqueuses sont négligées. Une densité~~

de flux quitte les parois. Les résultats sont comparés au cas où le coefficient d'échange paroi-fluide est constant, et où la température du fluide est uniforme pour une abscisse donnée.

- R.C.C. WANG, B.T.G. CHUNG et L.C. THOMAS [39] étudient les échanges de chaleur en convection forcée, pour une couche limite laminaire, sur une plaque possédant une résistance et une inertie thermiques. Le fluide est supposé incompressible, sa vitesse ne varie pas en fonction du temps, la paroi reçoit sur sa surface inférieure un échelon de flux. Le modèle est bidimensionnel, la conduction axiale dans le solide et dans le fluide est négligée, les propriétés thermiques sont constantes, les dissipations visqueuses sont négligées. La plaque est isolée à son extrémité. Initialement le fluide et la paroi sont à la même température. En faisant l'hypothèse que la vitesse est constante dans l'épaisseur de la couche limite, les auteurs montrent que le coefficient d'échange part d'une valeur relativement élevée pour les temps faibles et passe par un minimum avant d'atteindre sa valeur du régime permanent.

1.3.2.4. Ecoulement turbulent

- H. KAWAMURA [40] considère les échanges entre le tube et un fluide en supposant que l'écoulement turbulent est complètement développé et que les propriétés physiques sont indépendantes de la température. Dans l'épaisseur du tube, un échelon de puissance est dégagé à partir de l'instant initial ; cet échelon de puissance peut se superposer à une puissance continue préexistante. Les conditions aux limites sont les suivantes : température du fluide constante à l'entrée du tube ; surface extérieure du tube isolée ; à l'interface fluide-paroi la vitesse du fluide est nulle, sa température est égale à celle de la paroi et le flux est conservé. Connaissant à chaque instant la densité de flux pénétrant dans le fluide et les variations de température à l'interface (celles-ci sont relevées à partir des variations de résistance électrique de la portion du tube utilisée), l'auteur obtient le coefficient d'échange. Il constate que, lorsque l'échelon de puissance se superpose à une puissance continue préexistante, le coefficient d'échange passe par un maximum dans les premiers instants.

1.3.3. Méthodes de corrélations empiriques

Les méthodes empiriques utilisées pour estimer les valeurs de coefficients d'échanges thermiques convectifs sont déduites de l'expérimentation. Les résultats expérimentaux obtenus ont été regroupés sous forme générale par l'utilisation de nombres réduits [41].

Ces méthodes expriment le coefficient h en fonction de la vitesse du fluide v , à l'aide de corrélations empiriques $h = f(v)$ de forme générale :

$$h = A + B.v^n \quad (I.23)$$

où : A, B et n : sont des coefficients : A ($W.m^{-2}.K^{-1}$) et B ($W.m^{-(n+2)}.K^{-1}.s^n$)

v ($m.s^{-1}$) : vitesse de l'évolution du fluide

Remarque

L'expression (I.23) est une approche dont l'avantage est la simplicité ; mais malheureusement il existe en pratique autant de corrélations que d'auteurs. La plupart des valeurs des coefficients d'échanges convectifs ont été répertoriées par M. PERRANDEAU [42] et A. ROLDAN [43].

A titre d'exemple, le tableau 1 [42 et 43] donne les valeurs des paramètres A, B et n dans le cas d'une paroi verticale.

Tableau 1 : Valeurs des paramètres A, B et n dans le cas d'une paroi verticale.

AUTEURS	A	B	n
NUSSELT & JURGES			
$v \leq 5$ (m/s)	5.8	4.1	1
$v > 5$ (m/s)	0	7.3	0.78
STURROCK	11.4	5.7	1
FERRIES	2.5	3.5	1
KIMURA			
paroi au vent			
$v \leq 2$ (m/s)	0	8	0.605
$v > 2$ (m/s)	0	12.23	1
LARET			
$v \leq 1$ (m/s)	0	2	1
$v > 1$ (m/s)	2	4	1
CROISET	3.1	4.1	0.605
ITO [44]			
Paroi au vent			
$v \leq 2$ (m/s)	11.7	0.3	1
$2 < v < 8$ (m/s)	6.7	2.8	1
$v > 2$ (m/s)	15	1.8	1
CRANK [45]	5.7	3.8	1

Nous présentons les Profils du coefficient h construits à partir du tableau ci-dessus.

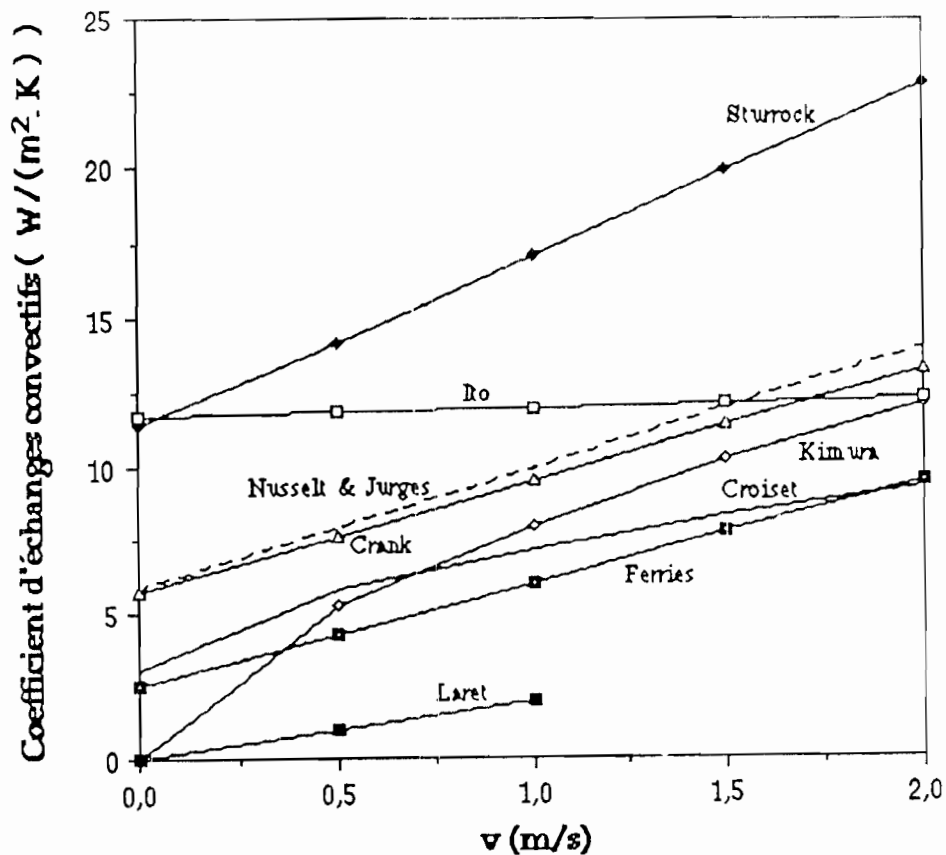


Figure 1.9 : Profils du coefficient convectif h pour une vitesse du fluide $v \leq 2$ (m/s)

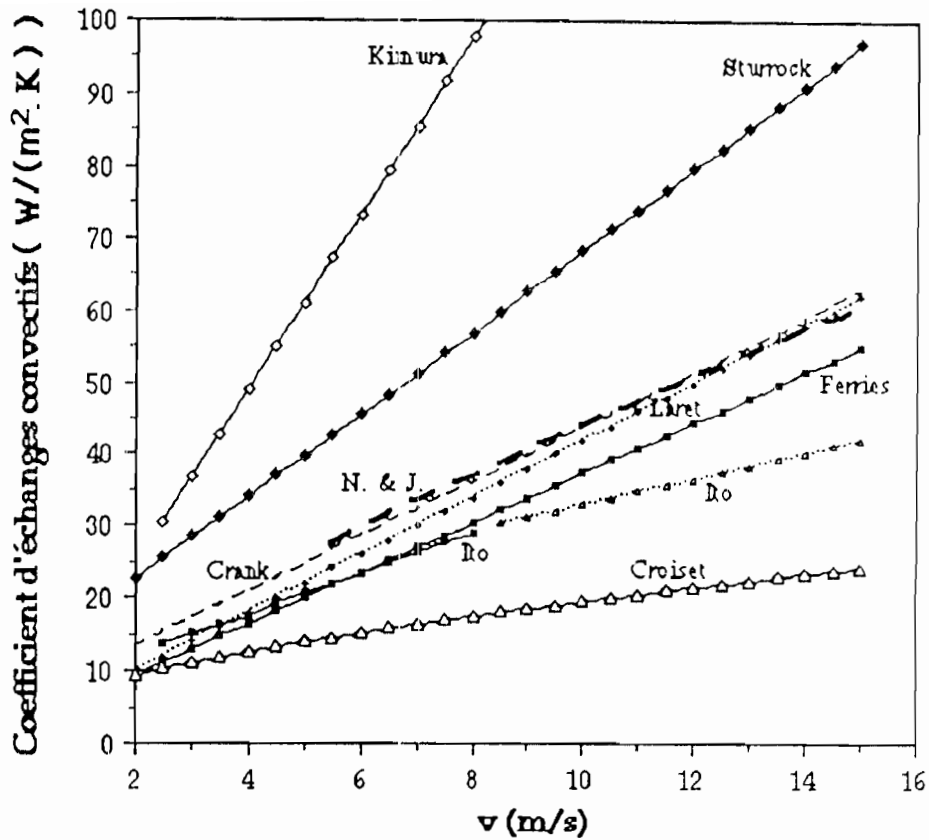


Figure 1.10 : Profils du coefficient convectif h pour une vitesse du fluide $v > 2$ (m/s)

Nous pouvons remarquer sur les figures 1.9 et 1.10, que les résultats du coefficient h obtenus par les Auteurs cités sont très différents.

- MAC ADAMS [46] a établi l'expression permettant d'évaluer le coefficient h en tenant compte des températures de la paroi T_p , du fluide (au loin de la paroi) T_∞ et de la vitesse du vent :

$$h = \left[1,5 - 0,003 \frac{T_p + T_\infty}{2} \right] \sqrt[3]{T_p - T_\infty} + 3,5.v \quad (I.29)$$

- Le groupe de coordination des textes techniques (Document Technique Unifié "D.T.U") [47] adopte la valeur suivante du coefficient d'échange par convection à l'extérieur d'un mur :

$$h = 16,7 \quad (I.30)$$

I.3.4. Méthodes des abaques

Par utilisation des variables réduites (variables adimensionnelles), des abaques ont été élaborés à partir d'expériences et d'expressions empiriques [25].

Le coefficient de convection h est lié à la variable réduite de NUSSELT (Nu) par une corrélation empirique de type [48] :

$$Nu(v, \Delta T, Gr, Re, Pr) = \frac{\Delta \phi}{\Delta T} = \frac{h.D}{\lambda} \quad (I.32)$$

où : v : vitesse du vent ; Gr : nombre de Grashoff ; Re : nombre de Reynolds ;
 Pr : nombre de Prandtl ; ΔT : Différence de température entre la paroi et le fluide ; D : Dimension caractéristique de l'échantillon.

La variable réduite $Nu(v, \Delta T, Gr, Re, Pr)$ dépend de l'expérimentation, de la géométrie et de l'état de la surface d'échange et des caractéristiques de l'écoulement du fluide environnant.

De cette corrélation est déduit le coefficient d'échange h qui s'exprime :

$$h = f(Nu) = \frac{\lambda}{D} Nu(v, \Delta T, Gr, Re, Pr) \quad (I.33)$$

I.3.5. Remarque sur les méthodes de mesure du coefficient d'échanges thermiques

La diversité des valeurs de coefficients d'échanges convectifs h montre que toutes ces méthodes restent tributaires des conditions d'expérimentales.

I.4. CONCLUSION

L'étude bibliographique montre que les principales méthodes de détermination des coefficients de diffusivité se classent en deux groupes : les méthodes utilisant la technique du régime dynamique fréquentiel et celles utilisant la technique du régime dynamique transitoire. Les méthodes de détermination des coefficients d'échanges thermiques se classent en trois groupes : les méthodes basées sur le régime permanent, celles basées sur le régime transitoire et enfin les méthodes utilisant les corrélations et/ou abaques empiriques.

Les méthodes utilisant les corrélations (abaques) empiriques restent tributaires des conditions d'expérimentation ; ce qui explique la diversité des paramètres empiriques pour le calage des modèles retenus selon l'auteur.

Ces méthodes font une caractérisation de matériaux dans des conditions de laboratoires, où les contraintes de taille de l'échantillon et d'ambiance sont idéales comparativement aux conditions réelles d'exploitation du dispositif tout entier (contenant le matériau) ; ceci peut entraîner à ce que le comportement du matériau au cours de son fonctionnement dans les conditions réelles soit très différent de celui observé au laboratoire.

Chacune des principales méthodes de caractérisation ne permet la détermination que d'un seul des paramètres thermophysiques (α, λ, h). Cela peut s'expliquer par le fait que la détermination de la diffusivité nécessite la connaissance des conditions aux limites de types Fourier, donc la connaissance du coefficient d'échange h . Ces coefficients sont supposés connus ou sont calés à des valeurs élevée [22] à l'aide d'un conditionnement de l'échantillon. De même la détermination des coefficients d'échanges thermiques suppose que la conductivité λ (ou diffusivité α) est connue.

Pourtant, pour un matériau composite (local par exemple), il n'existe a priori aucune information concernant les valeurs des paramètres caractéristiques thermophysiques (α, λ et h). Il se pose alors le besoin de les déterminer.

Pour une meilleure illustration de l'importance des paramètres caractéristiques thermophysiques (α, λ et h), nous allons dans le chapitre suivant, nous intéresser à l'influence sur les transferts de chaleur, (provoquée par leurs variations), en se servant des modèles résistifs.

CHAPITRE II

ETUDE DE L'INFLUENCE DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

II.1. INTRODUCTION

Après l'étude bibliographique faisant ressortir la nécessité d'une meilleure connaissance des paramètres thermophysiques, nous allons nous intéresser à l'étude de l'influence des paramètres caractéristiques thermophysiques (α , λ et h) sur les transferts de chaleur. Nous nous servirons de modèles résistifs et étudierons les profils du flux de chaleur et de la températures obtenus à partir de ces modèles.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la modélisation et à l'étude en régime permanent, de la conduction monodimensionnelle de chaleur dans un mur plan (mur de longueur et hauteur très grandes comparativement à son épaisseur).

Compte tenu de l'analogie entre les phénomènes thermique et électrique, nous déterminons, à l'aide de la solution de l'équation de conduction de chaleur, les modèles résistifs équivalents du mur plan, correspondant aux différents types de conditions aux limites.

Après quelques rappels sur les notions de thermique, nous écrivons l'équation de la conduction monodimensionnelle de la chaleur. Ensuite, partant de la solution de cette équation munie des conditions aux limites, nous déterminons les modèles résistifs équivalents correspondant.

Nous considérons séparément deux cas :

- un mur sans source ni puits interne de chaleur ($P_s=0$ et $P_p=0$);
- un mur avec source interne de chaleur ($P_s \neq 0$ et $P_p=0$).

II.2. RAPPELS

Les rappels que nous donnons concernent les notions, de la loi de Fourier, de conductivité thermique, de diffusivité, de flux thermique et enfin de densité de flux thermique.

II.2.1. Loi de Fourier

Soit un milieu continu homogène (même caractéristiques thermophysiques) et isotrope (caractéristiques thermophysiques du matériau constantes dans toutes les directions) et immobile, de température non uniforme et thermiquement isolé (Fig. 2.1).

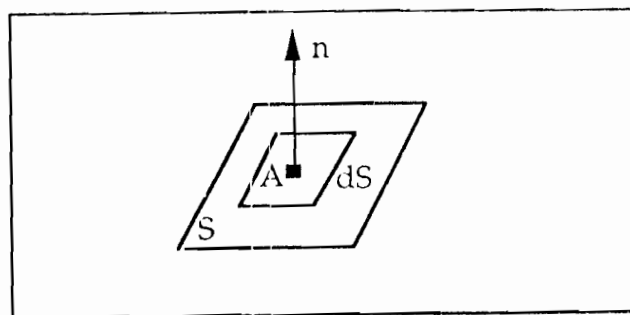


Figure 2.1 : Élément de surface isotherme

La loi fondamentale (loi de Fourier) exprime qu'une surface isotherme S de température T est traversée dans la direction n et durant l'intervalle de temps dt par la quantité de chaleur dQ qui s'exprime par :

$$dQ = -\lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial n} dt \quad (\text{II.1})$$

où : $\frac{\partial T}{\partial n}$ désigne le gradient de température dans la direction normale à la surface S au point A (vecteur orienté dans le sens des températures décroissantes)

λ : définit la conductivité thermique du milieu au point A considéré.

II.2.2. Conductivité thermique

En général la conductivité λ est une fonction de la température, de la direction (anisotropie) et d'espace (homogénéité). Dans le cas des matériaux anisotropes mais homogènes comme par exemple le bois, l'opérateur λ est un tenseur du second ordre composé de plusieurs coefficients de conductivités λ_{ij} avec $i, j=1,2,3$. Le milieu est dit orthotrope lorsque les coefficients λ_{ij} se réduisent au nombre de trois ($\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$) correspondant chacun à une direction qui est perpendiculaire aux deux autres. Pour les matériaux homogènes et isotropes, les vecteurs de flux et de gradient de température ont une même direction ; ils sont orthogonaux à la surface isotherme sur laquelle se trouve le point A considéré. L'opérateur λ correspond alors à un tenseur sphérique et donc entièrement défini par une grandeur scalaire positive λ appelée coefficient de conductivité thermique.

La loi de Fourier s'écrit dans ce cas s'écrit :

$$dQ = -\lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial n} dt \quad (\text{II.2})$$

II.2.3. Flux et densité de flux thermique

Le **flux thermique** Φ est la puissance échangée par la surface S :

$$\Phi = \frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II.3})$$

La **densité de flux thermique** φ est la puissance échangée par unité de surface S :

$$\varphi = \frac{\partial Q}{S \cdot \partial t} = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II.4})$$

Pour une surface S de normale unitaire \vec{n} (Fig. 2.1), le flux thermique Φ peut s'exprimer par:

$$\Phi = \varphi \cdot \vec{n} \cdot S = -\lambda \cdot \vec{n} \cdot \text{grad } T \quad (\text{II.5})$$

II.2.4. Analogie entre les phénomènes thermique et électrique

Les bases théoriques des méthodes de l'analogie électrique reposent sur la similitude des processus de conduction thermique et électrique. Les champs de conduction en régime permanent peuvent être considérés sans ambiguïté comme relevant des mêmes processus : vecteur champ thermique et vecteur champ électrique dérivent bien tous les deux d'un potentiel scalaire (respectivement la température et le potentiel électrique) et les

équations phénoménologiques des deux processus étant identiques, l'analogie est légitime. Les expressions correspondantes de cette analogie sont données dans le tableau 2 ci-dessous.

Tableau 2 : Expressions correspondantes de l'analogie thermique/électrique

Equations et grandeurs	Phénomène Thermique	Phénomène Electrique
Quantité de chaleur / Charge électrique	Q_t	Q_e
Potentiel : Electrique / thermique	T	E
Equation général	$\Delta T = 0$	$\Delta E = 0$
Densité de : courant / Flux	$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \vec{\text{grad}} T$	$\vec{J} = -\gamma \cdot \vec{\text{grad}} E$
Flux / courant	$\Phi = \varphi S$ $\Phi = \frac{\partial Q_t}{\partial t}$	$I = J \cdot S$ $I = \frac{\partial Q_e}{\partial t}$
Conductivité	λ	γ
Résistance :	$R_t = L / (\lambda \cdot S)$	$R_e = L / (\gamma \cdot S)$
Conductance	$G_t = (\lambda \cdot S / L)$	$R_e = (\gamma \cdot S / L)$
Lois d'Ohm (pour un tronçon a - b)	$T_a - T_b = R_{tab} \cdot \Phi_{ab}$	$E_a - E_b = R_{eab} \cdot I_{ab}$
Lois de Kirchhoff :		
* 1ère loi	$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n I_i = 0$
* 2ème loi	$\sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i=1}^n R_{ti} \cdot \Phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n E_i + \sum_{i=1}^n R_{ei} \cdot I_i = 0$
Capacité	$C_t = \rho \cdot V \cdot C$	$C_e = \rho \cdot V \cdot c$
Constante de temps	$\tau_t = 1 / (R_t \cdot C_t)$	$\tau_e = 1 / (R_e \cdot C_e)$

II.3. EQUATION DE CONDUCTION MONODIMENSIONNELLE DE LA CHALEUR (MUR PLAN)

Pour écrire l'équation de conduction, nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèses de travail

- la conduction de chaleur est monodimensionnelle ;
- le mur plan est homogène et isotrope ($\lambda = \text{Cte}$) ;
- l'influence des variations de température sur les valeurs de la capacité thermique $\rho \cdot C$ et de la conductivité λ est négligeable.

Soient deux surfaces planes (Fig. 2.2) infinies isothermes S_x et S_{x+dx} de températures respectives T_{xs} et T_{xs+dx} et traversées par les flux thermiques respectifs Φ_x et Φ_{x+dx} .

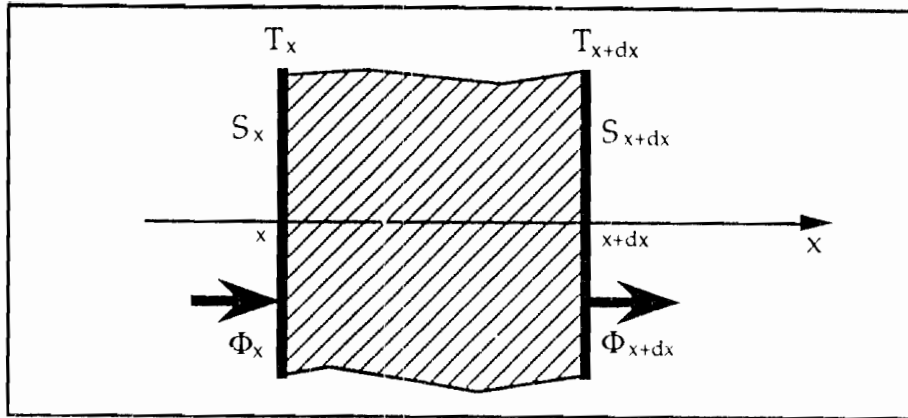


Figure 2.2 : Mur plan

Le bilan d'énergie pendant l'intervalle de temps dt s'écrit .

$$(\Phi_x - \Phi_{x+dx}) dt + P_s \cdot S \cdot dx \cdot dt - P_p \cdot S \cdot dx \cdot dt = \rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} S \cdot dx \cdot dt \quad (II.6)$$

où : $S = S_x = S_{x+dx}$: surface des parois avant (x) et arrière ($x+dx$)

P_s, P_p : respectivement, source et puits de chaleur par unité de volume

ρ, C : masse volumique et chaleur spécifique respectivement

La relation résultant du bilan peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Phi_{x+dx} - \Phi_x}{dx} - P_s \cdot S + P_p \cdot S = - \rho \cdot C \cdot S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II.7)$$

Par application du théorème des accroissements finis limité à la première dérivée spatiale, le terme $(\Phi_{x+dx} - \Phi_x)/dx$ peut être transformé en différentielle partielle $\partial\Phi/\partial x$.

Ainsi l'équation monodimensionnelle de la chaleur sous sa forme différentielle est exprimée par :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} - P_s \cdot S + P_p \cdot S = - \rho \cdot C \cdot S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II.8)$$

En tenant compte de la relation (II.3), la dernière expression devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[- \lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial x} \right] - P_s \cdot S + P_p \cdot S = - \rho \cdot C \cdot S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II.9)$$

En régime stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, l'équation (II.9) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[- \lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial x} \right] - P_s \cdot S + P_p \cdot S = 0 \quad (II.10)$$

II.3.1. Diffusivité thermique

Si nous admettons que les variations de $(\rho \cdot C)$ et λ en fonction de la température sont négligeables $\rho \cdot C = Cte$ et $\lambda = Cte$, l'équation (II.9) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[- \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{P_s}{\lambda} + \frac{P_p}{\lambda} = - \frac{\rho \cdot C}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II.11)$$

Le rapport $(\rho.C/\lambda)$, souvent noté par " α " ou " a ", représente la diffusivité thermique ; il caractérise la rapidité avec laquelle la chaleur diffuse dans un matériau donné.

II.3.2. Conditions aux limites du milieu

La solution (lorsqu'elle existe) de l'équation (II.11) nécessite une précision des conditions initiales et celles aux limites du mur plan. Ces conditions expriment le champ thermique à l'instant $t=0$ et les relations vérifiées par la température et (ou) le gradient de température à la frontière avec le milieu extérieur. Les transferts sur les frontières font intervenir des échanges de chaleur par conduction (entre deux milieux solides), par convection (entre milieu solide et fluide) et enfin par rayonnement de courte longueur d'onde et/ou de grande longueur d'onde (entre solide-solide, solide-fluide et fluide-fluide).

Il existe trois types de conditions aux limites du milieu :

- a) - conditions de températures imposées aux limites (conditions de Dirichlet) ;
- b) - conditions convectives aux surfaces limites (conditions de type Fourier-Neumann) ;
 - conditions radiatives aux surfaces (conditions de type Fourier - Neumann) .
- c) - conditions mixtes (convectives et radiatives).

II.4. MODELES ELECTRIQUES EQUIVALENTS AU MUR PLAN SANS SOURCE NI PUIITS THERMIQUES INTERNES ($P_s=P_p=0$)

Pour un mur plan sans source ni puits thermiques internes, l'équation (II.11) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\lambda.S \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{II.12})$$

Les modèles résistifs équivalents au mur plan, sans source ni puits thermiques internes, sont déduits de la solution de l'équation (II.12) pour un type défini de conditions aux limites.

Pour chacun des trois types de conditions aux limites, nous déterminons donc le modèle résistif équivalent correspondant.

II.4.1. Modèle résistif du mur avec des températures imposées aux limites

Pour des raisons de contraintes expérimentales, la maîtrise du flux de chaleur traversant le mur plan exige à ce que l'on impose à ses limites des températures régulées (maintenues constantes de façon automatique).

Considérons un mur plan (Fig. 2.3) d'épaisseur (x_L-x_0) et dont les températures des faces T_{p1} et T_{p2} sont constantes (imposées).

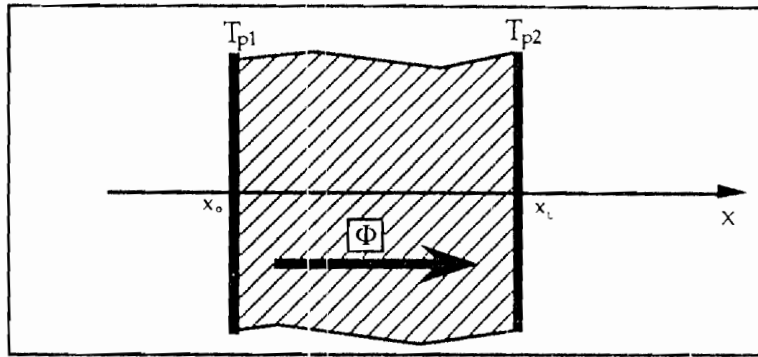


Figure 2.3 : Mur plan avec des températures imposées aux limites

Réolvons l'équation (II.12) munie des conditions aux limites (Fig. 2.3) suivantes :

$$T(x_0) = T_{p1} \quad \text{et} \quad T(x_L) = T_{p2}$$

où : T_{p1} : est la température imposée à la face avant ($x=x_0$)

T_{p2} : est la température imposée à la face arrière ($x=x_L$)

De l'équation (II.12), nous avons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

Alors :

$$\Phi = \text{Cte} = -\lambda.S \frac{\partial T}{\partial x}$$

En passant des différentielles partielles aux différentielles totales il vient :

$$-dT = \frac{\Phi}{\lambda.S} dx \tag{II.13}$$

En intégrant nous obtenons :

$$-\int_{T_{p1}}^{T_{xs}} dT = \int_{x_0}^x \frac{\Phi}{\lambda.S} dx$$

Ainsi nous avons :

$$\Delta T(x) = T_{p1} - T_{xs} = \frac{\Phi}{\lambda.S} (x - x_0) \tag{II.14}$$

De l'équation (II.14), le flux Φ peut être déterminé pour $x=x_L$ et $T(x_L)=T_{p2}$:

$$\Phi = \lambda.S \frac{(T_{p1} - T_{p2})}{(x_L - x_0)} \tag{II.15}$$

La température T_{xs} (voir Fig. 2.3) pour un point situé à une distance x de l'origine (x_0) a pour expression :

$$T_{xs} = T(x) = -\frac{\Phi}{\lambda.S} (x - x_0) + T_{p1} \tag{II.16}$$

En remplaçant le flux Φ par son expression (II.15), la relation (II.16) devient :

$$T_{xs} = T(x) = -\frac{(x - x_0)}{(x_L - x_0)} (T_{p1} - T_{p2}) + T_{p1} \tag{II.17}$$

L'équation (II.16) peut également se mettre sous la forme :

$$\Delta T(x) = T_{p1} - T_{xs} = R(x) \cdot \Phi \quad (\text{II.18})$$

où $R(x)$ est la **résistance thermique de conduction** exprimée par :

$$R = R(x) = \frac{1}{\lambda \cdot S} (x - x_0) \quad (\text{II.19})$$

A l'aide de la **loi d'Ohm thermique** la relation (II.15) peut s'écrire :

$$\Delta T(x_L) = T_{p1} - T_{p2} = R(x_L) \cdot \Phi = R \cdot \Phi \quad (\text{II.20})$$

où $R(x_L)$ est la **résistance thermique de conduction** du mur d'épaisseur x_L , exprimée par :

$$R = R(x_L) = \frac{1}{\lambda \cdot S} (x_L - x_0) \quad (\text{II.21})$$

De cette expression, nous déduisons le modèle résistif équivalent au mur dont les deux faces sont à des températures imposées (Fig. 2.4).

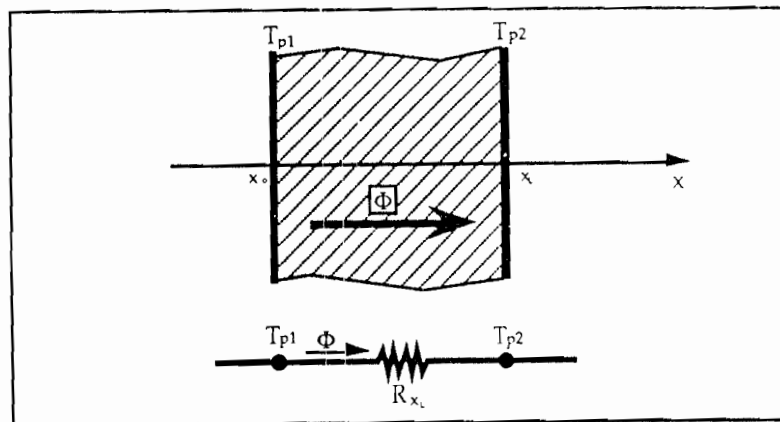


Figure 2.4 : Modèle résistif du mur plan avec des températures imposées aux limites

Résistance thermique linéique :

Considérons la résistance thermique $R(x)$ définie par le relation (II.19). En prenant la différentielle il vient (λ et S étant des constantes) :

$$dR = \frac{1}{\lambda \cdot S} dx \quad (\text{II.22})$$

La résistance linéique R_0 est définie par :

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{\lambda \cdot S} = R_0 \quad (\text{II.23})$$

Connaissant la résistance par unité de longueur (résistance linéique R_0), nous pouvons discrétiser le modèle résistif équivalent au mur (Fig. 2.4), en modèles élémentaires (Fig. 2.5).

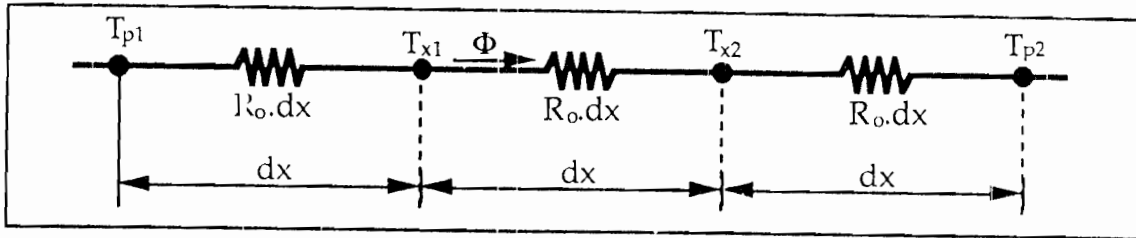


Figure 2.5 : Modèle résistif discrétisé du mur plan avec des températures imposées aux limites

II.4.2. Profils du flux de chaleur en fonction de λ (conditions aux limites type Dirichlet)

Les profils du flux Φ sont obtenus à partir de l'équation (II.15).

La figure 2.6 représente le flux $\Phi(\lambda)$ de chaleur traversant le mur pour les valeurs : $x_L=0.1\text{m}$; $T_{p1}=(25 ; 30 \text{ et } 40)^\circ\text{C}$; $T_{p2}=25^\circ\text{C}$; $S=1 \text{ m}^2$.

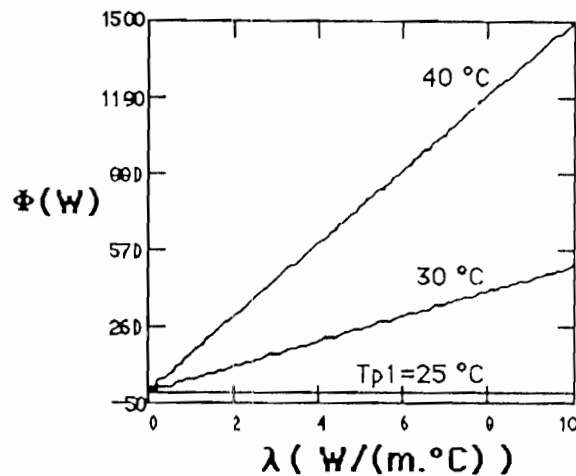


Figure 2.6 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de $T_{p1}=(25 ; 30 \text{ et } 40)^\circ\text{C}$

Nous constatons que le flux de chaleur traversant l'épaisseur du mur, croit de façon linéaire avec la conductivité λ pour $T_{p1} > T_{p2}$. Le flux varie de 0 (pour $\lambda=0$) à 1500 W ($\lambda=10 \text{ W}/(\text{m}.\text{°C})$ et $T_{p1}=40^\circ\text{C}$).

Pour le cas $T_{p1} = T_{p2}$ le flux Φ est nul quelque soit la valeur de λ .

La figure 2.7 représente le flux $\Phi(\lambda)$ de chaleur traversant le mur pour les valeurs : $x_L=0.1 \text{ m}$; $T_{p1}=30^\circ\text{C}$; $T_{p2}=(25;30;35;50)^\circ\text{C}$; $S=1 \text{ m}^2$.

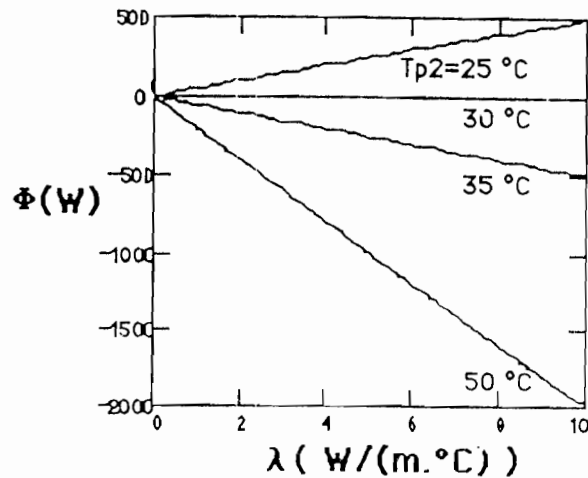


Figure 2.7 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de T_{p2} (25 ; 30 ; 35 et 50)°C

Nous remarquons que pour $T_{p1} > T_{p2}$, le flux est positif ($\Phi(\lambda) > 0$) et $T_{p1} < T_{p2}$, le flux est négatif ($\Phi(\lambda) < 0$). En effet le signe du flux indique le sens du transfert de chaleur.

Ainsi nous avons :

- $\Phi(\lambda) > 0$: pour un transfert de chaleur de la première face vers la deuxième
- $\Phi(\lambda) < 0$: pour un transfert de chaleur de la deuxième face vers la première

II.4.3. Modèle résistif du mur avec des conditions convectives aux limites

Imposer une température sur une paroi nécessite une régulation automatique qui peut être complexe selon le dispositif et la précision exigée. Dans la réalité, le mur est en interaction avec l'ambiance dans laquelle il baigne. Ces interactions se traduisent par des échanges de chaleur qui s'effectuent de manière à ce que l'ensemble soit thermiquement équilibré. Considérons un mur plan (Fig. 2.8).

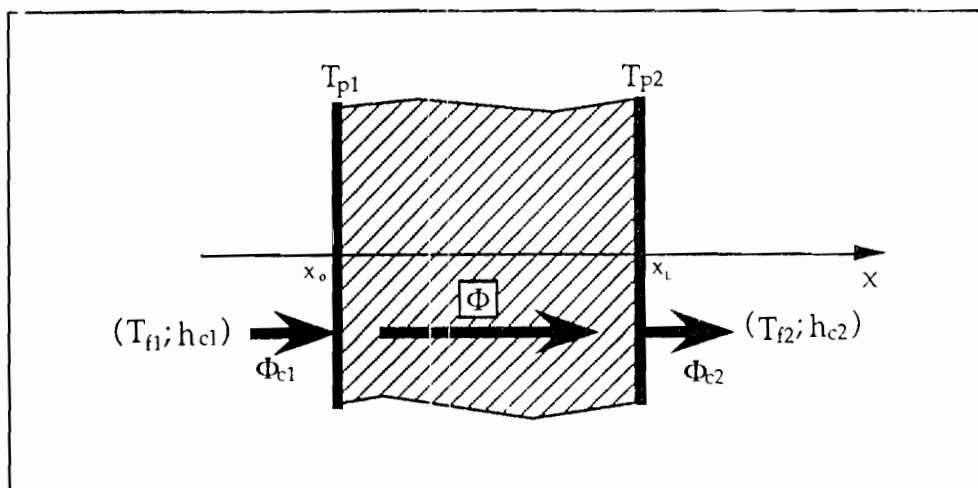


Figure 2.8 : Mur plan avec des conditions convectives aux limites

Le bilan thermique du mur (Fig. 2.8) conduit à l'expression suivante :

$$\Phi_{c1} = \Phi_{c2}$$

$$\Phi_{c1} = \Phi_{c2}$$

Le flux convectif Φ_{c1} sur la première paroi (face avant) T_{p1} a pour expression [25] :

$$\Phi_{c1} = h_{c1} \cdot S (T_{f1} - T_{p1}) \quad (\text{II.24})$$

où h_{c1} : coefficient de convection sur la première paroi (face avant)

T_{f1} : température du fluide en contact avec la première paroi

T_{p1} : température de la première paroi

La relation (II.24) s'écrit :

$$(T_{f1} - T_{p1}) = \frac{1}{h_{c1} \cdot S} \Phi_{c1} = R_{c1} \cdot \Phi_{c1} \quad (\text{II.25})$$

où R_{c1} est la résistance thermique de convection de la première paroi :

$$R_{c1} = \frac{1}{h_{c1} \cdot S} \quad (\text{II.26})$$

Le flux convectif Φ_{c2} sur la deuxième paroi (face arrière) T_{p2} a pour expression :

$$\Phi_{c2} = h_{c2} \cdot S (T_{p2} - T_{f2}) \quad (\text{II.27})$$

où h_{c2} : coefficient de convection sur la deuxième paroi (face arrière)

T_{f2} : température du fluide en contact avec la deuxième paroi

T_{p2} : température de la deuxième paroi

L'expression (II.27) s'écrit :

$$(T_{p2} - T_{f2}) = \frac{1}{h_{c2} \cdot S} \Phi_{c2} = R_{c2} \cdot \Phi_{c2} \quad (\text{II.28})$$

où : R_{c2} est la résistance thermique de convection de la deuxième paroi :

$$R_{c2} = \frac{1}{h_{c2} \cdot S} \quad (\text{II.29})$$

Le flux de conduction du mur est donné par (II.20) :

$$\Phi = \frac{1}{R} (T_{p1} - T_{p2}) \quad (\text{II.30})$$

d'où :

$$T_{p1} - T_{p2} = R \cdot \Phi$$

D'autre part les bilans thermiques sur chacune des parois s'écrit :

paroi 1 : $\Phi_{c1} = \Phi$

paroi 2 : $\Phi = \Phi_{c2}$

Ces deux dernières relations conduisent à l'égalité :

$$\Phi_{c1} = \Phi = \Phi_{c2} \quad (\text{II.31})$$

Ainsi :

$$(T_{f1} - T_{p1}) = R_{c1} \cdot \Phi$$

$$(T_{p1} - T_{p2}) = R \cdot \Phi$$

$$(T_{p2} - T_{f2}) = R_{c2} \cdot \Phi$$

La sommation des trois dernières relations donnent l'expression suivante :

$$(T_{f1} - T_{f2}) = (R_{c1} + R + R_{c2}) \Phi = \Sigma R \cdot \Phi \quad (II.32)$$

De la relation (II.32) le flux Φ peut être exprimé par :

$$\Phi = \frac{(T_{f1} - T_{f2})}{(R_{c1} + R + R_{c2})} = \frac{S \cdot (T_{f1} - T_{f2})}{\left[\frac{1}{h_{c1}} + \frac{x_l}{\lambda} + \frac{1}{h_{c2}} \right]} \quad (II.33)$$

La température T_{xs} (voir Fig. 2.7) pour un point situé à une distance x de l'origine x_0 a pour expression :

$$T(x) = -\frac{1}{S} \left[\frac{1}{h_{c1}} + \frac{x}{\lambda} \right] \Phi + T_{f1} \quad (II.34)$$

En remplaçant le flux Φ par l'expression (II.33) nous aurons :

$$T(x) = -\frac{\left[\frac{1}{h_{c1}} + \frac{x}{\lambda} \right]}{\left[\frac{1}{h_{c1}} + \frac{x_l}{\lambda} + \frac{1}{h_{c2}} \right]} (T_{f1} - T_{f2}) + T_{f1} \quad (II.35)$$

La relation (II.32) est analogue à la loi d'Ohm pour un tronçon comportant trois résistances en série. Ainsi le modèle résistif équivalent au mur (Fig. 2.9) avec les conditions aux limites convectives se présente comme un circuit résistif comprenant trois résistances en série.

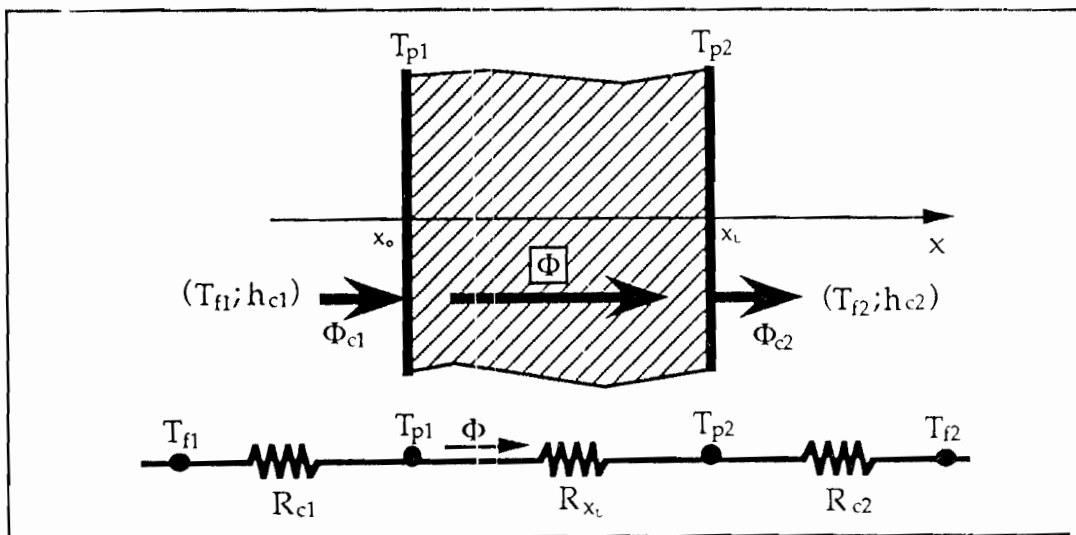


Figure 2.9 : Modèle résistif du mur plan avec des conditions convectives aux limites

II.4.4. Profils du flux de chaleur et de la température en fonction de λ et h (conditions aux limites type Neumann-Fourier)

Les profils du flux Φ et de la température T sont tracés à partir des équations (II.33) et (II.35).

La figure 2.10 représente le flux $\Phi(\lambda)$ de chaleur traversant le mur pour les valeurs : $x_L=0.1$ m ; $h_{c1}=h_{c2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty)$ W/(m².°C), $T_{f1} = 30^\circ\text{C}$, $T_{f2} = 25^\circ\text{C}$; $S=1$ m².

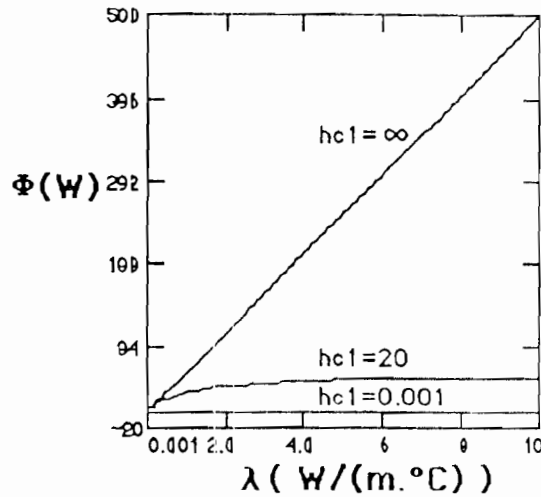


Figure 2.10 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs des coefficients $h_{c1}=h_{c2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty)$ W/(m².°C)

Nous remarquons :

- pour $h_{c1}=h_{c2}=0.001$ W/(m².°C), le flux Φ de chaleur traversant l'épaisseur du mur est nul ;
- pour $h_{c1}=h_{c2}=\infty$ W/(m².°C), le flux Φ de chaleur est linéaire par rapport à λ ;
- pour $0.001 < (h_{c1}=h_{c2}) < \infty$, la variation du flux Φ avec λ , passe progressivement de l'allure parabolique à celle d'une droite (pour $h_{c1}=h_{c2}$ très grands).

La figure 2.11 représente le flux $\Phi(h_{c1})$ de chaleur pour les valeurs : $x_L=0.1$ m ; $h_{c2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty)$ W/(m².°C), $T_{f1} = 30^\circ\text{C}$, $T_{f2} = 25^\circ\text{C}$; $S=1$ m².

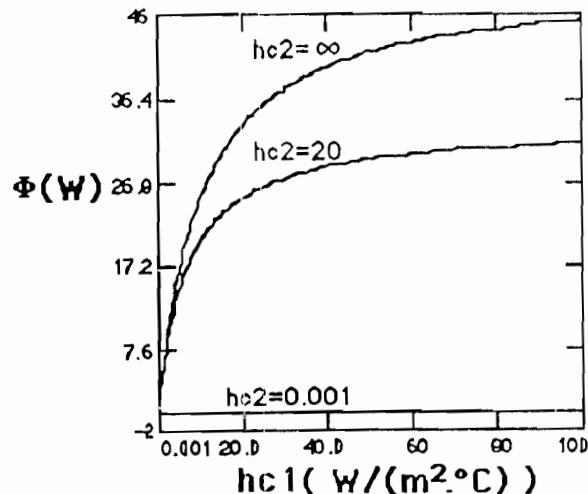


Figure 2.11 : Profil du flux $\Phi(h_{c1})$ en fonction de h_{c1} pour différentes valeurs de $h_{c2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty)$ W/(m².°C)

Nous remarquons :

- pour $h_{c2}=0.001 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{°C})$, le flux $\Phi(h_{c1})=Cte=0$ quelque soit la valeur du coefficient d'échange h_{c1} ;
- pour $0.001 < h_{c2} \leq \infty$, le flux $\Phi(h_{c1})$ à l'allure d'une parabole qui tend asymptotiquement vers une valeur constante ; Cela s'explique par le fait pour une valeur donnée du coefficient d'échange h , les températures des parois T_{p1} et T_{p2} sont constantes et dans ce cas le flux traversant l'épaisseur du mur est constant.

Nous constatons également que plus les pertes convectives de chaleur sur la paroi 2 sont importantes (grandes valeurs de h_{c1}), plus le flux de chaleur traversant l'épaisseur du mur est important.

La figure 2.12 représente la température $T(\lambda)$ en fonction de la conductivité thermique du mur pour les valeurs : $x= (0 ; 0.03 ; 0.05 ; 0.08 \text{ et } 0.1) \text{ m}$; $x_L=0.1 \text{ m}$; $h_{c1}=h_{c2}=20 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{°C})$, $T_{f1} = 30\text{°C}$, $T_{f2} = 25\text{°C}$; $S=1\text{m}^2$.

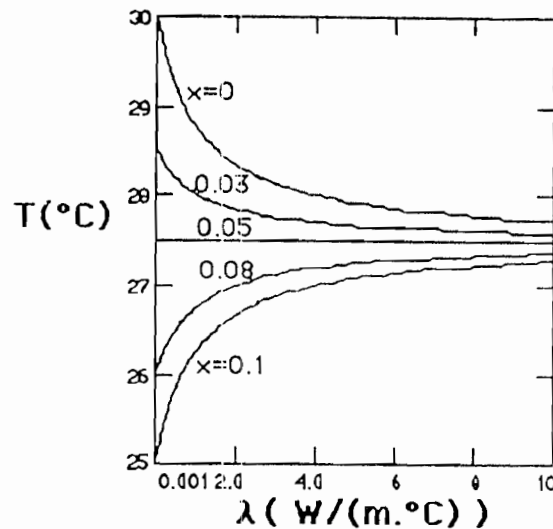


Figure 2.12 : Profil de la température $T(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs de la profondeur $x= (0 ; 3 ; 5 ; 8 \text{ et } 10) \text{ cm}$

De la figure 2.12 nous constatons que lorsque la conductivité λ augmente :

- la température décroît de 30°C vers la valeur moyenne 27.5°C pour l'épaisseur $x < x_L / 2$;
- la température croît de 25°C vers la valeur moyenne 27.5°C pour l'épaisseur $x > x_L / 2$;
- la température est constante $T(\lambda) = 25\text{°C}$ pour l'épaisseur $x = x_L / 2$;

En effet plus le matériau est bon conducteur de chaleur (grandes valeur de λ), plus cette dernière diffuse des zones chaudes ($T_{f1}=30\text{°C}$) vers celles moins chaudes ($T_{f2}=25\text{°C}$) ce qui explique la croissance ou la décroissance de la température $T(\lambda)$.

La figure 2.13 représente la température $T(h_{c1})$ en fonction du coefficient d'échange h_{c1} pour les valeurs : $x=0 \text{ cm}$; $x_L=0.1 \text{ m}$; $h_{c2}=(0.001 ; 1 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2.\text{°C})$, $T_{f1} = 30\text{°C}$; $T_{f2} = 25\text{°C}$; $S=1\text{m}^2$.

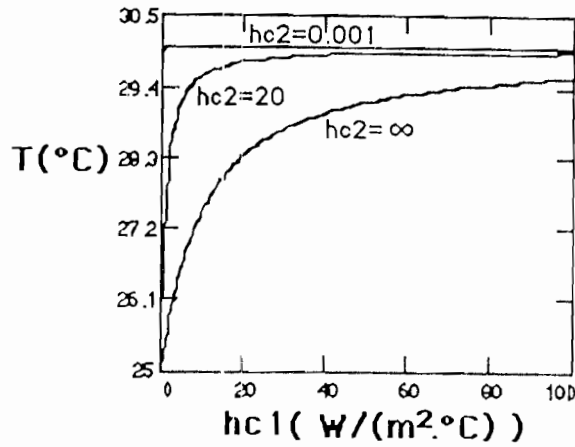


Figure 2.13 : Profil de la température $T(h_{c1})$ en fonction du coefficient d'échange h_{c1} pour différentes valeurs de $h_{c2}=(0.001 ; 1 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Plus la valeur du coefficient h_{c1} est élevée, plus les transferts de chaleur entre le fluide à T_{f1} et la paroi 1 sont importants. Pour une valeurs donnée de h_{c1} , la température de la paroi T_{p1} tend vers celle du fluide T_{f1} , et cela d'autant plus rapidement qu'il y a moins de pertes sur la paroi 2 (petites valeurs de h_{c2}).

II.4.5. Modèle résistif du mur avec des conditions convectives et radiatives aux limites

Les interactions entre le mur et son environnement se manifestent par des échanges thermiques due soit au transport de masse (convection) soit au transport d'énergie électromagnétique (radiation) de grande longueur d'onde (GLO) et/ou de courte longueur d'onde (CLO), soit enfin par la combinaison des deux types de transport (cas réel fréquent) : convection et radiation. Dans ce paragraphe nous développons le derniers cas.

Soit le mur plan représenté par la figure 2.14, où la paroi 1 reçoit les flux convectif et radiatif.

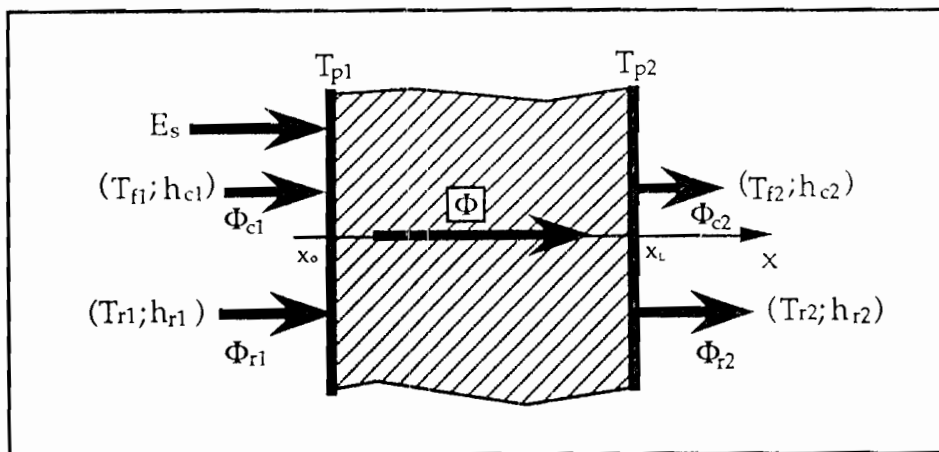


Figure 2.14 : Mur plan avec des conditions convectives et radiatives aux limites

Les bilans thermiques sur chacune des parois s'écrit :

paroi 1 :
$$\Phi_S + \Phi_{c1} + \Phi_{r1} = \Phi \tag{II.36}$$

où : Φ_S flux solaire rayonnement de courte longueur d'onde (CLO) dont l'expression est :

avec :

$$\Phi_S = S_p \cdot k \cdot E_S$$

paroi 2 :

$$\Phi = \Phi_{c2} + \Phi_{r2} \quad (II.37)$$

Les relations (II.36) et (II.37) permettent d'écrire :

$$\Phi_S + \Phi_{c1} + \Phi_{r1} = \Phi_{c2} + \Phi_{r2} = \Phi \quad (II.38)$$

Les relations (II.36), (II.37) et (II.38) sont analogues à la première loi de KIRCHHOFF (loi des noeuds).

Le flux radiatif a pour expression [49] :

$$\Phi_r = \Phi_{pr} = \sigma \cdot \epsilon_p \cdot \epsilon_r \cdot S_p \cdot F_{pr} (T_p^4 - T_r^4) \quad (II.39)$$

où $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$: constante de STEFAN BOLTZMANN

ϵ_p, ϵ_r : facteurs d'émission de la paroi et du corps rayonnant, respectivement

S_p : surface de la paroi exprimée en m^2

T_p, T_r : températures de la paroi et du corps rayonnant en (K), respectivement

F_{pr} : facteur de forme entre les surfaces p (paroi) et r (rayonnante)

Remarque

L'expression (II.39) montre que le flux radiatif (GLO) est non linéaire par rapport à la température. Dans le but de trouver un modèle simple sous forme de loi d'Ohm thermique ($\Delta T = R \cdot \Phi$), nous allons linéariser la relation (II.39).

Linéarisation du flux radiatif (GLO)

L'expression du flux radiatif (GLO) Φ_r peut être linéarisée par [50] :

$$\Phi_r = \Phi_{pr} = S_p \cdot h_r (T_p - T_r) \quad (II.40)$$

où le coefficient radiatif h_r (analogue au coefficient convectif h_c) a pour expression :

$$h_r = \frac{1}{(T_p - T_r)} \sigma \cdot \epsilon_p \cdot \epsilon_r \cdot S_p \cdot F_{pr} (T_p^4 - T_r^4)$$

Ainsi :

$$(T_p - T_r) = \frac{1}{h_r \cdot S_p} \Phi_r = R_r \cdot \Phi_r \quad (II.41)$$

où : R_r est la **résistance thermique radiative** :

$$R_r = \frac{1}{h_r \cdot S_p} \quad (II.42)$$

Les expressions des différents flux sur la paroi 1 sont alors :

- flux de conduction :

$$\Phi = \frac{(T_{p1} - T_{p2})}{R} \quad (II.43)$$

- flux convectif :

$$\Phi_{c1} = \frac{(T_{f1} - T_{p1})}{R_{c1}} \quad (II.44)$$

- flux radiatif (GLO) :

$$\Phi_{r1} = \frac{(T_{r1} - T_{p1})}{R_{r1}} \quad (II.45)$$

- flux solaire (CLO) :

$$\Phi_S = S_p \cdot k \cdot E_S \quad (II.46)$$

Les expressions des différents flux sur la paroi 2 sont :

- flux convectif :

$$\Phi_{c2} = \frac{(T_{p2} - T_{f2})}{R_{c2}} \quad (II.47)$$

- flux radiatif (GLO) :

$$\Phi_{r2} = \frac{(T_{p2} - T_{r2})}{R_{r2}} \quad (II.48)$$

En tenant compte des expressions des différents flux et des relations (II.36) et (II.37) qui expriment la **loi des nœuds thermiques**, nous pouvons déduire le modèle résistif équivalent au mur plan (Fig. 2.15).

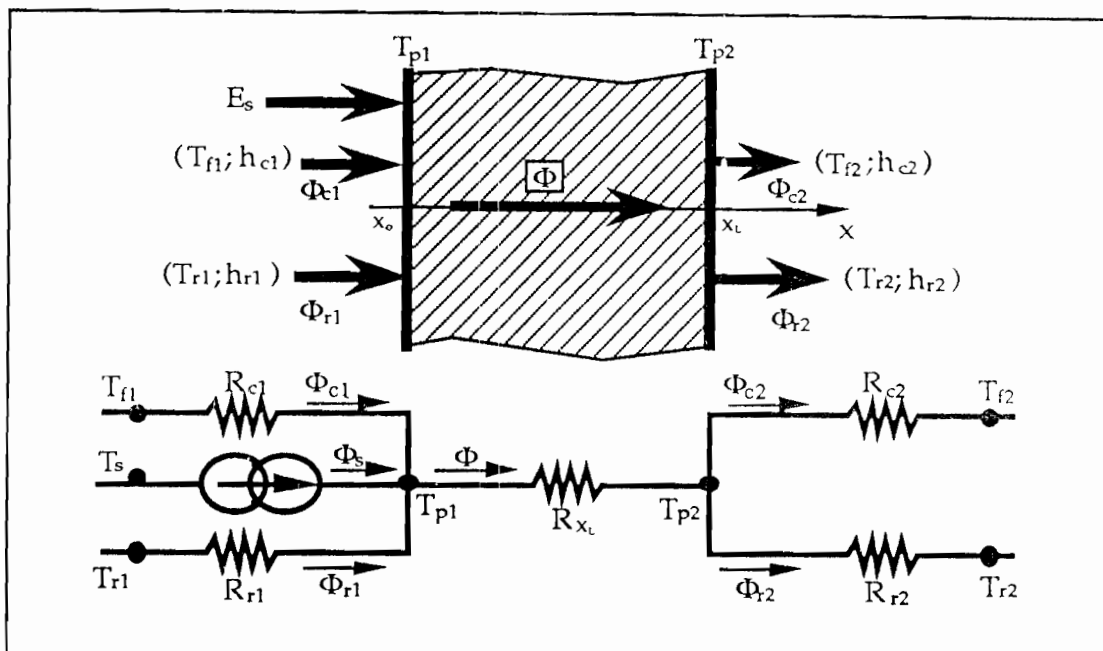


Figure 2.15 : Modèle résistif du mur plan avec des conditions convectives et radiatives aux limites

Remarque

Généralement la température (équivalente) rayonnante de grandes longueurs d'ondes est presque égale à la température du fluide ambiant : $T_{r1} \approx T_{f1}$ et $T_{r2} \approx T_{f2}$.

Dans ce cas nous pouvons écrire :

$$\Phi = \Phi_{c1} + \Phi_{r1} + \Phi_S$$

En remplaçant Φ_{c1} et Φ_{r1} par leur expressions respectives (II.44) et (II.45) nous aurons :

$$\Phi = \frac{(T_{f1} - T_{p1})}{R_{c1}} + \frac{(T_{r1} - T_{p1})}{R_{r1}} + \Phi_S = (T_{f1} - T_{p1}) \left[\frac{1}{R_{c1}} + \frac{1}{R_{r1}} \right] + \Phi_S = \frac{T_{f1} - T_{p1}}{R_{cr1}} + \Phi_S \quad (II.49)$$

soit :

$$\Phi = (T_{f1} - T_{p1})(G_{c1} + G_{r1}) + \Phi_S = G_{cr1} (T_{f1} - T_{p1}) + \Phi_S \quad (II.50)$$

où la conductance thermique équivalente G_{cr1} est déterminée par l'expression :

$$G_{cr1} = \frac{1}{R_{cr1}} = \frac{1}{R_{c1}} + \frac{1}{R_{r1}} = S (h_{c1} + h_{r1}) = S \cdot h_{cr1} \quad (II.51)$$

Alors :

$$R_{cr1} \cdot \Phi_S + T_{fl} - T_{p1} = R_{cr1} \cdot \Phi \quad (II.52)$$

$$(T_{es} - T_{p1}) = R_{cr1} \cdot \Phi \quad (II.53)$$

où T_{es} est la température équivalente solaire exprimée par :

$$T_{es} = R_{cr1} \cdot \Phi_S + T_{fl} = \frac{k \cdot E_S}{h_{cr1}} + T_{fl} \quad (II.54)$$

Ainsi nous avons :

$$(T_{es} - T_{p1}) = R_{cr1} \cdot \Phi$$

$$(T_{p1} - T_{p2}) = R \cdot \Phi$$

$$(T_{p2} - T_{f2}) = R_{cr2} \cdot \Phi$$

La sommation des trois dernières relations donnent l'expression suivante :

$$(T_{es} - T_{f2}) = (R_{cr1} + R + R_{cr2}) \Phi = \Sigma R \cdot \Phi \quad (II.55)$$

A partir de la dernière relation, nous déduisons le modèle résistif équivalent représenté par la figure 2.16.

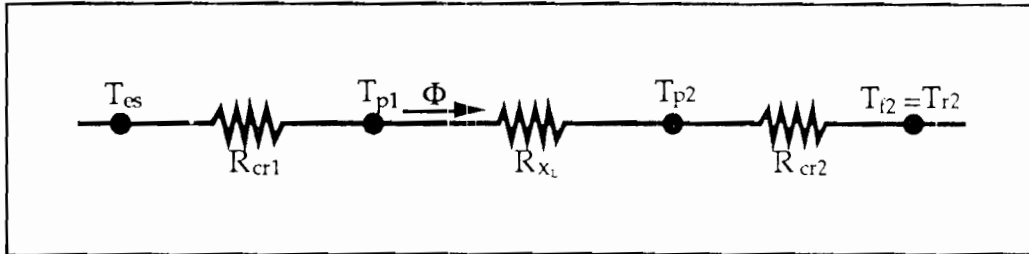


Figure 2.16 : Modèle résistif du mur plan avec des conditions convectives et radiatives aux limites

Le flux Φ dans l'équation (II.52) peut être exprimé par :

$$\Phi = \frac{(T_{es} - T_{f2})}{(R_{cr1} + R + R_{cr2})} = \frac{(T_{es} - T_{f2})}{(1/S) \left[1/(h_{c1} + h_{r1}) + x_L/\lambda + 1/(h_{c2} + h_{r2}) \right]} \quad (II.56)$$

De la loi d'Ohm thermique :

$$\Delta T = T_{es} - T_{xs} = R_{cr1x} \cdot \Phi$$

nous déterminons la température T_{xs} (voir Fig. 2.9) pour un point situé à une distance x de l'origine x_0 par l'expression :

$$T(x) = - R_{cr1x} \cdot \Phi + T_{es} \quad (II.57)$$

$$T(x) = - \frac{1}{S} \left[\frac{1}{h_{c1} + h_{r1}} + \frac{x}{\lambda} \right] \Phi + T_{es} \quad (II.58)$$

$$T(x) = - \frac{\left[1/(h_{c1} + h_{r1}) + x/\lambda \right]}{\left[1/(h_{c1} + h_{r1}) + x_L/\lambda + 1/(h_{c2} + h_{r2}) \right]} (T_{es} - T_{f2}) + T_{es} \quad (II.59)$$

Nous remarquons que pour des températures $T_r \neq T_f$, la linéarisation des transferts de chaleur par rayonnement de grande longueur d'onde (GLO) conduit à l'expression du coefficient d'échanges thermiques global : $h_{gi} = h_{cri} = h_{ci} + h_{ri}$

Cette expression indique que les effets convectifs et radiatifs sont additifs.

II.4.6. Profils du flux de chaleur et de la température en fonction de λ et h (conditions aux limites mixte)

Les profils du flux Φ et de la température T sont obtenus des équations (II.56) et (II.59). La figure 2.17 représente le flux de chaleur $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ du mur pour les valeurs : $h_{r1}=h_{r2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $h_{c1}=h_{c2}=0.001 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $(T_{f1} \neq T_{r1})=30^\circ\text{C}$, $(T_{f2} \neq T_{r2})=25^\circ\text{C}$; $x_L=0.1 \text{ m}$; $S = 1 \text{ m}^2$; $k=0.5$; $E_S=400 \text{ W}/\text{m}^2$.

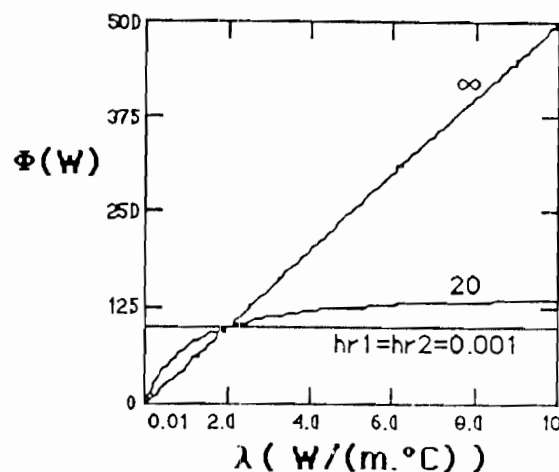


Figure 2.17 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de $h_{r1}=h_{r2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ et $h_{c1}=h_{c2}=0.001 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Lorsque la conductivité augmente, nous voyons sur la figure 2.17 :

- pour $h_{r1}=h_{r2}=0.001 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, le flux de chaleur $\Phi(\lambda) = \text{Cte} = 100 \text{ W}$;
- pour $h_{r1}=h_{r2}=20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, le flux croît rapidement de 0 à 100 W, puis tend lentement vers la valeurs 130 W ;
- pour $h_{r1}=h_{r2}= \infty \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $\Phi(\lambda)$ croît de façon linéaire de 0 à 500 W (pour $\lambda=10 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$).

Pour $\lambda=2 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$, le flux de chaleur $\Phi(\lambda) = \text{Cte} = 100 \text{ W}$, quelque soit les valeurs h_{r1} et h_{r2} . Cela s'explique par la variation simultanée de ces coefficients au numérateur et au dénominateur de l'expression du flux Φ donné par (II.56). En effet, la température T_{es} dépend également du coefficient convectif h_{c1} .

La figure précédente fait ressortir qu'en l'absence de transferts de chaleur convectifs, la contribution des transferts radiatifs dans le bilan thermique des flux traversant l'épaisseur du mur, est importante et loin d'être négligeable.

La figure 2.18 représente le flux de chaleur $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ du mur pour les valeurs : $h_{r1}=h_{r2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$; $h_{c1}=h_{c2}=20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$; $(T_{f1} \neq T_{r1})=30^\circ\text{C}$; $(T_{f2} \neq T_{r2})=25^\circ\text{C}$; $x_L=0.1 \text{ m}$; $S = 1 \text{ m}^2$; $k=0.5$; $E_S=400 \text{ W}/\text{m}^2$.

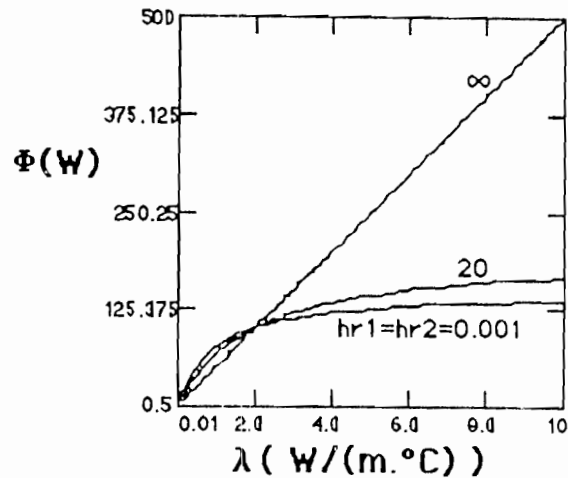


Figure 2.18 : Profil du flux $\Phi(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ , pour différentes valeurs de $h_{r1}=h_{r2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ et $h_{c1}=h_{c2}=20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Nous remarquons sur la figure 2.18 :

- pour $0.001 \leq (h_{r1}=h_{r2}) < \infty \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, le flux de chaleur $\Phi(\lambda)$ croît rapidement pour tendre asymptotiquement vers une valeurs constante ;
- pour $h_{r1}=h_{r2}= \infty \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, le flux croît linéairement de 0 à 500 W (pour $\lambda=1(\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C}))$).

La figure 2.18 montre que même en présence de transferts de chaleur convectifs imporant, la contribution des transferts radiatifs dans le bilan thermique des flux traversant l'épaisseur du mur, reste remarquable et donc non négligeable. Ceci s'explique par les fait que les deux phénomènes (convectif et radiatif) sont additifs.

La figure 2.19 représente le flux de chaleur $\Phi(h_{c1})$ en fonction du coefficient d'échanges radiatifs h_{r2} du mur pour les valeurs : $h_{r2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$; $h_{c1}=h_{c2}=20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $(T_{f1}\#T_{r1})=30^\circ\text{C}$; $(T_{f2}\#T_{r2})= 25^\circ\text{C}$; $\lambda=1 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$; $x_L=0.1 \text{ m}$; $S = 1 \text{ m}^2$; $k=0.5$; $E_S=400 \text{ W}/\text{m}^2$.

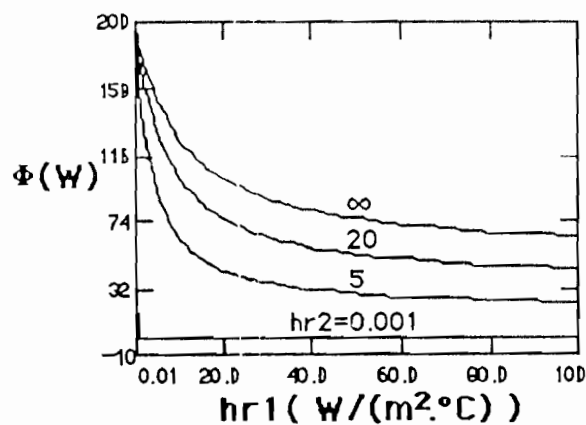


Figure 2.19 : Profil du flux $\Phi(h_{c1})$ en fonction de h_{c1} pour différentes valeurs de $h_{r2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

Quand le coefficient d'échanges radiatifs sur la paroi 1 h_{r1} croit :

- pour $h_{r2}=0.001 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, le flux de chaleur $\Phi(h_{r1}) = 0 \text{ W}$;
- pour $0.001 < h_{r2} \leq \infty \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, le flux $\Phi(h_{r1})$ décroît de 200 W (pour $\lambda=0.01$

$W/(m \cdot ^\circ C)$) vers une valeur constante d'autant plus petite que le coefficient d'échanges radiatifs h_{r2} et faible.

Le flux Φ traversant le mur est relativement important pour les grandes valeurs de h_{r2} ; en effet plus la paroi 2 rayonne, plus le flux Φ est élevé.

La figure 2.20 représente la température $T(\lambda)$ en fonction de la conductivité thermique du mur pour les valeurs : $x = (0 ; 0.5 \text{ et } 0.1) \text{ m}$; $h_{r1} = h_{r2} = h_{c1} = h_{c2} = 20 \text{ W}/(m^2 \cdot ^\circ C)$; $(T_{f1} \# T_{r1}) = 30^\circ C$, $(T_{f2} \# T_{r2}) = 25^\circ C$; $x_L = 0.1 \text{ m}$; $S = 1 m^2$; $k = 0,5$; $E_S = 400 \text{ W}/m^2$.

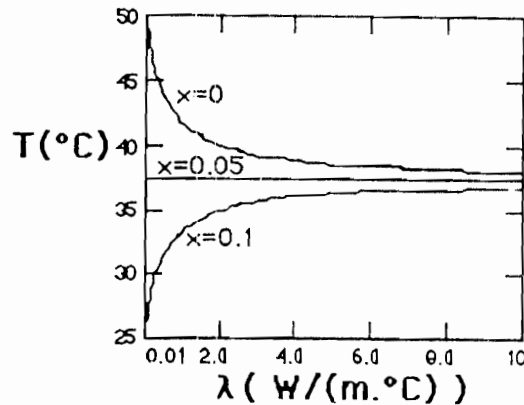


Figure 2.20 : Profil de la température $T(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs de la profondeur $x = (0 ; 5 \text{ et } 10) \text{ cm}$

Lorsque la conductivité λ augmente (voir figure 2.20) :

- la température décroît de $35^\circ C$ vers la valeur moyenne $30^\circ C$ pour l'épaisseur $x < x_L / 2$;
- la température croît de $25^\circ C$ vers la valeur moyenne $30^\circ C$ pour l'épaisseur $x > x_L / 2$;
- la température est constante $T(\lambda) = 30^\circ C$ pour l'épaisseur $x = x_L / 2$;

Nous constatons également que la température de la paroi 1 ($T_{p1} = 35^\circ C$) est plus grande que celle du fluide ($T_{f1} = 30^\circ C$). Ce qui n'est jamais le cas lorsque les transferts radiatifs de chaleur sont nuls. Du fait que $(T_{p1} = 35^\circ C) > (T_{f1} = 30^\circ C)$ est dû donc à l'apport de chaleur par les transferts radiatifs de GLO et CLO.

La figure 2.21 représente la température $T(h_{r1})$ en fonction du coefficient d'échanges radiatifs h_{r2} du mur pour les valeurs : $h_{r2} = (1 ; 5 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(m^2 \cdot ^\circ C)$, $h_{c1} = h_{c2} = 20 \text{ W}/(m^2 \cdot ^\circ C)$, $(T_{f1} \# T_{r1}) = 30^\circ C$, $(T_{f2} \# T_{r2}) = 25^\circ C$; $\lambda = 1 \text{ W}/(m \cdot ^\circ C)$; $x = 0 \text{ cm}$; $x_L = 0.1 \text{ m}$; $S = 1 \text{ m}^2$; $k = 0,5$; $E_S = 400 \text{ W}/m^2$.

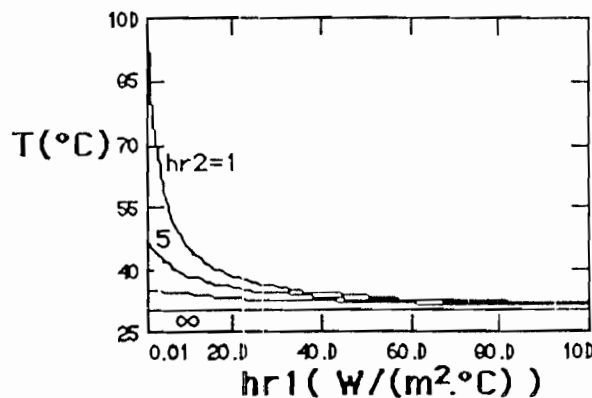


Figure 2.21 : Profil de la température $T(h_{c1})$ en fonction du coefficient d'échanges h_{c1} pour différentes valeurs du coefficient $h_{r2} = (1 ; 5 ; 20 \text{ et } \infty) \text{ W}/(m^2 \cdot ^\circ C)$

Plus la valeur du coefficient h_{r1} est élevée, plus les transferts de chaleur entre l'environnement et la paroi 1 sont importants.

- pour $1 \leq h_{r2} < \infty \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$, la température $T(h_{r1})$ décroît très rapidement au début pour tendre vers 30 °C pour $h_{r1}=100 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$;
- pour $h_{r2} = \infty \text{ W/(m}^2 \cdot \text{°C)}$, la température $T(h_{r1}) = 30 \text{ °C}$.

Nous remarquons sur la figure 2.21, que plus les pertes radiatives de chaleur sur la paroi 2 sont grandes (grandes valeurs de h_{r2}), plus la température T diminue lorsque h_{r1} augmente.

II.5. MODELES ELECTRIQUES EQUIVALENTS AU MUR PLAN AVEC SOURCE THERMIQUE INTERNE DE CHALEUR ($P_s \neq 0$; $P_p = 0$)

II.5.1. Définitions

- Une source thermique interne d'un milieu donné est définie par la puissance thermique qu'elle produit par unité de volume (du milieu considéré).
- Un puits thermique interne est de même défini par la puissance thermique qu'il absorbe par unité de volume du milieu.

En général la puissance produite ou absorbée est une fonction $f(M, T, t)$ de la position du point M , de la température T et du temps t :

$$P = f(M, T, t)$$

Les cas particuliers existants peuvent être regroupés en 3 catégories [49] :

a - Source linéaire par rapport à la température T :

Ce cas correspond à une production de chaleur par Effet Joule (exemple échauffement d'un conducteur électrique plein). L'expression de la puissance est donnée par :

$$P = A(M, t) + B(M, t) \cdot T$$

où : $A(M, t)$ et $B(M, t)$ sont des constantes fonctions de la position M et du temps t et qui sont exprimées en W/m^3 .

b - Source exponentielle par rapport à la température T

C'est le cas d'une production de chaleur dans une réaction chimique exothermique. La puissance est exprimée par :

$$P = A_0 \cdot \exp(-v/T)$$

où : A_0 (W/m^3) et v (degré absolu K) sont des constantes et T la température en degré absolu K.

c - Source ponctuelle

La puissance P dissipée par une source ponctuelle traversant une surface sphérique de rayon r , a pour expression :

$$\Phi = 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot r (T + C)$$

où : C est une constante déterminée par les conditions aux limites de la demi-sphère ($r=0$ et $r=r_{sp}=\text{rayon de la sphère}$).

Nous prenons pour source interne de chaleur, un ensemble de deux plaques parallèles aux faces du mur (fig. 2.22-a), placées à la distance x_{e1} de l'origine x_o , entre lesquelles circule un fluide chaud de température T_{fc} .

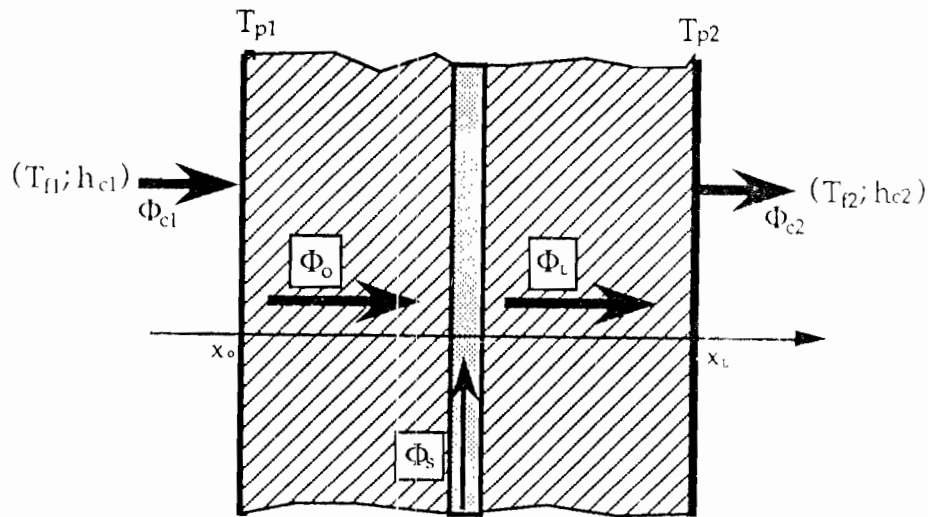


Figure 2.22-a : Mur plan avec source thermique interne

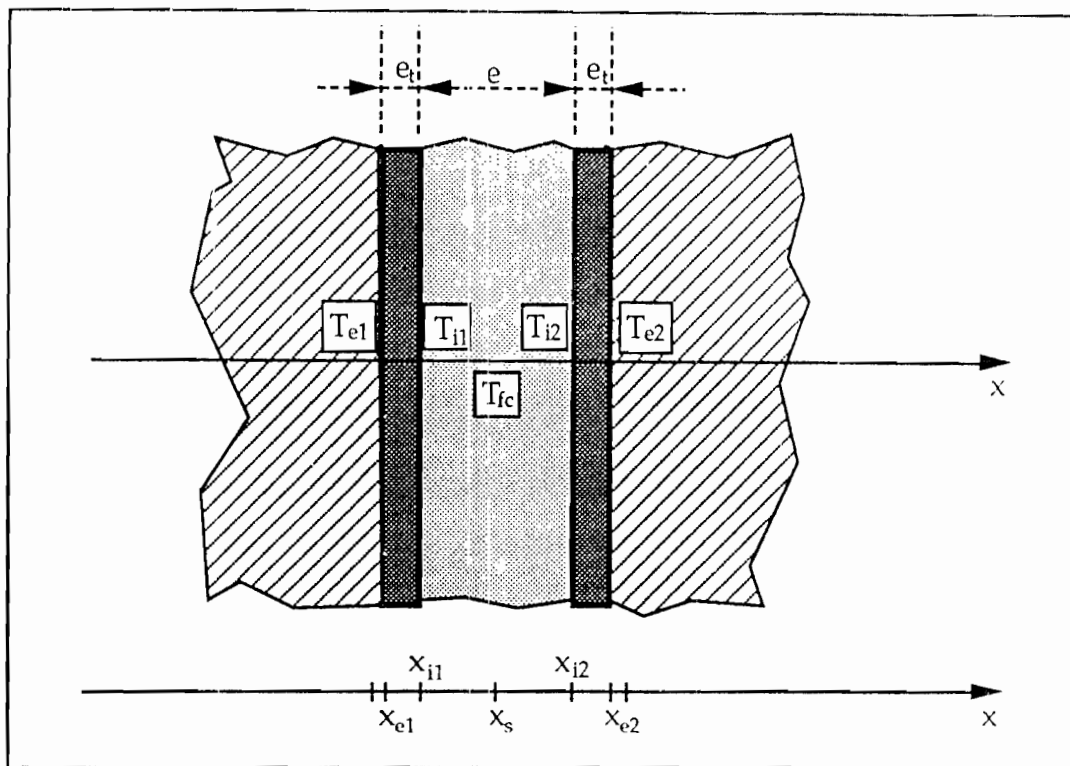


Figure 2.22-b : Zoom sur la source thermique interne

Pour un régime permanent avec source thermique interne ($P_s \neq 0$) et sans puits ($P_p = 0$), l'équation (II.11) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - P_s \cdot S = 0 \quad (\text{II.60})$$

La puissance totale produite par la source peut s'écrire :

$$\Phi_s = P_s \cdot V = P_s \cdot S \cdot dx$$

De cette dernière expression la puissance par unité de volume est :

$$P_s = \frac{\Phi_s}{S \cdot dx} \quad (\text{II.61})$$

En remplaçant (II.61) dans l'équation (II.60) nous obtenons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\Phi_s}{S \cdot dx} S = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\partial \Phi = \frac{\Phi_s}{dx} \partial x \quad (\text{II.63})$$

En passant des différentielles partielles aux différentielles totales il vient :

$$d\Phi = \Phi_s$$

$$\Delta \Phi = \Phi_L - \Phi_o = \Phi_s \quad (\text{II.64})$$

où : Φ_o : flux entrant par la première paroi du mur plan

Φ_L : flux sortant par la deuxième paroi du mur plan

L'équation (II.64) traduit le bilan thermique appliqué au mur plan comportant une source thermique interne Φ_s . Cette équation représente également la première loi thermique de Kirchhoff (loi des noeuds).

II.5.2. Modèle résistif et puissance thermique de la source

Soient T_{fc} , T_i et T_e les températures respectives du fluide chaud et des parois intérieure et extérieure de chacune des deux plaques de la source (Fig. 2.22-b) de longueur L_t dont le matériau a pour conductivité thermique λ_t .

Pour la détermination du flux Φ_s qui s'écoule de la source (fluide chaud) vers la surface extérieure en contact avec le mur, nous allons déterminer la résistance globale entre le fluide chaud (à la température T_{fc}) et la surface du mur (à la température T_{me1}). Cette résistance globale comprend la résistance de conduction de la plaque R_t , la résistance de convection au niveau de sa paroi intérieure R_{cit} et la résistance de contact entre sa surface extérieure et le mur dans lequel il est placé R_{cont} .

a) Résistance thermique de conduction d'une plaque R_t

La résistance d'une plaque est donnée par la relation :

$$R_t = \frac{e_t}{S_t \cdot \lambda_t} \quad (\text{II.65})$$

où : R_t : résistance thermique de conduction de la plaque d'épaisseur $(r_e - r_i)$

λ_t : conductivité du matériau constitutif de la plaque

e_t : épaisseur d'une plaque

S_t : surface d'une plaque

b) Résistance thermique de convection à l'intérieur de la plaque R_{cit}

La paroi intérieure de la plaque est chauffée par le passage d'un fluide chaud (source de température T_s) donc par convection.

Le flux convectif Φ_{oi} (Fig. 20) sur la paroi intérieure de la plaque est exprimé par :

$$\Phi_{oi} = h_{cit} \cdot S_i (T_{fc} - T_i) \quad (II.66)$$

où h_{cit} est le coefficient de convection de la paroi interne de la plaque.

La différence de température du fluide et de la paroi intérieure ($T_{fc} - T_i$) a pour expression :

$$T_{fc} - T_i = \frac{1}{h_{cit} \cdot S_i} \Phi_{oi} \quad (II.67)$$

$$T_{fc} - T_i = R_{cit} \cdot \Phi_{oi} \quad (II.68)$$

avec

$$R_{cit} = \frac{1}{h_{cit} \cdot S_i} \quad (II.69)$$

où : R_{cit} : résistance de convection sur la paroi intérieure de la plaque

S_i : surface latérale intérieure d'échange de chaleur ($S_i = 1$)

c) Résistance de contact à l'extérieur de la plaque R_{cont}

Deux cas peuvent se présenter au niveau de la surface extérieure d'une canalisation (tuyau) placée dans un milieu donné :

- **contact parfait** : la surface extérieure de la plaque est alors à la même température que le point du mur en contact :

$$T_{e1} = T_{me1} \quad (II.70)$$

- **contact imparfait** : du fait des irrégularités ou des rugosités des surfaces en contact les températures T_{e1} et T_{me1} sont différentes. On définit dans ce dernier cas une résistance de contact R_{cont} qui est la cause de la chute de températures :

$$T_{e1} - T_{me1} = R_{cont} \cdot \Phi_{ie} \quad (II.71)$$

Le bilan thermique appliqué à une plaque donne :

$$\Phi_{oi} = \Phi_{ie} = \Phi_s$$

Cette relation traduit que le flux provenant de la source (fluide chaud) est le même que ceux traversant la paroi intérieure et l'épaisseur de la plaque.

Ainsi nous avons :

$$T_{e1} - T_{me1} = R_{cont} \cdot \Phi_s$$

$$T_i - T_{e1} = R_t \cdot \Phi_s$$

$$T_{fc} - T_i = R_{cit} \cdot \Phi_s$$

La somme des trois dernières expressions donne :

$$T_{fc} - T_{me1} = (R_{cont} + R_t + R_{cit}) \cdot \Phi_s = R_{ct} \cdot \Phi_s \quad (II.72)$$

Cette dernière relation montre que la résistance globale entre le fluide chaud à la température T_{fc} et la surface du mur (en contact avec le tuyau) à la température T_{me1} , est composée des trois résistances en série :

$$R_{ct} = R_{cont} + R_t + R_{cit} = R_{cont} + \frac{e_t}{S_t \cdot \lambda_t} + \frac{1}{S_t \cdot h_{cit}} \quad (II.73)$$

L'expression (II.72) nous permet de déduire le modèle résistif équivalent (Fig. 2.23) pour le tronçon qui sépare la source à la température T_{fc} et la surface du mur à la température T_{me1} .

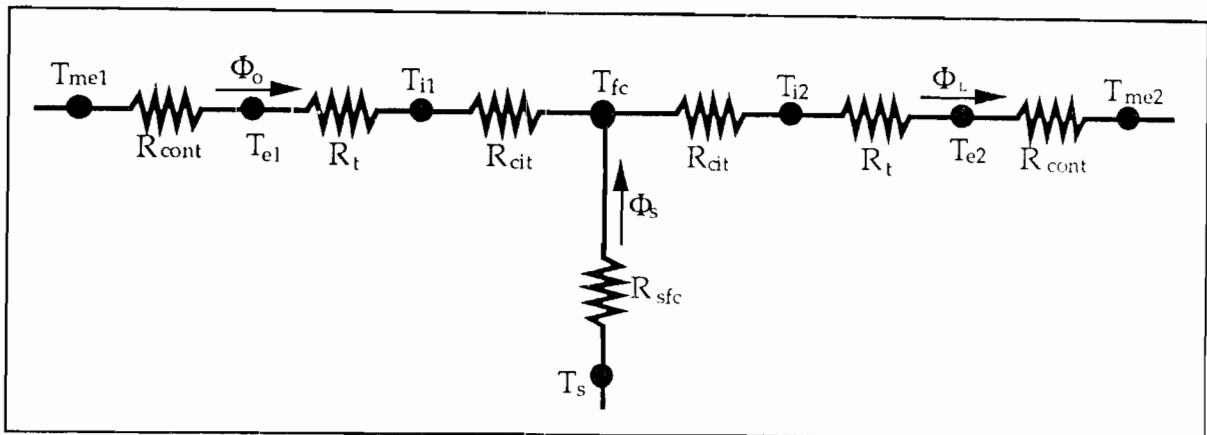


Figure 2.23 : Modèle résistif équivalent du tronçon entre la source interne et le mur

Ainsi, la puissance thermique interne Φ_s produite par la source et qui s'écoule dans le sens radial, du centre de la plaque vers la surface extérieure en contact avec le mur a pour expression :

$$\Phi_s = \frac{T_{fc} - T_{me1}}{R_{ct}} = \frac{T_{fc} - T_{me1}}{R_{cont} + R_t + R_{cit}} \quad (II.74)$$

Remarque

Les modèles résistifs équivalents du mur plan avec source thermique interne dépendent des conditions aux limites et du modèle résistif de la figure 2.23.

Nous allons déterminer le modèle résistif pour le cas de conditions convectives aux limites.

II.5.3. Modèle résistif équivalent du mur avec des conditions convectives aux limites

Pour des conditions aux limites convectives, le modèle résistif équivalent du mur plan avec source thermique interne (Fig. 2.24) est déduit à partir du modèle résistif de la figure 2.9 (mur plan sans source ni puits de chaleur) et celui de la figure 2.23 (mur plan avec source de chaleur et conditions convectives aux limites).

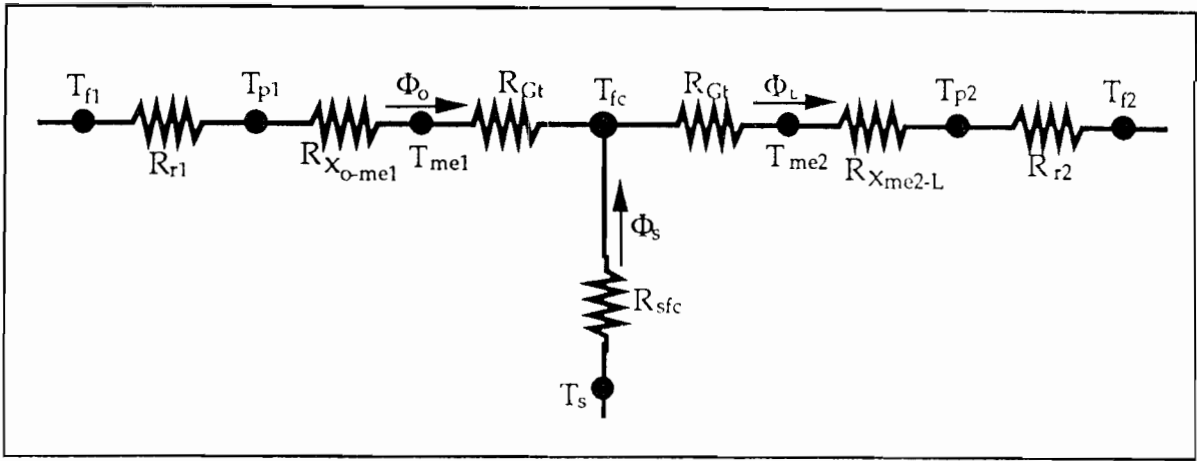


Figure 2.24 : Modèle résistif équivalent du mur plan avec source thermique interne et conditions convectives aux limites du mur

a) Détermination des flux Φ_o , Φ_s et Φ_L

De la figure 2.24, nous déterminons les différents flux :

- le flux Φ_o entrant par la paroi p1 :

$$\Phi_o = G_o (T_{f1} - T_{fc}) \quad (\text{II.75})$$

où G_o est la conductance thermique de convection et de conduction entre T_{f1} et T_{fc} :

$$G_o = \frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_{c1} + R_{x_{o-me1}} + R_{Gt}} = \frac{1}{\frac{1}{h_{c1} \cdot S} + \frac{x_{e1} - x_o}{\lambda \cdot S} + R_{Gt}} \quad (\text{II.76})$$

- le flux Φ_s provenant de la source :

$$\Phi_s = G_s (T_s - T_{fc}) \quad (\text{II.77})$$

où G_s est la conductance entre T_s et T_{fc} :

$$G_s = \frac{1}{R_s} \quad (\text{II.78})$$

- le flux Φ_L sortant de la paroi p2 :

$$\Phi_L = G_L (T_{fc} - T_{f2}) \quad (\text{II.79})$$

où G_L est la conductance thermique de convection et de conduction entre T_{fc} et T_{f2} :

$$G_L = \frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_{Gt} + R_{x_{me2-L}} + R_{c2}} = \frac{1}{R_{Gt} + \frac{x_L - x_{e2}}{\lambda \cdot S} + \frac{1}{h_{c2} \cdot S}} \quad (\text{II.80})$$

Des expressions (II.64), (II.78) et (II.79) nous aurons :

$$\Phi_o = \Phi_L - \Phi_s$$

$$\Phi_o = G_L (T_{fc} - T_{f2}) - G_s (T_s - T_{fc})$$

$$\Phi_o = \frac{(T_{fc} - T_{f2})}{R_{ct} + \frac{x_L - x_{e2}}{\lambda \cdot S} + \frac{1}{h_{c2} \cdot S}} - \frac{(T_s - T_{fc})}{R_s} \quad (\text{II.81})$$

Nous avons également, à partir des expressions (II.64), (II.75) et (II.78) :

$$\Phi_L(\lambda, h_{c1}) = \Phi_o + \Phi_s$$

$$\Phi_L = G_o (T_{f1} - T_{fc}) + G_s (T_s - T_{fc}) \quad (\text{II.82})$$

$$\Phi_L = \frac{(T_{f1} - T_{fc})}{\frac{1}{h_{c1} \cdot S} + \frac{x_{e1} - x_o}{\lambda \cdot S} + R_{ct}} + \frac{(T_s - T_{fc})}{R_s} \quad (\text{II.83})$$

b) Détermination des températures dans les deux parties du mur séparées par la source

La loi d'Ohm thermique permet d'écrire :

$$\Delta T = R \cdot \Phi$$

$$T_{f1} - T_1 = R_1 \cdot \Phi_o$$

$$T_1 = T_{f1} - R_1 \cdot \Phi_o$$

d'où l'expression de la température T_1 :

$$T_1 = T_{f1} - \left[\frac{1}{h_{c1} \cdot S} + \frac{x - x_o}{\lambda \cdot S} \right] \left[\frac{(T_{fc} - T_{f2})}{R_{ct} + \frac{x_L - x_{e2}}{\lambda \cdot S} + \frac{1}{h_{c2} \cdot S}} - \frac{(T_s - T_{fc})}{R_s} \right] \quad (\text{II.84})$$

avec : $0 \leq x \leq x_{e1}$

De même nous avons :

$$T_2 = T_{fc} - R_2 \cdot \Phi_L$$

et la température T_2 a pour expression :

$$T_2 = T_{fc} - \left[R_{ct} + \frac{x - x_{e2}}{\lambda \cdot S} \right] \left[\frac{(T_{f1} - T_{fc})}{\frac{1}{h_{c1} \cdot S} + \frac{x_{e1} - x_o}{\lambda \cdot S} + R_{ct}} + \frac{(T_s - T_{fc})}{R_s} \right] \quad (\text{II.85})$$

avec : $x_{e2} \leq x \leq L$

II.5.4. Etude des profils du flux de chaleur en fonction de λ et h

La figure 2.25 représente le flux de chaleur $\Phi_o(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ du mur pour les valeurs : $x_{e1} = (0.01 ; 0.04 \text{ et } 0.078) \text{ m}$; $h_{c2} = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $T_{f1} = 30^\circ\text{C}$; $T_{f2} = 25^\circ\text{C}$; $(x_{e2} - x_{e1}) = 1 \text{ cm}$; $e_t = 0.1 \text{ mm}$; $x_L = 0.1 \text{ m}$; $S = 1 \text{ m}^2$; $k = 0,5$; $E_s = 400 \text{ W}/\text{m}^2$; $T_s = 45^\circ\text{C}$; $T_{fc} = 40^\circ\text{C}$; $R_{cont} = 2 \text{ m}\Omega$; $R_{sfc} = 100 \text{ m}\Omega$; $h_{cit} = 35 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$; $S_t = 1 \text{ m}^2$; $L_t = 1 \text{ m}^2$; $\lambda_t = 16 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$;

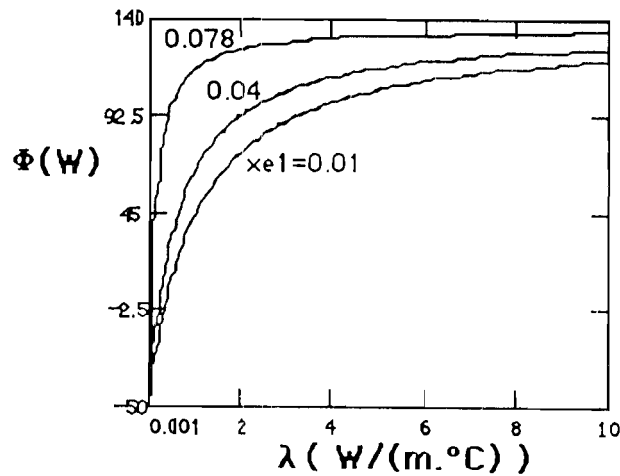


Figure 2.25 : Profil du flux de chaleur $\Phi_0(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs de la position de la source

Lorsque la conductivité augmente, le flux de chaleur croît rapidement puis tend vers 130 W (pour $\lambda \geq 10$ W/(m.°C)). L'augmentation du flux est d'autant plus importante que la position de l'axe de la source est éloignée de la paroi 1.

La figure 2.26 représente le flux de chaleur $\Phi_0(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ du mur pour les valeurs : $h_{c2}=(0.001 ; 20 \text{ et } \infty)$ W/(m².°C) ; $T_{f1}=30^\circ\text{C}$; $T_{f2}=25^\circ\text{C}$; $x_{e1}=2$ cm ; $(x_{e2} - x_{e1})=1$ cm ; $e_t=0.1$ mm ; $x_L=0.1$ m ; $S=1$ m² ; $k=0,5$; $E_S=400$ W/m² ; $T_S=45^\circ\text{C}$; $T_{fc}=40^\circ\text{C}$; $R_{cont}=2$ m Ω ; $R_{sfc}=100$ m Ω ; $h_{cit}=35$ W/(m².°C) ; $S_t=1$ m² ; $L_t=1$ m² ; $\lambda_t=16$ W/(m.°C) ;

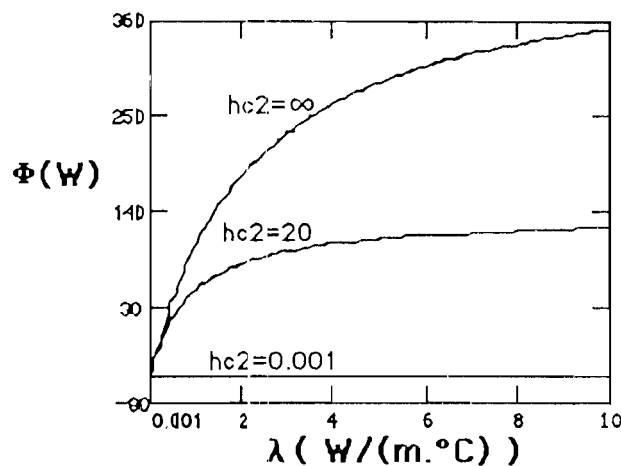
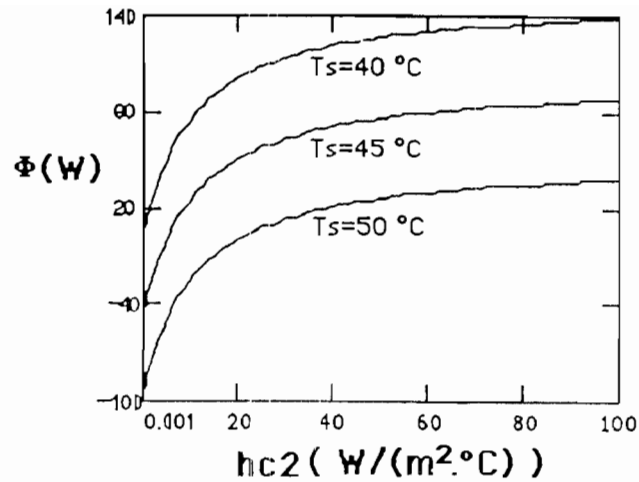


Figure 2.26 : Profil du flux de chaleur $\Phi_0(\lambda)$ en fonction de la conductivité λ pour différentes valeurs du coefficient d'échange h_{c2}

- pour $h_{c2}=0.001$ W/(m².°C), le flux $\Phi_0(\lambda)=Cte$.
- pour $0.001 < h_{c2} \leq \infty$, croît rapidement (pour les faibles valeurs de λ) puis tend vers une valeur constante (pour $\lambda \geq 10$ W/(m.°C)).

La figure 2.27 représente le flux de chaleur $\Phi(h_{c2})$ en fonction du coefficient d'échanges convectifs h_{c2} du mur pour les valeurs : $T_S=(40 ; 45 \text{ et } 50)$ °C ; $T_{f1}=30^\circ\text{C}$; $T_{f2}=25^\circ\text{C}$; $x_{e1}=2$ cm ; $x_{e2}-x_{e1}=1$ cm ; $e_t=0.1$ mm ; $x_L=0.1$ m ; $S=1$ m² ; $k=0,5$; $E_S=400$ W/m² ; $T_S=45^\circ\text{C}$; $T_{fc}=40^\circ\text{C}$; $R_{cont}=2$ m Ω ; $R_{sfc}=100$ m Ω ; $h_{cit}=35$ W/(m².°C) ; $S_t=1$ m² ; $L_t=1$ m² ; $\lambda_t=16$ W/(m.°C) ; $\lambda=1$ W/(m.°C).



Lorsque le coefficient d'échange convectifs augmente, nous constatons que plus la température de la source est élevée, plus le flux de chaleur traversant le mur est important.

II.6. CONCLUSION

La modélisation en régime permanent de la conduction de chaleur (appliquée au mur plan) a conduit à des paramètres macroscopiques (résistance de conduction R , résistances globales d'échanges thermiques paroi-environnement R_g), à l'aide desquels nous avons obtenu des expressions du flux et de la température.

L'étude des profils du flux [$\Phi(\lambda)$, $\Phi(h)$] et de la température [$T(\lambda)$, $T(h)$], en fonction des paramètres thermophysiques (λ , h), a montré l'importance et la sensibilité de ces derniers sur les courbes étudiées.

Cette influence des paramètres thermophysiques (λ , h) sur les transferts de chaleur montre tout l'intérêt porté à leur meilleure évaluation, comme l'indiquent les nombreux travaux dans l'étude bibliographique.

Nous proposons dans le chapitre 3 une nouvelle méthode de détermination simultanée des coefficients de diffusivité α , de conductivité λ et d'échanges thermiques globaux h_g de matériaux dont on ne connaît pas a priori les caractéristiques thermophysiques.

CHAPITRE III

TECHNIQUE DE CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX

III.1. INTRODUCTION

Après avoir montré l'influence des paramètres caractéristiques sur les transferts de chaleur, et donc la nécessité de leur meilleure évaluation, nous développons dans ce présent chapitre, une nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux (s'appuyant sur un mur plan).

La caractérisation thermique du mur consiste à déterminer ses paramètres thermophysiques : diffusivité α , conductivité λ et coefficient global d'échanges thermiques h_g entre ses parois et leur environnement.

La nouvelle méthode de caractérisation est basée sur la solution analytique du champ de température obtenue de l'étude en régime transitoire du mur plan dont on ne connaît pas a priori les coefficients α , λ et h_g .

Hypothèses de travail

Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes pour la suite de ce travail :

- la conduction de chaleur est monodimensionnelle ;
- les paramètres thermophysiques ρ , c , λ et α sont indépendants de la température.

III.2. EQUATION DIFFERENTIELLE REGISSANT LE CHAMP THERMIQUE DU MUR

L'équation monodimensionnelle de la chaleur sous sa forme différentielle obtenue dans le chapitre précédent a pour expression :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - P_s \cdot S = -\rho \cdot C \cdot S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

Le flux de chaleur Φ est exprimé à l'aide de la relation de Fourier :

$$\Phi = -\lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{III.2})$$

L'équation (III.1) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\lambda \cdot S \frac{\partial T}{\partial x} \right] - P_s \cdot S = -\rho \cdot C \cdot S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.3})$$

Pour un mur plan isotrope ($\lambda = \text{Cte}$) il vient :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P_s = \rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P_s}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

où P_s : source de chaleur par unité de volume

α : diffusivité thermique du mur : $\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C}$

λ : conductivité thermique du mur

ρ : masse volumique

III.2.1. Puissance volumique P_s de la source de chaleur

La puissance volumique produite dans le mur est exprimée par :

$$P_s = \frac{\Phi_s}{V} \quad (\text{III.6})$$

où V est le volume du mur plan

La source de chaleur interne est un ensemble de deux plaques parallèles aux faces du mur (Fig. 3.1), placée à la distance x_{e1} de l'origine x_o , entre lesquelles circule un fluide chaud de température T_{fc} .

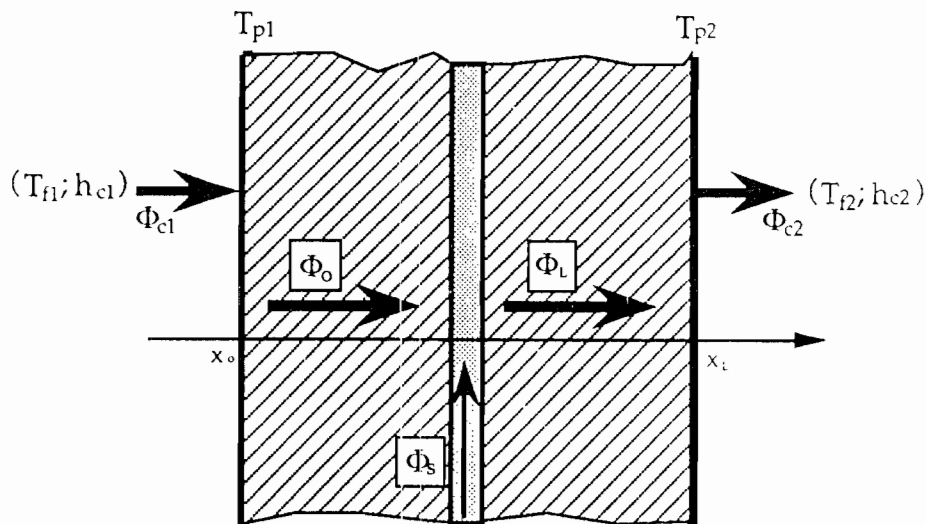


Figure 3.1-a : Mur plan avec source thermique interne

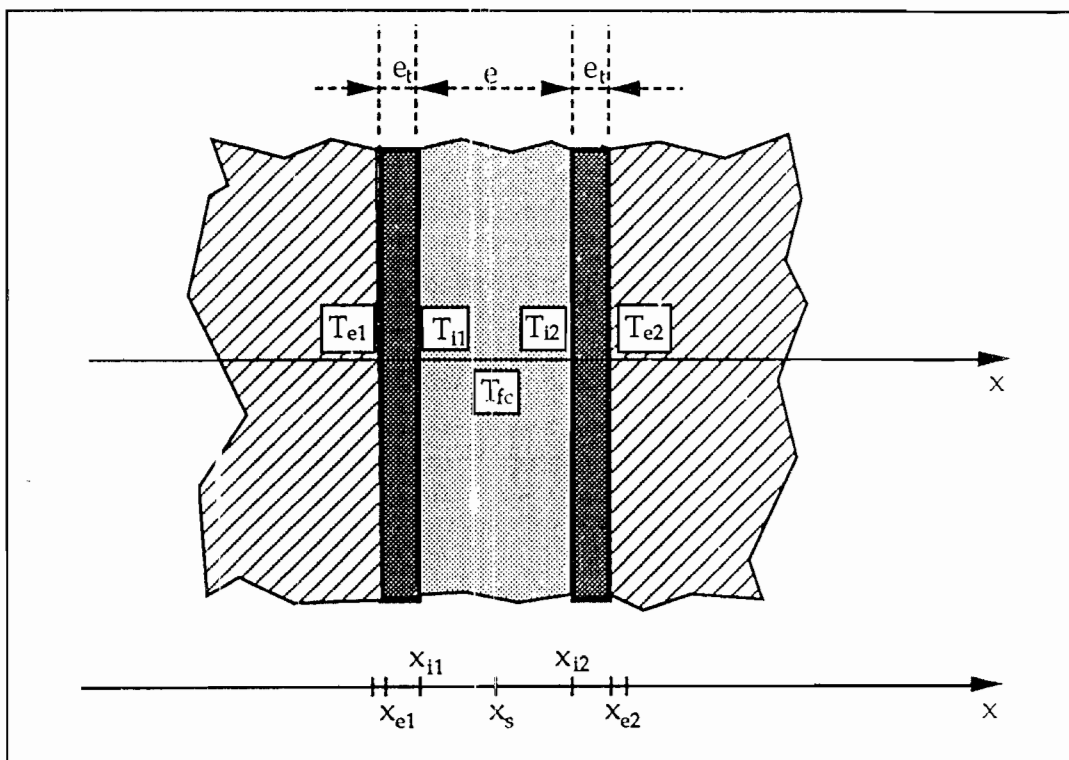


Figure 3.1-b : Zoom sur la source thermique interne

Pour déterminer le flux Φ_s qui s'écoule de la source (fluide chaud, vers la surface extérieure en contact avec le mur, nous avons, au chapitre II, établi l'expression de la résistance globale entre le fluide chaud (à la température T_{fc}) et la surface du mur (à la température T) en contact avec la plaque.

$$R_{Gt} = R_{cont} + R_t + R_{cit} = R_{cont} + \frac{e_t}{S_t \cdot \lambda_t} + \frac{1}{S_t \cdot h_{cit}} \quad (III.7)$$

Le flux Φ_s est alors déterminé par l'expression suivante :

$$\Phi_s = \frac{T_{fc} - T}{R_{Gt}} = G_{Gt} (T_{fc} - T) \quad (III.8)$$

où la conductance G_{Gt} est exprimée par :

$$G_{Gt} = \frac{1}{R_{Gt}} = \frac{1}{R_{cont} + R_t + R_{cit}} = \left[R_{cont} + \frac{e_t}{S_t \cdot \lambda_t} + \frac{1}{S_t \cdot h_{cit}} \right]^{-1} \quad (III.9)$$

En remplaçant (III.8) dans l'expression (III.6), la puissance volumique sera alors :

$$P_s = \frac{\Phi_s}{V} = \frac{G_{Gt} (T_{fc} - T)}{V} = \frac{G_{Gt} \cdot T_{fc}}{V} - \frac{G_{Gt}}{V} T \quad (III.10)$$

Compte tenu de (III.10), l'équation monodimensionnelle de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{G_{Gt} \cdot T_{fc}}{V \cdot \lambda} - \frac{G_{Gt}}{V \cdot \lambda} T(x,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (III.11)$$

munie des conditions aux limites :

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T(0,t) - T_a) \quad (III.12)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = -h_2 (T(L,t) - T_a) \quad (III.13)$$

Les équations (III.12) et (III.13) sont non homogènes (existence d'un terme constant $h_i \cdot T_a / \lambda$).

Nous remarquons que l'équation différentielle (III.11) munie des conditions aux limites (III.12) et (III.13) est également non homogène.

Pour simplifier la résolution de l'équation différentielle (III.11) nous allons ramener (III.12) et (III.13) à des équations différentielles homogènes.

III.2.2. Equation adimensionnelle de la chaleur

Dans le but de simplifier la résolution de l'équation différentielle (III.11), nous cherchons sa forme adimensionnelle par l'introduction de variables adimensionnelles (réduites).

Posons comme nouvelles variables :

- variable adimensionnelle (réduite) d'espace u définies par :

Pour déterminer le flux Φ_s qui s'écoule de la source (fluide chaud) vers la surface extérieure en contact avec le mur, nous avons, au chapitre II, établi l'expression de la résistance globale entre le fluide chaud (à la température T_{fc}) et la surface du mur (à la température T) en contact avec la plaque.

$$R_{Gt} = R_{cont} + R_t + R_{cit} = R_{cont} + \frac{e_t}{S_t \cdot \lambda_t} + \frac{1}{S_t \cdot h_{cit}} \quad (III.7)$$

Le flux Φ_s est alors déterminé par l'expression suivante :

$$\Phi_s = \frac{T_{fc} - T}{R_{Gt}} = G_{Gt} (T_{fc} - T) \quad (III.8)$$

où la conductance G_{Gt} est exprimée par :

$$G_{Gt} = \frac{1}{R_{Gt}} = \frac{1}{R_{cont} + R_t + R_{cit}} = \left[R_{cont} + \frac{e_t}{S_t \cdot \lambda_t} + \frac{1}{S_t \cdot h_{cit}} \right]^{-1} \quad (III.9)$$

En remplaçant (III.8) dans l'expression (III.6), la puissance volumique sera alors :

$$P_s = \frac{\Phi_s}{V} = \frac{G_{Gt} (T_{fc} - T)}{V} = \frac{G_{Gt} \cdot T_{fc}}{V} - \frac{G_{Gt}}{V} T \quad (III.10)$$

Compte tenu de (III.10), l'équation monodimensionnelle de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{G_{Gt} \cdot T_{fc}}{V \cdot \lambda} - \frac{G_{Gt}}{V \cdot \lambda} T(x,t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (III.11)$$

munie des conditions aux limites :

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T(0,t) - T_a) \quad (III.12)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = -h_2 (T(L,t) - T_a) \quad (III.13)$$

Les équations (III.12) et (III.13) sont non homogènes (existence d'un terme constant $h_i \cdot T_a / \lambda$).

Nous remarquons que l'équation différentielle (III.11) munie des conditions aux limites (III.12) et (III.13) est également non homogène.

Pour simplifier la résolution de l'équation différentielle (III.11) nous allons ramener (III.12) et (III.13) à des équations différentielles homogènes.

III.2.2. Equation adimensionnelle de la chaleur

Dans le but de simplifier la résolution de l'équation différentielle (III.11), nous cherchons sa forme adimensionnelle par l'introduction de variables adimensionnelles (réduites).

Posons comme nouvelles variables :

- **variable adimensionnelle (réduite) d'espace u** définies par :

$$u = \frac{x}{L} \quad (\text{III.14})$$

- **variable adimensionnelle (réduite) de température** θ définies par :

$$\theta(u, \tau) = \frac{T(x, t) - T_a}{T_a} \quad (\text{III.15})$$

En remplaçant (III.14) et (III.15) dans les équations différentielles (III.11) , (III.12) et (III.13), nous obtenons l'**équation adimensionnelle de conduction de la chaleur** :

$$\frac{\partial^2 \theta(u, \tau)}{\partial u^2} + \kappa - \beta \cdot \theta(u, \tau) = \frac{\partial \theta(u, \tau)}{\partial \tau} \quad (\text{III.16})$$

munie des conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial \theta(u, \tau)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \theta(0, \tau) \quad (\text{III.17})$$

$$\frac{\partial \theta(u, \tau)}{\partial u} \Big|_{u=1} = - Bi_2 \theta(1, \tau) \quad (\text{III.18})$$

où :

- τ est la **variable adimensionnelle du temps** (appelée également **nombre de Fourier** F_o) qui se définit par :

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \equiv F_o \quad (\text{III.19})$$

Le nombre de Fourier caractérise [51] la constante de temps lors d'un refroidissement ou d'un échauffement d'un matériau donné.

- **Bi est le nombre de Biot** qui se définit par l'expression ci-dessous ; ce nombre caractérise [52] le rapport entre la résistance thermique interne (conduction) et la résistance d'échanges thermiques (convection et/ou radiation), c'est-à-dire le rapport entre les quantités de transferts par conduction et par convection et/ ou radiation

$$[(R_c \text{ ' } R_{cr}) = ((L/S \cdot \lambda) / (1/S \cdot h_k)) = h_k \cdot L / \lambda]$$

$$Bi_k = \frac{h_k \cdot L}{\lambda} \quad (\text{III.20})$$

β et κ sont des constantes définies respectivement par :

$$\beta = \frac{G_{ct} \cdot L^2}{V \cdot \lambda} = \frac{G_{ct} \cdot L}{S \cdot \lambda} \quad (\text{III.21})$$

$$\kappa = \frac{G_{ct} \cdot L^2 (T_{fc} - T_a)}{V \cdot \lambda \cdot T_a} = \frac{G_{ct} \cdot L (T_{fc} - T_a)}{V \cdot \lambda \cdot T_a} = \beta \frac{(T_{fc} - T_a)}{T_a} \quad (\text{III.22})$$

A un instant réduit τ donné, la température réduite $\theta(u, \tau)$ est donnée par [53] :

$$\theta(u, \tau) = \theta(u) + \delta \theta(u, \tau) \quad (\text{III.23})$$

où :

$\theta(u)$: température réduite correspondant au régime permanent

$\delta\theta(u,\tau)$: température réduite correspondant au régime transitoire

En remplaçant (III.23) dans les expressions (III.16), (III.17) et (III.18) nous obtenons le système d'équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta(u,\tau)}{\partial u^2} - \beta \delta\theta(u,\tau) + \frac{\partial^2 \theta(u)}{\partial u^2} - \beta \theta(u) + \kappa = \frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial \tau} \quad (III.24)$$

munie des conditions aux limites :

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \Big|_{u=0} + \frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \theta(0) + Bi_1 \delta\theta(0,\tau) \quad (III.25)$$

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \Big|_{u=1} + \frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial u} \Big|_{u=1} = -Bi_2 \theta(1) - Bi_2 \delta\theta(1,\tau) \quad (III.26)$$

A l'aide de la méthode de superposition [54], nous pouvons séparer le système d'équations différentielles (III.24) en deux sous systèmes :

- le premier système correspond au régime permanent du mur :

$$\frac{\partial^2 \theta(u)}{\partial u^2} - \beta \theta(u) + \kappa = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \theta(0)$$

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \Big|_{u=1} = -Bi_2 \theta(1)$$

- le second correspond au régime transitoire du mur :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta(u,\tau)}{\partial u^2} - \beta \delta\theta(u,\tau) = \frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial \tau}$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \delta\theta(0,\tau)$$

$$\frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial u} \Big|_{u=1} = -Bi_2 \delta\theta(1,\tau)$$

Nous allons donc faire l'étude préalable du mur en régime permanent et ensuite procéder à l'élaboration de la nouvelle approche de sa caractérisation dans l'étude en régime transitoire.

III.3. ETUDE DU MUR PLAN EN REGIME PERMANENT

III.3.1. Equation réduite de conduction de chaleur du mur plan en régime permanent

Dans cette première partie, nous écrivons l'équation de diffusion de la chaleur, puis la résolvons et analysons les profils tracés à l'aide de la solution analytique du champ de température réduite obtenue.

L'équation régissant le régime permanent du mur plan est :

$$\frac{\partial^2 \theta(u)}{\partial u^2} - \beta \theta(u) + \kappa = 0 \quad (\text{III.27})$$

munie des conditions aux limites :

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \theta(0) \quad (\text{III.28})$$

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \Big|_{u=1} = -Bi_2 \theta(1) \quad (\text{III.29})$$

Nous recherchons une solution de l'équation non-homogène (III.27) sous la forme :

$$\theta(u) = \theta_h(u) + \theta_p(u) \quad (\text{III.30})$$

où $\theta_h(u)$ est la solution de l'équation homogène suivante :

$$\frac{\partial^2 \theta_h(u)}{\partial u^2} - \beta \theta_h(u) = 0 \quad (\text{III.31})$$

et $\theta_p(u)$ est la solution particulière, de forme :

$$\theta_p(u) = K = \text{Cte} \quad (\text{III.32})$$

Nous recherchons une solution de l'équation homogène (III.31) sous la forme :

$$\theta_h(u) = A \cdot \cosh(\sqrt{\beta} \cdot u) + B \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) \quad (\text{III.33})$$

En remplaçant (III.32) dans (III.27) nous aurons :

$$-\beta \cdot K = -\kappa$$

d'où la solution particulière :

$$\theta_p(u) = K = \frac{\kappa}{\beta} \quad (\text{III.34})$$

En remplaçant (III.33) et (III.34) dans (III.30), nous aurons :

$$\theta(u) = A \cdot \cosh(\sqrt{\beta} \cdot u) + B \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) + \frac{\kappa}{\beta} \quad (\text{III.35})$$

Notons que les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites.

En désignant la température initiale par :

$$\theta_0 = \theta(u=0)$$

l'équation (III.35) devient pour $u=0$:

$$\theta_o = \theta(u=0) = A + \frac{\kappa}{\beta} \quad (\text{III.36})$$

De cette dernière équation, la constante A est déterminée par l'expression :

$$A = \left[\theta_o - \frac{\kappa}{\beta} \right] \quad (\text{III.37})$$

Les équations (III.29) et (III.37) permettent de déterminer la constante B dont l'expression est la suivante :

$$B = \left[\theta_o - \frac{\kappa}{\beta} \right] F_1 + F_2 \quad (\text{III.38})$$

où :

$$F_1 = - \frac{\sqrt{\beta} \sinh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \cosh(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} \cosh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \sinh(\sqrt{\beta})} \quad (\text{III.39})$$

$$F_2 = - \frac{Bi_2 \cdot \kappa}{\beta \left[\sqrt{\beta} \cosh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \sinh(\sqrt{\beta}) \right]} \quad (\text{III.40})$$

En remplaçant A et B dans (III.35) nous aurons :

$$\theta(u) = \left[\theta_o - \frac{\kappa}{\beta} \right] \left[\cosh(\sqrt{\beta} \cdot u) + F_1 \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) \right] + F_2 \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) + \frac{\kappa}{\beta} \quad (\text{III.41})$$

En tenant compte de la première condition aux limites (III.28), la température θ_o s'écrit :

$$\theta_o = \theta(u=0) = \frac{\sqrt{\beta} \left[F_2 - F_1 \frac{\kappa}{\beta} \right]}{Bi_1 - F_1 \cdot \sqrt{\beta}} \quad (\text{III.42})$$

Alors l'expression finale de la température réduite est :

$$\theta(u) = \left[\frac{F_2 \cdot \sqrt{\beta} - Bi_1 \frac{\kappa}{\beta}}{Bi_1 - F_1 \cdot \sqrt{\beta}} \right] \left[\cosh(\sqrt{\beta} \cdot u) + F_1 \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) \right] + F_2 \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) + \frac{\kappa}{\beta} \quad (\text{III.43})$$

III.3.2. Etude des profils de la température du mur pour des conditions aux limites de type Dirichlet

Le profil de la température réduite $\theta(u)$ en fonction de la profondeur (ou l'épaisseur) réduite u du mur en régime permanent avec source interne de chaleur dépend :

- des paramètres caractéristiques du mur (α, λ) ;
- des paramètres caractéristiques de la source interne de chaleur (λ_t, L_t) ;

- des conditions aux limites de la source de chaleur (h_{cit}, T_s) ;
- des conditions aux limites du mur étudié (T_a, Bi_1, Bi_2, \dots)

Les courbes des figure 3.2 à 3.13 sont tracées à l'aide de la relation (III.43). Nous allons étudier l'influence de chacun des paramètres sur les profils de la température réduite $\theta(u)$.

III.3.2.1. Effet de la température de la source T_s

La figure 3.2 représente le profil de la température réduite $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de la température de la source interne de chaleur T_s (0, 10, 30, 50 et 100°C) et pour $T_a = 30^\circ\text{C}$, $\lambda = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S = 1 \text{ m}^2$ et $Bi_1 = Bi_2 = 0$.

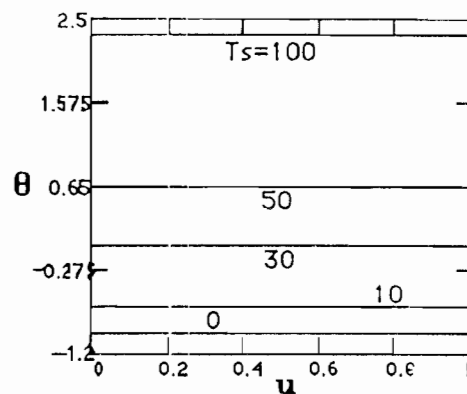


Figure 3.2 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de T_s et pour $Bi_1 = Bi_2 = 0$

Nous remarquons sur la figure 3.2 que la température réduite $\theta(u)$ augmente au fur et à mesure de l'augmentation de la température de la source T_s . L'uniformité de la température réduite $\theta(u)$ s'explique par l'absence de dissipation de chaleur sur les faces avant et arrière du mur (couplage thermique nul (surface isolées) : $Bi_1 = Bi_2 = 0$).

La figure 3.3 représente le profil de la température réduite $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de la température de T_s (0, 10, 30, 50 et 100°C) et pour $T_a = 30^\circ\text{C}$, $\lambda = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S = 1 \text{ m}^2$ et $Bi_1 = Bi_2 = 8$.

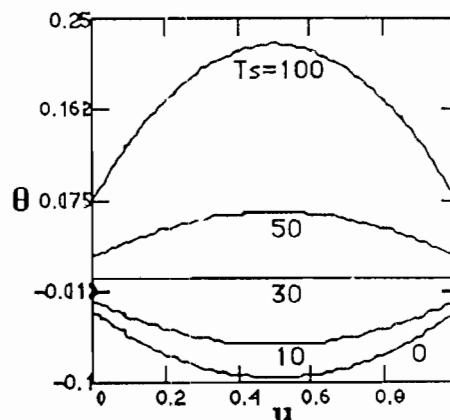


Figure 3.3 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de T_s et pour $Bi_1 = Bi_2 = 8$

Lorsque les faces avant et arrière du mur sont dissipatives avec $Bi_1=Bi_2=8$, le profil de la température réduite $\theta(u)$ sur la figure 3.3 montre un maximum au centre de l'épaisseur réduite. Pour des valeurs de $T_s < T_a = 30^\circ\text{C}$ le mur se comporte comme un puits de chaleur dont le minimum se trouve également au centre.

La figure 3.4 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de la température de la source T_s (0, 10, 30, 50 et 100°C) et pour $T_a = 30^\circ\text{C}$, $\lambda = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S = 1 \text{ m}^2$ et $Bi_1=Bi_2=1000$.

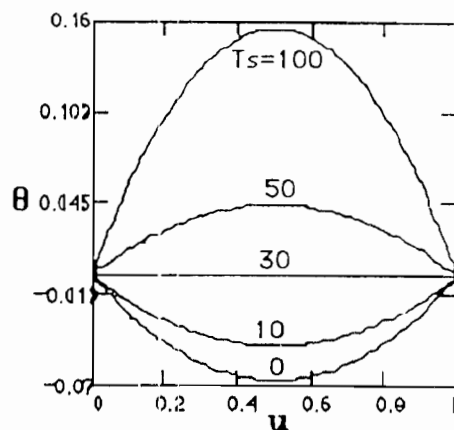


Figure 3.4 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de T_s et pour $Bi_1=Bi_2=1000$

Pour des faces avant et arrière du mur fortement dissipatives avec $Bi_1=Bi_2=1000$, le profil de la température réduite $\theta(u)$ montre également un maximum (pour $T_s > T_a = 30^\circ\text{C}$: source de chaleur) et minimum (pour $T_s < T_a = 30^\circ\text{C}$: puits de chaleur). Par rapport à la figure 3.3, les maximums de la figure 3.4 sont moins élevés du fait de la forte dissipation des faces.

Les maximums des profil de $\theta(u)$ sur les figures 3.3 et 3.4 se justifient par le fait que les deux faces avant et arrière sont dissipatives ; cette dissipation entraîne une chute de température au niveau de ces faces par rapport au centre du mur.

Les minimums de $\theta(u)$ sur les figures 3.3 et 3.4 s'expliquent par l'apport de chaleur au mur à partir de l'ambiance (fluide environnant à la température $T_a > T_s$) à travers les deux faces avant et arrière. La température au centre reste alors la plus faible.

. III.3.2.2. Influence du coefficient d'échanges thermiques interne de la source h_{cit}

La figure 3.5 représente le profil de la température réduite $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de coefficient d'échanges thermiques convectif sur la face interne de la plaque h_{cit} (0.1, 50 et $1000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$) avec les paramètres : $T_s = 40^\circ\text{C}$, $T_a = 30^\circ\text{C}$, $\lambda = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S = 1 \text{ m}^2$ et $Bi_1=Bi_2=0$.

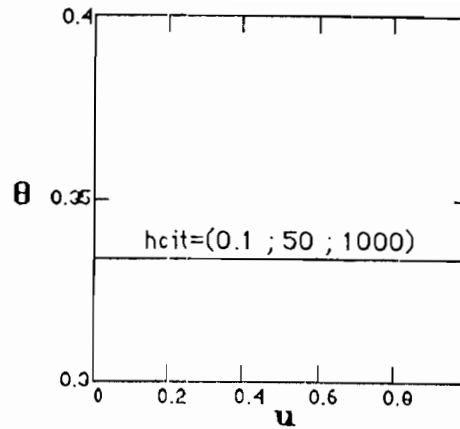


Figure 3.5 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de h_{cit} et pour $Bi_1=Bi_2=0$

Pour un mur aux faces avant et arrière non dissipatives (Fig. 3.5) la température réduite $\theta(u)$ est indépendante du coefficient h_{cit} et de l'épaisseur réduite u .

La figure 3.6 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de coefficient h_{cit} (1, 30, 100 et 1000 $W.m^{-2}.^{\circ}C^{-1}$) avec les paramètres : $T_s=40^{\circ}C$, $T_a = 30^{\circ}C$, $\lambda=1 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$, $S=1 m^2$ et $Bi_1=Bi_2=8$.

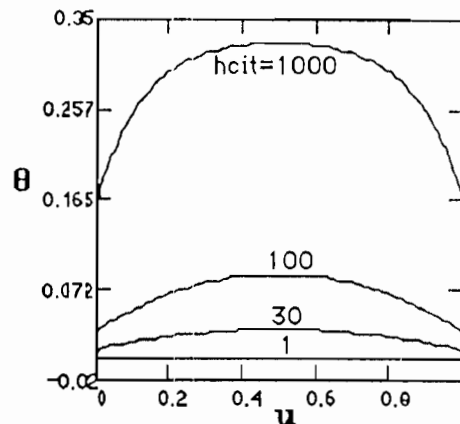


Figure 3.6 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de h_{cit} et pour $Bi_1=Bi_2=8$

Pour un mur avec des faces avant et arrière dissipatives avec $Bi_1=Bi_2=8$ (Fig.3.6), le profil de la température réduite $\theta(u)$ présente un maximum au centre de l'épaisseur réduite pour des valeurs du coefficient $h_{cit} > 1$.

La figure 3.7 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de coefficient h_{cit} (1, 30, 100 et 1000 $W.m^{-2}.^{\circ}C^{-1}$) avec les paramètres : $T_s=40^{\circ}C$, $T_a = 30^{\circ}C$, $\lambda=1 W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$, $S=1 m^2$ et $Bi_1=Bi_2=1000$.

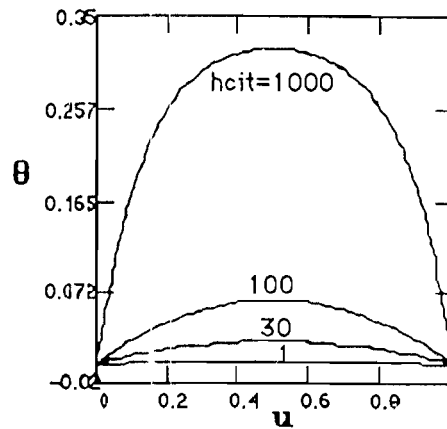


Figure 3.7 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de h_{cit} et pour $Bi_1=Bi_2=1000$

Pour un mur avec des faces avant et arrière fortement dissipatives avec $Bi_1=Bi_2=1000$ (Fig.3.7), le profil de la température réduite $\theta(u)$ présente un maximum au centre de l'épaisseur réduite pour des valeurs du coefficient $h_{cit} > 1$.

Les maximums des profil de $\theta(u)$ sur les figures 3.6 et 3.7 sont dus à l'effet dissipatif les deux faces avant et arrière ; ce qui entraîne une diminution de température de ces faces par rapport à celle du centre du mur.

III.3.2.3. Effet des nombres de Biot des faces avant et arrière du mur plan

La figure 3.8 représente le profil de la température réduite $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs du nombre de biot de la face avant Bi_1 (0, 1, 8 et 1000) et pour $T_s=40^\circ\text{C}$ et $h_{cit}=30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $T_a = 30^\circ\text{C}$, $\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S=1 \text{ m}^2$ et pour un nombre de biot de la face arrière égal à $Bi_2=0$.

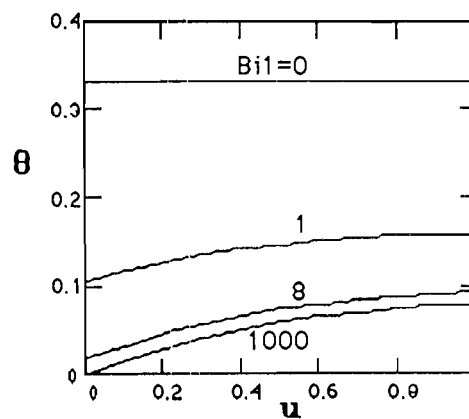


Figure 3.8 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_1 et pour $Bi_2=0$

Pour une face arrière non dissipative ($Bi_2=0$) le mur a un comportement capacitif ; ce qui explique l'élévation de température sur la deuxième face (Fig. 3.8) par rapport à la face avant pour des nombres de biot $Bi_1 \geq 1$. En effet la face arrière renvoie la chaleur dans le mur.

La figure 3.9 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de Bi_1 (0, 1, 8 et 1000) et pour $T_s=40^\circ\text{C}$ et $h_{cit}=30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $T_a=30^\circ\text{C}$, $\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S=1 \text{ m}^2$ et pour un nombre de biot de la face arrière égal à $Bi_2=8$.

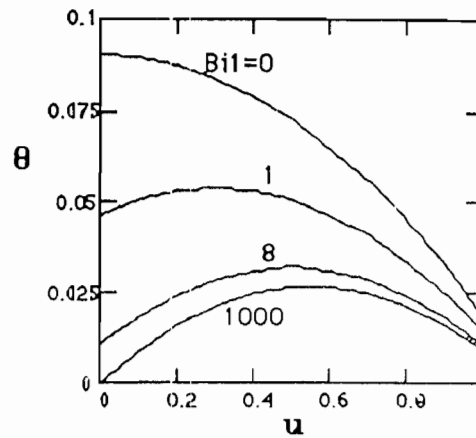


Figure 3.9 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_1 et pour $Bi_2=8$

Lorsque la face arrière est dissipative $Bi_2 \neq 0$ ($Bi_2=8$ par exemple) le profil de la température réduite $\theta(u)$ présente un maximum (Fig. 3.9) près du centre de l'épaisseur du mur, pour des nombres de biot $Bi_1 \geq 8$; ce maximum est induit par la présence d'une source de chaleur. Le profil de $\theta(u)$ montre également que la température à l'intérieur du mur est moins élevée par rapport à la figure 3.8 précédente.

La figure 3.10 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de Bi_1 (0, 1, 8 et 1000) et pour $T_s=40^\circ\text{C}$ et $h_{\text{cit}}=30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $T_a=30^\circ\text{C}$, $\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S=1 \text{ m}^2$ et pour un nombre de biot de la face arrière égal à $Bi_2=1000$.

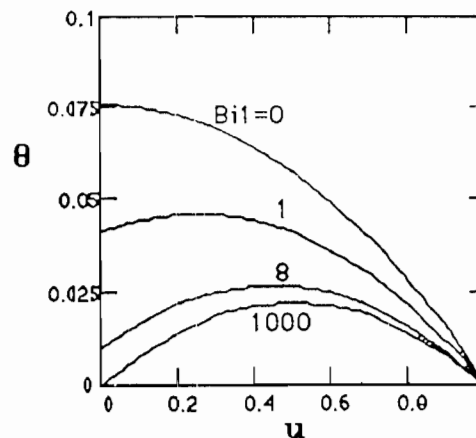


Figure 3.10 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_1 et pour $Bi_2=1000$

Pour une face arrière fortement dissipative ($Bi_2=1000$ par exemple) le profil de la température réduite $\theta(u)$ présente également un maximum (présence d'une source de chaleur) près du centre de l'épaisseur du mur, pour $Bi_1 \geq 8$. Le profil de $\theta(u)$ montre que la température est moins élevée à l'intérieur du mur par rapport aux deux précédentes figures ; ceci est dû au fait que la face arrière se comporte comme un puits de chaleur.

La figure 3.11 représente le profil de la température réduite $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs du nombre de biot de la face arrière Bi_2 (0, 1, 8 et 1000) et pour $T_s=40^\circ\text{C}$ et $h_{\text{cit}}=30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $T_a=30^\circ\text{C}$, $\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S=1 \text{ m}^2$ et pour un nombre de biot de la face avant égal à $Bi_1=0$.

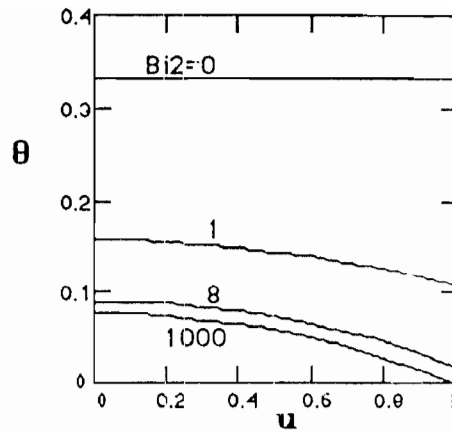


Figure 3.11 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_2 et pour $Bi_1=0$

Pour une face avant non dissipative ($Bi_1=0$) le mur a un comportement capacitif, qui explique l'élévation de température sur la première face (Fig. 3.11) par rapport à la face arrière pour des nombres de biot $Bi_2 \geq 1$. En effet la face avant renvoie la chaleur dans le mur.

La figure 3.12 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de Bi_2 (0, 1, 8 et 1000) et pour $T_s=40^\circ\text{C}$ et $h_{cit}=30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $T_a = 30^\circ\text{C}$, $\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S=1 \text{ m}^2$ et pour un nombre de biot de la face avant égal à $Bi_1=8$.

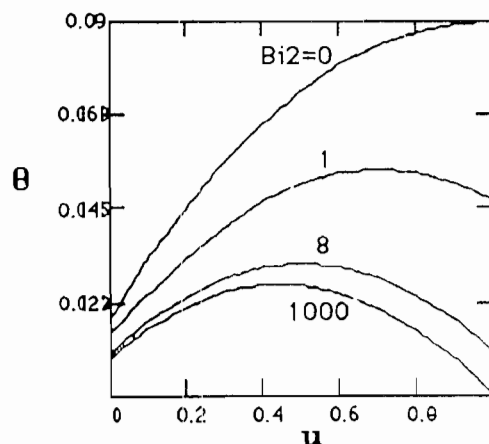


Figure 3.12 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_2 et pour $Bi_1=8$

Lorsque la face avant est dissipative ($Bi_1=8$) le profil de la température réduite $\theta(u)$ présente un maximum (Fig. 3.12) près du centre de l'épaisseur du mur, pour $Bi_2 \geq 8$. Le profil de $\theta(u)$ montre également que la température à l'intérieur du mur est moins élevée par rapport à la figure 3.11 précédente.

La figure 3.13 représente le profil de $\theta(u)$ en fonction de l'épaisseur réduite u pour différentes valeurs de Bi_2 (0, 1, 8 et 1000) et pour $T_s=40^\circ\text{C}$ et $h_{cit}=30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $T_a=30^\circ\text{C}$, $\lambda=1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $S=1 \text{ m}^2$ et pour un nombre de biot de la face avant égal à $Bi_1=1000$.

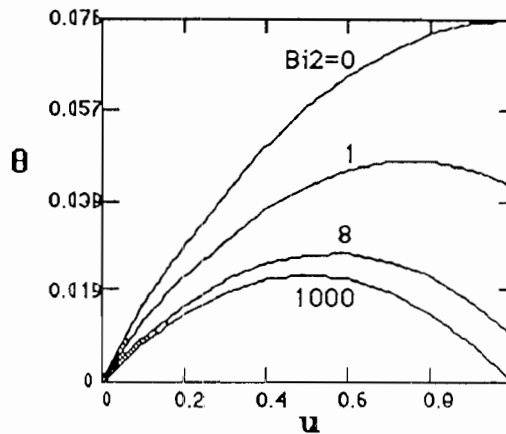


Figure 3.13 : Profil de la température réduite en fonction de l'épaisseur u pour différentes valeurs de Bi_2 et pour $Bi_1=1000$

Pour une face avant fortement dissipative ($Bi_1=1000$ par exemple) le profil de la température réduite $\theta(u)$ présente également un maximum (présence d'une source de chaleur) près du centre de l'épaisseur du mur, pour $Bi_2 \geq 8$. Le profil de $\theta(u)$ montre que la température est moins élevée à l'intérieur du mur par rapport aux deux précédentes figures ; ceci par le fait que la face avant se comporte comme un puits de chaleur.

III.3.3. Conclusion partielle sur l'étude en régime permanent

L'étude du mur plan monodimensionnel avec source interne de chaleur, en régime permanent a conduit aux coefficients réduits (nombres de Biot Bi_1 et Bi_2) d'échanges thermiques globaux. L'étude des profil de température réduite $\theta(u)$ en fonction de la profondeur réduite u a montré que les allures des courbes restent influencées par le changement de ces coefficients réduits d'échanges thermiques (Bi_1 et Bi_2).

Nous allons à présent, faire l'étude du mur plan en régime transitoire

III.4. ETUDE DU MUR EN REGIME TRANSITOIRE

III.4.1. Equation réduite de conduction de chaleur du mur plan en régime transitoire

Dans cette deuxième partie du chapitre III nous déterminons la température réduite transitoire $\delta\theta(u,\tau)$ du mur plan.

L'équation différentielle pour le régime transitoire est :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta(u,\tau)}{\partial u^2} - \beta \delta\theta(u,\tau) = \frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial \tau} \quad (\text{III.44})$$

munie des conditions aux limites :

$$\frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \delta\theta(0,\tau) \quad (\text{III.45})$$

$$\frac{\partial \delta\theta(u,\tau)}{\partial u} \Big|_{u=1} = - Bi_2 \delta\theta(1,\tau) \quad (\text{III.46})$$

La température réduite transitoire $\delta\theta(u,\tau)$ est obtenue par la résolution de l'équation (III.44) munie des conditions aux limites (III.45) et (III.6).

Nous rechercherons une solution de l'équation (III.44), sous la forme variables réduites séparables d'espace et de temps [55] :

$$\delta\theta(u,\tau) = U(u).T(\tau) \quad (III.47)$$

En la remplaçant dans les expressions (III.44) , (III.45) et (III.46) nous obtenons :

$$\frac{1}{U(u)} \frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} = \frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + \beta = -\omega^2 \quad (III.48)$$

où : $\omega > 0$ est une valeur propre réduite positive

L'expression (III.48) est équivalente au système d'équations suivant :

- équation différentielle en temps :

$$\frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau} + \beta = -\omega^2 \quad (III.51)$$

- équation en espace :

$$\frac{1}{U(u)} \frac{\partial^2 U(u)}{\partial u^2} = -\omega^2 \quad (III.52)$$

munie des conditions aux limites :

$$\frac{\partial U(u)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 U(0) \quad (III.53)$$

$$\frac{\partial U(u)}{\partial u} \Big|_{u=1} = -Bi_2 U(1) \quad (III.54)$$

L'équation (III.51) a pour solution ($\omega_n \neq 0$, et "n" appartenant à l'ensemble N):

$$T_n(\tau) = T_n(0). \exp [- (\beta + \omega_n^2)\tau] = T_n(0). \exp \left[- \frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (III.55)$$

où τ_{do} est la **constante de temps réduite de décroissance** définie par :

$$\tau_{do} = \frac{1}{\beta + \omega_n^2} \quad (III.56)$$

Remarque

Nous constatons que la constante de temps réduite de décroissance est donnée par une fonction inverse de la valeur propre ; c'est dire que cette valeur propre régie la dynamique du système (mur plan).

$T_n(0) = T_n(\tau=0)$ sont des coefficients correspondant à l'instant $\tau=0$

La recherche des nombres ω et des fonctions non identiquement nulles $U_n(u)$ solutions de (III.52) et vérifiant les conditions (III.53) et (III.54), est un problème régulier de Sturm-Liouville [55]. Ainsi pour des fonctions $U_n(u)$ non nulles, l'équation (III.52) a pour solution

$$U_n(u) = a_n \cos(\omega_n \cdot u) + b_n \sin(\omega_n \cdot u) \quad (\text{III.57})$$

où : a_n et b_n sont des coefficients déterminés à partir des conditions aux limites

À l'aide des conditions aux limites (III.53) et (III.54), nous déterminons l'équation transcendante ci-dessous qui permet de déterminer les valeurs propres ω_n pour des valeurs données des paramètres Bi_1 et Bi_2 .

$$\tan(\omega_n) = \frac{\omega_n(Bi_1 + Bi_2)}{\omega_n^2 - Bi_1 \cdot Bi_2} \quad (\text{III.58})$$

avec :

$$n \cdot \pi \leq \omega_n < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi \quad (\text{III.59})$$

où : $n=0, 1, 2, \dots$

L'équation transcendante (III.58) permet, à partir des fonctions trigonométrique $F_t = \tan(\omega_n)$ et homographique $F_h = [\omega_n(Bi_1 + Bi_2)] / [\omega_n^2 - Bi_1 \cdot Bi_2]$, de représenter les courbes de la figure 3.14 avec les valeurs suivantes $Bi_1=2$, $Bi_2=2$, et $L=0.1$ m.

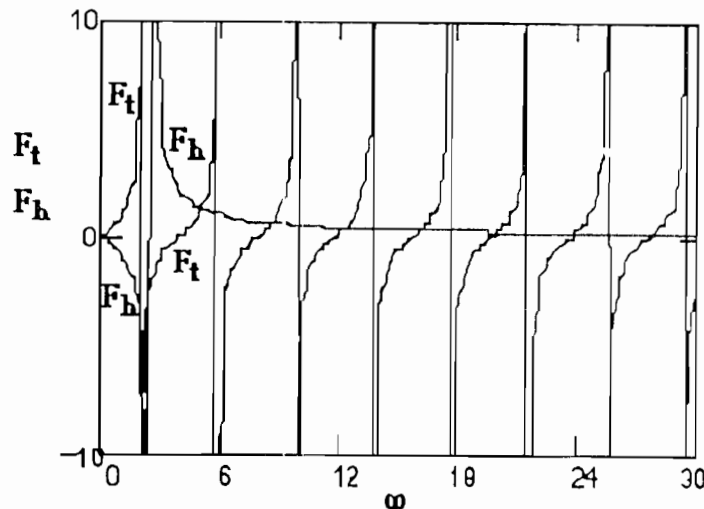


Figure 3.14 : Représentation des solutions de l'équation transcendante

À partir de la figure 3.14, les racines ω_n obtenues (intersections des courbes des fonctions F_1 et F_2) sont données dans le tableau 3 ci-dessous.

Tableau 3 : Valeurs de ω_n solutions de l'équation transcendante

n	0	1	2	3	4	5	6
ω	2,33	7,58	10,44	13,40	16,40	19,44	22,51

Calcul des coefficients a_n

Nous déterminons les coefficients a_n et b_n de manière à ce que la série des fonctions $U_n(u)$ soit orthonormée [56] :

$$\int_0^1 U_n(u)^2 du = 1 \quad (\text{III.60})$$

Nous obtenons ainsi :

$$\int_0^1 [a_n \cos(\omega_n \cdot u) + b_n \sin(\omega_n \cdot u)]^2 du = 1 \quad (\text{III.61})$$

L'expression (III.57) appliquée aux conditions aux limites (III.53) et (III.54) conduit à :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\omega_n}{Bi_1} \quad (\text{III.62})$$

En remplaçant b_n (par son expression explicite tirée de (III.62)) dans (III.61) nous obtenons :

$$\int_0^1 a_n^2 \left[\cos(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} \sin(\omega_n \cdot u) \right]^2 du = 1 \quad (\text{III.63})$$

$$a_n^2 \int_0^1 \left[\cos^2(\omega_n \cdot u) + \left[\frac{Bi_1}{\omega_n} \right]^2 \sin^2(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} 2 \cdot \cos(\omega_n \cdot u) \cdot \sin(\omega_n \cdot u) \right] du = 1 \quad (\text{III.64})$$

Les coefficients a_n déterminés à partir de la dernière équation ont pour expression :

$$a_n = \left[a_{1n} + \left[\frac{Bi_1}{\omega_n} \right]^2 a_{2n} + \frac{Bi_1}{2\omega_n^2} a_{3n} \right]^{-1/2} \quad (\text{III.65})$$

où :

$$a_{1n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot \omega_n} \sin(2\omega_n) \quad (\text{III.66})$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot \omega_n} \sin(2\omega_n) \quad (\text{III.67})$$

$$a_{3n} = 1 - \cos(2\omega_n) \quad (\text{III.68})$$

Les coefficients b_n déterminés à partir de l'équation (III.62), ont pour expression :

$$b_n = \frac{Bi_1}{\omega_n} \left[a_{1n} + \left[\frac{Bi_1}{\omega_n} \right]^2 a_{2n} + \frac{Bi_1}{2\omega_n^2} a_{3n} \right]^{-1/2} \quad (\text{III.69})$$

En remplaçant $U_n(u)$ et $T_n(\tau)$ dans (III.47), il vient :

$$\delta\theta_n(u, \tau) = U_n(u) \cdot T_n(\tau) \quad (\text{III.70})$$

$$\delta\theta_n(u, \tau) = [a_n \cos(\omega_n \cdot u) + b_n \sin(\omega_n \cdot u)] T_n(0) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (\text{III.71})$$

La solution générale de l'équation (III.44) est la série orthonormée (de fonctions orthogonales) suivante :

$$\delta\theta(u,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_n(u,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(u) \cdot T_n(\tau) \quad (\text{III.72})$$

$$\delta\theta(u,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n \cdot u) + b_n \sin(\omega_n \cdot u) \right] T_n(0) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (\text{III.73})$$

Calcul des coefficients $T_n(0)$

Les coefficients $T_n(0)$ peuvent être calculés à l'aide d'un développement en série (orthonormée) de fonctions orthogonales $U_n(u)$.

Pour $\tau=0$ l'expression (III.72) devient :

$$\delta\theta(u,0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(u) \cdot T_n(0) \quad (\text{III.74})$$

En multipliant les deux membres de (III.74) par $\int_0^1 U_n(u) \cdot du$, nous aurons :

$$\int_0^1 U_n(u) \cdot \delta\theta(u,0) \cdot du = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(u)]^2 \cdot T_n(0) \cdot du \quad (\text{III.75})$$

En appliquant la propriété de l'orthogonalité des fonctions $U_n(u)$, à savoir :

$$\int_0^1 U_m(u) \cdot U_n(u) \cdot du = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ N(\omega_n) = 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{III.76})$$

où : $N(\omega_n) = \int_0^1 [U_n(u)]^2 \cdot du = 1$, défini la normalisation des fonctions $U_n(u)$

l'équation (III.75) devient :

$$\int_0^1 U_n(u) \cdot \delta\theta(u,0) \cdot du = T_n(0) \int_0^1 [U_n(u)]^2 \cdot du = T_n(0) \cdot N(\omega_n) \quad (\text{III.77})$$

d'où l'expression permettant le calcul des coefficients $T_n(0)$:

$$T_n(0) = \int_0^1 U_n(u) \cdot \delta\theta(u,0) \cdot du \quad (\text{III.78})$$

En tenant compte de (III.57) et (III.62), la dernière équation devient :

$$T_n(0) = \int_0^1 a_n \left[\cos(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} \sin(\omega_n \cdot u) \right] \delta\theta(u,0) du \quad (III.79)$$

Pour calculer l'intégrale dans la relation (III.79), nous devons déterminer la température réduite $\delta\theta(u,0) = \delta\theta(u,\tau=\tau'=0)$ correspondant à l'instant initial du processus transitoire.

4.1.1. Détermination de la température réduite $\delta\theta(u,0)$

La température réduite $\delta\theta(u,\tau') = \delta\theta(u,\tau=\tau')$ est celle régissant le régime quasi-permanent du mur ($\tau=\tau' < 0$) ; elle est déterminée en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta(u,\tau')}{\partial u^2} - \beta \delta\theta(u,\tau') = 0 \quad (III.80)$$

munie des conditions aux limites :

$$\frac{\partial \delta\theta(u,\tau')}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_1 \delta\theta(0,\tau') \quad (III.81)$$

$$\frac{\partial \delta\theta(u,\tau')}{\partial u} \Big|_{u=1} = - Bi_2 \delta\theta(1,\tau') \quad (III.82)$$

Nous rechercherons une solution de l'équation homogène (III.80) sous la forme :

$$\delta\theta(u,\tau') = A \cdot \cosh(\sqrt{\beta} \cdot u) + B \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot u) \quad (III.83)$$

Les constantes A et B sont déterminés à partir des conditions aux limites.

En adoptant la désignation suivante :

$$\delta\theta_0 = \delta\theta(u=0,\tau'=0^+) = \delta\theta(0,0^+) = \delta\theta(0,0) \quad (III.84)$$

alors l'équation (III.83) devient pour $u=0$:

$$A = \delta\theta_0 = \delta\theta(0,0) \quad (III.85)$$

Les équations (III.82) et (III.85) permettent de déterminer la constante B dont l'expression est la suivante :

$$B = - \delta\theta_0 \frac{\sqrt{\beta} \sinh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \cosh(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} \cosh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \sinh(\sqrt{\beta})} \quad (III.86)$$

En remplaçant A et B dans (III.83) nous aurons :

$$\delta\theta(u,\tau') = \delta\theta_0 \left[\frac{\sqrt{\beta} \cdot \cosh[\sqrt{\beta}(u-1)] - Bi_2 \cdot \sinh[\sqrt{\beta}(u-1)]}{\sqrt{\beta} \cosh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \sinh(\sqrt{\beta})} \right] \quad (III.87)$$

$$\delta\theta(u,\tau') = \delta\theta_0 \cdot F_1 \left[\sqrt{\beta} \cdot \cosh[\sqrt{\beta}(u-1)] - Bi_2 \cdot \sinh[\sqrt{\beta}(u-1)] \right] \quad (III.88)$$

où

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta} \cosh(\sqrt{\beta}) + Bi_2 \sinh(\sqrt{\beta})} \quad (\text{III.89})$$

En remplaçant la température réduite $\delta\theta(u,0) = \delta\theta(u,\tau=\tau'=0^+)$ donnée par (III.88) dans l'expression (III.79), nous aurons :

$$T_n(0) = \int_0^1 a_n \left[\cos(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} \sin(\omega_n \cdot u) \right] \delta\theta(u,0) du$$

$$T_n(0) = \int_0^1 a_n \left[\cos(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} \sin(\omega_n \cdot u) \right] \cdot \delta\theta_o \cdot F_1 \left[\sqrt{\beta} \cdot \cosh[\sqrt{\beta}(u-1)] - Bi_2 \cdot \sinh[\sqrt{\beta}(u-1)] \right] \cdot du$$

$$T_n(0) = a_n \cdot \delta\theta_o \left[T_{1n}(0) + T_{2n}(0) \right] \quad (\text{III.90})$$

où

$$T_{1n}(0) = F_1 \int_0^1 \left[\sqrt{\beta} \cdot \cosh[\sqrt{\beta}(u-1)] - Bi_2 \cdot \sinh[\sqrt{\beta}(u-1)] \right] \cos(\omega_n \cdot u) \cdot du \quad (\text{III.91})$$

$$T_{2n}(0) = \frac{F_1 \cdot Bi_1}{\omega_n} \int_0^1 \left[\sqrt{\beta} \cdot \cosh[\sqrt{\beta}(u-1)] - Bi_2 \cdot \sinh[\sqrt{\beta}(u-1)] \right] \sin(\omega_n \cdot u) \cdot du \quad (\text{III.92})$$

Les calculs des intégrales ci-dessus, à l'aide des formules d'Euler-Fourier, conduisent à :

$$T_{1n}(0) = K_{T1n} (F_{1n} + F_{2n}) \quad (\text{III.93})$$

$$T_{2n}(0) = K_{T2n} (F_{3n} + F_{4n}) \quad (\text{III.94})$$

avec :

$$K_{T1n} = \frac{F_1 \cdot \sqrt{\beta}}{(\omega_n^2 + \beta)} \quad (\text{III.95})$$

$$K_{T2n} = \frac{F_1 \cdot Bi_1}{(\omega_n^2 + \beta)} \quad (\text{III.96})$$

$$F_{1n} = \sqrt{\beta} \cdot \sinh(\sqrt{\beta}) + \omega_n \cdot \sin(\omega_n) \quad (\text{III.97})$$

$$F_{2n} = Bi_2 \left[\cosh(\sqrt{\beta}) - \cos(\omega_n) \right] \quad (\text{III.98})$$

$$F_{3n} = \sqrt{\beta} \left[\cosh(\sqrt{\beta}) - \sin(\omega_n) \right] \quad (\text{III.99})$$

$$F_{4n} = Bi_2 \left[\sinh(\sqrt{\beta}) - \frac{\sqrt{\beta}}{\omega_n} \cos(\omega_n) \right] \quad (\text{III.100})$$

En remplaçant (III.90) dans l'équation (III.71) et en tenant compte de (III.62) nous

obtenons le terme général de la série :

$$\delta\theta_n(u,\tau) = \delta\theta_o \cdot (a_n)^2 \left[\cos(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot u) \right] [T_{1n}(0) + T_{2n}(0)] \exp[-\tau/\tau_{do}] \quad (III.101)$$

$$\delta\theta_n(u,\tau) = \delta\theta_o \cdot FU_n(u) \cdot FT_n(\omega_n) \cdot \exp[-\tau/\tau_{do}] \quad (III.102)$$

où les fonctions $FU_n(u)$ et $FT_n(\omega_n)$ sont respectivement définies par :

$$FU_n(u) = \left[\cos(\omega_n \cdot u) + \frac{Bi_1}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n \cdot u) \right] \quad (III.103)$$

$$FT_n(\omega_n) = (a_n) \cdot T_n(0) = (a_n)^2 [T_{1n}(0) + T_{2n}(0)] \quad (III.104)$$

Le terme général de la température réduite s'écrit :

$$\delta\theta_n(\tau) = \frac{\delta\theta_n(u,\tau)}{\delta\theta_o \cdot FU_n(u)} = FT_n(\omega_n) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (III.105)$$

Ainsi la série obtenue de (III.73) devient :

$$\delta\theta(u,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_n(u,\tau) = \delta\theta_o \sum_{n=0}^{\infty} FU_n(u) \cdot FT_n(\omega_n) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (III.106)$$

La série réduite s'écrit :

$$\delta\theta(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_n(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} FT_n(\omega_n) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (III.107)$$

Remarque

La température réduite $\delta\theta(u,\tau)$ ne tient compte d'aucune condition particulière idéale d'expérimentation (conditions de température imposée aux limites du mur ou conditions de flux nul sur une face). Ces conditions peuvent être obtenues en prenant :

- pour la température imposée sur la face avant (Bi_1 tendant vers l'infini) nous avons alors $a_n = (b_n \cdot \omega_n / Bi_1) = 0$ et l'équation transcendante (III.58) devient ainsi :

$$\tan(\omega_n) = \frac{\omega_n}{Bi_2} \quad (III.108)$$

- pour le flux nul sur la face avant (Bi_1 tendant vers 0) nous avons ainsi $b_n = (a_n \cdot Bi_1 / \omega_n) = 0$ et l'équation transcendante (III.58) devient alors :

$$\tan(\omega_n) = \frac{Bi_2}{\omega_n} \quad (III.109)$$

avec :

$$n \cdot \pi \leq \omega_n < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi$$

où : $n = 0, 1, 2, \dots$

4.1.2. Etude de la convergence de la série

L'expression en série orthonormée infinie de la température réduite $\delta\theta(u,\tau)$ n'est physiquement acceptable que si elle est convergente dans l'intervalle $[0, 1]$.

Nous savons également que la valeur propre est définie dans l'intervalle :

$$n.\pi \leq \omega_n < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi$$

Ainsi dans $[0, 1]$ l'évolution de chaque terme général de la série à travers l'équation (III.102) fait ressortir quelque soit ω_n :

$$| \cos(\omega_n) | \leq 1 \quad \text{(III.110)}$$

$$| \sin(\omega_n) | \leq 1 \quad \text{(III.111)}$$

Par conséquent nous avons aussi :

$$| FU_n(u) | \leq 1 \quad \text{(III.112)}$$

D'autre part, en tenant compte des expressions (III.65) à (III.68), nous avons :

$$| (a_n)^2 | \leq 2 \quad \text{(III.113)}$$

$T_n(0)$ étant une quantité finie, alors la fonction $FT_n(\omega_n)$ définie par (III.104) est également une quantité finie :

$$| FT_n(\omega_n) | \leq 2.T_n(0) \quad \text{(III.114)}$$

De plus nous avons :

$$\omega_n < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi \quad \text{(III.115)}$$

soit :

$$(\omega_n)^2 < \pi^2 \left[n + \frac{1}{2} \right]^2 \quad \text{(III.116)}$$

En tenant compte de (III.56) et (III.116), le terme général de la série $\delta\theta_n(u,\tau)$ devient :

$$\delta\theta_n(u,\tau) = \delta\theta_0 \cdot FU_n(u) \cdot FT_n(\omega_n) \cdot \exp[-\beta.\tau] \cdot \exp[-\pi^2(n + 1/2)^2.\tau] \quad \text{(III.117)}$$

Pour un produit $\beta.\tau$ fini la série peut s'écrire :

$$| \delta\theta(u,\tau) | \leq \delta\theta_0 \sum_{n=0}^{\infty} FT_n(\omega_n) \cdot \exp[-\beta.\tau] \cdot \exp[-\pi^2(n + 1/2)^2.\tau] \quad \text{(III.118)}$$

Ainsi pour la variable réduite u appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ et τ à $[\tau', \infty[$, la série est uniformément convergente.

Pour illustrer cette convergence nous présentons les variations respectives de $\delta\theta_n(\tau)$ et $\delta\theta(\tau)$ en fonction de ω_n pour différents modes ($n = 0, 1, 2, \dots$).

La figure 3.15 représente les variations de $\delta\theta_n(\tau)$ en fonction du temps réduit pour différentes valeurs de ω_n (voir tableau 3.1).

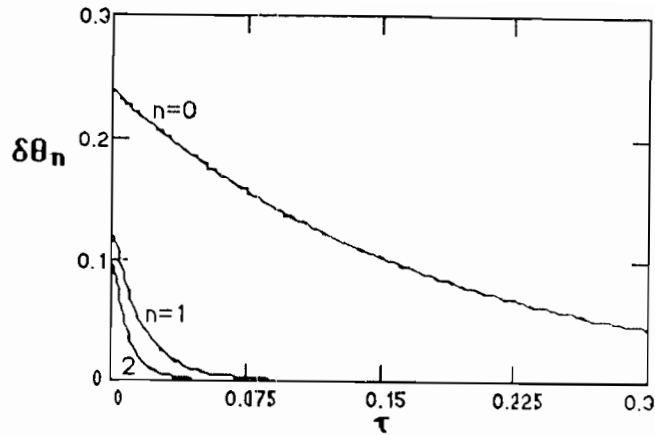


Figure 3.15 : Représentation des différents modes en fonction du temps réduit

Sur la figure 3.15, nous constatons que pour les valeurs $n \geq 1$, l'amplitude de $\delta\theta_n(\tau)$ est nulle au delà du temps réduit $\tau > 0.08$.

La figure 3.16 représente les variations du mode fondamental $\delta\theta_0(\tau)$ et de la série $\delta\theta(\tau)$ en fonction du temps réduit τ .

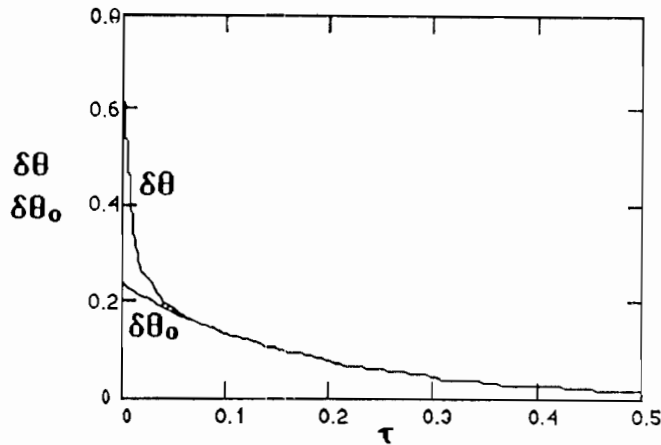


Figure 3.16 : Représentation de la série et du mode fondamental en fonction du temps réduit

Nous constatons sur la figure 3.16, que la courbe de la série $\delta\theta(\tau)$ se confond à celle du mode fondamental $\delta\theta_0(\tau)$ pour le temps réduit $\tau > 0.08$.

Ces différentes courbes (fig. 3.15 et 3.16) montrent que les amplitudes des températures réduites correspondant aux harmoniques supérieures ω_n ($n = 1 \dots \infty$) sont négligeables comparées à celle correspondant à ω_0 ($n = 0$) pour $\tau > \tau_1 = 0.08$.

La figure 3.17 représente la température réduite $\delta\theta_0(\tau, u)$ en fonction de la profondeur réduite u pour différents temps réduits $\tau/\tau_{do} = (0, 0.1, 0.4, 0.8 \text{ et } 2)$, pour les conditions données dans le tableau 3.

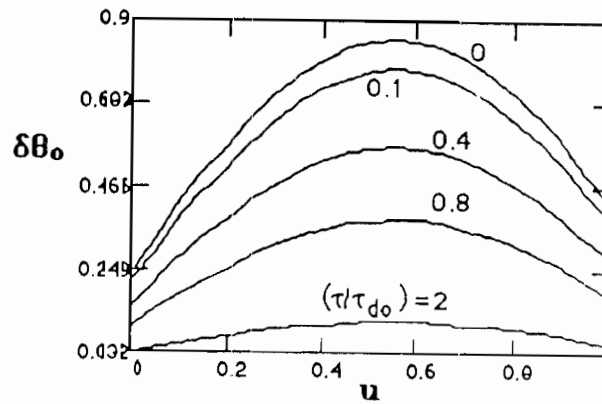


Figure 3.17 : Représentation de la température réduite correspondant au mode fondamental en fonction de la profondeur à différents instants τ/τ_{d0}

Remarque

Ainsi pour le temps réduit $\tau > \tau_1 = 0.08$, l'expression de la température réduite peut se ramener au terme fondamental ci-dessous :

$$\delta\theta(u, \tau) = \delta\theta_0(u, \tau) = \delta\theta_0 \cdot FU_0(u) \cdot FT_0(\omega_0) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{d0}}\right] \quad (\text{III.119})$$

Nous définissons, par l'expression suivante, la température réduite ramenée au terme fondamental ($n=0$), fonction uniquement du temps réduit τ :

$$\delta\theta(\tau) = \frac{\delta\theta(u, \tau)}{\delta\theta_0 \cdot FU_0(u)} = \frac{\delta\theta_0(u, \tau)}{\delta\theta_0 \cdot FU_0(u)} = FT_0(\omega_0) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{d0}}\right] \quad (\text{III.120})$$

Les expressions (III.58) et (III.19) se réduisent également au terme fondamental ($n=0$) et deviennent :

$$\tan(\omega_0) = \frac{\omega_0(Bi_1 + Bi_2)}{\omega_0^2 - Bi_1 \cdot Bi_2} \quad (\text{III.121})$$

III.4.2. Conclusion partielle sur l'étude en régime transitoire

L'étude du mur plan en régime transitoire a conduit à la solution analytique de la température réduite en fonction de la profondeur réduite. Nous allons nous baser sur cette solution pour la caractérisation thermique du mur plan.

III.5. TECHNIQUE DE CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX

La caractérisation thermique de matériaux appliquée au mur plan consiste à déterminer simultanément, ses coefficient de diffusivité α , de conductivité λ et d'échanges thermiques h_g avec son environnement.

Le principe de la technique repose sur le phénomène de relaxation [57] du mur plan (avec source interne de chaleur) après l'arrêt de la production interne de chaleur.

Cette caractérisation utilise la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction réduite caractéristique $FT_0(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine [58] de la courbe de relaxation de la température réduite $\delta\theta(0)$ du matériau étudié (mur plan dans notre cas).

Cette technique permet de déterminer la valeur propre ω_0 (racine de l'équation transcendante, correspondant au mode fondamental). Partant de cette valeur propre (caractéristique du matériaux étudié), nous déterminons les paramètres thermophysiques : α, λ, Bi_2 (puis hg).

III.5.1. Technique de l'intersection de la fonction caractéristique $FT_0(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta(0)$

L'expression de la température réduite (III.106) étant ramenée au terme fondamental, nous présentons la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction caractéristique $FT_0(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine de la courbe de relaxation de la température réduite $\delta\theta(0)$, pour déterminer la valeur propre ω_0 et ensuite les paramètres : α, λ, Bi_2 et hg.

La technique d'intersection nécessite la connaissance préalable de l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta(0)$, et l'étude de la fonction caractéristique $FT_0(\omega)$.

III.5.2. Etude de la fonction caractéristique du mur plan $FT_0(\omega)$

L'expression de la température réduite (III.120) a pour amplitude $FT_0(\omega_0)$. La valeur propre ω est un paramètre caractéristique du matériau étudié $\omega = \omega(\alpha, \lambda, h)$; de ce fait, l'étude de l'amplitude $FT_0(\omega_0)$ dépend des paramètres intrinsèques au matériau étudié (mur plan dans notre cas), notamment de la diffusivité α , de la conductivité λ , des coefficients d'échanges de chaleur h (ou nombre correspondant de Biot Bi_1, Bi_2) et des conditions d'expérimentation.

En remplaçant dans (III.104) Bi_1 par son expression obtenue de (III.121), l'amplitude $FT_0(\omega_0)$ ne dépendra que des trois paramètres : ω, β et Bi_2 .

La figure 3.18 représente les courbes de la fonction caractéristique $FT_0(\omega)$ pour différentes valeurs du nombre de Biot Bi_2 .

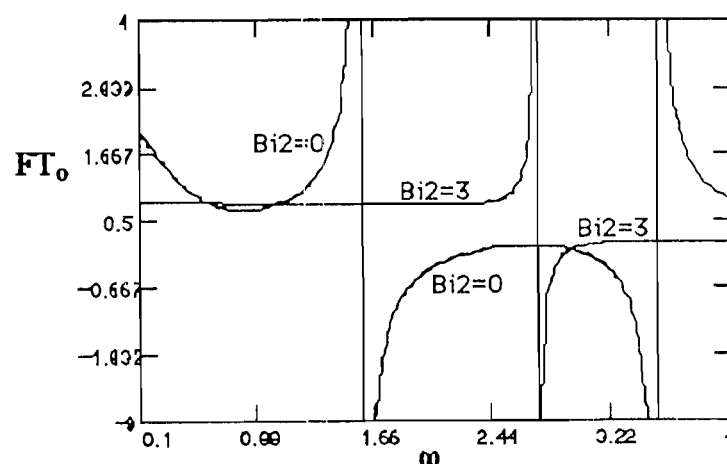


Figure 3.18 : Représentation de l'amplitude $FT_0(\omega)$ pour différentes valeurs de Bi_2

La constante de temps réduite τ_{do} est déterminée à l'aide de la courbe expérimentale de décroissance de la température réduite $\delta\theta(\tau)$.

III.5.3. Détermination de $\delta\theta(0)$ et τ_{do}

La détermination de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta(0)$ et de la constante de temps réduit de décroissance τ_{do} , consiste en une étude [57] de la courbe expérimentale de relaxation de la température réduite $\delta\theta_{exp}(\tau)$ pendant la phase transitoire.

Les courbes de température réduite $\delta\theta_{exp}(\tau)$ sont obtenues par construction de courbes correspondantes à celles issues directement de l'expérimentation $\delta T_{exp}(x,t)$.

En effet pour exploiter les résultats issus de l'expérimentation donnant les courbes de température $T_{exp}(x,t)$, nous devons construire les nouvelles courbes réduites correspondantes, avec les variables réduites d'espace u , de température $\theta(u,\tau)$ et de temps τ , définies par les relations respectives (III.14), (III.15) et (III.19) ; nous les rappelons ci-dessous :

- Variable réduite d'espace :

$$u = \frac{x}{L}$$

- Variable réduite de température :

$$\theta(u,\tau) = \frac{T(x,t) - T_a}{T_a}$$

- Variable réduite de temps :

$$\tau = \frac{\alpha}{L^2} \cdot t$$

D'autre part la relation (III.23), définit la température réduite à un instant donné :

$$\theta(u,\tau) = \theta(u) + \delta\theta(u,\tau)$$

Nous définissons également la température $T(x,t)$ à un instant donné par :

$$T(x,t) = T(x) + \delta T(x,t) \quad (III.122)$$

avec

$T(x)$: température correspondant au régime permanent

$\delta T(x,t)$: température correspondant au régime transitoire

En remplaçant les relations de $\theta(u,\tau)$ et de $T(x,t)$ dans (III.15), nous obtenons :

$$\theta(u) + \delta\theta(u,\tau) = \frac{T(x) - T_a}{T_a} + \frac{\delta T(x,t)}{T_a} \quad (III.123)$$

Cette dernière relation permet d'écrire :

$$\theta(u) = \frac{T(x) - T_a}{T_a} \quad (III.124)$$

$$\delta\theta(u,\tau) = \frac{\delta T(x,t)}{T_a} \quad (III.125)$$

Ainsi disposant des courbes expérimentales $T_{exp}(x,t)$, nous pouvons obtenir les courbes réduites correspondantes $\theta_{exp}(u)$ et $\delta\theta_{exp}(u,\tau)$ à l'aide des expressions (III.14), (III.19), (III.122), (III.124) et (III.125).

Après avoir obtenu la courbe expérimentale de $\delta\theta_{exp}(\tau)$, nous passons à son étude pendant la phase transitoire.

L'instant τ' correspond au début (premier point) de la décroissance exponentielle de $\delta\theta(\tau)$, c'est-à-dire de la partie linéaire de la représentation sémi-logarithmique (Fig. 3.19). A cet instant correspond l'ordonnée $\delta\theta_{exp}(0)$. Le couple $(\tau'=0, \delta\theta_{exp}(\tau'=0))$ vérifie l'équation :

$$\delta\theta(\tau') = FT_0(\omega_0) \cdot \exp\left[-\frac{\tau'}{\tau_{do}}\right] \quad (III.126)$$

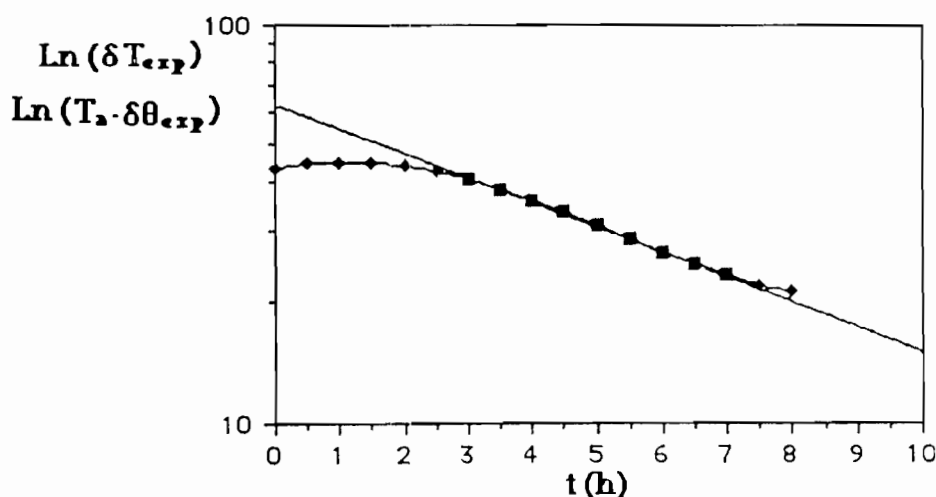


Figure 3.19 : Représentation sémi-logarithmique de la courbe expérimentale de relaxation de la température $\text{Ln}(T_a \cdot \delta\theta_{exp}(\tau'))$

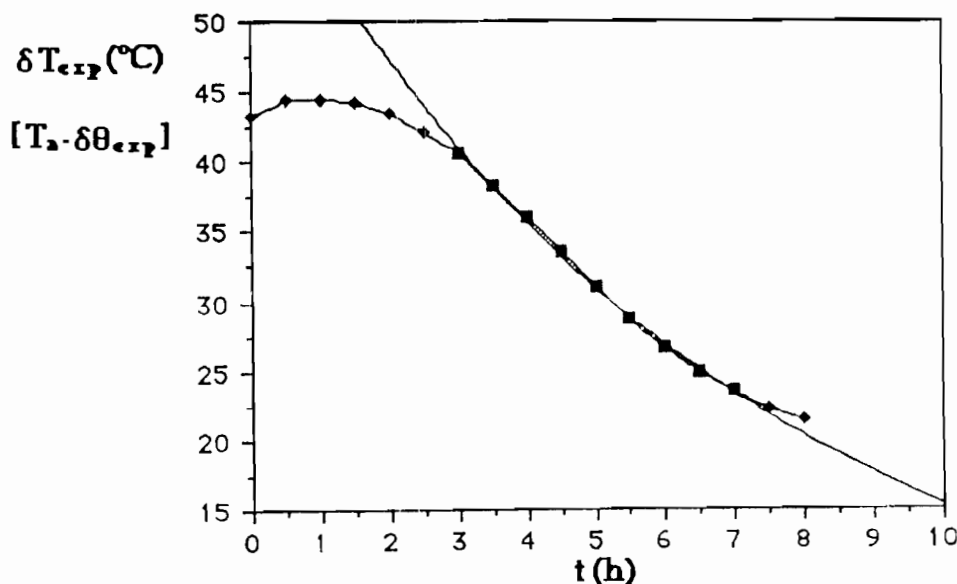


Figure 3.20 : Courbe expérimentale de relaxation de la température $T_a \cdot \delta\theta_{exp}(\tau')$

Une partie des points expérimentaux $\delta\theta_{exp}(\tau')$ correspondant à l'intervalle $[\tau'=\tau'_o=0, \tau_x]$ et ayant respectivement pour ordonnées $[\delta\theta_{exp}(\tau'=0), \delta\theta_{exp}(\tau')]$ vérifient l'équation (III.126).

La courbe de $\delta\theta_{\text{exp}}(\tau')$ est donnée par le meilleur fit (meilleure courbe de régression) des points expérimentaux répondant à une décroissance de type exponentielle représentée par le trait continu (Fig. 3.20).

Les autres points ne vérifient pas l'équation (III.126) et sont donc en dehors de la droite de régression.

La constante de temps de décroissance τ_{do} est obtenue par l'expression analytique de la courbe de régression (Fig. 3.19).

L'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{\text{exp}}(0)$ correspond à la limite supérieure $\delta\theta_{\text{exp}}(\tau' \rightarrow \tau'_o)$ et l'erreur commise est déduite :

$$\frac{\Delta(\delta\theta_{\text{exp}}(0))}{\delta\theta_{\text{exp}}(0)} = \frac{\Delta(\tau'_o)}{\tau'_o} \quad (\text{III.127})$$

Remarque

Une étude similaire de la courbe expérimentale $\delta T_{\text{exp}}(t)$ pendant la phase transitoire conduit également à :

- la meilleure courbe de régression $\delta T_{\text{exp}}(\tau')$

- l'ordonnée à l'origine $\delta T_{\text{exp}}(0)$ et l'erreur $[\Delta(\delta T_{\text{exp}}(0)) / \delta T_{\text{exp}}(0)]$ déduite :

$$\frac{\Delta(\delta T_{\text{exp}}(0))}{\delta T_{\text{exp}}(0)} = \frac{\Delta(t_o)}{t_o} \quad (\text{III.127})$$

où : t_o est le correspond à τ'_o

- la constante de temps de décroissance t_{do} obtenue à partir de l'expression analytique de la courbe de régression (Fig. 3.19).

III.5.4. Détermination de la valeur propre ω_0 et du nombre de Biot Bi_2

L'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{\text{exp}}(\tau'=0)$, obtenue à l'aide de l'expression de la température réduite transitoire $\delta\theta_{\text{exp}}(\tau')$, est donnée par :

$$\delta\theta_{\text{exp}}(\tau'=0) = FT_0(\omega_0) \quad (\text{III.128})$$

Ainsi à tout autre instant ultérieur τ' (appartenant à $[\tau'=0, \tau_x]$), l'équation (III.126) est vérifiée.

L'incertitude sur la mesure de $\delta\theta_{\text{exp}}(0)$ est alors :

$$\frac{\Delta(FT_0)}{FT_0} = \frac{\Delta(\delta\theta(0))}{\delta\theta(0)} \quad (\text{III.129})$$

En reportant $\delta\theta_{\text{exp}}(0) \pm \Delta(\delta\theta_{\text{exp}}(0))$ sur la courbe $FT_0(\omega_0)$ comme l'indique la figure 3.21, l'intersection donne la valeur propre $\omega_0 \pm \Delta(\omega_0)$; cette valeur ω_0 est solution de l'équation (III.126) et vérifie également l'expression (III.55) ramenée au terme fondamental.

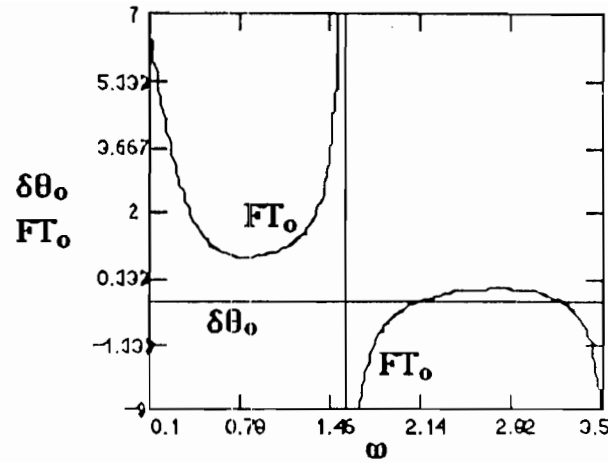


Figure 3.21 : Technique de l'intersection du mode fondamental et de l'ordonnée à l'origine

La précision sur la détermination de la valeur propre ω_0 est donnée par :

$$\frac{\Delta(\omega_0)}{\omega_0} = \frac{\Delta(FT_0)}{FT_0} + \frac{\Delta(\delta\theta(0))}{\delta\theta(0)} \quad (\text{III.130})$$

Connaissant la valeur propre ω_0 et la constante de temps réduit de décroissance τ_{do} (à $\pm\Delta(\tau_{do})$) de la température réduite $\delta\theta(\tau')$ pendant la phase transitoire dans les conditions ci-dessus définies, l'équation (III.58) conduit à la valeur du nombre de Biot Bi_2 en face arrière du mur plan exprimée par :

$$Bi_2 = \frac{\omega_0 \cdot [Bi_1 - \omega_0 \cdot \tan(\omega_0)]}{[\omega_0 + Bi_1 \cdot \tan(\omega_0)]} \quad (\text{III.131})$$

La précision sur le calcul de Bi_2 est obtenue à travers :

$$\frac{\Delta(Bi_2)}{Bi_2} = |Er_1| + |Er_2| \quad (\text{III.132})$$

avec :

$$Er_1 = \left[\frac{\frac{Bi_1}{\omega} - 2 \cdot \tan(\omega) - \frac{\omega}{\cos^2(\omega)}}{\frac{Bi_1}{\omega} - \tan(\omega)} - \frac{1 + \frac{Bi_1}{\cos^2(\omega)}}{1 + \frac{Bi_1}{\omega} \cdot \tan(\omega)} \right] \frac{\Delta(\omega)}{\omega} \quad (\text{III.133})$$

$$Er_2 = \left[\frac{1}{1 - \frac{\omega}{Bi_1} \cdot \tan(\omega)} - \frac{1}{\frac{\omega}{Bi_1 \tan(\omega)} + 1} \right] \frac{\Delta(Bi_1)}{Bi_1} \quad (\text{III.134})$$

III.5.6. Calcul du coefficient de diffusivité α

Les relations (III.19) et (III.56) conduisent à l'expression permettant le calcul de la diffusivité thermique :

$$\alpha = \frac{L^2}{t_{do}(\beta + \omega_0^2)} \quad (\text{III.135})$$

L'erreur sur α est donnée par :

$$\frac{\Delta(\alpha)}{\alpha} = \frac{\Delta(\tau_{do})}{\tau_{do}} + \frac{\beta}{(\beta+\omega^2)} \frac{\Delta(\beta)}{\beta} + \frac{2.\omega^2}{(\beta+\omega^2)} \frac{\Delta(\omega)}{\omega} \quad (\text{III.136})$$

III.5.7. Calcul du coefficient de conductivité λ

Connaissant la diffusivité α et la capacité thermique ($\rho.C$) du matériau constitutif du mur plan, nous déterminons la conductivité thermique :

$$\lambda = \alpha.\rho.C \quad (\text{III.137})$$

L'erreur sur λ est donnée par :

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} = \frac{\Delta(\alpha)}{\alpha} + \frac{\Delta(\rho)}{\rho} + \frac{\Delta(C)}{C} \quad (\text{III.138})$$

III.5.8. Calcul du coefficient d'échanges thermiques h_2

Connaissant le nombre de Biot Bi_2 et la conductivité thermique λ , nous déterminons le coefficient d'échanges thermiques sur la face arrière du mur (deuxième face) :

$$h_2 = \frac{\lambda.Bi_2}{L} \quad (\text{III.139})$$

La précision de h_2 est calculée à l'aide de l'expression :

$$\frac{\Delta(h_2)}{h_2} = \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} + \frac{\Delta(Bi_2)}{Bi_2} + \frac{\Delta(L)}{L} \quad (\text{III.140})$$

III.6. CONCLUSION

L'étude du mur en régime transitoire a conduit à la solution analytique de la température réduite en fonction de la profondeur réduite. Partant de cette solution analytique, une nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux (mur plan dans cette partie) a été développée.

La nouvelle méthode de caractérisation utilise la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction réduite caractéristique $FT_0(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine de la courbe de relaxation de la température réduite $\delta\theta(0)$ du matériau étudié (mur plan).

Cette caractérisation basée sur l'exploitation de la solution analytique et les courbes expérimentales de la températures réduite, a conduit à la détermination simultanée des paramètres thermophysiques : diffusivité α , conductivité λ et coefficients globaux d'échanges thermiques h_g .

Nous allons dans le chapitre suivant appliquer cette nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire.

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA NOUVELLE TECHNIQUE DE CARACTERISATION THERMIQUE A UNE DALLE EN BETON RECUPERATRICE D'ENERGIE SOLAIRE

IV.1. INTRODUCTION

Après le développement d'une nouvelles méthode de caractérisation thermique de matériaux, (voir chapitre 3), nous allons nous en inspirer pour caractériser une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire (détermination des ses coefficients de diffusivité α , de conductivité λ et d'échanges thermiques globaux paroi-environnement h_g).

Tout en tenant compte des nouvelles conditions réelles aux limites (irradiation de la dalle), nous allons suivre la même démarche adaptée dans le précédent chapitre.

IV.2. DALLE EN BETON RECUPERATRICE D'ENERGIE SOLAIRE

La figure 4.1 représente la dalle en béton récupératrice d'énergie solaire. Elle est constituée de graviers, de ciment et de sable. Lors son coulage, un tube en cuivre (sous forme de serpentín) a été placé à 2 cm de la face avant. La surface latérale de la dalle a été isolée avec du polystyrène.

La récupération de l'énergie solaire par la dalle est assurée par de l'eau circulant dans le tube en cuivre.

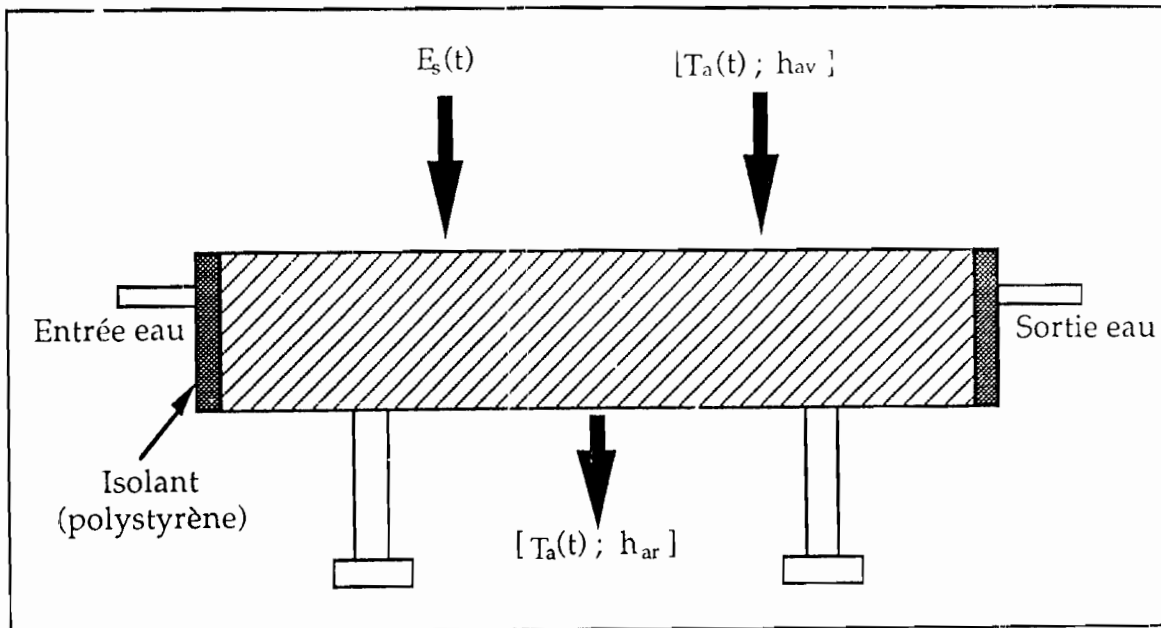


Figure 4.1 : Schéma de la dalle en béton

Cette dalle a déjà fait l'objet de plusieurs études [59, 60 et 61] avec différentes expérimentations effectuées dans le Laboratoire d'Energétique appliquée de l'Ecole Supérieure Polytechnique (E.S.P.) de l'Université Cheikh Anta Diop Dakar.

Pour déterminer les paramètres caractéristique thermophysiques de la dalle, nous allons dans un premier temps faire l'étude de son champ thermique et lui appliquer ensuite la technique de caractérisation thermique exposée dans le chapitre III.

- l'influence de la température sur les paramètres thermophysiques est négligeable ;
- la résistance aux échanges thermiques R_{cit} à l'intérieure du tuyau (tube en cuivre) est très grande par rapport à la somme des résistances de contact R_{cont} (entre le béton et la surface extérieure du tube) et de conduction du tube R_t (faible épaisseur) :
 $(R_{cont} + R_t) \ll R_{cit}$

$$(R_{cont} + R_t) \ll R_{cit}$$

ainsi la résistance globale béton-tubes R_{GBT} peut s'écrire [62] :

$$R_{GBT} = (R_{cont} + R_t) + R_{cit} \approx R_{cit}$$

par conséquent les transferts thermiques entre le fluide et le béton dépendent de la résistance R_{cit} qui est fonction du coefficient d'échanges thermiques h_j .

- l'ensoleillement $E_s(t)$ et la température ambiante $T_a(t)$ obéissent (pour la durée d'insolation) aux lois d'évolution suivantes [63] :

$$E_s(t) = E_{so} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \quad (IV.1)$$

avec $H_{ls} \leq t \leq H_{cs}$

$$T_a(t) = T_m + T_o \cdot \cos(\Omega \cdot t - v) \quad (IV.2)$$

avec $0 \leq t \leq 24$

où :

$$\Omega = \frac{2\pi}{P_{er}} : \text{fréquence angulaire}$$

avec : $P_{er} = 24$ h période journalière

T_m : température ambiante moyen

E_{so}, T_o : ensoleillement et température ambiante maximum de la loi sinusoïdale :

t : temps solaire (différence entre le temps locale et le temps midi solaire $t = t_l - t_{ms}$)

$$v = \frac{2\pi \cdot \Delta t}{P_{er}} : \text{déphasage entre l'ensoleillement } E_s(t) \text{ et la température } T_a(t)$$

avec : Δt = décalage, en heures, entre les maximums des courbes $E_s(t)$ et $T_a(t)$

H_{ls}, H_{cs} : heure de levé et de couché du soleil, respectivement

IV.3. EQUATION DIFFERENTIELLE DU CHAMP THERMIQUE D'UNE DALLE EN BETON RECUPERATRICE D'ENERGIE SOLAIRE

Soit la dalle représentée par la figure 4.2 (vue de profil).

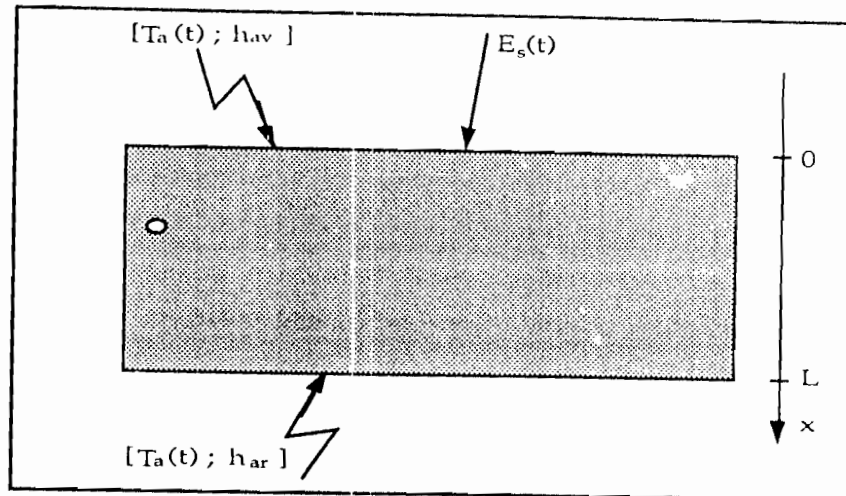


Figure 4.2 : Vue de profil de la dalle en béton

Le champ thermique dans la dalle est régie par l'équation :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{P_p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (\text{IV.3})$$

où P_p : puits de chaleur par unité de volume (W.m^{-3})

α : diffusivité thermique ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) de la dalle en béton définie par :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho.C} \quad (\text{IV.4})$$

λ : conductivité thermique de la dalle en béton ($\text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$)

ρ : masse volumique de la dalle en béton (kg.m^{-3})

C : chaleur spécifique de la dalle en béton ($\text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$)

Les conditions aux limites (fig. 4.2) de la dalle sont les suivantes :

- à la face avant :

$$\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k.E_s(t) + h_{av} [T(0,t) - T_a(t)] \quad (\text{IV.5})$$

- à la face arrière :

$$-\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_{ar} [T(L,t) - T_a(t)] \quad (\text{IV.6})$$

où k : coefficient d'absorption de la dalle ;

$E_s(t)$: ensoleillement à un instant t ;

$T_a(t)$: température ambiante à un instant t ;

h_{av} , h_{ar} : coefficient global d'échanges thermiques sur la face avant et arrière

Notons que pour certains matériaux standards les paramètres thermophysiques α et λ sont donnés dans des tables. Du fait des possibilités de dosages différents lors la construction d'une dalle en béton (ou de tout autre matériau composite), les valeurs des coefficients α et λ peuvent s'écarter des valeurs tabulées. Leur détermination est une nécessité pour une meilleure maîtrise des transferts de chaleur de la dalle.

Pour simplifier l'étude du champ thermique dans la dalle, nous la considérons composée de deux parties séparées par l'ensemble des tubes en cuivre (figure 4.3) :

- la partie inférieure limitée par les coordonnées $x=0$ à $x=L_2$
- la partie supérieure ($x=0$ à $x=-L_1$).

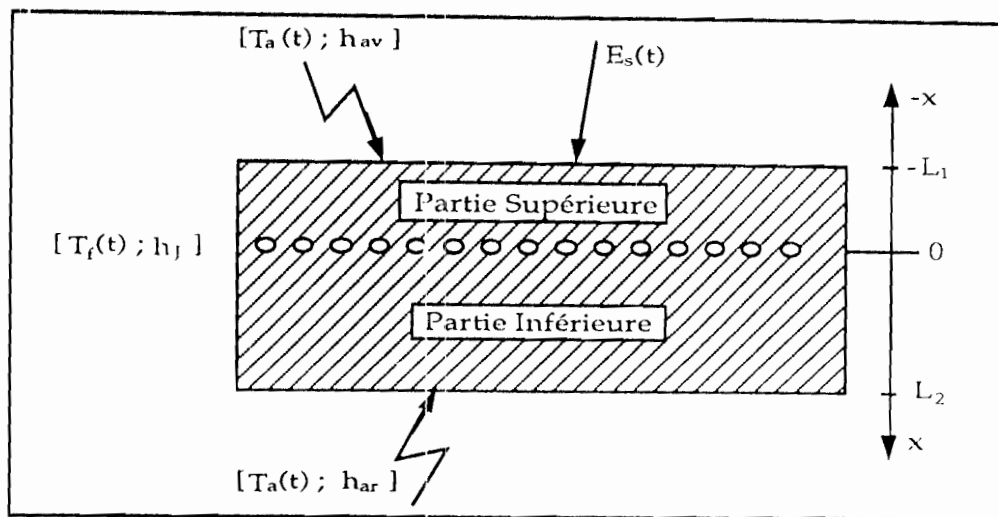


Figure 4.3 : Coupe transversale de la dalle en béton

Nous écrivons ensuite l'équation de la chaleur régissant le champ thermique de chacune de ces parties et procédons à leur l'étude. Nous commençons l'étude de la dalle récupératrice d'énergie solaire par la deuxième partie (partie inférieure).

IV.4. ETUDE DE LA PARTIE INFÉRIEURE DE LA DALLE EN BETON ($x=0$ à $x=L_2$)

Pour l'étude de la partie inférieure de la dalle, nous nous inspirons de l'étude du mur plan faite au chapitre III.

IV.4.1. Equation du champ thermique de la partie inférieure de la dalle

La partie inférieure de la dalle est limitée par la surface arrière et la tuyauterie. La figure 4.4 représente le schéma.

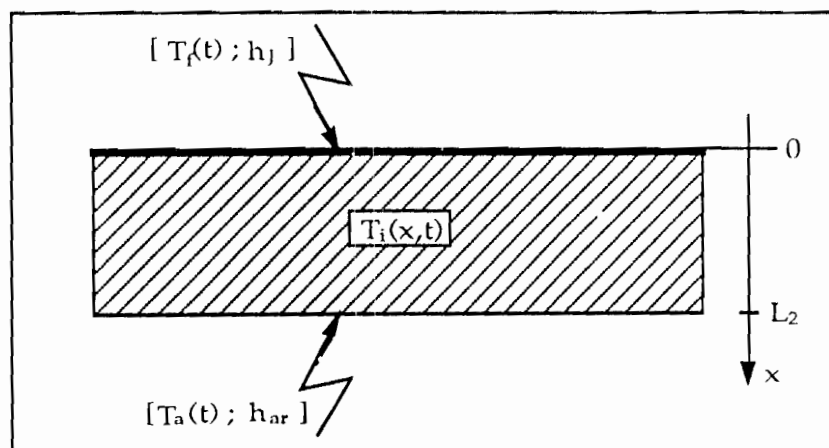


Figure 4.4 : Schéma de la partie inférieure de la dalle en béton

Le champ thermique dans la partie inférieure est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} \quad (\text{IV.7})$$

Les conditions aux limites (tenant compte des hypothèses de travail) de la partie inférieure de la dalle sont :

- à la surface limitée par la tuyauterie ($x=0$) :

$$-\lambda \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -h_j [T_i(0,t) - T_{mf}(t)] \quad (\text{IV.8})$$

où h_j : coefficient d'échanges thermiques de chaleur entre le fluide et la dalle à la jonction

des deux parties inférieure et supérieure délimitées par la tuyauterie dans la dalle;

$T_{mf}(t)$: température moyenne du fluide circulant dans le tuyau.

- à la face arrière ($x=L_2$) :

$$-\lambda \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = h_{ar} [T_i(L_2,t) - T_a(t)] \quad (\text{IV.9})$$

Nous remarquons que les conditions aux limites sont des fonctions de temps ($T_{mf}(t)$, $T_a(t)$) ; la résolution de (IV.7) ne pourra donc pas se faire [53] de manière classique (solution d'une équation différentielle ayant des constantes "indépendantes du temps t " comme conditions aux limites).

Pour la résolution de l'équation (IV.7) munie des conditions aux limites (IV.8) et (IV.9), nous appliquons le théorème de DUHAMEL [63].

Application du théorème de DUHAMEL

Soit $\Theta_i(x,t,t_1)$ la solution auxiliaire de l'équation (IV.7) munie des conditions aux limites (IV.8) et (IV.9).

Dans ce cas $\Theta_i(x,t,t_1)$ vérifie l'équation (IV.7) et les conditions aux limites (IV.8) et (IV.9) :

$$\frac{\partial^2 \Theta_i(x,t,t_1)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta_i(x,t,t_1)}{\partial t} \quad (\text{IV.10})$$

$$\frac{\partial \Theta_i(x,t,t_1)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{h_j}{\lambda} [\Theta_i(0,t,t_1) - T_{mf}(t_1)] \quad (\text{IV.11})$$

$$\frac{\partial \Theta_i(x,t,t_1)}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = -\frac{h_{ar}}{\lambda} [\Theta_i(L_2,t,t_1) - T_a(t_1)] \quad (\text{IV.12})$$

où : $T_a(t_1) = T_a(t=t_1)$: température ambiante dépendant du paramètre t_1 ;

$T_{mf}(t_1) = T_{mf}(t=t_1)$: température du fluide dépendant du paramètre t_1 .

Notons que $T_a(t_1)$ et $T_{mf}(t_1)$ ne dépendent plus du temps t , mais plutôt du paramètre constant t_1 (ce dernier n'étant pas une variable temps).

Le théorème de DUHAMEL conduit à la solution $T_i(x,t)$ de l'équation (IV.7) à partir de

la solution auxiliaire $\Theta_i(x,t,t_1)$ à l'aide de l'intégrale :

$$T_i(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\Theta_i(x, t-t_1, t_1)] dt_1 \quad (IV.13)$$

Nous devons ainsi déterminer préalablement la solution auxiliaire $\Theta_i(x,t,t_1)$ en résolvant l'équation (IV.10) ensuite déterminer la température $T_i(x,t)$ par application du théorème de DUHAMEL exprimé par la relation (IV.13).

Les équations différentielles (IV.11) et (IV.12) sont non-homogènes (existence d'un terme constant indépendant de la variable Θ_i). Pour simplifier la résolution de (IV.10), nous allons ramener (IV.12) à une équation différentielle homogène en réécrivant les équations (IV.10), (IV.11) et (IV.12) sous leur forme adimensionnelle (réduite).

Posons pour la partie inférieure de la dalle :

- variable réduite d'espace :

$$u = \frac{x}{L} \quad (IV.14)$$

- variable réduite de température :

$$\theta_i(u,\tau,\tau_1) = \frac{\Theta_i(x,t,t_1) - T_a(t_1)}{T_a(t_1)} \quad (IV.15)$$

où τ_1 est le paramètre réduit correspondant à t_1 :

En remplaçant (IV.14) et (IV.15) dans les équations différentielles (IV.10) , (IV.11) et (IV.12), nous obtenons l'équation adimensionnelle (réduite) de la conduction de la chaleur dans la partie inférieure de la dalle :

$$\frac{\partial^2 \theta_i(u,\tau,\tau_1)}{\partial u^2} = \frac{\partial \theta_i(u,\tau,\tau_1)}{\partial \tau} \quad (IV.16)$$

munie des conditions adimensionnelles aux limites :

$$\frac{\partial \theta_i(u,\tau,\tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_i \cdot \theta_i(0,\tau,\tau_1) + \theta_{IE}(t_1) \quad (IV.17)$$

$$\frac{\partial \theta_i(u,\tau,\tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = - Bi_{ar} \cdot \theta_i(L_2/L, \tau, \tau_1) \quad (IV.18)$$

où :

$\tau \equiv F_o$: variable réduite de temps (nombre de Fourier F_o) qui se définit par :

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \equiv F_o \quad (IV.19)$$

Bi : nombre de Biot qui se définit par :

$$Bi_k := \frac{h_k \cdot L}{\lambda} \quad (IV.20)$$

$\theta_{IE}(t_1)$: constante définie par l'expression :

$$\theta_{IE}(t_1) = \frac{h_j \cdot L}{\lambda \cdot T_a(t_1)} [T_a(t_1) - T_{mf}(t_1)] = \frac{Bi_j}{T_a(t_1)} [T_a(t_1) - T_{mf}(t_1)] \quad (IV.21)$$

La température réduite de la partie inférieure de la dalle $\theta_i(u, \tau, \tau_1)$ à un instant réduit donné τ peut s'écrire [53]:

$$\theta_i(u, \tau, \tau_1) = \theta_i(u, \tau_1) + \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1) \quad (IV.22)$$

avec $\theta_i(u, \tau_1)$: température réduite correspondant au régime permanent

$\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)$: température réduite correspondant au régime transitoire

En remplaçant cette dernière dans les expressions (IV.16), (IV.17) et (IV.18) nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \theta_i(u, \tau_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u^2} = \frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial \tau} \quad (IV.23)$$

munie des conditions adimensionnelles aux limites :

$$\frac{\partial \theta_i(u, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} + \frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot \theta_i(0, \tau_1) + Bi_j \cdot \delta\theta_i(0, \tau, \tau_1) + \theta_{IE}(t_1) \quad (IV.24)$$

$$\frac{\partial \theta_i(u, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} + \frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = -Bi_{ar} \cdot \theta_i(L_2/L, \tau_1) - Bi_{ar} \cdot \delta\theta_i(L_2/L, \tau, \tau_1) \quad (IV.25)$$

A l'aide de la méthode de superposition [54] nous allons séparer ces équations en deux sous groupes régissant respectivement les températures réduites correspondant aux régimes permanent $\theta_i(u, \tau_1)$ et transitoire $\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)$ de la partie inférieure de la dalle :

- régime permanent :

$$\frac{\partial^2 \theta_i(u, \tau_1)}{\partial u^2} = 0$$

munie des conditions adimensionnelles aux limites :

$$\frac{\partial \theta_i(u, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot \theta_i(0, \tau_1) + \theta_{IE}(t_1)$$

$$\frac{\partial \theta_i(u, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = -Bi_{ar} \cdot \theta_i(L_2/L, \tau_1)$$

- régime transitoire :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u^2} = \frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial \tau}$$

munie des conditions adimensionnelles aux limites :

$$\frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot \delta\theta_i(0, \tau, \tau_1)$$

$$\frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = -Bi_{ar} \cdot \delta\theta_i(L_2/L, \tau, \tau_1)$$

IV.4.2. Etude en régime transitoire de la partie inférieure de la dalle

La résolution de l'équation adimensionnelle de conduction de chaleur en régime transitoire permet d'obtenir l'expression la température réduite $\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)$

L'équation différentielle pour le régime permanent est :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u^2} = \frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial \tau} \quad (IV.26)$$

munie des conditions adimensionnelles aux limites (partie inférieure) :

$$\frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot \delta\theta_i(0, \tau, \tau_1) \quad (IV.27)$$

$$\frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = - Bi_{ar} \cdot \delta\theta_i(L_2/L, \tau, \tau_1) \quad (IV.28)$$

La température réduite $\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)$ est la solution de l'équation (IV.26) munie des conditions aux limites (IV.27) et (IV.28).

Nous rechercherons une solution de l'équation (IV.26), sous la forme de variables séparables [55] en espace $U_i(u, \tau_1)$ et en temps $T_i(\tau)$:

$$\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1) = U_i(u, \tau_1) \cdot T_i(\tau) \quad (IV.29)$$

En la remplaçant dans les expressions (IV.26), (IV.27) et (IV.28) nous obtenons :

$$\frac{1}{U_i(u, \tau_1)} \frac{\partial^2 U_i(u, \tau_1)}{\partial u^2} = \frac{1}{T_i(\tau)} \frac{\partial T_i(\tau)}{\partial \tau} = -\omega_i^2 \quad (IV.30)$$

où : $\omega_i > 0$ est une valeur propre réduite positive pour la partie inférieure de la dalle

L'équation (IV.30) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\frac{1}{T_i(\tau)} \frac{\partial T_i(\tau)}{\partial \tau} = -\omega_i^2 \quad (IV.31)$$

et

$$\frac{1}{U_i(u, \tau_1)} \frac{\partial^2 U_i(u, \tau_1)}{\partial u^2} = -\omega_i^2 \quad (IV.32)$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial U_i(u, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot U_i(0, \tau_1) \quad (IV.33)$$

$$\frac{\partial U_i(u, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = - Bi_{ar} \cdot U_i(L_2/L, \tau_1) \quad (IV.34)$$

L'équation (IV.31) a pour solution ($\omega_{i_n} > 0$, et "n" appartenant N):

$$T_{i_n}(\tau) = T_{i_n}(0) \cdot \exp[-(\omega_{i_n}^2)\tau] = T_{i_n}(0) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (IV.35)$$

où τ_{do} est la constante de temps de décroissance réduite définie par :

$$\tau_{do} = \frac{1}{\omega_{in}^2} \quad (IV.36)$$

La recherche des nombres ω_i et des fonctions non identiquement nulles $U_{i_n}(u, \tau_1)$ solutions de (IV.32) et vérifiant les conditions (IV.33) et (IV.34), est un problème régulier de Sturm-Liouville [IV.a3]. Alors pour des fonctions $U_{i_n}(u, \tau_1)$ non nulles, l'équation (IV.32) a pour solution :

$$U_{i_n}(u, \tau_1) = a_n \cos(\omega_{i_n} \cdot u) + b_n \sin(\omega_{i_n} \cdot u) \quad (IV.37)$$

A l'aide des conditions aux limites (IV.33) et (IV.34), nous déterminons l'équation transcendante ci-dessous qui permet de déterminer les paramètres ω_{i_n} pour Bi_j et Bi_{ar} donnés.

$$\tan(L_2 \cdot \omega_{i_n} / L) = \frac{\omega_{i_n} (Bi_j + Bi_{ar})}{\omega_{i_n}^2 - Bi_j \cdot Bi_{ar}} \quad (IV.38)$$

avec :

$$n \cdot \pi \leq \frac{\omega_{i_n} \cdot L_2}{L} < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi \quad (IV.39)$$

La figure 4.5 représente les courbes de l'équation transcendante (IV.38), pour les valeurs : $Bi_j=3$, $Bi_{ar}=2$, $L_2=0.08$ m, et $L=0.1$ m.

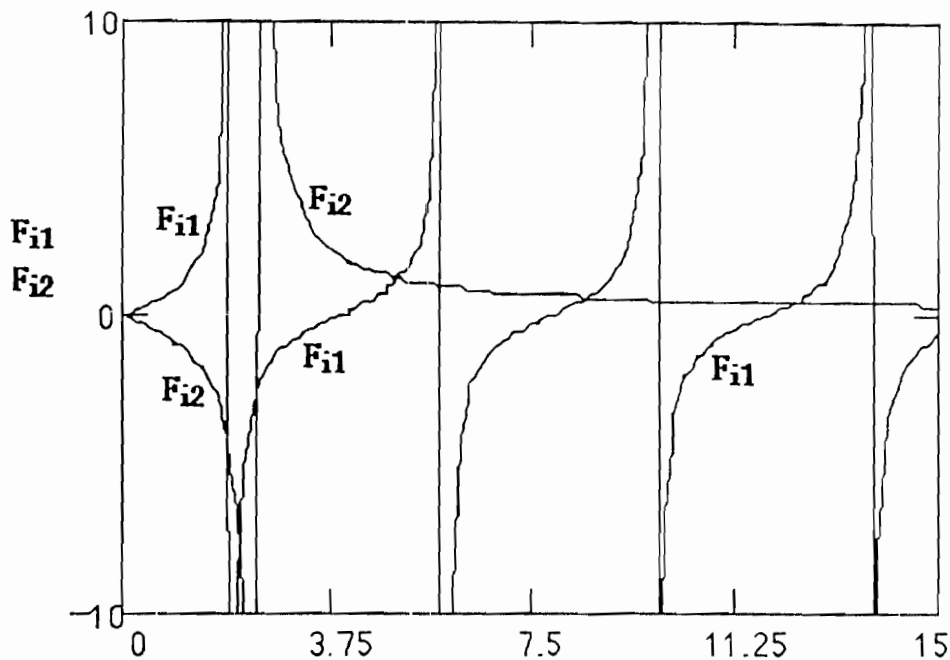


Figure 4.5 : Représentation des solutions de l'équation transcendante

De cette figure nous déterminons les racines ω_{i_n} de l'équation (IV.38) qui sont les points d'intersection des courbes des deux fonctions trigonométrique F_{i1} et homographe F_{i2} :

$$F_{i1} = \tan(L_2 \cdot \omega_{i_n} / L) \quad \text{et} \quad F_{i2} = \frac{\omega_{i_n} (Bi_j + Bi_{ar})}{\omega_{i_n}^2 - Bi_j \cdot Bi_{ar}}$$

Les valeurs obtenues sont données dans le tableau 4 ci-dessous.

Tableau 4 : Valeurs de ω_{i_n} solutions de l'équation transcendante

n	0	1	2	3	4	5	6
ω_i	2,132	5,069	8,562	12,282	16,094	19,947	23,823

a) Détermination des coefficients a_n des fonctions $U_{i_n}(u, \tau_1)$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés de manière à ce que la série des fonctions $U_{i_n}(u)$ soit orthonormée [56] ; soit :

$$\int_0^{L_2/L} U_{i_n}(u)^2 du = 1 \quad (\text{IV.40})$$

Nous obtenons ainsi :

$$\int_0^{L_2/L} [a_n \cos(\omega_{i_n} u) + b_n \sin(\omega_{i_n} u)]^2 du = 1 \quad (\text{IV.41})$$

Les coefficients a_n et b_n sont liés par la relation suivante obtenue à l'aide de la condition aux limites (IV.33) :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\omega_{i_n}}{B_{i_j}} \quad (\text{IV.42})$$

En remplaçant b_n (par son expression explicite tirée de (IV.42)) dans (IV.41) nous obtenons :

$$\int_0^{L_2/L} a_n^2 \left[\cos(\omega_{i_n} u) + \frac{B_{i_j}}{\omega_{i_n}} \sin(\omega_{i_n} u) \right]^2 du = 1 \quad (\text{IV.43})$$

$$a_n^2 \int_0^{L_2/L} \left[\cos^2(\omega_{i_n} u) + \left[\frac{B_{i_j}}{\omega_{i_n}} \right]^2 \sin^2(\omega_{i_n} u) + \frac{B_{i_j}}{\omega_{i_n}} 2 \cos(\omega_{i_n} u) \sin(\omega_{i_n} u) \right] du = 1 \quad (\text{IV.44})$$

Les coefficients a_n déterminés à partir de la dernière équation ont pour expression :

$$a_n = \left[a_{1n} + \left[\frac{B_{i_j}}{\omega_{i_n}} \right]^2 a_{2n} + \frac{B_{i_j}}{2\omega_{i_n}^2} a_{3n} \right]^{-1/2} \quad (\text{IV.45})$$

Les coefficients b_n déterminés à partir de l'équation (IV.42), ont pour expression :

$$b_n = \frac{B_{i_j}}{\omega_{i_n}} \left[a_{1n} + \left[\frac{B_{i_j}}{\omega_{i_n}} \right]^2 a_{2n} + \frac{B_{i_j}}{2\omega_{i_n}^2} a_{3n} \right]^{-1/2} \quad (\text{IV.46})$$

où :

$$a_{1n} = \frac{L_2}{2.L} + \frac{1}{4.\omega_{i_n}} \sin \left[\frac{2.\omega_{i_n}.L_2}{L} \right] \quad (\text{IV.47})$$

$$a_{2n} = \frac{L_2}{2.L} - \frac{1}{4.\omega_n} \sin\left[\frac{2.\omega_n.L_2}{L}\right] \quad (\text{IV.48})$$

$$a_{3n} = 1 - \cos\left[\frac{2.\omega_n.L_2}{L}\right] \quad (\text{IV.49})$$

En remplaçant $U_{in}(u, \tau_1)$ et $Ti_n(\tau)$ dans (IV.29), il vient :

$$\delta\theta_{in}(u, \tau, \tau_1) = U_{in}(u, \tau_1).Ti_n(\tau) \quad (\text{IV.50})$$

$$\delta\theta_{in}(u, \tau, \tau_1) = \left[a_n \cos(\omega_n.u) + b_n \sin(\omega_n.u) \right] Ti_n(0). \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (\text{IV.51})$$

La solution générale de l'équation (IV.26) est la série orthonormée (de fonctions orthogonales) suivante :

$$\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta\theta_{in}(u, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{in}(u, \tau_1).Ti_n(\tau) \quad (\text{IV.52})$$

$$\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n.u) + b_n \sin(\omega_n.u) \right] Ti_n(0). \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (\text{IV.53})$$

b) Détermination des coefficients $Ti_n(0)$

Les coefficients $Ti_n(0)$ peuvent être calculés à l'aide d'un développement en série (orthonormée) de fonctions orthogonales $U_{in}(u, \tau_1)$.

Pour $\tau=0$ l'expression (IV.52) devient :

$$\delta\theta_i(u, 0, \tau_1) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{in}(u, \tau_1).Ti_n(0) \quad (\text{IV.54})$$

En multipliant les deux membres de (IV.54) par $\int_0^{L_2/L} U_{in}(u, \tau_1).du$, nous aurons :

$$\int_0^{L_2/L} U_{in}(u, \tau_1).\delta\theta_i(u, 0, \tau_1).du = \int_0^{L_2/L} \sum_{n=1}^{\infty} [U_{in}(u, \tau_1)]^2.Ti_n(0).du \quad (\text{IV.55})$$

En appliquant la propriété de l'orthogonalité des fonctions $U_{in}(u, \tau_1)$, à savoir :

$$\int_0^{L_2/L} U_{im}(u, \tau_1).U_{in}(u, \tau_1).du = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ N(\omega_n) = 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

où : $N(\omega_{i_n}) = \int_0^{L_2/L} [U_{i_n}(u, \tau_1)]^2 \cdot du = 1$, défini la normalisation des fonctions $U_{i_n}(u, \tau_1)$

l'équation (IV.55) devient :

$$\int_0^{L_2/L} U_{i_n}(u, \tau_1) \cdot \delta\theta_i(u, 0, \tau_1) \cdot du = Ti_n(0) \int_0^{L_2/L} [U_{i_n}(u, \tau_1)]^2 \cdot du = Ti_n(0) \cdot N(\omega_{i_n}) \quad (IV.57)$$

d'où l'expression permettant le calcul des coefficients $Ti_n(0)$:

$$Ti_n(0) = \int_0^{L_2/L} U_{i_n}(u, \tau_1) \cdot \delta\theta_i(u, 0, \tau_1) \cdot du \quad (IV.58)$$

$$Ti_n(0) = \int_0^{L_2/L} a_n \left[\cos(\omega_{i_n} \cdot u) + \frac{Bi_j}{\omega_{i_n}} \sin(\omega_{i_n} \cdot u) \right] \delta\theta_i(u, 0, \tau_1) \cdot du \quad (IV.59)$$

Nous allons dans le paragraphe suivant, déterminer $\delta\theta_i(u, 0, \tau_1) = \delta\theta_i(u, \tau = \tau' = 0^+, \tau_1)$ correspondant à l'instant initial du processus transitoire.

a) Détermination de la température réduite transitoire $\delta\theta_i(u, 0, \tau_1)$

La température réduite $\delta\theta_i(u, \tau', \tau_1)$ est obtenue en résolvant l'équation suivante qui régit le régime quasi-permanent ($\tau = \tau' < 0$) de la partie inférieure de la dalle :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta_i(u, \tau', \tau_1)}{\partial u^2} = 0 \quad (IV.60)$$

munie des conditions aux limites de la partie inférieure de la dalle :

$$\frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau', \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot \delta\theta_i(u, \tau', \tau_1) \quad (IV.61)$$

$$\frac{\partial \delta\theta_i(u, \tau', \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_2/L} = -Bi_{ar} \cdot \delta\theta_i(L_2/L, \tau', \tau_1) \quad (IV.62)$$

La solution de l'équation homogène (IV.60) est de forme :

$$\delta\theta_i(u, \tau', \tau_1) = A \cdot u + B \quad (IV.63)$$

Adoptons la notations :

$$\delta\theta_o = \delta\theta_i(0, 0, \tau_1) = \delta\theta_i(u, \tau' = 0, \tau_1) \quad (IV.64)$$

Pour $u=0$, l'équation (IV.63) devient :

$$B = \delta\theta_o = \delta\theta_i(0, 0, \tau_1) \quad (IV.65)$$

A l'aide de la condition aux limites (IV.62) la constante A est exprimée par :

$$A = -\delta\theta_o \frac{L \cdot Bi_{ar}}{L + L_2 \cdot Bi_{ar}} \quad (IV.66)$$

En remplaçant A et B dans (IV.63) nous aurons :

$$\delta\theta_i(u, \tau', \tau_1) = \delta\theta_o \left[1 - \left[\frac{L \cdot Bi_{ar}}{L + L_2 \cdot Bi_{ar}} \right] u \right] = \delta\theta_o [1 - u \cdot Bi_a \cdot F_1] \quad (IV.67)$$

où :

$$F_1 = \frac{L}{L + L_2 \cdot Bi_{ar}} \quad (IV.68)$$

En remplaçant $\delta\theta_i(u, 0, \tau_1) = \delta\theta_i(u, \tau = \tau' = 0^+, \tau_1)$ dans l'expression (IV.59), nous aurons :

$$Ti_n(0) = \int_0^{L_2/L} a_n \left[\cos(\omega_{i_n} \cdot u) + \frac{Bi_j}{\omega_{i_n}} \sin(\omega_{i_n} \cdot u) \right] \delta\theta_i(u, 0, \tau_1) du$$

$$Ti_n(0) = \int_0^{L_2/L} a_n \left[\cos(\omega_{i_n} \cdot u) + \frac{Bi_j}{\omega_{i_n}} \sin(\omega_{i_n} \cdot u) \right] \cdot \delta\theta_o [1 - u \cdot Bi_a \cdot F_1] du \quad (IV.69)$$

$$Ti_n(0) = a_n \cdot \delta\theta_o [Ti_{1n}(0) + Ti_{2n}(0)] \quad (IV.70)$$

avec :

$$Ti_{1n}(0) = \int_0^{L_2/L} [1 - u \cdot Bi_a \cdot F_1] \cdot \cos(\omega_{i_n} \cdot u) du \quad (IV.71)$$

$$Ti_{2n}(0) = \frac{Bi_j}{\omega_{i_n}} \int_0^{L_2/L} [1 - u \cdot Bi_a \cdot F_1] \cdot \sin(\omega_{i_n} \cdot u) du \quad (IV.72)$$

A l'aide des formules d'Euler-Fourier, les calculs conduisent à :

$$Ti_{1n}(0) = \frac{F_1}{\omega_{i_n}} \left[\sin(\omega_{i_n} \cdot L_2/L) + \frac{Bi_{ar}}{\omega_{i_n}} [1 - \cos(\omega_{i_n} \cdot L_2/L)] \right] \quad (IV.73)$$

$$Ti_{2n}(0) = \frac{Bi_j \cdot F_1}{(\omega_{i_n})^2} \left[\frac{1}{F_1} - \cos(\omega_{i_n} \cdot L_2/L) - \frac{Bi_{ar}}{\omega_{i_n}} \sin(\omega_{i_n} \cdot L_2/L) \right] \quad (IV.74)$$

En remplaçant (IV.70) dans l'équation (IV.51), tout en tenant compte de (IV.42), nous obtenons :

$$\delta\theta_{in}(u, \tau, \tau_1) = (a_n)^2 \cdot \delta\theta_o \cdot U_{i_n}(u, \tau_1) [Ti_{1n}(0) + Ti_{2n}(0)] \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (IV.75)$$

$$\delta\theta_{in}(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_o \cdot F U_{i_n}(u, \tau_1) \cdot F Ti_n(\omega_{i_n}) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (IV.76)$$

où les fonctions $F U_{i_n}(u, \tau_1)$ et $F Ti_n(\omega_{i_n})$ sont respectivement définies par :

$$FU_{i_n}(u, \tau_1) = \left[\cos(\omega_{i_n} \cdot u) + \frac{Bi_j}{\omega_{i_n}} \cdot \sin(\omega_{i_n} \cdot u) \right] \quad (IV.77)$$

$$FTi_n(\omega_{i_n}) = (a_n) \cdot Ti_n(0) = (a_n)^2 [Ti_{1n}(0) + Ti_{2n}(0)] \quad (IV.78)$$

Le terme général de la température réduite s'écrit :

$$\delta\theta_{in}(\tau) = \frac{\delta\theta_{in}(u, \tau)}{\delta\theta_o \cdot FU_{i_n}(u, \tau_1)} = FTi_n(\omega_{i_n}) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (IV.79)$$

Ainsi la série obtenue de (IV.51) devient :

$$\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_{in}(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_o \sum_{n=0}^{\infty} FU_{i_n}(u, \tau_1) \cdot FTi_n(\omega_{i_n}) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (IV.80)$$

La série réduite s'écrit :

$$\delta\theta_i(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_{in}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} FTi_n(\omega_{i_n}) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{do}} \right] \quad (IV.81)$$

Remarque

La température réduite $\delta\theta_i(u, \tau)$ ne tient compte d'aucune condition particulière d'expérimentation (conditions aux limites de la dalle et à la jonction : température imposée ou flux de chaleur nul).

b) Conditions particulières à la jonction béton-tubes

Les conditions particulières à la jonction (limite des deux parties de la dalle) sont :

- température imposée sur le tuyau, où le coefficient d'échanges thermiques correspondant h_j tend vers l'infini (Bi_j tend vers l'infini) :

Cela conduit à

$$a_n = \frac{b_n \cdot \omega_{i_n}}{Bi_j} = 0 \quad (IV.82)$$

et l'équation transcendante (IV.38) devient alors :

$$\tan(L_2 \cdot \omega_{i_n} / L) = \frac{\omega_{i_n}}{Bi_{ar}} \quad (IV.83)$$

- flux nul à la jonction (surface isolée), où le coefficient d'échanges thermiques correspondant h_j tend vers zéro (Bi_j tend vers zéro) ; ainsi :

$$b_n = \frac{a_n \cdot Bi_j}{\omega_{i_n}} = 0 \quad (IV.84)$$

et l'équation transcendante (IV.38) devient alors :

$$\tan(L_2 \cdot \omega_{i_n} / L) = \frac{Bi_{ar}}{\omega_{i_n}} \quad (IV.85)$$

c) Conditions particulières à la limite inférieure de dalle

Les conditions particulières à la limite inférieure de dalle sont :

- température imposée sur la face arrière, où le coefficient d'échanges thermiques correspondant h_{ar} tend vers l'infini (Bi_{ar} tend vers l'infini) :

dans ce cas l'équation transcendante (IV.38) devient :

$$\tan(L_2 \cdot \omega_{i_n} / L) = \frac{\omega_{i_n}}{Bi_l} \quad (IV.86)$$

- flux nul sur la face arrière (surface isolée), où le coefficient d'échanges thermiques correspondant h_{ar} tend vers zéro (Bi_{ar} tend vers l'infini) ; l'équation transcendante (IV.38) devient alors :

$$\tan(L_2 \cdot \omega_{i_n} / L) = \frac{Bi_l}{\omega_{i_n}} \quad (IV.87)$$

avec :

$$n \cdot \pi \leq \frac{L_2 \cdot \omega_{i_n}}{L} < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi$$

où $n=0, 1, 2, \dots$

IV.4.3. Etude de la convergence de la série $\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)$

La série orthonormée infinie de la température réduite $\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)$ n'est physiquement acceptable que si elle est convergente dans l'intervalle $[0, L_2/L]$.

La valeur propre étant définie dans l'intervalle :

$$n \cdot \pi \leq \frac{\omega_{i_n} \cdot L_2}{L} < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi$$

l'évolution de chaque terme général de la série à travers l'équation (IV.76) fait ressortir pour tout ω_n :

$$| \cos(\omega_{i_n}) | \leq 1 \quad (IV.88)$$

$$| \sin(\omega_{i_n}) | \leq 1 \quad (IV.89)$$

Ceci conduit à :

$$| FUi_n(u) | \leq 1 \quad (IV.90)$$

D'autre part, en tenant compte des expressions (IV.45), (IV.47) à (IV.49), nous avons :

$$| (a_n)^2 | \leq \frac{2 \cdot L}{L_2} \quad (IV.91)$$

$Ti_n(0)$ étant une quantité finie, alors la fonction $FTi_n(\omega_{i_n})$ définie par (IV.78) est également une quantité finie :

$$| FTi_n(\omega_{i_n}) | \leq \frac{2 \cdot L}{L_2} Ti_n(0) \quad (IV.92)$$

De plus nous avons :

$$\omega_{i_n} < \left[n + \frac{1}{2} \right] (\pi \cdot L / L_2) \quad (IV.93)$$

soit :

$$(\omega_{i_n})^2 < (\pi \cdot L / L_2)^2 \left[n + \frac{1}{2} \right]^2 \quad (IV.94)$$

En tenant compte de (IV.94), le terme général de la série $\delta\theta_{in}(u,\tau)$ devient :

$$\delta\theta_{in}(u,\tau,\tau_1) = \delta\theta_o \cdot FUi_n(u,\tau_1) \cdot FTi_n(\omega_{i_n}) \cdot \exp [- (\pi \cdot L/L_2)^2 (n + 1/2)^2 \cdot \tau] \quad (IV.95)$$

Pour un τ fini la série peut s'écrire :

$$| \delta\theta_i(u,\tau,\tau_1) | \leq \delta\theta_o \sum_{n=0}^{\infty} FTi_n(\omega_{i_n}) \cdot \exp [- (\pi \cdot L/L_2)^2 (n + 1/2)^2 \cdot \tau] \quad (IV.96)$$

Ainsi pour u appartenant à l'intervalle $[0, L_2/L]$ et τ à celui $[\tau', \infty[$, la série est uniformément convergente. Pour illustrer cette convergence nous présentons à travers les figures 4.6 et 4.7 les variations respectives de $\delta\theta_{in}(\tau)$ et $\delta\theta_i(\tau)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de ω_{i_n} du tableau (4.1).

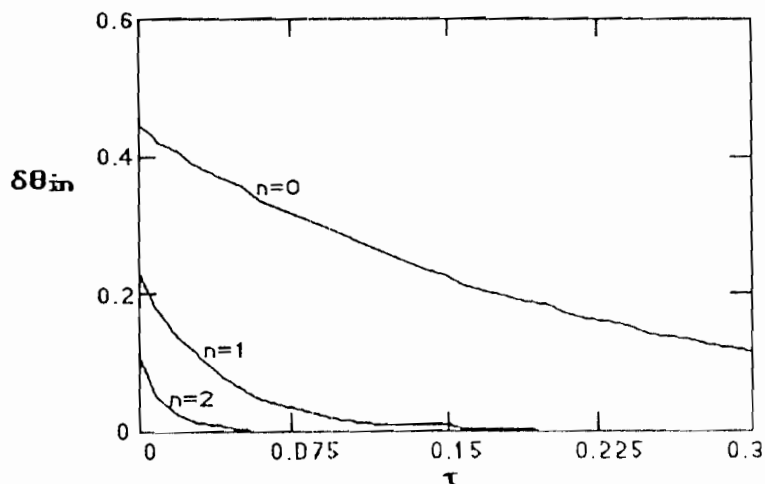


Figure 4.6 : Représentation des différents modes en fonction du temps réduit τ

Nous remarquons sur la figure 4.6, que pour le temps réduit $\tau \geq 0.22$, les amplitudes de la série $\delta\theta_{in}(\tau)$ s'annulent pour $n \geq 1$.

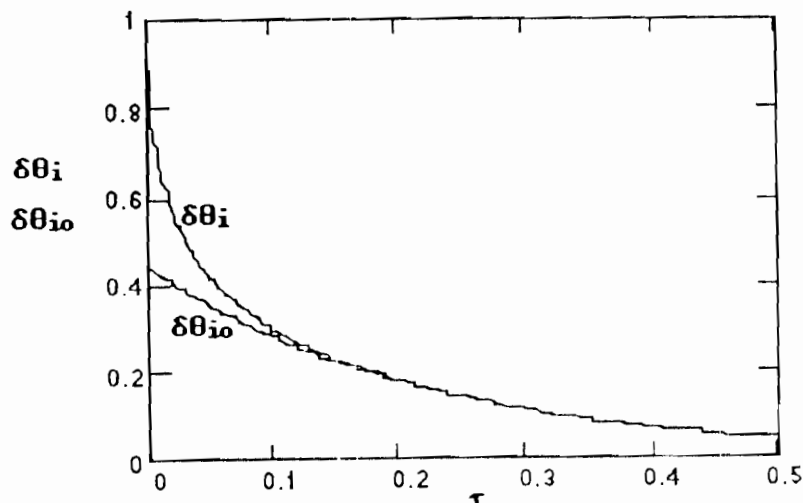


Figure 4.7 : Représentation de la série $\delta\theta_i(\tau)$ et du mode fondamental $\delta\theta_{i0}(\tau)$ en fonction du temps réduit τ

Nous constatons sur la figure 4.7, que la série $\delta\theta_{in}(\tau)$ se confond à la courbe $\delta\theta_i(\tau)$ correspondant au mode fondamental ($n=0$) pour le temps réduit $\tau > 0.20$.

Ces différentes courbes (fig. 4.6 et 4.7) montrent que la température réduite correspondant aux harmoniques supérieures ω_{i_n} ($n = 1, 2, \dots$) est négligeable comparée à celle correspondant ω_{i_0} pour $\tau > \tau' = 1/5$.

La figure 4.8 représente le profil de la température réduite $\delta\theta_{i_0}(\tau, u)$ en fonction de la profondeur réduite u pour différents temps réduits (τ/τ_{d_0}) .

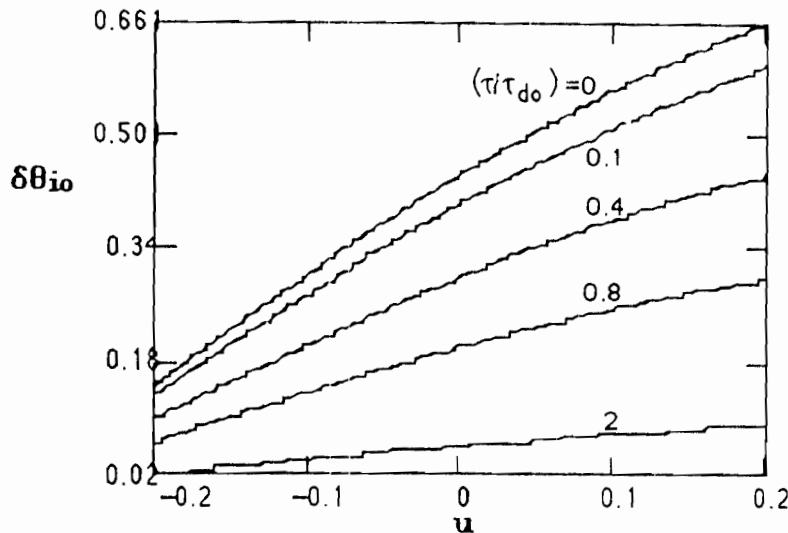


Figure 4.8 : Représentation de la température réduite $\delta\theta_{i_0}(\tau)$ en fonction de la profondeur à différents instants réduits

Nous remarquons sur les courbes de la figure 4.8 que la température réduite correspondant au mode fondamental diminue en valeur lorsque le temps réduit (τ/τ_{d_0}) augmente.

Remarque

Il ressort de cette analyse des figures 4.6 et 4.7 que l'expression de la température réduite peut se ramener au terme fondamental ci-dessous :

$$\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_{i_0}(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_o \cdot F U_{i_0}(u, \tau_1) \cdot F T_{i_0}(\omega_{i_0}) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{d_0}} \right] \quad (IV.97)$$

Nous définissons la température réduite ramenée au terme fondamental ($n=0$) par l'expression suivante :

$$\delta\theta_i(\tau) = \frac{\delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)}{\delta\theta_o \cdot F U_{i_0}(u, \tau_1)} = \frac{\delta\theta_{i_0}(u, \tau, \tau_1)}{\delta\theta_o \cdot F U_{i_0}(u, \tau_1)} = F T_{i_0}(\omega_{i_0}) \cdot \exp \left[-\frac{\tau}{\tau_{d_0}} \right] \quad (IV.98)$$

L'expression (IV.38) se réduit également au terme fondamental ($n=0$) et devient :

$$\tan(L_2 \cdot \omega_{i_0}/L) = \frac{\omega_{i_0}(B_{i_1} + B_{i_{ar}})}{\omega_{i_0}^2 - B_{i_1} \cdot B_{i_{ar}}} \quad (IV.99)$$

IV.4.4. Application de la technique de l'intersection de la fonction caractéristique $F T_{i_0}(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_i(0)$

Après avoir ramené la température réduite au terme fondamental, nous appliquons la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction caractéristique $F T_{i_0}(\omega)$ et

de l'ordonnée à l'origine [58] de la courbe de relaxation de la température réduite $\delta\theta_i(0)$ de la partie inférieure de la dalle ; ceci conduit à la détermination de ω_{i0} et des paramètres : τ_{do} et Bi_j . L'application de cette technique exige au préalable, l'étude de la fonction $FTi_0(\omega)$ et la détermination de l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_i(0)$.

a) Etude de la fonction $FTi_0(\omega)$

L'expression de la température réduite (IV.98) a pour amplitude $FTi_0(\omega)$. Cette dernière est une fonction caractéristique intrinsèque de la partie inférieure de la dalle, à travers les paramètres (de diffusivité α , de conductivité λ , de coefficients d'échanges thermiques h ou nombres correspondant de Biot Bi_j , Bi_{ar}) et des conditions d'expérimentation. En tenant compte de la relation (IV.99), l'expression de la fonction $FTi_0(\omega)$ dépend seulement des paramètres (ω et Bi_{ar}).

La figure 4.9 représente les courbes de la fonction caractéristique $FTi_0(\omega)$ du matériau, pour différentes valeurs du coefficient Bi_{ar} (0 ; 0.5 ; 1).

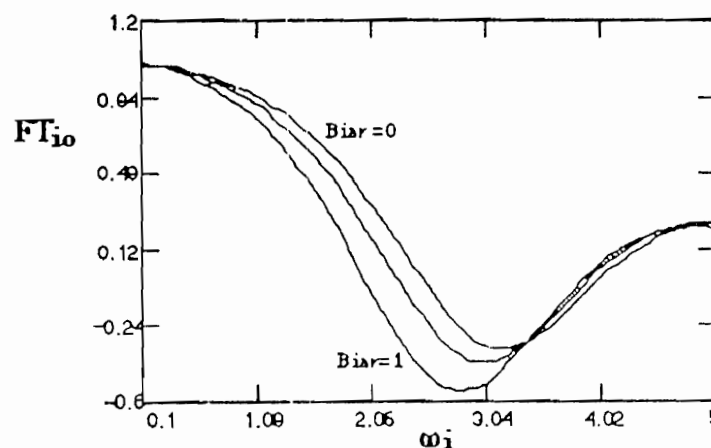


Figure 4.9 : Représentation de la fonction $FTi_0(\omega)$ pour différentes valeurs de Bi_{ar}

b) Détermination de $\delta\theta_i(0)$ et τ_{do}

L'ordonnée à l'origine $\delta\theta_i(0)$ et de la constante de temps réduit de décroissance τ_{do} sont La déterminées à partir d'une étude de la courbe expérimentale de relaxation de la température réduite $\delta\theta_{iexp}(\tau)$ pendant la phase transitoire.

Les courbes de température réduite $\delta\theta_{iexp}(\tau)$ sont obtenues par construction de nouvelles courbes correspondantes à celles issues directement de l'expérimentation $\delta T_{iexp}(x,t)$.

Les nouvelles courbes réduites correspondantes sont obtenues à l'aide de l'intégrale de DUHAMEL (théorème de DUHAMEL).

IV.4.4.1. Détermination de la température $T_i(x,t)$ à l'aide de l'intégrale de DUHAMEL

Le théorème de DUHAMEL conduit à la solution $T_i(x,t)$ de l'équation (IV.7) à partir de la solution auxiliaire $\Theta_i(x,t,t_1)$, à l'aide de l'intégrale :

$$T_i(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\Theta_i(x, t-t_1, t_1)] dt_1$$

En remplaçant la température réduite $\theta_i(u, \tau, \tau_1)$ par son expression (IV.22), dans l'équation (IV.15), nous obtenons l'expression suivante de la solution auxiliaire :

$$\Theta_i(x,t,t_1) = T_a(t_1) [1 + \theta_i(u, \tau, \tau_1)] = T_a(t_1) [1 + \theta_i(u, \tau_1) + \delta\theta_i(u, \tau, \tau_1)] \quad (IV.100)$$

En remplaçant (IV.100) dans l'équation (IV.13) il vient :

$$T_i(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\Theta_i(x, t-t_1, t_1)] dt_1 = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [T_a(t_1) \cdot \delta\theta_i(u, \tau-t_1, t_1)] dt_1 \quad (IV.101)$$

En tenant compte de (IV.97), l'équation (IV.101) devient :

$$T_i(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [T_a(t_1) \cdot \delta\theta_o \cdot FUi_0(u, \tau_1) \cdot FTi_0(\omega_{i0}) \cdot \exp[-(\tau-t_1)/\tau_{do}]] dt_1 \quad (IV.102)$$

Connaissant la relation $\tau = \alpha \cdot t / L^2$, il vient, après dérivation :

$$T_i(x,t) = - \frac{\delta\theta_{i0}(u, \tau)}{\tau_{do}} \int_{t_1=0}^t [T_a(t_1) \cdot \exp(t_1/\tau_{do})] dt_1 \quad (IV.103)$$

où la fonction $\delta\theta_{i0}(u, \tau)$ se définit par :

$$\delta\theta_{i0}(u, \tau) = \delta\theta_o \cdot FUi_0(u, \tau_1) \cdot FTi_0(\omega_{i0}) \cdot \exp(-\tau/\tau_{do}) \quad (IV.104)$$

En remplaçant dans l'équation (IV.103), la température ambiante $T_a(t_1)$ par :

$$T_a(t_1) = T_m + T_o \cdot \cos [\Omega \cdot (t_1 - t_{ms}) - v] \quad (IV.105)$$

nous obtenons l'expression de la température :

$$T_i(x,t) = - \frac{\delta\theta_{i0}(u, \tau) \cdot Ii(t)}{\tau_{do}} \quad (IV.106)$$

avec

$$Ii(t) = Ii_1(t) + Ii_2(t) \quad (IV.107)$$

où les fonctions $Ii_1(t)$ et $Ii_2(t)$ se définissent respectivement par :

$$Ii_1(t) = \int_{t_1=0}^t [T_m \cdot \exp(t_1/\tau_{do})] dt_1 = T_m \cdot \tau_{do} \cdot [\exp(t/\tau_{do}) - 1] \quad (IV.108)$$

$$Ii_2(t) = \int_{t_1=0}^t [T_o \cdot \cos [\Omega \cdot (t_1 - t_{ms}) - v] \cdot \exp(t_1/\tau_{do})] dt_1 = \frac{T_o \cdot \tau_{do} \cdot [Ii_{21}(t) + Ii_{22}(t)]}{[1 + \Omega^2 \cdot (\tau_{do})^2]} \quad (IV.109)$$

avec :

$$Ii_{21}(t) = \Omega \cdot \tau_{do} \cdot [\sin(\Omega \cdot t_{ms} + v) + \sin(\Omega \cdot (t - t_{ms}) - v) \cdot \exp(t/\tau_{do})] \quad (IV.110)$$

$$I_{22}(t) = \cos(\Omega.(t - t_{ms}) - v). \exp(t/t_{do}) - \cos(\Omega.t_{ms} + v) \quad (IV.111)$$

Nous savons d'autre part que la température à un instant donné t est exprimée par :

$$T_i(x,t) = T_i(x) + \delta T_i(x,t) \quad (IV.112)$$

De même nous avons :

$$T_{iexp}(x,t) = T_{iexp}(x) + \delta T_{iexp}(x,t)$$

Ainsi connaissant la constante de temps de décroissance t_{do} et l'ordonnée à l'origine de la température $\delta T_{sexp}(0)$, nous calculons l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta \theta_{sexp}(0)$ à l'aide de l'équation suivante :

$$\delta \theta_{iexp}(\tau) = \frac{-t_{do} \cdot \delta T_{iexp}(t)}{I_i(t)} \quad (IV.113)$$

La dernière relation conduit également à la courbe réduite expérimentale :

$$\delta \theta_{iexp}(\tau') = FT_{i0}(\omega_{i0}) \cdot \exp\left[-\frac{\tau'}{\tau_{do}}\right] \quad (IV.114)$$

où : τ' correspond au début (premier point) de la décroissance exponentielle de $\delta \theta_{sexp}(\tau)$ donnée par le meilleur fit des points expérimentaux.

La constante de temps réduit τ_{do} est déterminée à partir de la courbe expérimentale de relaxation de la température réduite $\delta \theta_{iexp}(\tau)$.

IV.4.4.2. Détermination de la valeur caractéristique propre ω_{i0}

De l'équation (IV.114) de la température réduite $\delta \theta_i(\tau')$ pendant la phase transitoire, l'ordonnée à l'origine ($\tau'=0$) est donnée par :

$$\delta \theta_i(\tau'=0) = FT_{i0}(\omega_{i0}) \quad (IV.115)$$

En reportant $\delta \theta_i(0) \pm \Delta(\delta \theta_i(0))$ sur la courbe $FT_{i0}(\omega_{i0})$ comme l'indique le figure 4.10, l'intersection donne la valeur $\omega_{i0} \pm \Delta(\omega_{i0})$.

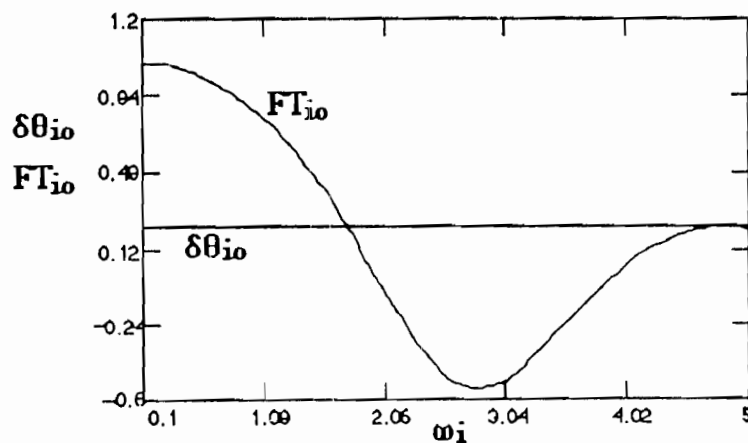


Figure 4.10 : Technique de l'intersection du mode fondamental et de l'ordonnée à l'origine

IV.4.4.3. Détermination du coefficient d'échange réduit Bi_j

Connaissant la valeur ω_0 et la constante de temps réduite de décroissance τ_{do} ($\pm \Delta(\tau_{do})$) de la température réduite $\delta\theta_i(\tau')$ pendant la phase transitoire dans les conditions ci-dessus définies l'équation (IV.99) conduit à la valeur du nombre de Biot Bi_j de la jonction béton-tubes (emplacement de la tuyauterie) :

$$Bi_j = \frac{\omega_0 [\omega_0 \cdot \tan(\omega_0 \cdot L_2/L) - Bi_{ar}]}{[\tan(\omega_0 \cdot L_2/L) \cdot Bi_{ar} + \omega_0]} \quad (IV.116)$$

Remarque

Les expressions des paramètres α , λ et h_g sont données à la fin de ce chapitre.

IV.5. ETUDE DE LA PARTIE SUPERIEURE DE LA DALLE EN BETON ($x=0$ à $x=-L_1$)

L'étude de la partie supérieure de la dalle est faite identiquement à l'étude de la partie inférieure. Nous nous passerons ainsi de certains détails déjà exposés dans l'étude précédente.

IV.5.1. Equation du champ thermique de la partie supérieure de la dalle

Le schéma synoptique de la partie supérieure de la dalle (limitée par la surface avant et la tuyauterie) est représenté par la figure 4.11.

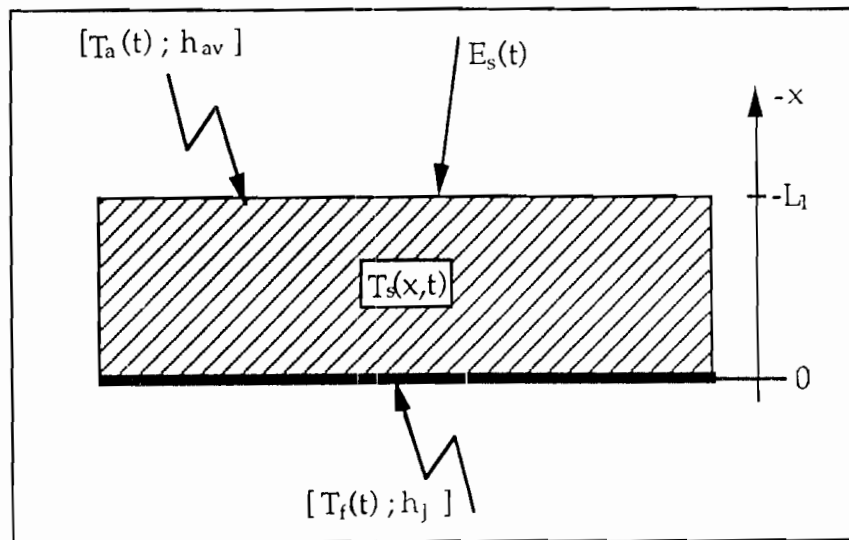


Figure 4.11 : Schéma de la partie supérieure de la dalle en béton

Le champ thermique dans la partie supérieure de la dalle est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 T_s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial t} \quad (IV.117)$$

munie des conditions aux limites :

- à la face avant ensoleillée ($x=-L_1$)

$$\lambda \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=-L_1} = h_{av} [T_s(-L_1,t) - T_a(t)] - k \cdot E_s(t) \quad (IV.118)$$

- à la surface limitée par la tuyauterie ($x=0$)

$$-\lambda \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_j [T_s(0,t) - T_{mf}(t)] \quad (IV.119)$$

où h_j : coefficient d'échange de chaleur entre le fluide et la dalle à la jonction des deux parties supérieure et inférieure délimitées par la tuyauterie dans la dalle;

T_{mf} : température moyenne du fluide circulant dans le tuyau.

L'équation (IV.118) peut s'écrire :

$$\lambda \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=-L_1} = \frac{h_{av}}{\lambda} \left[T_s(-L_1,t) - [T_a(t) + \frac{k}{h_{av}} E_s(t)] \right] \quad (IV.120)$$

$$\lambda \frac{\partial T_s(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=-L_1} = \frac{h_{ev}}{\lambda} [T_s(-L_1,t) - F_a(t)] \quad (IV.121)$$

où $F_a(t)$ est la température équivalente [IV.5, IV.6] ; c'est une grandeur qui rassemble en une seule sollicitation thermique, l'influence simultanée de la température ambiante $T_a(t)$, de l'ensoleillement $E_s(t)$ et des échanges radiatifs de grandes longueurs d'ondes ; elle est définie par son expression la plus simple [64] :

$$F_a(t) = T_a(t) + \frac{k}{h_{av}} E_s(t) \quad (IV.122)$$

Pour les mêmes raisons évoquées dans l'étude de la partie inférieure de la dalle, l'équation (IV.117) munie des conditions aux limites (IV.118) et (IV.119) est résolue par application du théorème de DUHAMEL.

Application du théorème de DUHAMEL

Soit $\Theta_s(x,t,t_1)$ la solution auxiliaire de l'équation (IV.117) munie des conditions aux limites (IV.118) et (IV.119). Dans ce cas $\Theta_s(x,t,t_1)$ vérifie (IV.117), (IV.118) et (IV.119) :

$$\frac{\partial^2 \Theta_s(x,t,t_1)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta_s(x,t,t_1)}{\partial t} \quad (IV.123)$$

$$\frac{\partial \Theta_s(x,t,t_1)}{\partial x} \Big|_{x=-L_1} = \frac{h_{av}}{\lambda} [\Theta_s(-L_1,t,t_1) - F_a(t_1)] \quad (IV.124)$$

$$\frac{\partial \Theta_s(x,t,t_1)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{h_j}{\lambda} [\Theta_s(0,t,t_1) - T_{mf}(t_1)] \quad (IV.125)$$

où $F_a(t_1) = F_a(t=t_1)$: fonction d'ambiance dépendant du paramètre t_1 ;

$T_{mf}(t_1) = T_{mf}(t=t_1)$: température du fluide dépendant du paramètre t_1 .

Le théorème de DUHAMEL conduit à la solution $T_s(x,t)$ de l'équation (IV.117) à partir de la solution auxiliaire $\Theta_s(x,t,t_1)$ à l'aide de l'intégrale :

$$T_s(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} \Theta_s(x, t-t_1, t_1) dt_1 \quad (IV.126)$$

Nous devons ainsi déterminer préalablement la solution auxiliaire $\Theta_s(x,t,t_1)$ en résolvant l'équation (IV.123) ensuite calculer la température $T_s(x,t)$ par application du théorème de DUHAMEL exprimé par la relation (IV.126).

Les équations différentielles (IV.123), (IV.124) et (IV.125) sont également non-homogènes. Pour simplifier leur résolution nous allons les réécrire sous forme adimensionnelle.

Pour la partie supérieure de la dalle, posons :

- variable d'espace réduite :

$$u = \frac{x}{L} \quad (IV.127)$$

- variable de température réduite :

$$\theta_s(u, \tau, \tau_1) = \frac{\Theta_s(x, t, t_1) - F_a(t_1)}{F_a(t_1)} \quad (IV.128)$$

où τ_1 est le paramètre réduit correspondant t_1 :

En remplaçant (IV.127) et (IV.128) dans les équations différentielles (IV.123), (IV.124) et (IV.125), nous obtenons l'équation réduite de la conduction de chaleur de la partie supérieure de la dalle :

$$\frac{\partial^2 \theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial u^2} = \frac{\partial \theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial \tau} \quad (IV.129)$$

munie des conditions adimensionnelles aux limites (de la partie supérieure de la dalle) :

$$\frac{\partial \theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_1/L} = -Bi_{av} \cdot \theta_s(L_1/L, \tau, \tau_1) \quad (IV.130)$$

$$\frac{\partial \theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = Bi_j \cdot \theta_s(0, \tau, \tau_1) + \theta_{SE}(t_1) \quad (IV.131)$$

où : $\tau \equiv F_0$: variable réduite de temps (nombre de Fourier F_0) définie par :

$$\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2} \equiv F_0 \quad (IV.132)$$

Bi : nombre de Biot défini par :

$$Bi_k = \frac{h_k \cdot L}{\lambda} \quad (IV.133)$$

$\theta_{SE}(t_1)$: constante définie par l'expression :

$$\theta_{SE}(t_1) = \frac{Bi_j}{F_a(t_1)} \left[T_{mf}(t_1) - T_a(t_1) - \frac{k}{h_{av}} E_s(t_1) \right] \quad (IV.134)$$

La température réduite de la partie supérieure $\theta_s(u, \tau, \tau_1)$ à un instant donné τ peut s'écrire :

$$\theta_s(u, \tau, \tau_1) = \theta_s(u, \tau_1) + \delta \theta_s(u, \tau, \tau_1) \quad (IV.135)$$

où $\theta_s(u, \tau_1)$: température réduite correspondant au régime permanent

$\delta \theta_s(u, \tau, \tau_1)$: température réduite correspondant au régime transitoire

IV.5.2. Etude en régime transitoire de la partie supérieure de la dalle

En tenant compte du développement similaire fait dans l'étude de la partie supérieure de la dalle, l'équation différentielle régissant le régime transitoire s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \delta\theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial u^2} = \frac{\partial \delta\theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial \tau} \quad (IV.136)$$

avec les conditions réduites aux limites :

$$\frac{\partial \delta\theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=L_1/L} = Bi_{av} \cdot \delta\theta_s(-L_1/L, \tau, \tau_1) \quad (IV.137)$$

$$\frac{\partial \delta\theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\partial u} \Big|_{u=0} = -Bi_j \cdot \delta\theta_s(0, \tau, \tau_1) \quad (IV.138)$$

La résolution de l'équation (IV.136), par la méthode de variables séparables d'espace et de temps conduit à la solution :

$$\delta\theta_s(u, \tau, \tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_{sn}(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_o \sum_{n=0}^{\infty} FU_{sn}(u, \tau_1) \cdot FT_{sn}(\omega_{sn}) \cdot \exp[-\tau/\tau_{do}] \quad (IV.139)$$

La série réduite s'écrit :

$$\delta\theta_s(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\theta_{sn}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} FT_{sn}(\omega_{sn}) \cdot \exp[-\tau/\tau_{do}] \quad (IV.140)$$

avec : τ_{do} est la constante de temps de décroissance réduite définie par :

$$\tau_{do} = \frac{1}{\omega_{sn}^2} \quad (IV.141)$$

$FU_{sn}(u, \tau_1)$ et $FT_{sn}(\omega_{sn})$ respectivement, fonction d'espace et fonction caractéristique :

$$FU_{sn}(u, \tau_1) = \left[\cos(\omega_{sn} \cdot u) - \frac{Bi_j}{\omega_{sn}} \cdot \sin(\omega_{sn} \cdot u) \right] \quad (IV.142)$$

$$FT_{sn}(\omega_{sn}) = (a_n) \cdot Ts_n(0) = (a_n)^2 [Ts_{1n}(0) + Ts_{2n}(0)] \quad (IV.143)$$

où :

$$Ts_{1n}(0) = \frac{F_2}{\omega_{sn}} \left[\frac{Bi_{av}}{\omega_{sn}} [\cos(\omega_{sn} \cdot L_1/L) - 1] - \sin(\omega_{sn} \cdot L_1/L) \right] \quad (IV.144)$$

$$Ts_{2n}(0) = \frac{Bi_j \cdot F_2}{(\omega_{sn})^2} \left[\cos(\omega_{sn} \cdot L_1/L) + \frac{Bi_{av}}{\omega_{sn}} \sin(\omega_{sn} \cdot L_1/L) - \frac{1}{F_2} \right] \quad (IV.145)$$

$$F_2 = \frac{L}{L + L_1 \cdot Bi_{av}} \quad (IV.146)$$

$$a_n = \left[a_{1n} + \left[\frac{Bi_j}{\omega_{sn}} \right]^2 a_{2n} - \frac{Bi_j}{2\omega_{sn}^2} a_{3n} \right]^{-1/2} \quad (IV.147)$$

$$a_{1n} = -\frac{L_1}{2L} - \frac{1}{4\omega_{sn}} \sin(2\omega_{sn} \cdot L_1/L) \quad (IV.148)$$

$$a_{2n} = -\frac{L_1}{2L} + \frac{1}{4\omega_{s_n}} \sin(2\omega_{s_n}L_1/L) \quad (\text{IV.149})$$

$$a_{3n} = 1 - \cos(2\omega_{s_n}L_1/L) \quad (\text{IV.150})$$

ω_{s_n} : valeur caractéristique propre solution de l'équation transcendante :

$$\tan(L_1\omega_{s_n}/L) = \frac{\omega_{s_n}(Bi_{av} + Bi_j)}{\omega_{s_n}^2 - Bi_{av}Bi_j} \quad (\text{IV.151})$$

avec :

$$n\pi \leq \frac{\omega_{s_n}L_1}{L} < \left[n + \frac{1}{2} \right] \pi \quad (\text{IV.152})$$

IV.5.3. Etude de la convergence de la série $\delta\theta_s(u, \tau, \tau_1)$

L'étude de la convergence de la série montre qu'elle peut être représentée par le mode fondamental ($n=0$) après un certain temps réduit τ_c . Ainsi pour u appartenant à l'intervalle $[0, -L_1/L]$ et τ à celui $[\tau, \infty[$, la série est uniformément convergente. Pour illustrer cette convergence nous présentons à travers les figures 4.12 et 4.13 les variations respectives de $\delta\theta_{s_n}(\tau)$ et $\delta\theta_s(\tau)$ en fonction du temps pour différentes valeurs de ω_{s_n} .

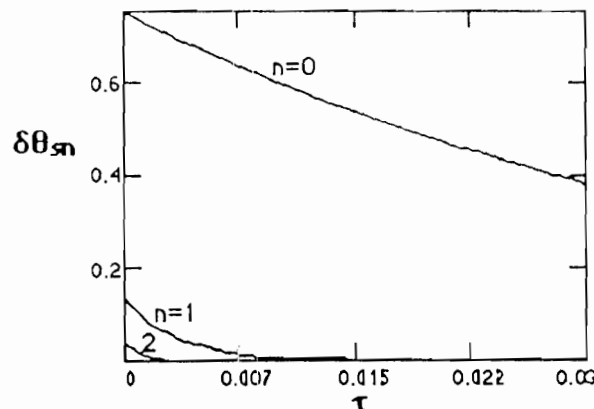


Figure 4.12 : Représentation des différents modes en fonction du temps réduit τ

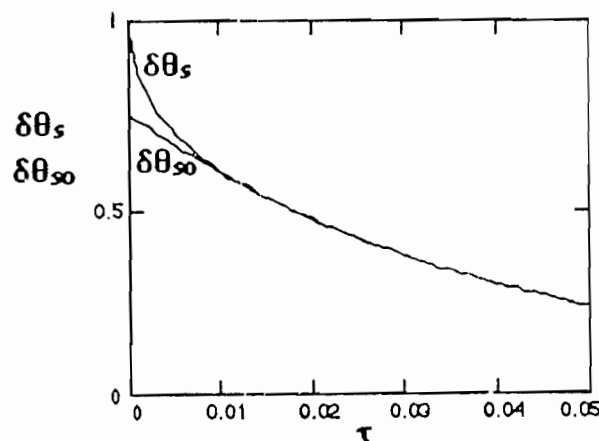


Figure 4.13 : Représentation de la série $\delta\theta_s(\tau)$ et du mode fondamental $\delta\theta_{s_0}(\tau)$ en fonction du temps réduit τ

Remarque

Ces différentes courbes montrent que la température réduite correspondant aux harmoniques supérieures ω_{s_n} ($n = 1, 2, \dots$) est négligeable comparée à celle correspondant ω_{s_0} pour $\tau > \tau_1 = 1/100$.

La figure 4.14 représente la température réduite $\delta\theta_{s_0}(\tau, u)$ en fonction de la profondeur réduite u pour différents temps réduits τ / τ_{do} .

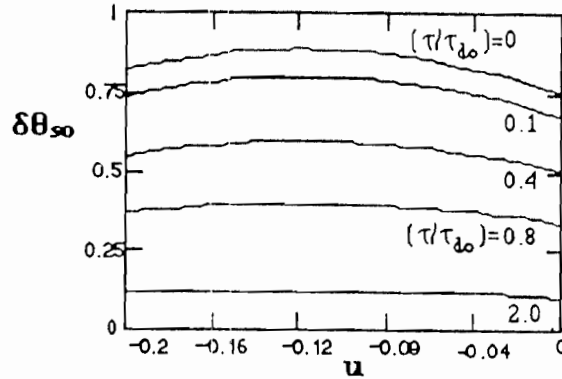


Figure 4.14 : Représentation de la de la température réduite $\delta\theta_{s_0}(\tau)$ en fonction de la profondeur à différents instants réduits

Ainsi l'expression de la température réduite peut se ramener au terme fondamental ci-dessous :

$$\delta\theta_s(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_{s_0}(u, \tau, \tau_1) = \delta\theta_o \cdot FUS_0(u, \tau_1) \cdot FT_{s_0}(\omega_{s_0}) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (\text{IV.153})$$

Nous définissons la température réduite ramenée au terme fondamental ($n=0$) par l'expression suivante :

$$\delta\theta_s(\tau) = \frac{\delta\theta_s(u, \tau, \tau_1)}{\delta\theta_o \cdot FUS_0(u, \tau_1)} = \frac{\delta\theta_{s_0}(u, \tau, \tau_1)}{\delta\theta_o \cdot FUS_0(u, \tau_1)} = FT_{s_0}(\omega_{s_0}) \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{\tau_{do}}\right] \quad (\text{IV.154})$$

L'expression (IV.151) réduit au terme fondamental ($n=0$) devient :

$$\tan(L_1 \cdot \omega_{s_0} / L) = \frac{\omega_{s_0}(Bi_j + Bi_{av})}{\omega_{s_0}^2 - Bi_j \cdot Bi_{av}} \quad (\text{IV.155})$$

IV.5.4. Application de la technique de l'intersection de la fonction $FT_{s_0}(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_s(0)$

Nous appliquons la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction caractéristique $FT_{s_0}(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine [58] de la courbe de relaxation (partie supérieure de la dalle) de la température réduite $\delta\theta_s(0)$, pour de déterminer ω_{s_0} et les paramètres : τ_{do} et Bi_{av} .

L'application de cette technique nécessite l'étude de $FT_{s_0}(\omega)$, qui est une fonction caractéristique intrinsèques de la partie supérieure de la dalle, à travers ses paramètres (de diffusivité α , de conductivité λ , de coefficients d'échanges thermiques h ou nombres correspondant de Biot Bi_j , Bi_{av}) et des conditions d'expérimentation.

L'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{s_{exp}}(0)$ et de la constante de temps de décroissance τ_{do} sont déterminées à partir d'une étude de la courbe expérimentale de la température réduite $\delta\theta_{s_{exp}}(\tau)$ pendant la phase transitoire.

Les courbes de température réduite $\delta\theta_{s_{exp}}(\tau)$ sont obtenues par construction de nouvelles courbes correspondantes à celles issues directement de l'expérimentation $\delta T_{s_{exp}}(x,t)$.

Ces nouvelles courbes réduites correspondantes sont obtenues à l'aide de l'intégrale de DUHAMEL.

IV.5.4.1. Détermination de la température $T_s(x,t)$ à l'aide de l'intégrale de DUHAMEL

Le théorème de DUHAMEL conduit à la solution $T_s(x,t)$ de l'équation (IV.117) à partir de la solution auxiliaire $\Theta_s(x,t,t_1)$, à l'aide de l'intégrale :

$$T_s(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\Theta_s(x, t-t_1, t_1)] dt_1$$

En remplaçant la température $\theta_s(u,\tau,\tau_1)$ donnée par la relation (IV.135) dans l'expression (IV.128), nous aurons :

$$\Theta_s(x,t,t_1) = F_a(t_1) [1 + \theta_s(u,\tau,\tau_1)] = F_a(t_1) [1 + \theta_s(u,\tau_1) + \delta\theta_s(u,\tau,\tau_1)] \quad (IV.156)$$

En remplaçant (IV.156) dans l'équation (IV.126) nous obtenons :

$$T_s(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\Theta_s(x, t-t_1, t_1)] dt_1 = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [F_a(t_1) \cdot \delta\theta_s(u, \tau-t_1, t_1)] dt_1 \quad (IV.157)$$

Cette dernière équation devient, compte tenu de (IV.153) :

$$T_s(x,t) = \int_{t_1=0}^t \frac{\partial}{\partial t} [F_a(t_1) \cdot \delta\theta_o \cdot FUs_0(u,\tau_1) \cdot FTs_0(\omega_{s0}) \cdot \exp[-(\tau-t_1)/\tau_{do}]] dt_1 \quad (IV.158)$$

Avec $\tau = \alpha \cdot t / L^2$, il vient, après dérivation :

$$T_s(x,t) = - \frac{\delta\theta_{s0}(u,\tau)}{t_{do}} \int_{t_1=0}^t [F_a(t_1) \cdot \exp(t_1/t_{do})] dt_1 \quad (IV.159)$$

où la fonction $\delta\theta_{s0}(u,\tau)$ est définie par :

$$\delta\theta_{s0}(u,\tau) = \delta\theta_o \cdot FUs_0(u,\tau_1) \cdot FTs_0(\omega_{s0}) \cdot \exp(-\tau/\tau_{do}) \quad (IV.160)$$

En remplaçant dans l'équation (IV.159), la fonction d'ambiance $F_a(t_1)$ par :

$$F_a(t_1) = T_m + T_o \cdot \cos [\Omega \cdot (t_1 - t_{ms}) - \nu] + \frac{k}{h_{av}} \cdot E_{s0} \cdot \cos [\Omega \cdot (t_1 - t_{ms})] \quad (IV.161)$$

nous aurons :

$$T_s(x,t) = - \frac{\delta\theta_{s0}(u,\tau) \cdot Is(t)}{t_{do}} \quad (IV.162)$$

avec :

$$I_s(t) = I_{s1}(t) + I_{s2}(t) + I_{s3}(t) \quad (IV.163)$$

où les fonctions $I_{s1}(t)$, $I_{s2}(t)$ et $I_{s3}(t)$ se définissent respectivement par :

$$I_{s1}(t) = \int_{t_1=0}^t [T_m \cdot \exp(t_1/t_{do})] dt_1 = T_m \cdot t_{do} \cdot [\exp(t/t_{do}) - 1] \quad (IV.164)$$

$$I_{s2}(t) = \int_{t_1=0}^t [T_o \cdot \cos[\Omega \cdot (t_1 - t_{ms}) - v] \cdot \exp(t_1/t_{do})] dt_1 = \frac{T_o \cdot t_{do} \cdot [I_{s21}(t) + I_{s22}(t)]}{[1 + \Omega^2 \cdot (t_{do})^2]} \quad (IV.165)$$

$$I_{s21}(t) = \Omega \cdot t_{do} \cdot [\sin(\Omega \cdot t_{ms} + v) + \sin(\Omega \cdot (t - t_{ms}) - v) \cdot \exp(t/t_{do})] \quad (IV.166)$$

$$I_{s22}(t) = \cos(\Omega \cdot (t - t_{ms}) - v) \cdot \exp(t/t_{do}) - \cos(\Omega \cdot t_{ms} + v) \quad (IV.167)$$

$$I_{s3}(t) = \int_{t_1=0}^t \left[\frac{k}{h_{av}} \cdot E_{so} \cdot \cos[\Omega \cdot (t_1 - t_{ms})] \cdot \exp(t_1/t_{do}) \right] dt_1 = \frac{k \cdot E_{so} \cdot t_{do} \cdot [I_{s31}(t) + I_{s32}(t)]}{h_{av} \cdot [1 + \Omega^2 \cdot (t_{do})^2]} \quad (IV.168)$$

$$I_{s31}(t) = \Omega \cdot t_{do} \cdot [\sin(\Omega \cdot t_{ms}) + \sin(\Omega \cdot (t - t_{ms})) \cdot \exp(t/t_{do})] \quad (IV.169)$$

$$I_{s32}(t) = \cos(\Omega \cdot (t - t_{ms})) \cdot \exp(t/t_{do}) - \cos(\Omega \cdot t_{ms}) \quad (IV.170)$$

Ainsi connaissant la constante de temps de décroissance t_{do} et l'ordonnée à l'origine de la température $\delta T_{sexp}(0)$, nous calculons l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_{sexp}(0)$ à l'aide de l'équation suivante :

$$\delta\theta_{sexp}(\tau) = \frac{-t_{do} \cdot \delta T_{sexp}(t)}{I_s(t)} \quad (IV.171)$$

La dernière relation conduit également à la courbe réduite expérimentale :

$$\delta\theta_{sexp}(\tau') = FT_{s0}(\omega_{s0}) \cdot \exp\left[-\frac{\tau'}{\tau_{do}}\right] \quad (IV.172)$$

où : τ' correspond au début (premier point) de la décroissance exponentielle de $\delta\theta_{sexp}(\tau)$ donnée par le meilleur fit des points expérimentaux.

La constante de temps relatif τ_{do} est mesurée sur la courbe de décroissance de la température réduite $\delta\theta_s(\tau)$.

IV.5.4.2. Détermination de ω_{s0}

L'ordonnée à l'origine ($\tau'=0$) pour la phase transitoire, est donnée à l'aide de l'équation (IV.172) de la température réduite $\delta\theta_s(\tau')$ et s'exprime par :

$$\delta\theta_s(\tau'=0) = FT_{s0}(\omega) \quad (IV.173)$$

En reportant $\delta\theta_s(0)$ à $\pm \Delta(\delta\theta_s(0))$ sur la courbe $FT_{s0}(\omega)$ comme l'indique la figure 4.15, l'intersection donne la valeur ω_{s0} à $\pm \Delta(\omega_{s0})$.

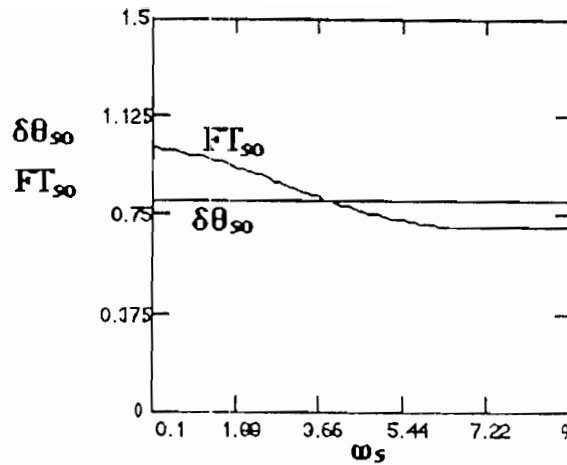


Figure 4.15 : Technique de l'intersection du mode fondamental et de l'ordonnée à l'origine

IV.5.4.3. Détermination de Bi_{av}

Connaissant la valeur ω_{s0} et la constante de temps réduit de décroissance τ_{do} (à $\pm\Delta(\tau_{do})$) de la température réduite $\delta\theta_s(\tau')$ pendant la phase transitoire dans les conditions ci-dessus définies l'équation (IV.155) conduit à la valeur du nombre de Biot Bi_{av} de la face avant :

$$Bi_{av} = \frac{\omega_0 [\omega_0 \cdot \tan(\omega_0 \cdot L_1/L) - Bi_j]}{[\tan(\omega_0 \cdot L_1/L) \cdot Bi_j + \omega_0]} \quad (IV.174)$$

IV.6. CARACTERISATION THERMIQUE DE LA DALLE EN BETON

La caractérisation thermique de la dalle consiste à déterminer ses coefficients, de diffusivité α , de conductivité λ et d'échanges thermiques entre paroi-environnement h_g .

IV.6.1. Détermination de α

Les relations (IV.132) et (IV.141) conduisent à l'expression permettant de déterminer la diffusivité :

$$\alpha = \frac{L^2}{\omega_0^2 \cdot t_{do}} \quad (IV.175)$$

IV.6.2. Détermination de λ

Connaissant la diffusivité α et la capacité thermique ($\rho \cdot C$) du matériaux, nous déterminons la conductivité à l'aide de la relation suivante :

$$\lambda = \alpha \cdot \rho \cdot C \quad (IV.176)$$

IV.6.3. Détermination de h_j

Connaissant le nombre de Biot Bi_j et la conductivité λ , nous déterminons le coefficient d'échanges thermiques à la jonction des deux parties de la dalle :

$$h_j = \frac{\lambda \cdot Bi_j}{L} \quad (IV.177)$$

IV.6.4. Détermination de h_{av}

De même connaissant le nombre de Biot Bi_{av} et la conductivité λ , le coefficient d'échanges thermiques entre la face supérieure de la dalle et l'air ambiant de la face avant est donné par :

$$h_{av} = \frac{\lambda \cdot Bi_{av}}{L} \quad (IV.222)$$

IV.7. CONCLUSION

L'étude de la dalle a été faite en deux étapes compte tenue de sa structure. Du fait que l'utilisation de la méthode de caractérisation développée dans le chapitre 3, passe par l'exploitation de la solution analytique en régime transitoire du champ de température dans l'échantillon du matériau étudié, nous avons été amené à l'adapter (la méthode de caractérisation) aux conditions réelles aux limites de la dalle.

Ainsi, l'application de la méthode à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire, a permis de la caractériser et d'en déterminer les expressions de ses paramètres thermophysiques : diffusivité α , conductivité λ et coefficient globaux d'échanges thermiques, à la jonction tube-eau (dans la dalle) et à la face avant (face supérieure de la et son environnement) h_{av} .

Nous allons dans la dernière partie, déterminer quantitativement les coefficients α , λ et h_{av} par l'exploitation des résultats expérimentaux.

CHAPITRE V

EXPERIMENTATION

V.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'expérimentation conduisant à la détermination quantitative des paramètres thermophysiques (α , λ et h_{av}) de la dalle en béton récupératrice d'énergie solaire. Nous présentons le dispositif expérimental, suivi de la procédure d'exploitation des résultats de mesures et enfin la validation de la nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux.

V.2. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Le prototype réalisé au Laboratoire d'Energétique Appliquée est une dalle en béton constituée de graviers de sable et de ciment dont les dimensions sont : longueur : 2 m ; largeur : 1 m ; épaisseur : 0,10 m ; poids : 460 kg. La dalle repose sur une charpente métallique de 90 cm de hauteur et l'ensemble exposé à l'ensoleillement est installé sur un site sans effet de masque. Au moment du coulage de la dalle, un serpentin en cuivre a été placé à 2 cm de sa surface supérieure. Les bords et la surface inférieure sont isolés par du polystyrène (Fig. 5.1).

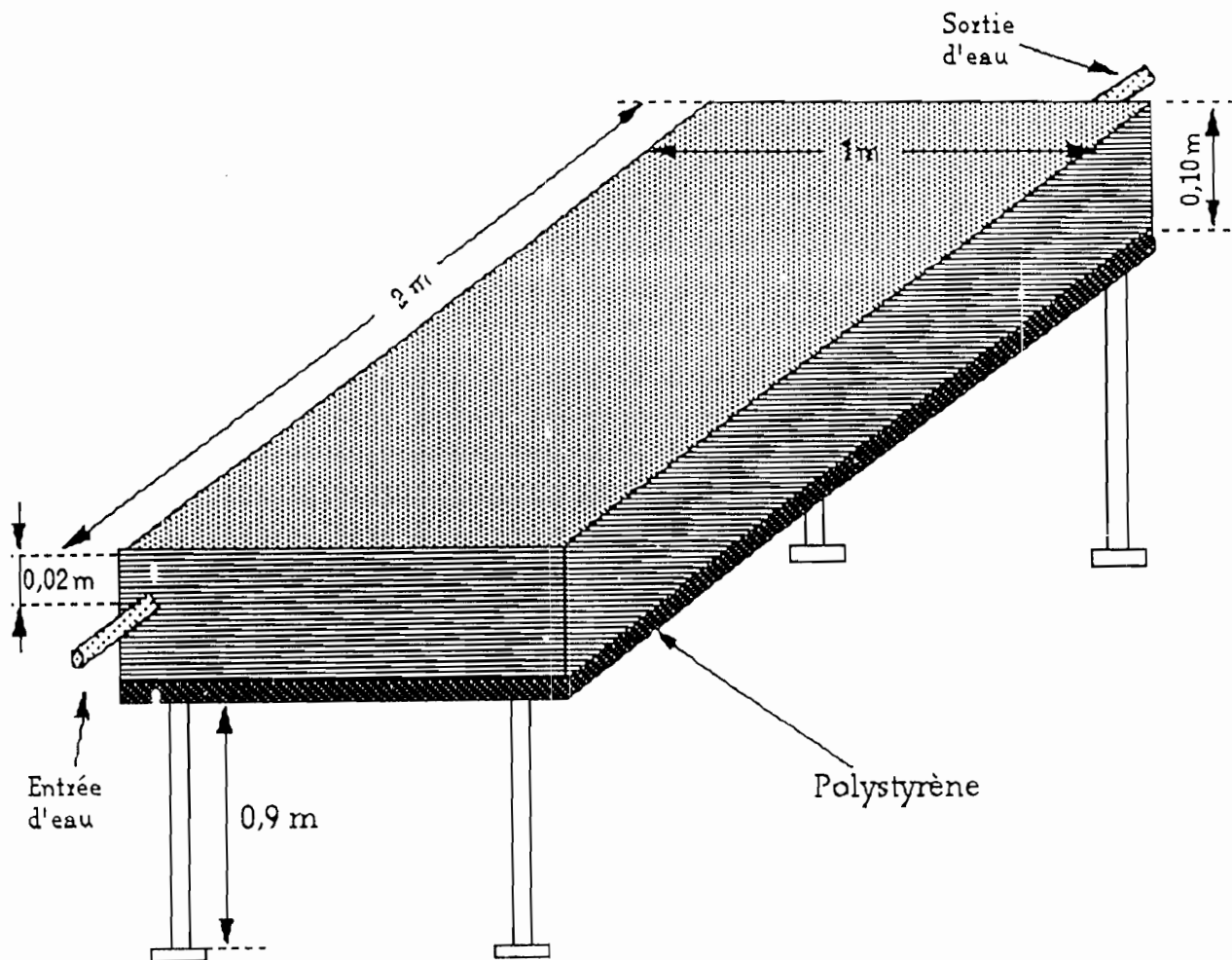


Figure 5.1 : Schéma de la dalle en béton

L'expérimentation a nécessité la mise en place d'une chaîne d'acquisition et de traitement de données. Cette chaîne comprend des capteurs (thermocouples), une centrale de mesures et un micro-ordinateur.

Le dispositif expérimental comprend ainsi la dalle et la chaîne d'acquisition et de traitement de données ; son schéma synoptique est représenté sur la figure 5.2.

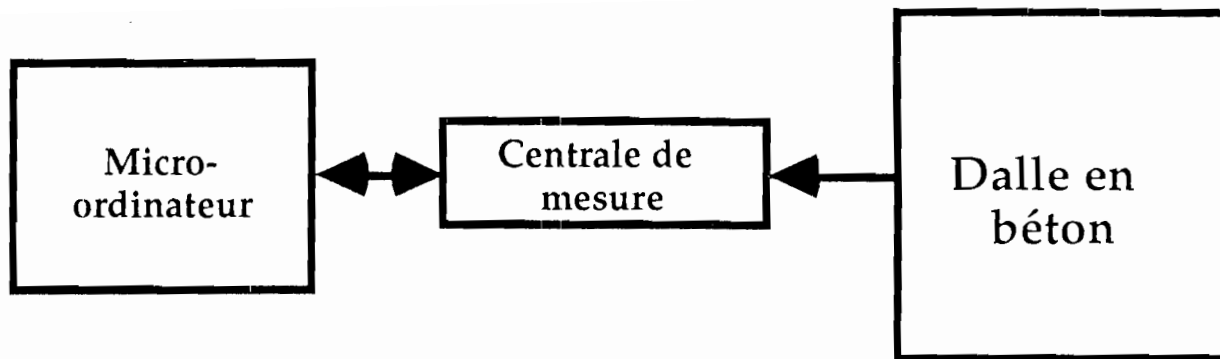


Figure 5.2 : Dispositif expérimental

V.3. COURBES EXPERIMENTALES

Au cours des travaux de recherche sur la dalle en béton récupératrice d'énergie solaire, plusieurs campagnes de mesures de température le long de l'épaisseur (profondeur) ont été effectuées [59, 60 et 61].

Nous présentons ci-dessous quelques courbes expérimentales [61] de relaxation de la température $\delta T_{\text{exp}}(x,t)$. La figure 5.3 représente les courbes expérimentales de relaxation de températures $\delta T_{\text{exp}}(x,t)$ en fonction du temps pour les profondeurs respectives : 2 ; 4 ; 6 et 8 cm [61].

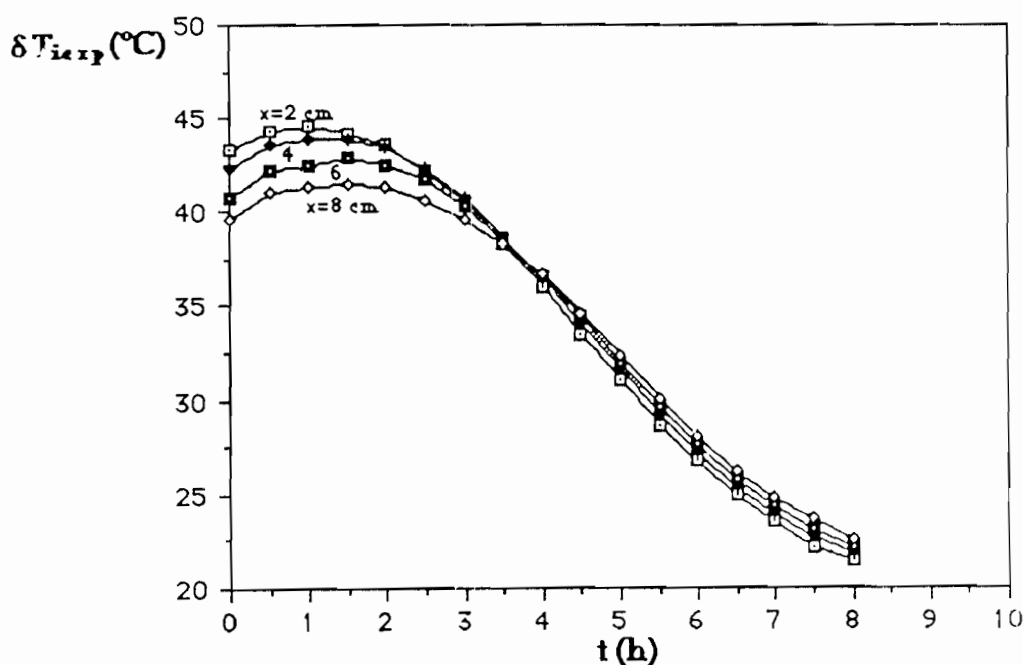


Figure 5.3 : Courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\delta T_{\text{exp}}(x_0,t)$ à $x_0=2 ; 4 ; 6$ et 8 cm

La figure 5.4 représente la courbe expérimentale de relaxation de température $\delta T_{\text{ie xp}}(x,t)$ en fonction du temps pour la profondeur de 4 cm .

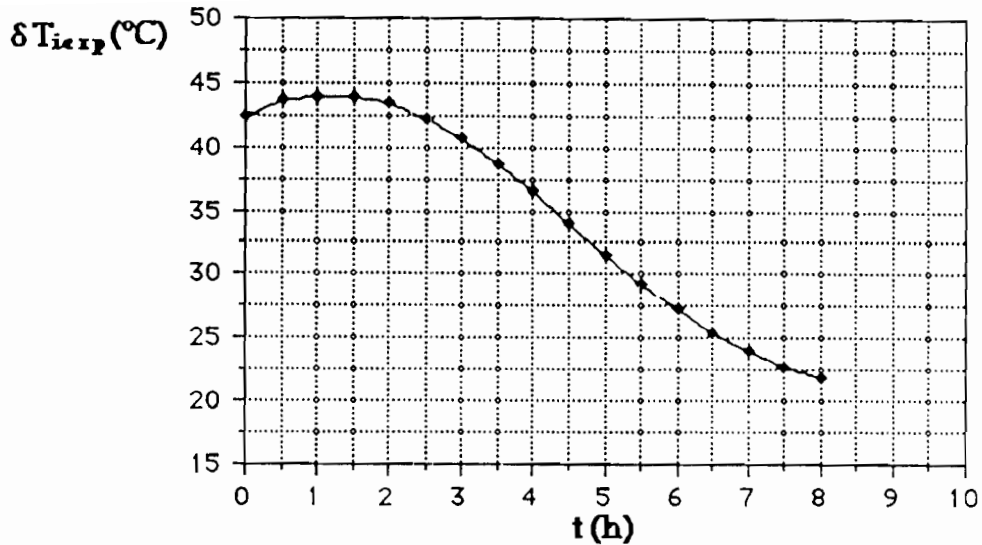


Figure 5.4 : Courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\Delta T_{iexp}(x_4,t)$ à $x_4=4$ cm

V.4. EXPLOITATION DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

L'exploitation des résultats expérimentaux a pour objectif l'extraction de l'ordonnée à l'origine et de la constante de temps de décroissance. Ces constantes sont utilisées pour déterminer les paramètres caractéristiques thermophysiques (diffusivité α , conductivité λ et coefficients d'échanges thermiques h_g paroi-environnement de la dalle en béton).

V.4.1. Détermination de la constante de temps de décroissance t_{do}

A partir de la courbe expérimentale $\Delta T_{iexp}(x,t)$ représentée en échelle sémi-logarithmique, nous déterminons la constante de temps de décroissance t_{do} . Cette constante est égale à la pente de la droite représentée sur la Figure 5.5.

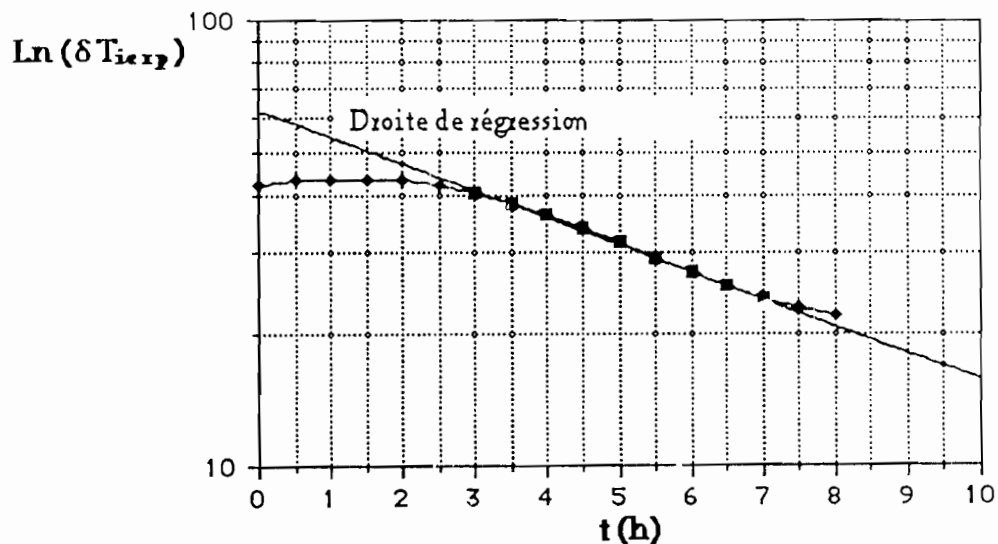


Figure 5.5 : Représentation sémi-logarithmique de la courbe expérimentale de relaxation de la température en fonction du temps $\ln(\Delta T_{iexp}(x_4,t))$ à $x_4=4$ cm

V.4.2. Détermination de l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_{iexp}(0)$

Nous déterminons l'ordonnée à l'origine $\delta T_{iexp}(0)$ à partir de l'étude de la courbe expérimentale de la température $\delta T_{iexp}(t)$ représentée sur la Fig. 5.6.

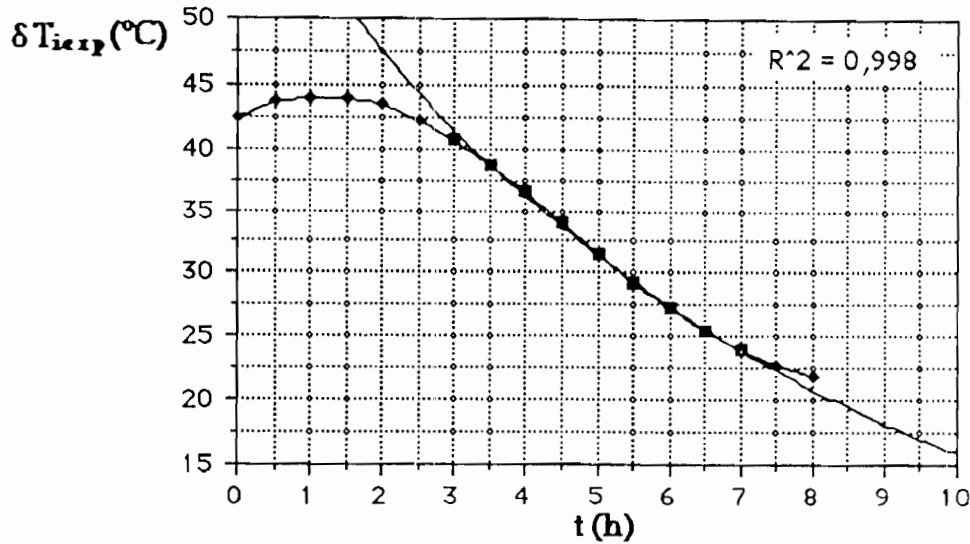


Figure 5.6 : Courbe de régression exponentielle de $\delta T_{iexp}(x_4, t)$ à $x_4=4$ cm.

L'instant $t'=t_0$ correspond au début (premier point) de la partie exponentielle de $\delta T_{iexp}(t)$, c'est-à-dire de la partie linéaire (Fig. 5.5) de la représentation sémi-logarithmique. A cet instant $t'=t_0$, correspond l'ordonnée à l'origine $\delta T_{iexp}(t_0) = \delta T_{iexp}(0)$.

Connaissant la constante de temps de décroissance t_{do} et l'ordonnée à l'origine de la température $\delta T_{iexp}(0)$, nous déterminons l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_{iexp}(0)$ à l'aide de la relation (IV.113) rappelée ci-dessous :

$$\delta\theta_{iexp}(\tau) = \frac{-t_{do} \cdot \delta T_{iexp}(t)}{Ii(t)}$$

Le couple $(\tau=0, \delta\theta_{iexp}(\tau=0))$ vérifie l'équation (IV.98) rappelée également ci-dessous :

$$\delta\theta_i(\tau') = FTi_0(\omega_{i0}) \cdot \exp(-\tau'/\tau_{do})$$

Une partie des points expérimentaux $\delta\theta_{iexp}(\tau')$ correspondant à l'intervalle $[\tau'=0, \tau]$ et ayant respectivement pour ordonnées $[\delta\theta_i(\tau'=0), \delta\theta_i(\tau')]$ vérifient également l'équation (IV.113).

La courbe de la température réduite $\delta\theta_{iexp}(\tau')$ est donnée par le meilleur fit (meilleure courbe de régression) des points expérimentaux répondant à une décroissance de type exponentiel ; l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{iexp}(0)$ correspond à la limite supérieure $\delta\theta_{iexp}(\tau' \rightarrow 0)$

L'erreur sur $\delta T_{iexp}(0)$ est donnée par :

$$\frac{\Delta(\delta T_{iexp}(0))}{\delta T_{iexp}(0)} = \frac{\Delta(t_0)}{t_0} \quad (V.1)$$

L'erreur sur $\delta\theta_{iexp}(0)$ est calculée par :

$$\frac{\Delta(\delta\theta_{iexp}(0))}{\delta\theta_{iexp}(0)} = \frac{\Delta(\delta T_{iexp}(0))}{\delta T_{iexp}(0)} \quad (V.2)$$

V.4.3. Application de la technique de l'intersection de la fonction $FT_{i_0}(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{i_{exp}}(0)$

Pour déterminer la valeur caractéristique propre du matériau ω_{i_0} , également solution de l'équation transcendante (IV.99), nous utilisons la technique de l'intersection de l'ordonnée à l'origine de la courbe de relaxation de la température réduite $\delta\theta_{i_{exp}}(0)$ et du mode fondamental de la fonction réduite caractéristique $FT_{i_0}(\omega)$, dont les profils sont représentés sur la figure 5.7.

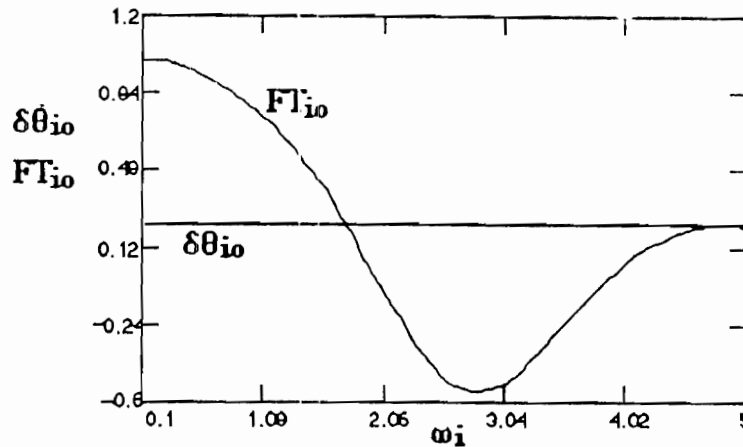


Figure 5.7 : Technique de l'intersection de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{i_{exp}}(0)$ et de la fonction caractéristique $FT_{i_0}(\omega)$

En reportant $\delta\theta_{i_0} = \delta\theta_{i_{exp}}(0)$ sur la courbe $FT_{i_0}(\omega)$ comme l'indique la figure 5.7, leur intersection donne la valeur ω_{i_0} .

La précision sur le calcul de la valeur propre ω_{i_0} est donnée par :

$$\frac{\Delta(\omega_{i_0})}{\omega_{i_0}} = \frac{\Delta(FT_{i_0})}{FT_{i_0}} + \frac{\Delta(\delta\theta_{i_{exp}}(0))}{\delta\theta_{i_{exp}}(0)} \quad (V.3)$$

Après avoir déterminé les valeurs t_{do} , $\delta\theta_{i_{exp}}(0)$ et ω_{i_0} , nous allons évaluer les paramètres caractéristiques thermophysiques de la dalle en béton.

V.4.4. Détermination des paramètres caractéristiques de la dalle en béton

Les paramètres caractéristiques thermophysiques d'un matériau donné sont la diffusivité et la conductivité thermiques (qui sont intrinsèques au matériau) et les coefficients d'échanges thermiques (entre paroi-fluide). Ces coefficients dépendent non seulement du matériaux mais également des conditions d'expérimentation.

V.4.4.1. Diffusivité

Les relations (IV.19) et (IV.36) conduisent à l'expression de la diffusivité :

$$\alpha = \frac{L^2}{\omega_0^2 \cdot t_{do}} \quad (V.4)$$

L'erreur sur le calcul du coefficient de diffusivité α est donnée par :

$$\frac{\Delta(\alpha)}{\alpha} = 2 \frac{\Delta(L)}{L} + 2 \frac{\Delta(\omega)}{\omega} + \frac{\Delta(t_{do})}{t_{do}} \quad (V.5)$$

V.4.1.2. Conductivité

Connaissant la diffusivité α et la capacité thermique ($\rho.C$) du béton, nous déterminons la conductivité à l'aide de la relation suivante :

$$\lambda = \alpha.\rho.C \quad (V.6)$$

L'erreur sur le coefficient de conductivité λ est donnée par :

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} = \frac{\Delta(\alpha)}{\alpha} + \frac{\Delta(\rho)}{\rho} + \frac{\Delta(C)}{C} \quad (V.7)$$

Remarque :

L'exploitation des résultats de mesures de la relaxation de températures pour les profondeurs (4 ; 6 et 8 cm) conduit aux figures 5.8 à 5.10 .

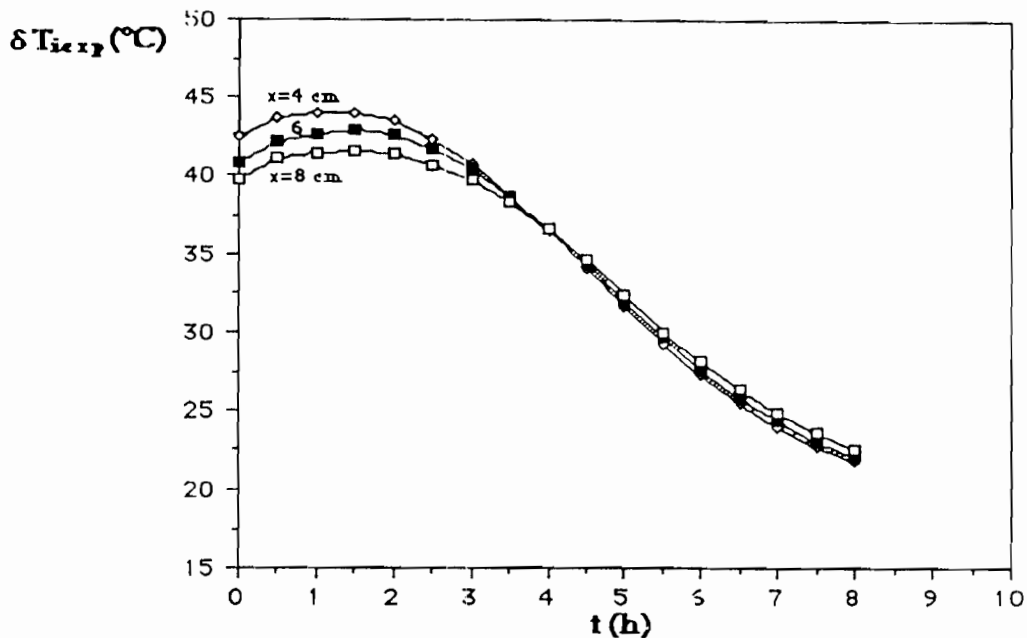


Figure 5.8 : Courbes expérimentales de relaxation de la température en fonction du temps $\Delta T_{iexp}(x_0, t)$ à $x_0 = 4 ; 6 ;$ et 8 cm

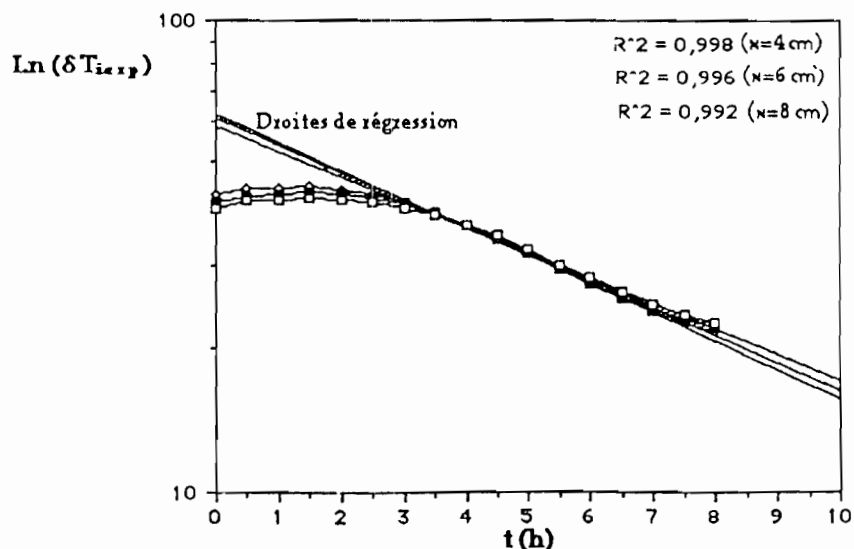


Figure 5.9 : Représentation sémi-logarithmique des courbes expérimentales de relaxation en fonction du temps $\text{Ln}(\Delta T_{iexp}(x_0, t))$ à $x_0 = 4 ; 6$ et 8 cm

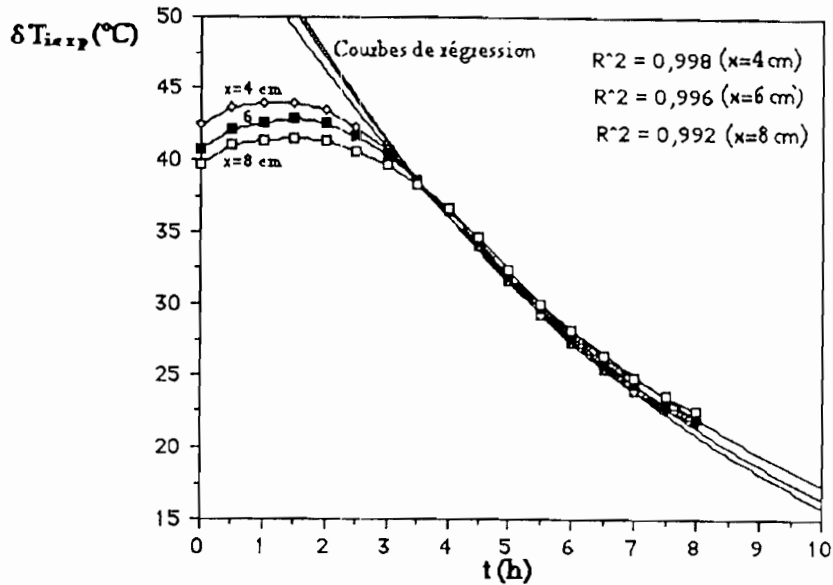


Figure 5.10 : Courbes de régression exponentielle de $\delta T_{iexp}(x_0, t)$ à $x_0 = 4 ; 6$ et 8 cm

V.4.4.3. Coefficients globaux d'échanges thermiques

a) Coefficient global h_j entre le fluide caloporteur et la paroi intérieure du tube

Connaissant la valeur ω_0 , l'équation transcendante (IV.99) conduit à la valeur du nombre de Biot $Bi_j = f(Bi_{ar})$ de la jonction (emplacement de la tuyauterie), correspondant au mode fondamental :

$$Bi_j = \frac{\omega_0 [\omega_0 \cdot \tan(\omega_0 \cdot L_2 / L) - Bi_{ar}]}{[\tan(\omega_0 \cdot L_2 / L) \cdot Bi_{ar} + \omega_0]} \quad (V.8)$$

La dernière relation montre que la détermination de $Bi_j = f(Bi_{ar})$ passe par celle du coefficient Bi_{ar} . Cela revient à déterminer le coefficient d'échanges entre la face arrière (face inférieure) et l'air ambiant. Pour éviter cette itération (Bi_{ar} tendant vers Bi_j et Bi_j tendant vers Bi_{ar}' , nous procéderons à l'isolation de la face arrière (inférieure) de la dalle. Cela conduit à : h_{ar} tendant vers zéro et Bi_{ar} tendant vers zéro). Ainsi pour Bi_{ar} tendant vers zéro, l'équation (V.8) devient :

$$Bi_j = \omega_0 \cdot \tan \left[\frac{\omega_0 \cdot L_2}{L} \right] \quad (V.9)$$

La précision sur le calcul de Bi_j est obtenue à travers l'expression suivante :

$$\frac{\Delta(Bi_j)}{Bi_j} = \left[1 + \frac{\omega \cdot L_2 / L}{\cos^2(\omega \cdot L_2 / L) \cdot \tan(\omega \cdot L_2 / L)} \right] \frac{\Delta(\omega)}{\omega} \quad (V.10)$$

Connaissant le nombre de Biot Bi_j et la conductivité λ , nous déterminons le coefficient global d'échanges thermiques à la jonction (couplage fluide caloporteur - paroi intérieure du tube) :

$$h_j = \frac{\lambda \cdot Bi_j}{L} \quad (V.11)$$

La précision de h_j est calculée à l'aide de l'expression :

$$\frac{\Delta(h_j)}{h_j} = \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} + \frac{\Delta(Bi_j)}{Bi_j} + \frac{\Delta(L)}{L} \quad (V.12)$$

b) Coefficient global d'échanges thermiques h_{av} entre la face avant (face supérieure) de la dalle et l'environnement

Pour déterminer le coefficient global d'échanges thermiques de la face avant h_{av} , nous suivons les mêmes étapes qui ont conduit au coefficient d'échanges thermiques h_j , à savoir :

- détermination de la constante de temps de décroissance t_{d0} ;
- détermination de l'ordonnée à l'origine de la température réduite $\delta\theta_{sexp}(0)$;
- détermination de la valeur caractéristique propre ω_0 solution de l'équation transcendante (IV.155), par application de la technique de l'intersection (voir figure 5.11) de l'ordonnée à l'origine de la courbe de relaxation de la température réduite $\delta T_{sexp}(0)$ et du mode fondamental de la fonction caractéristique $FT_{s0}(\omega)$.

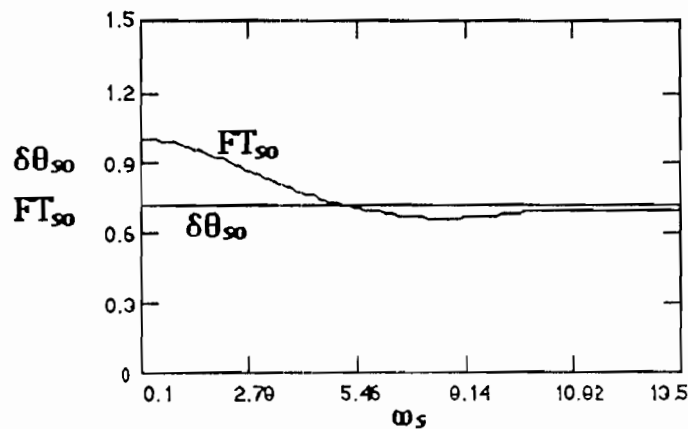


Figure 5.11 : Technique de l'intersection de l'ordonnée à l'origine $\delta\theta_{sexp}(0)$ et de la fonction caractéristique $FT_{s0}(\omega)$

Connaissant la valeur de Bi_j et celle de ω_0 , l'équation transcendante (IV.155) conduit à la valeur du nombre de Biot Bi_{av} de la face avant (face supérieure), correspondant au mode fondamental :

$$Bi_{av} = \frac{\omega_0 [\omega_0 \cdot \tan(\omega_0 \cdot L_1/L) - Bi_j]}{[\tan(\omega_0 \cdot L_1/L) \cdot Bi_j + \omega_0]} \quad (V.13)$$

L'erreur sur le calcul de Bi_{av} est donnée par :

$$\frac{\Delta(Bi_{av})}{Bi_{av}} = |ER_1| + |ER_2| \quad (V.14)$$

avec :

$$ER1 = \left[\frac{\frac{2 \cdot \omega \cdot \tan(\omega \cdot L_1/L)}{Bi_j} + \frac{\omega^2 \cdot L_1/L}{Bi_j \cdot \cos^2(\omega \cdot L_1/L)} - 1}{\frac{\omega \cdot \tan(\omega \cdot L_1/L)}{Bi_j} - 1} - \frac{\frac{Bi_j \cdot L_1/L}{\cos^2(\omega \cdot L_1/L)} + 1}{\frac{Bi_j \cdot \tan(\omega \cdot L_1/L)}{\omega} + 1} \right] \frac{\Delta(\omega)}{\omega} \quad (V.15)$$

$$ER_2 = \left[\frac{1}{\frac{\omega \cdot \tan(\omega \cdot L_1/L)}{Bi_j} - 1} + \frac{1}{1 + \frac{\omega}{Bi_j \cdot \tan(\omega \cdot L_1/L)}} \right] \frac{\Delta(Bi_j)}{Bi_j} \quad (V.16)$$

Connaissant le nombre de Biot Bi_{av} et la conductivité λ , nous déterminons le coefficient d'échanges thermiques entre la face supérieure de la dalle et l'air ambiant de la face avant :

$$h_{av} = \frac{\lambda \cdot Bi_{av}}{L} \quad (V.17)$$

La précision de h_{av} est calculée à l'aide de l'expression :

$$\frac{\Delta(h_{av})}{h_{av}} = \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} + \frac{\Delta(Bi_{av})}{Bi_{av}} + \frac{\Delta(L)}{L} \quad (V.18)$$

Les tableaux 5 et 6 donnent les valeurs extraites de l'exploitation des résultats expérimentaux et les paramètres caractéristiques thermophysiques de la dalle en béton récupératrice d'énergie solaire.

Tableau 5 : Valeurs des constantes et paramètres caractéristiques thermophysiques de la dalle, obtenues de l'exploitation des résultats de mesures.

Profondeur	Ordonnée à l'origine	Constante de temps	Ordonnée à l'origine réduite	Valeur propre	Diffusivité	Conductivité
x (cm)	$\delta T_{ex}(0)$ (°C)	t _{do} (heures)	$\delta \theta_{ex}(0)$	ω_0	α (m ² .s ⁻¹)	λ (W/(m.K))
8	38.40	0.256	0.210	4.57	5.200 10 ⁻⁷	1.301
6	39.30	0.239	0.223	4.69	5.287 10 ⁻⁷	1.320
4	38.80	0.231	0.227	4.80	5.223 10 ⁻⁷	1.307
2	39.00	0.228	0.703	5.30	4.338 10 ⁻⁷	1.085

Tableau 6 : Valeurs obtenues des coefficients globaux d'échanges thermiques h_j et h_{av} de la dalle.

Coefficients globaux d'échanges thermiques	Valeurs obtenues		
jonction tube-eau : h_j (W/(m ² .K))	33.60	43.40	52.66
Face avant : h_{av} (W/(m ² .K))	39.91	31.86	25.00

Remarque

Nous déterminons les valeurs des paramètres caractéristiques thermophysiques de la dalle en prenant les valeurs moyennes (tableau 7).

Nous rappelons que la valeur moyenne d'une grandeur G est donnée par l'expression:

$$G_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i$$

Tableau 7 : Valeurs moyennes des paramètres caractéristiques thermophysiques de la dalle.

Valeurs moyennes					
(tdo) _m (heures)	(ω ₀) _m	α _m (m ² .s ⁻¹)	λ _m (W/(m.K))	(h _j) _m (W/(m ² .K))	(h _{av}) _m (W/(m ² .K))
0.24	4.84	5.01 10 ⁻⁷	1.25	43.22	32.26

V.5. PRECISION DE LA METHODE DE CARACTERISATION THERMIQUE DE MATERIAUX

La détermination des paramètres thermophysiques (α, λ et h_g) est effectuée avec des incertitudes que nous nous proposons d'évaluer afin d'obtenir la précision sur les résultats.

V.5.1 Précision sur la diffusivité α

La précision sur la diffusivité α est donnée par la relation (V.5). L'incertitude absolue sur les mesures des dimensions à l'aide d'un pied à coulisse est : Δ(L) = 0.10 mm.

L'incertitude relative sur la valeur propre ω₀ est donnée par l'expression (V.3), pour une incertitude absolue de la fonction caractéristique au plus égale à Δ(FT₀(ω₀)) = ±0.01.

La précision sur la constante de temps de décroissance est obtenue à partir de la pente de la droite sur la figure 5.5.

$$\text{Ainsi nous avons : } t_{do} = \frac{-1}{\text{pente}} = \frac{t_2 - t_1}{\text{Ln}(\delta T_{iexp}(t_1)) - \text{Ln}(\delta T_{iexp}(t_2))}$$

L'incertitude relative sur la constante t_{do} est :

$$\frac{\Delta(t_{do})}{t_{do}} = \left| \frac{\Delta(t_2)}{t_2 - t_1} \right| + \left| \frac{\Delta(t_1)}{t_2 - t_1} \right| + \left| \frac{\Delta(\delta T_{iexp}(t_1))}{\delta T_{iexp}(t_1) \cdot \text{Ln} \left[\frac{\delta T_{iexp}(t_1)}{\delta T_{iexp}(t_2)} \right]} \right| + \left| \frac{\Delta(\delta T_{iexp}(t_2))}{\delta T_{iexp}(t_2) \cdot \text{Ln} \left[\frac{\delta T_{iexp}(t_1)}{\delta T_{iexp}(t_2)} \right]} \right|$$

Les incertitudes relatives, sur l'ordonnée à l'origine de la température réduite δθ_{iexp}(0) et non réduite δT_{iexp}(t=t₀)=δT_{iexp}(0) sont respectivement données par les relations (V.2) et (V.1) ; la valeur de t₀ est obtenue de la figure 5.6, avec une incertitude absolue : Δ(t₀) = ± 1 mn.

Remarques

L'incertitude absolue sur les mesures de temps pour un micro-ordinateur HP 86 B, est de ± 0.001 s.

L'incertitude absolue sur les mesures de température, avec des thermocouples de type K (Chromel-Alumel) et un point zéro (à ±0.07 °C) est : Δ(T) = ± 0.05 °C.

V.5.2 Précision sur la conductivité λ

Elle est donnée par la relation (V.7). Pour le béton banché, la masse volumique et la chaleur spécifique ont pour valeurs respectives [66] :

$$\rho = 2242 \pm 0.02 \text{ kg/m}^3 \text{ et } C = 1116 \pm 0.01 \text{ J/(kg.}^\circ\text{C)}.$$

V.5.3 Précision sur le coefficient global d'échanges thermiques h_j

La précision sur le coefficient global d'échanges thermiques h_j à la jonction tube-eau (dans la dalle) est donnée par la relation (V.12). L'incertitude relative sur le coefficient réduit global d'échanges thermiques Bi_j est obtenue à l'aide de l'expression (V.10).

V.5.4 Précision sur le coefficient global d'échanges thermiques h_{av}

La précision sur le coefficient global d'échanges thermiques h_{av} à la face avant (face supérieure) de la dalle est obtenue à partir de la relation (V.18). L'incertitude relative sur le coefficient réduit global Bi_{av} est donnée par les expressions (V.14), (V.15) et (V.16).

Les valeurs moyennes des précisions obtenues sur la détermination des paramètres thermophysiques pour les différentes profondeurs (voir tableaux 5 et 6) sont données dans le tableau 8 ci-dessous.

Tableau 8 : Précision sur les calculs des paramètres thermophysiques (α , λ et h_g)

$\frac{\Delta(\alpha)}{\alpha}$	$\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda}$	$\frac{\Delta(h_j)}{h_j}$	$\frac{\Delta(h_{av})}{h_{av}}$
(%)	(%)	(%)	(%)
3.45	3.45	15.78	24.05

V.6. DISCUSSION DES RESULTATS OBTENUS

L'application de la nouvelle technique de mesure a conduit à la détermination des valeurs des paramètres caractéristiques α , λ et h_{av} . Nous donnons également dans le tableau 9 ci-dessous les valeurs des paramètres α , et λ (du béton) trouvées dans la littérature [66].

Tableau 9 : Valeurs des paramètres α , et λ pour différents bétons.

Matériau	$\rho.C$ (J/(m ³ .K))	λ (W/(m.K))	α (m ² /s)
Béton armé	1.76 10 ⁶	1	5.682 10 ⁻⁷
Béton banché	2.502 10 ⁶	1.65	6.595 10 ⁻⁷

Les valeurs α , et λ données par la nouvelle méthode de mesure (tableau 5.1), sont en accord avec celle obtenues par d'autres techniques (tableau 5.2).

La valeur du coefficient d'échanges thermiques global h_{av} est à notre avis une bonne valeur. Nous n'avons trouvé dans la littérature que des valeur du coefficient d'échanges thermiques convectif, qui ne pouvait faire l'objet de comparaisons. Au vu de ces valeurs nous pouvons dire que la nouvelle méthode de mesure fournit de bons résultats.

Remarque

Rappelons que les précisions des mesures de la diffusivité thermique par les principales méthodes sont :

- * (3 à 10) % pour la méthode du régime dynamique fréquentiel [5 et 6]
- * (4 à 12) % pour la méthode Flash [7]
- * (10 à 12) % pour la méthode du Fil Chaud [13, 14 et 15]
- * (4.3 à 7.5) % pour la méthode du Régime Régulier [22]

Comparativement à ces précisions, nous remarquons que celle de la nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux développée (3.45 % pour α et λ , et 15.8 % à 24.1 % pour les coefficients h) est appréciable.

V.7. CONCLUSION

L'exploitation des résultats expérimentaux (courbes expérimentales de relaxation de la température), à différentes profondeurs du matériau à caractériser (dalle en béton), soumis aux conditions réelles de fonctionnement, a abouti à la détermination quantitative des paramètres thermophysiques de la dalle récupératrice d'énergie solaire (α , λ et h_{av}).

Les valeurs obtenues sont en accord avec celles données dans la littérature. Au vu de ces valeurs obtenues, nous pouvons dire que la nouvelle méthode de caractérisation thermique fourni de bons résultats.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons développé une nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux, laquelle permet la détermination simultanée des paramètres thermophysiques : diffusivité α , conductivité λ et coefficients globaux d'échanges thermiques h_g paroi-environnement.

Cette méthode est basée sur la solution analytique en régime transitoire du champ de température dans l'échantillon du matériau à caractériser. L'expérimentation est réalisée dans les conditions réelles de fonctionnement.

La nouvelle méthode de caractérisation thermique utilise la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction réduite caractéristique du matériau étudié, et de l'ordonnée à l'origine de la courbe expérimentale de relaxation de la température réduite (mesurée à une profondeur donnée).

L'application de cette nouvelle méthode à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire, a permis de la caractériser ; l'exploitation des résultats expérimentaux (courbes expérimentales de relaxation de la température), à différentes profondeurs, a abouti à l'évaluation quantitative de ses paramètres thermophysiques : diffusivité α , conductivité λ et coefficients globaux d'échanges thermiques à la jonction tube-eau (dans la dalle) et à la face avant (face supérieure) h_{av} .

Cette technique constitue un outil qui se prête bien à la caractérisation des matériaux locaux qui, pour leur mise oeuvre, doivent faire l'objet d'une étude préalable de comportement thermique.

Par rapport aux principales méthodes de mesures (voir chapitre I), les avantages de cette nouvelle méthode de caractérisation thermique sont les suivants :

- détermination simultanée des paramètres thermophysiques : α , λ et h_{av} ;
- simplicité des mesures (mesures de la relaxation de la température à différentes profondeurs de l'échantillon) ;
- caractérisation sous des conditions réelles de fonctionnement du matériau.

Néanmoins, nous pensons qu'il serait intéressant d'étendre cette méthode de caractérisation thermique de matériaux aux transferts tridimensionnels de chaleur. Cela lèverait l'hypothèse de transferts de chaleur monodimensionnels adoptée dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALIAN (D.). - "Application à la thermocinétique". Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, n°139, 1956.
- [2] VERNOTTE (P.). - "Calcul numérique ; calcul physique ; Application à la thermocinétique". Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, n°139, 1956.
- [3] MARTINET (J.). - "Détermination des constantes thermiques des solides au moyen des méthodes de régime variable". Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, n°139, 1965.
- [4] MERICQ (J.M.). - "Détermination de la diffusivité des matériaux conducteurs par analyse en réponse d'un échantillon à une sollicitation périodique". Thèse de Doctorat 3^{ème} cycle, Université Paris 6, 1976.
- [5] MARECHAL (J.C.) & DEVISME (J.M.) - "Diffusivité thermique des matériaux de construction : Méthode du signal périodique." - Annales I.T.B.T.P n°357, Janvier 1978.
- [6] MARECHAL (J.C.) & DEVISME (J.M.). - "Métrologie thermique des matériaux isolants par mesure du flux en régime transitoire. Matériaux et constructions", vol.7 n°41, 1974.
- [7] DEGIOVANNI (A.) - "Contribution à l'étude de la diffusivité thermique." - Thèse de Doctorat ès-Sciences LYON, Avril, 1975.
- [8] CARSLow (H.S.) & JAEGER (J.C.) - "Conduction of heat in solids." - Clarendon Press, OXFORD 2^d édition, 1959.
- [9] PONCIN (H.) - "Thermocinétique impulsionnelle et mesure de la diffusivité thermique." - Monographie du Bureau National de Métrologie, Editions CHIRON, Paris, 1978.
- [10] YEZOU RENE - "Contribution à l'étude des propriétés thermophysiques des matériaux de construction cohérents et non cohérents." - Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA de Lyon 1978.
- [11] PARKER (W.J.), JENKINS (R.J.), BUTTLER (G.P.) & ABBOTT (G.L.) - "Flash method of determining thermal diffusivity heat capacity and thermal conductivity." - J., Appl., Phys., 1961.
- [12] DEGIOVANNI (A.). - "Diffusivité et méthode Flash." - Revue générale de thermique, France, n°185, Mai, 1977.
- [13] PERRIN BERBARD - "Etude des transferts couplés de chaleur et de masse dans des matériaux poreux consolidés non saturés utilisés en génie civil." - Thèse de Doctorat d'Etat. Université Paul Sabatier de Toulouse, Janvier 1985.
- [14] N'TENDECHI (M.). - "Etude des variations de conductivité et diffusivité thermiques des matériaux locaux de construction en fonction de la teneur en eau." - Mémoire de D.E.A, Paris XII, 1988.
- [15] PONSOT ROGER - "Contribution à l'étude du comportement hygrométrique des matériaux locaux de construction en région Dakaroise." - Thèse de Doctorat de l'Université Paris XII, Septembre 1989.
- [16] BLACKWELL (J.H.) - "Radial, axial flows in regions bounded by circular cylinders." - Canadian Journal of Physics, vol. 31, p.472-479, Avril, 1954.

- [17] FOURES (J.C.), JAVELAS (R.) & PERRIN (B.) - "Caractéristiques thermiques de matériaux de construction : Détermination, Variations en fonction de la teneur en eau." - Revue Générale de Thermique, n°230, Février 1981.
- [18] PERRIN (B.), FOURES (J.C.), & JAVELAS (R.) - "Utilisation d'une méthode de chocs thermiques pour la détermination du coefficient de conductivité thermique et de la diffusivité des mortiers et terres cuites." - Annales de l'I.T.B.T.P n°402, p.139-146, Paris, Février 1982.
- [19] PERRIN (B.) & JAVELAS (R.) - "Transferts couplés de chaleur et de masse dans des matériaux poreux consolidés utilisés en génie civil." - International Journal of heat and Mass Transfer, vol. 30, n°2, p.297-309, 1987.
- [20] BASTIAN (G.) - "Détermination dynamique des paramètres de transferts couplés de chaleur et de d'humidité au sein d'un mortier en régime hygrométrique." - Thèse d'Etat, Nantes, 1989.
- [21] LAURENT JEAN-PAUL - "Contribution à la caractérisation thermique des milieux poreux granulaires : Optimisation d'outils de mesure 'in situ' des paramètres thermiques. Application à l'étude des propriétés thermiques du matériau terre." - Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Octobre 1986.
- [22] VIANO (A.) - "Mesure de la diffusivité thermique par la méthode du régime régulier : Application aux matériaux locaux de construction." - Thèse de Docteur-Ingénieur de UCAD de Dakar, Juillet 1992.
- [23] DEGIOVANNI (A.), GERY (A.), LAURENT (M.) & SINICKI - "Attaque impulsivonne appliquée à la mesure des résistances de contact et de la diffusivité thermique." - Revue Entropie, 1975.
- [24] DEVISME (J.M.), HINZELIN (P.) & MARECHAL (J.C.) - "Influence de l'effusivité thermique et de la position des matériaux sur la réponse thermique des murs multicouches en régime variable". Annales I.T.B.T.P n°385 Juillet-Août 1980.
- [25] SACADURA (J.F.). - Initiation aux transferts thermiques. Technique et Document, Lavoisier, janvier 1993.
- [26] TSIREL'MAN (N. M.) BAKIROV (F.G.) & SHAIKHUT-DINOV (Z.G.). - "Determining the convective heat transfer coefficient by the <<half-space period>> method." - J. Eng. Phys. vol. 24, n°2, Feb 1973.
- [27] MEHTA (R.C.) - "Solution of the inverse conduction problem." - A.I.A.A. Journal, vol. 15, n°9, September 1977.
- [28] TSIREL'MAN (N. M.) - "Determining the convective heat transfert coefficient from the laws of constant-temperature front propagation." - J. Eng. Phys. vol. 25, n°2, August 1973.
- [29] DILS (R.R.) & FOLLANSBEE (P.S.) - "A wide bandwidth method of measuring the heat transfer coefficients in combustor exhaust gases." - Proc. of the 21st Int. Instrum. Symposium, Pittsburgh 1975.
- [30] HLAVACKA (V.) - "Periodic heating of a system of cylinders and determining the heat transfer coefficient on this basis." - J. Eng. Phys. vol. 24, n°1, Jan. 1973.
- [31] STENFELD (H.J.) & REINKENHOF (J.) - "Technic for determining local heat transfer coefficients." - A.I.A.A. Journal, vol. 15, n°1, Janv. 1977.

- [32] FAFURIN (A.V.) & SHANGAREEV (K.R.) - "Experimental study of transient heat transfer in major gas flow in the presence of time dependent temperature." - J. Eng. Phys. vol. 30, n°5, May. 1976.
- [33] SHCHERBAN (A.N.), FURMAN (N.I.) & TARASEVICH (V.N.) - "Transient heat transfer behavior in metal thermistor circuits." - Heat Transfer, vol. 8, n°1, January-February 1976.
- [34] POKHORILER (V.L.) - "Using the solution to the reverse problem of heat conduction in the calculation of the heat transfer coefficient from temperature readings inside the body." - J. Eng. Phys., vol. 23, n°5, Nov. 1972.
- [35] MAKHIN (V.A.) & SHUKIN (A.A.) - "Inverse problems of unsteady heat conduction." - Heat Transfer, vol. 5, n°2, March-April 1973.
- [36] KOZLOV (V.N.) - "Calculation of the heat transfer coefficient from the temperatures at the points inside a plate." - J. Eng. Phys., vol. 19, n°1, July. 1970.
- [37] D. PEIT, J. DARD & A. DEGIOVANNI - "Détermination du coefficient d'échange entre un fluide et une paroi." - Rév. Gén. Therm. n°238, Octobre 1981.
- [38] SIEGEL (R.) PERMUTTER (M.), "Laminar heat transfer in a channel with unsteady flow and wall heating varying with position and time.", Transactions of the ASME, Nov., 1963.
- [39] WANG (R.C.C.), CHUNG (B.T.H.), THOMAS (L.C.), "Transient convective heat transfer for laminar boundary layer flow with effects of wall capacitance and resistance.", Heat transfer, vol. 99, Nov., 1977.
- [40] KAWAMURA (G.), "Experimental and analytical study of transient heat transfer for turbulent in a circular tube.", Int. J. Heat & Mass Transfer, vol. 20, n°5, 1977.
- [41] TRIBOIX (A.) & LENAT (Y.). - "Couplage conduction-convection-rayonnement par la méthode des volumes finis : première partie - Modélisation de la turbulence et description des échanges convectifs aux parois". Rév. Gén. Therm. Fr. n°387, mars 1994.
- [42] PERRANDEAU M. - "Convection le long d'un mur. Application à la thermique extérieure d'un bâtiment" - C.S.T.B. 2ème édition 1981
- [43] ROLDAN A. - "Etude thermique et aérodynamique des enveloppes de bâtiment. Influence des couplages intérieurs et multizonage" - Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA de Lyon 1985.
- [44] ITO (N.), KIMURA (K.) & OKA (J.). - "A field experiment study on the convective heat transfer coefficient on exterior surface of a building". ASHARE- Semiannual Meeting - NEW ORLEANS, La, January 1972.
- [45] CRANK (J.). - "The mathematics of diffusion". Second edition, Clarendon Press, 1975.
- [46] MAC ADAMS. - "Heat transmission". Edition Mc Graw Hill, Tokyo, 1958.
- [47] DUT (Document Technique Unifié) - Règles Th-G77. "Règles de calcul du coefficient G des logements et autres locaux d'habitation et du coefficient G1 des bâtiments autres que les bâtiments d'habitation". C.S.T.B., novembre 1977, avec mise à jour d'avril 1982.
- [48] SCHACHENMANN (A.). WISS (D.) & METZEN (G.). - "Calcul numérique des écoulements d'air ambiant et comparaison avec les mesures LDA dans les cas de convections libre et forcée". Revue Technique Sulzer, 1990, Winterthur, Suisse.

- [49] CARSLAW (H.S.) & JAEGER (J.C.) - "Conduction of heat in solids". Oxford, Clarendon Press, second édition 1973.
- [50] SAIDI (A.), VIANOU (A.) & GRIGNON (M.) - "Comportement thermique d'un mur vertical soumis à des distributions non uniformes de flux de chaleur: étude expérimentale et numérique". Rév. Gén. Therm. n°395, Novembre 1994., p 657, 1986.
- [51] KREITH (F.) - "Transmission de la chaleur et thermodynamique". Massons et Cie Editeurs, 1967
- [52] NECATI OZISIK (M.). - "Heat transfer, a basic approach". Mc Graw Hill, 1985.
- [53] LEGRAND (O.), VIGNON (J.M.), POINT (R.) & BRUN (M.) - "Etude des transferts thermiques locaux et instantanés dans la chambre de combustion d'un moteur diesel en régime transitoire". Revue Générale de Thermique - tome 34-n°405, Septembre 1995- p557-565.
- [54] MARTINET (J.). - "Eléments de thermocinétique : conduction de la chaleur". tome 1 Technique et Documentation - Lavosier, 1979 Paris.
- [55] REINHARD (H.) - "Equations aux dérivées partielles : fondements et applications". Duncd Université, 1987.
- [56] ANDRE (A.). - "Compléments de mathématiques". Massons 6^{ème} édition 1982.
- [57] SISSOKO (G.). - "Caractérisation par phénomènes transitoires de photopiles au Silicium polycristallin". Thèse de Docteur Es Sciences de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, 1992.
- [58] MIALHE (P.), SISSOKO (G.), PELANCHON (F.) & SALAGNON (J.M.). - "Régimes transitoires des photopiles : durée de vie des porteurs et vitesse de recombinaison". J. Phys. III France 2 (1992) 2317-2331.
- [59] D. TRAORE, "Contribution à l'étude théorique et expérimentale d'un dispositif de récupération de l'énergie solaire stockée dans une dalle en béton", Thèse de doctorat 1989, LEA-ENSUT-UCAD de Dakar.
- [60] K. GUEYE, "Récupération de l'énergie stockée dans une dalle en béton : étude théorique et expérimentale", D.E.A. 1991, LEA-ENSUT-UCAD de Dakar.
- [61] Y. YAHAYA, "Contribution à l'étude du couplage d'un ballon de stockage d'eau chaude avec une dalle récupératrice d'énergie solaire : application à la production d'eau chaude sanitaire", Thèse de doctorat 1995, LEA-ENSUT-UCAD de Dakar
- [62] PETIT (D.) - "Systèmes thermiques diffusifs: modélisation de leur comportement par identification de modes dominants" - Rév. Gén. Therm. Fr. n°378, Juin 1993.
- [63] KHEDARI (J.) - "Méthode scientifique simple de dimensionnement d'un système de chauffage partiellement solaire utilisant un mur capteur-accumulateur. Application au chauffage domestique et aux séchoirs modulaires polyvalents" - Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1991
- [64] ACHARD (G.), BRAU (J.) & ALLARD (F.) - "Ponts thermiques dans les bâtiments en régime variable". Rév. Gén. Therm., Fr n°218 février 1980.
- [65] TOURRANT (C.), BOYER (H.) & CHABRIAT (J.P.) - "Caractérisation thermique de parois de construction par des mesures en site réel". Rév. Gén. Therm. Fr. n°387, mars 1994.
- [66] K. & R. GIECK - "Formulaire technique". 9^{ème} édition 1990.

CARACTERISATION DE MATERIAUX PAR PHENOMENES THERMIQUES TRANSITOIRES

Application à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire

AHMED BEN BELLA BAH
THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR
Spécialité PHYSIQUE

Soutenue le 21 Décembre 1996 devant la commission d'examen :

Président :	<i>Oumar</i>	SOCK	UCAD
Examineurs :	<i>Mansour</i>	KANE	UCAD
	<i>Siméon</i>	FONGANG	UCAD
	<i>Boubacar</i>	KEITA	UCAD
	<i>Dorothé</i>	AZILINON	UCAD
	<i>Mamadou</i>	ADJ	UCAD
	<i>Grégoire</i>	SISSOKO	UCAD

Résumé

Une étude bibliographique a fait ressortir qu'à nos jours les principales méthodes de caractérisation thermique de matériaux ne permettent la détermination que d'un seul des paramètres : la diffusivité α , la conductivité λ , le coefficient convectif d'échanges de chaleur h_c . Mieux, ces méthodes font une caractérisation dans des conditions de laboratoire où les contraintes de taille de l'échantillon et d'ambiance sont idéales comparativement aux conditions réelles d'exploitation du dispositif tout entier.

Une étude en modélisation du mur plan en régime permanent, a montré l'importance et la sensibilité des paramètres (λ et h) sur les courbes de flux ($\Phi(\lambda)$, $\Phi(h)$), et de températures ($T(\lambda)$, $T(h)$), faisant ressortir ainsi l'importance d'une meilleure connaissance de ces paramètres thermophysiques (α , λ et h).

Une nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux a été développée, laquelle permet la détermination simultanée des coefficients de diffusivité α , de conductivité λ et d'échanges thermiques globaux h_g paroi-environnement. Cette méthode s'appuie sur la solution analytique du champ de température en régime transitoire du mur plan. L'exploitation des courbes expérimentales de relaxation de température $\theta\delta_{exp}(\tau)$ à une profondeur donnée du matériau à caractériser, et l'utilisation de la technique de l'intersection du mode fondamental de la fonction caractéristique (du matériau) $FT_0(\omega)$ et de l'ordonnée à l'origine $\theta\delta_{exp}(0)$, conduisent à l'extraction de la constante de temps de décroissance τ_0 et de la valeur propre caractéristique (du matériau) ω_0 , lesquelles constantes servent à la détermination des paramètres (α , λ et h_g).

L'application de la nouvelle méthode de caractérisation thermique de matériaux à une dalle en béton récupératrice d'énergie solaire (à l'aide de l'eau circulant dans un tube en cuivre placé en serpentin à 2 cm de la surface supérieure), a permis de déterminer ses paramètres thermophysiques : diffusivité α , conductivité λ et coefficients globaux d'échanges thermiques à la jonction tube-eau et de la face avant h_{av} . Pour une dalle (de dimensions : 2 m x 1 m x 0.1 m) en béton (gravier, sable et ciment), les valeurs obtenues des paramètres thermophysiques sont :

diffusivité $\alpha = 5.01 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$; conductivité $\lambda = 1.25 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$; coefficient global d'échanges thermiques à la jonction tube-eau $h_j = 43.22 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, pour un débit d'eau de 100 l/h, coefficient global de la face avant $h_{av} = 32.26 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, une température ambiante $T_a=(32 \text{ à } 25) \text{ }^\circ\text{C}$, un ensoleillement $E_s=(650 \text{ à } 0) \text{ W}/\text{m}^2$ et une vitesse du vent de 3 m/s.

Mots clé : dalle, diffusivité, conductivité, échanges thermiques, transitoire