UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE D'ETAT
Spécialité : Mathématiques appliquées

Titre

Stabilisation d'un système de la thermoélasticité, contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

présentée par **Abdoulaye SENE**

Composition du jury

Cherif BADJI	Professeur	UCAD Dakar	Président
Amar HEMINNA	Professeur	USTHB Alger	Examinateur
Mary Teuw NIANE	Professeur	UGB St Louis	Directeur
Mamadou SANGHARE	Professeur	Ucad Dakar	Co-directeur
Hamidou TOURE	Professeur	Univ-Ouagadougou	Rapporteur
Diaraf SECK	Maitre de Conf.	UCAD Dakar	Examinateur

Autre Rapporteur : Serge NICAISE Prof. ISTV2 Univ.Valenciennes France

Année universitaire 2005-2006

Aux enfants

Mami, Alou, Ibou, Pa Lat, Tening et Awa

Avant propos

A

** mes parents et toutes ma famille,*

** tous les collègues du département de maths de Dakar et du Lani de St Louis,*

** aux regrettés collègues S. Ndiaye et S N K Diallo,*

** tous mes amis.*

Je tiens aussi à remercier

**mon directeur de thèse, le professeur Mary Teuw Niane, merci pour ~~tout,~~*

**le professeur Cherif Badji qui nous a fait l'honneur de présider ce jury,*

** le professeur Mamadou Sangharé pour son soutien constant,*

** le professeur Serge Nicaise pour son accueil au Labo MACS et sa collaboration,*

**les professeurs Amar Heminna (Alger) et Hamidou Touré (Ouagadougou) qui ont bien voulu faire le voyage pour participer à ce jury,*

**le professeur Diaraf Seck qui a accepté de juger ce travail.*

** l'AUF et le SARIMA,*

** tous ce qui de près ou de loin ont contribué à ce travail.*

ceux

Stabilisation d'un système de la thermoélasticité, contrôlabilité exacte de l'équation des ondes.

Abdoulaye SENE

*

Table des matières

Introduction générale

Dans ce travail, on étudie la stabilisation d'un système de la thermoélasticité anisotrope et d'un système couplé, puis on établit des résultats de côntrolablité exacte pour l'équation des ondes avec des conditions initiales dans des espaces de Sobolev à puissances fractionnaires.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude de la décroissance de l'énergie du système de la thermoélasticité suivant :

$$(S1)\begin{cases} u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + f(u') & = 0 \text{ dans } Q := \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta divu' & = 0 \text{ dans } Q, \\ \theta & = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u & = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma(u)\cdot\nu + au + g(u') & = 0 \text{ sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0,\ u'(\cdot,0) = u_1\ \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

La stabilisation de ce système sans feedback a été analysée dans [13] et ne peut être garantie pour certains domaines car l'amortissement produit par l'équation de la chaleur n'est pas suffisant. Dès lors il est naturel d'étudier la stabilisation de ce système en ajoutant des termes additionnels d'amortissement. Ce cas a été étudié par plusieurs auteurs, notamment dans [16] et [17] pour le cas isotrope mais avec des conditions au bord non *naturelles*, c'est à dire en remplaçant la condition

$$\sigma(u)\cdot\nu + au + g(u') = 0$$

par

$$\nu\frac{\partial u}{\partial\mu}+(\lambda+\mu)\nu divu+g(u').$$

Dans [16], Liu a considéré le cas $f=0$ et le feedback linéraire $g(x)=x$. Récemment, Liu et Zuazua ont établi, toujours avec le cas $f=0$, des décroissance exponentielle, polynoniale ou logarithmique de l'énergie pour certaines non linéarités de g.

On généralise ces résultats à une classe de non linéarité plus large et aux cas de conditions aux limites *naturelles*, ce qui répond à une question posée dans [17]. Pour cela, on établit dans le cas linéaire des inégalités intégrales comme dans [2] et [16], ce qui permet d'obtenir une décroissance exponentielle et d'utiliser les résultats théoriques établis dans [23].

Dans le chapitre 2, on étudie la stabilisation d'un modèle de couplage entre un corps élastique et une poutre unidimensionnelle. Des modèles plus simples ont étés traités dans [19] et [26] en considérant l'équation des ondes dans Ω. On démontre la décroissance exponentielle de l'énergie pour un couplage de système élastodynamique et de Euler-Bernoulli.

Le chapitre 3 traite de la contrôlablité exacte de l'équation des ondes. On établit d'abord des estimations de normes dans $L^2(0,T;H^{-\theta/2}(\Omega))$, ($\theta\in(0,1)$ pour la solution de l'équation des ondes homogène

$$(S3)\begin{cases} u''-\Delta u &= 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega,\\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\ u(0) &= u_0 \quad \text{sur } \Omega,\\ u'(0) &= u_1 \quad \text{sur } \Omega,\end{cases}$$

puis on démontre la contrôlabilité exacte pour des donnée initiales dans $\left(H_0^\theta(\Omega)\times H^{\theta-1}(\Omega)\right)$ avec un contrôle dans

$$L^2(0,T;H^{\theta/2}(\Omega)).$$

Chapitre 1

Stabilisation d'un système de thermoélasticité anisotrope avec feedbacks non linéaires

1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, de frontière Γ de classe C^2. On note par $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)^\top$ le vecteur unitaire normal extérieur sur Γ. Pour un point fixé $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on introduit la fonction $m(x) = x - x_0$ et on définit une partition de la frontière Γ de la manière suivante (voir FIG 1.1) :

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}, \tag{1.1.1}$$

$$\Gamma_2 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}. \tag{1.1.2}$$

Dans ce chapitre, on considère le système de thermoélasticité suivant

$$\begin{cases} u'' - div\sigma(u) + \alpha\nabla\theta + f(u') & = 0 \text{ dans } Q := \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta divu' & = 0 \text{ dans } Q, \\ \theta & = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u & = 0 \text{ sur } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \sigma(u)\cdot\nu + au + g(u') & = 0 \text{ sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0,\ u'(\cdot,0) = u_1\ \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

où $u = u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))^\top$ est le vecteur déplacement, $\theta = \theta(x,t)$ la temperature. Le tenseur de contraintes σ est défini par

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$$

(on adopte la convention des indices répétés), où $\varepsilon(u)$ est le tenseur de déformation qui est donné par

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

avec $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, les coefficients a_{ijkl} appartiennent à $C^2(\overline{\Omega})$ et vérifient

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}$$

et la condition d'ellipticité

$$\exists\delta > 0 / \ a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \delta\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{1.1.4}$$

pour tout tenseur symétrique $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$.
Les composantes du champ de vecteur $div\sigma(u)$ sont données par

$$(div\sigma(u))_i = \partial_j\sigma_{ij},\ j = 1, ..., n.$$

La fonction a est non négative et appartient à $C^1(\Gamma_2)$; les fonctions $g(u) = (g_1(u), ..., g_n(u))^\top$ et $f(u) = (f_1(u), ..., f_n(u))^\top$ sont continues et satisfont

$$f(0) = g(0) = 0, \tag{1.1.5}$$

$$(g(x) - g(y))\cdot(x - y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.6}$$

$$(f(x) - f(y))\cdot(x - y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.7}$$

Les paramètres de couplage α and β sont supposés positifs.
Ces différentes hypothèses garantissent la décroissance de l'énergie du système (1.1.3) définit par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{|u'|^2 + \sigma(u) : \varepsilon(u) + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right\}dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma. \qquad (1.1.8)$$

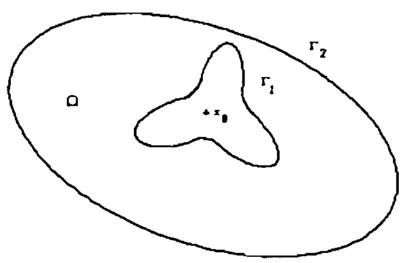

FIG. 1.1 – Un exemple d'ouvert Ω

On établit dans ce chapitre, avec des hypothèses supplémentaires sur les fonctions f et g, divers types de décroissances de l'énergie $E(t)$.

1.2 Existence et unicité

Dans ce chapitre, on supposera que

$$\Gamma_1 \neq \emptyset \text{ ou } a(x) > 0, \forall x \in \Gamma_2. \qquad (1.2.1)$$

De même, pour éviter des problèmes d'interface, on supposera (voir FIG 1.1) que

$$\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \emptyset. \qquad (1.2.2)$$

En fin, on suppose l'existence de constantes positives C_f et C_g telles que

$$|f(x)| \leq C_f(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2.3}$$
$$|g(x)| \leq C_g(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.4}$$

On introduit les espaces de Hilbert suivant :

$$\begin{aligned} H^1_{\Gamma_1}(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \quad \text{on} \ \Gamma_1\}, \\ W &= (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n, \\ \mathcal{H} &= W \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

L'espace W est munie de sa norme :

$$\|(u,v)\|^2_W = \int_\Omega [|v|^2 + \sigma(u) : \varepsilon(u)]dx + \int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma,$$

où

$$\sigma(u) : \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u).$$

On note par $< \cdot, \cdot >$ le crochet de dualité entre $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ ou entre $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et par $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^n$.

On a le thèoreme d'existence suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit Γ_1 et Γ_2 definis par (1.1.1)-(1.1.2) et satisfaisant (1.2.1) et (1.2.2). Supposons que les fonctions f et g verifient (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), (1.2.3) et (1.2.4). Alors, pour toutes données initiales $(u_0, u_1, \theta_0) \in \mathcal{H}$, le système (1.1.3) a une unique solution (faible) (u, θ) vérifiant*

$$(u, u', \theta) \in C([0, \infty); \mathcal{H}). \tag{1.2.5}$$

Preuve du Thèoreme 1.2.1 : On ramème le système (1.1.3) à une equation d'évolution du premier ordre. On définit les opérateurs

$$A : (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \longmapsto [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$$

et

$$A_0 : H^1_0(\Omega) \longmapsto H^{-1}(\Omega)$$

par

$$\begin{aligned} < Au, v > &= \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\, dx, \quad \forall u, v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, \\ < A_0 u, v > &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \forall u, v \in H^1_0(\Omega). \end{aligned}$$

De même, on introduit l'opétateur non linéaire B_0 de $(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ à $[(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ par

$$< B_0 u, v >= \int_{\Gamma_2} g(u) \cdot v\, d\Gamma + \int_\Omega f(u) \cdot v\, dx, \forall u, v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n.$$

Multiplions la première équation du système (1.1.3) par $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et intégrons par partie sur on Ω. On obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega [u'' - div(\sigma(u)) + \alpha\nabla\theta + f(u')] \cdot v\, dx \\ &= \int_\Omega u'' \cdot v\, dx - \int_\Gamma ((\sigma(u) \cdot \nu) v\, d\Gamma + \int_\Omega [\sigma(u) : \varepsilon(v)] dx \\ &+ \int_\Omega (\alpha\nabla\theta \cdot v)\, dx + \int_\Omega f(u').v\, dx \\ &= \int_\Omega u'' \cdot v\, dx + \int_\Gamma a.u.v\, d\Gamma + \int_\Gamma g(u').v\, d\Gamma \\ &+ \int_\Omega [\sigma(u) : \varepsilon(v)] dx + \int_\Omega \alpha\nabla\theta \cdot v\, dx + \int_\Omega f(u') \cdot v\, dx \\ &= < u'', v > + < Au, v > + < B_0 u', v > + < \alpha\nabla\theta, v > . \end{aligned}$$

Ce qui donne l'identité

$$u'' + Au + B_0 u' + \alpha\nabla\theta = 0.$$

De la même manière, on multiplit la deuxième équation du système (1.1.3) par $v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ et on intègre par partie sur Ω. Il vient

$$\theta' + A_0\theta + \beta div(u') = 0.$$

En posant

$$\Phi = (u, u', \theta)$$

et

$$\mathcal{A}\Phi = (-u', Au + B_0u' + \alpha\nabla\theta, A_0\theta + \beta div(u')), \tag{1.2.6}$$

le système (1.1.3) se réduit à

$$\begin{cases} \Phi' + \mathcal{A}\Phi = 0, \\ \Phi(0) = (u_0, u_1, \theta_0). \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Lemme 1.2.1. *Sous les hypothèses (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), (1.2.1), (1.2.3) et (1.2.4), l'opérateur $\mathcal{A}$ définit sur $\mathcal{H}$ par (1.2.6), et de domaine*

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v, \theta) \in \mathcal{H} : v \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n, Au+B_0v \in (L^2(\Omega))^n, \theta \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\}$$

est maximal monotone.

Preuve du Lemme 1.2.1 L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal. En effet, on a

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}(u_1, v_1, \theta_1) - \mathcal{A}(u_2, v_2, \theta_2), (u_1, v_1, \theta_2) - (u_2, v_2, \theta_2))_{\mathcal{H}} \\ = \ & (v_2 - v_1, u_1 - u_2)_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \frac{\alpha}{\beta}(A_0(\theta_1 - \theta_2 + \beta div(v_1 - v_2), \theta_1 - \theta_2)) \\ + \ & (A(u_1 - u_2) + B_0(v_1 - v_2) + \alpha\nabla(\theta_1 - \theta_2), v_1 - v_2) \\ = \ & \int_{\Gamma_2} [g(v_1) - g(v_2)].(v_1 - v_2)d\Gamma + \frac{\alpha}{\beta}\|\nabla(\theta_1 - \theta_2)\|^2 + \int_\Omega [f(v_1) - f(v_2)](v_1 - v_2)dx \geq 0. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $(I + \mathcal{A})(D(\mathcal{A})) = \mathcal{H}$, c'est à dire que le système

$$\begin{cases} u - v = \Phi, \\ v + Au + B_0v + \alpha\nabla\theta = \psi, \\ \theta + A_0\theta + \beta divv = \xi \end{cases} \tag{1.2.8}$$

a une solution $(u, v, \theta) \in D(\mathcal{A})$ pour tout $(\varphi, \psi, \xi) \in \mathcal{H}$.
Pour cela, il suffit de montrer que le problème

$$\begin{cases} v + Au + B_0v + \alpha\nabla\theta = \psi - A\varphi, \\ \theta + A_0\theta + \beta divv = \xi \end{cases} \tag{1.2.9}$$

a une solution $(v,\theta) \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ pour tout $(\varphi,\psi,\xi) \in \mathcal{H}$.
On considère l'opérateur Λ définie par

$$\Lambda(v,\theta) = (v + Av + B_0 v + \alpha\nabla\theta, \frac{\alpha}{\beta}\theta + \frac{\alpha}{\beta}A_0\theta + \alpha divv).$$

On a

$$\begin{aligned}
& \langle \Lambda(v_1,\theta_1) - \Lambda(v_2,\theta_2), (v_1,\theta_1) - (v_2,\theta_2)\rangle \\
= \; & \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2\rangle + \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2\rangle + \langle Bv_1 - Bv_2, v_1 - v_2\rangle \\
= \; & \langle \alpha\nabla(\theta_1 - \theta_2), v_1 - v_2\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\langle \theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2\rangle \\
+ \; & \frac{\alpha}{\beta}\langle A_0(\theta_1 - \theta_2), \theta_1 - \theta_2\rangle + \alpha\langle div(v_1 - v_2), \theta_1 - \theta_2\rangle \\
\geq 0, &
\end{aligned}$$

donc Λ est monotone.
De même, Λ est coercive car

$$\begin{aligned}
& \langle \Lambda(v,\theta), (v,\theta)\rangle = \langle v, v\rangle + \langle Av, v\rangle + \langle B_0 v, v\rangle \\
+ \; & \frac{\alpha}{\beta}\langle \theta, \theta\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\langle A_0(\theta), \theta\rangle \\
\geq \; & \|v\|^2_{(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n} + \frac{\alpha}{\beta}\|\theta\|^2_{H^1_0(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aussi, on a

$$\lim_{t\to 0}\langle \Lambda[(v_1,\theta_1) + t(v_2,\theta_2)], (v,\theta)\rangle = \langle \Lambda(v_1,\theta_1), (v,\theta)\rangle$$

pour tout (v,θ), (v_1,θ_1), $(v_2,\theta_2) \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega)$, ce qui veut dire que Λ est semi continue.
On en déduit [1] que

$$\Lambda((H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega)) = [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]' \times H^{-1}(\Omega).$$

Donc, si $\psi - A\varphi \in [(H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n]'$ et $\xi \in L^2(\Omega)$, il existe
$(v,\theta) \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n \times H^1_0(\Omega)$ tel que (1.2.9) soit verifié.
Avec

$$A_0\theta = \xi - \theta - \beta divv \in L^2(\Omega),$$

on a $\theta \in H^2(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$. Dès lors, en posant $u = v + \varphi$, on a (u,v,θ) solution de (1.2.8). Par consequent,

$$Au + B_0 v = \psi - v - \alpha\nabla\theta \in (L^2(\Omega))^n$$

et donc (u,v,θ) est dans $D(\mathcal{A})$. ∎

Par la théorie des semi groupes non linéaire [32], on a le Théorème 1.2.1.

1.3 Quelques résultats théoriques

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement les résultats établis dans [23] (voir aussi [10]).

1.3.1 Contrôlabilité exacte

Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ deux espaces de Hilbert séparables munis des produits scalaires $(.,.)_{\mathcal{H}}$, $(.,.)_{\mathcal{V}}$ et tels que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathcal{H}$ avec injection continue. On identifie $\mathcal{H}$ avec son dual $\mathcal{H}'$ et on a le diagramme suivant :

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'.$$

Considérons un opérateur linéaire non borné A_1 de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ et une forme (nonlinéaire) B de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$. On définit deux opérateurs (non linéaires) $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}^-$ de la manière suivante :

$$D(\mathcal{A}^\pm) = \{v \in \mathcal{V} | (\pm A_1 + B)v \in \mathcal{H}\}, \tag{1.3.1}$$

$$\mathcal{A}^\pm v = (\pm A_1 + B)v, \forall v \in D(\mathcal{A}^\pm). \tag{1.3.2}$$

On fera les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{A}^+ \text{ est maximal monotone}, \tag{1.3.3}$$

$$\mathcal{A}^- \text{ maximal monotone}, \tag{1.3.4}$$

$$D(\mathcal{A}^+) \text{ est dense } \mathcal{H}, \tag{1.3.5}$$

$$D(\mathcal{A}^-) \text{ est dense } \mathcal{H}, \tag{1.3.6}$$

$$\langle A_1 u, u\rangle = 0, \forall u \in \mathcal{V}, \tag{1.3.7}$$

$$\langle Bu, u\rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{V}, \tag{1.3.8}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$. En utilisant les semi groupes non linéaires [32], on montre que l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A_1 u + Bu = 0 \text{ in } \mathcal{H}, t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.3.9}$$

a une solution unique (faible) $u \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$. Si de plus $u_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (1.3.9) admet une unique solution (forte)

$$u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A}))$$

et telle que $u(t) \in D(\mathcal{A})$, pour tout $t \geq 0$.

L'énergie du système, définie par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}||u(t)||^2_{\mathcal{H}}, \tag{1.3.10}$$

est décroissante et pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$, on a

$$\mathcal{E}(S) - \mathcal{E}(T) = \int_S^T \langle Bu(t), u(t)\rangle \, dt, \tag{1.3.11}$$

pour tout S, T tels que $0 \leq S < T < \infty$.

Ce résultat est encore valable pour $\mathcal{A}^-$ (avec la même expression pour l'énergie et la même identité (1.3.11) pour $u_0 \in D(\mathcal{A}^-)$).

On introduit la notion (inégalité intégrale) suivante :

Définition 1.3.1. On dit que la paire (A_1, B) vérifie l'estimation de stabilité s'il existe $T > 0$ et deux constantes positives C_1, C_2 (qui dépendent de T) avec $C_1 < T$ telles que

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\, dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle \, dt, \tag{1.3.12}$$

pour toute solution u de (1.3.9).

Cette définition est équivalente à la suivante :

Lemme 1.3.1. *La paire (A_1, B) vérifie l'estimation de stabilité si est seulement si il existe $T > 0$ et une constante positive C (qui dépend de T) telle que*

$$\mathcal{E}(T) \leq C \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle \, dt, \tag{1.3.13}$$

pour toute solution u de (1.3.9).

Preuve : $\Rightarrow$: Comme $\mathcal{E}(t)$ est décroissante, l'estimation (1.3.12) implique

$$T\mathcal{E}(T) \leq \int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq C_1\mathcal{E}(0) + C_2 \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt.$$

Par l'identité (1.3.11) on a

$$T\mathcal{E}(T) \leq C_1\mathcal{E}(T) + (C_1 + C_2) \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt.$$

Ce qui donne (1.3.13) en faisant le choix $C = \frac{C_1+C_2}{T-C_1}$.

$\Leftarrow$: Avec la monoticité de $\mathcal{E}$ on peut écrire

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq T\mathcal{E}(0).$$

De même, avec l'identité (1.3.11) on a

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(\mathcal{E}(T) + \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt).$$

En utilisant (1.3.13) on obtient

$$\int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \leq \frac{T}{2}\mathcal{E}(0) + \frac{T}{2}(1 + C) \int_0^T \langle Bu(t), u(t)\rangle\,dt),$$

qui n'est rien d'autre que (1.3.12). ■

On a le théorème suivant, qui donne la décroissance de l'énergie de (1.3.9) :

Théorème 1.3.1. *La paire (A_1, B) satisfait l'estimation de stabilité si et seulement si il existe deux constantes positives M et ω telle que*

$$\mathcal{E}(t) \leq Me^{-\omega t}\mathcal{E}(0), \tag{1.3.14}$$

pour toute solution u de(1.3.9).

Preuve : Supposons que l'estimation de stabilité est vraie, c'est à dire, de manière équivalente (par le lemme 1.3.1), que (1.3.13) est verifié. L'identité (1.3.11) implique

$$\mathcal{E}(T) \leq C(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)).$$

Cette estimation est équivalente à

$$\mathcal{E}(T) \leq \gamma \mathcal{E}(0),$$

avec $\gamma = \frac{C}{1+C} < 1$. En appliquant cet argument sur $[(m-1)T, mT]$, pour $m = 1, 2, \cdots$ (ce qui est possible, le système étant invariant par translation), on obtient

$$\mathcal{E}(mT) \leq \gamma \mathcal{E}((m-1)T) \leq \cdots \leq \gamma^m \mathcal{E}(0),\ m = 1, 2, \cdots$$

Par conséquent on a

$$\mathcal{E}(mT) \leq e^{-\omega m T} \mathcal{E}(0),\ m = 1, 2, \cdots$$

avec $\omega = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{\gamma} > 0$.
Pour un t positive quelconque, il existe $m = 1, 2, \cdots$ tel que $(m-1)T < t \leq mT$ et avec la décroissance de l'énergie $\mathcal{E}$, on conclut que

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}((m-1)T) \leq e^{-\omega(m-1)T} \mathcal{E}(0) \leq \frac{1}{\gamma} e^{-\omega t} \mathcal{E}(0).$$

L'implication inverse est basée sur l'identité (1.3.11). ∎

Par le principe de Russell, cette décroissance exponentielle permet de contrôler exactement l'équation d'évolution associée à $-A_1$ avec des contrôles dans $L^2(]0, T[; U)$, l'espace contrôle U étant un espace de Hilbert donné contenant $\mathcal{V}$ avec injection continue.
On note par I_U l'injection de $\mathcal{V}$ dans U et par $\mathcal{I}_U$ la forme identifiant U a un sous espace de $\mathcal{V}'$, c'est à dire.,

$$\langle \mathcal{I}_U u, v \rangle := (I_U u, I_U v)_U, \forall u, v \in \mathcal{V}.$$

La controlabilité exacte peut être formulée de la manière suivante : pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$, on cherche un temps $T > 0$ et un contrôle $J \in L^2(]0, T[; U)$ tels que la solution u de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - A_1 u = J \text{ dans } \mathcal{V}', t \geq 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.3.15}$$

satisfasse

$$u(T) = 0. \tag{1.3.16}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. *Si les hyphothèses (1.3.3) à (1.3.8) sont vérifiées pour $(A_1, \mathcal{I}_U)$ et si la paire $(A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifit estimation de stabilité, alors pour tout $T > 0$ suffisemment grand, et tout $u_0 \in \mathcal{H}$ il existe un contrôle*
$J \in L^2(]0, T[; U)$ tel que la solution $u \in C([0, T], \mathcal{H})$ de (1.3.15) vérifit (1.3.16).

Preuve: On applique le principe de Liu[16] en résolvant le problème inverse (on remplace l'hypothèse "$(A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie 1.3.12" par "$(-A_1, \mathcal{I}_U)$ verifie 1.3.12").
Pour $p_0 \in \mathcal{H}$, on cherche $K \in L^2(]0, T[; U)$ tel que la solution $p \in C([0, T], \mathcal{H})$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + A_1 p = K \text{ dans } \mathcal{V}', t \geq 0, \\ \\ p(T) = p_0, \end{cases} \tag{1.3.17}$$

satisfasse

$$p(0) = 0. \tag{1.3.18}$$

On choisit d'abord h_0 dans $\mathcal{H}$ et on considère $h \in C([0, T], \mathcal{H})$ l'unique solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + A_1 h - \mathcal{I}_U h = 0 \text{ dans } \mathcal{H}, t \geq 0, \\ \\ h(T) = h_0. \end{cases} \tag{1.3.19}$$

En appliquant le Théorème 1.3.1 on obtient

$$\mathcal{E}(h(t)) \leq M e^{-\omega(T-t)} \mathcal{E}(h_0). \tag{1.3.20}$$

Ensuite on considère la fonction $q \in C([0, T], \mathcal{H})$ la solution unique de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} + A_1 q + \mathcal{I}_U q = 0 \text{ in } \mathcal{H},\ t \geq 0, \\ q(0) = h(0). \end{cases} \tag{1.3.21}$$

On pose maintenant $p = q - h$. De (1.3.19) et (1.3.21), on a p qui vérifie (1.3.17) avec

$$K = -\mathcal{I}_U q - \mathcal{I}_U h. \tag{1.3.22}$$

Soit l'application Λ de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}$ définie par

$$\Lambda(h_0) = q(T).$$

Avec l'estimation (1.3.20), on a $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = \sqrt{d}$ (où $d := Me^{-\omega T}$) et donc, pour tout $T > 0$ tel que $d < 1$, l'application $\Lambda - I$ est inversible. Dès lors, pour tout $p_0 \in \mathcal{H}$, il existe une donnée initiale unique $h_0 \in \mathcal{H}$ telle que

$$p_0 = p(T) = q(T) - h(T) = (\Lambda - I)h_0. \tag{1.3.23}$$

On termine la preuve en montrant que $K \in L^2(]0,T[;U)$. Pour cela, on remarque qu'avec l'identité (1.3.11) on a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(h(T)) - \mathcal{E}(h(0)) &= \int_0^T \|I_U h(t)\|_U^2\,dt,\\ \mathcal{E}(q(0)) - \mathcal{E}(q(T)) &= \int_0^T \|I_U q(t)\|_U^2\,dt.\end{aligned}$$

En sommant ces deux identités et en considérant la condition initiale du problème (1.3.21) et la condition finale de (1.3.19), on obtient

$$\int_0^T (\|I_U h(t)\|_U^2 + \|I_U q(t)\|_U^2)\,dt = \mathcal{E}(h(T)) - \mathcal{E}(q(T)) \leq \frac{1}{2}\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

En utilisant (1.3.23) et le fait que $(I-\Lambda)^{-1}$ soit borné, on arrive à l'estimation

$$\int_0^T (\|I_U h(t)\|_U^2 + \|I_U q(t)\|_U^2)\,dt \leq \frac{1}{2}\|(I-\Lambda)^{-1}p_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2(1-\sqrt{d})^2}\|p_0\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{1.3.24}$$

Ce qui prouve que K donné par (1.3.22) est dans $L^2(]0,T[;U)$. ∎

1.3.2 Stabilisation non linéaire

On suppose que l'espace contrôle U est de la forme

$$U = \prod_{j=1}^{J} U_j, \tag{1.3.25}$$

où, pour tout $j = 1, \cdots, J \in \mathbb{N}^\star := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, U_j est un sous espace fermé de $L^2(X_j, \mu_j)^{N_j}$, avec $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ un espace mesurable tel que $\mu_j(X_j) < \infty$ et $N_j \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $j = 1, \cdots, J$, on suppose donnée une fonction

$$g_j : \mathbb{R}^{N_j} \to \mathbb{R}^{N_j}$$

verifiant

$$(g_j(x) - g_j(y)) \cdot (x - y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{N_j} \text{ (monotonie)}, \quad (1.3.26)$$
$$g_j(0) = 0, \quad (1.3.27)$$
$$|g_j(x)| \leq M(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^{N_j}, \quad (1.3.28)$$

où M est une constante positive. En fin, on suppose que B est donné par

$$\langle Bu, v\rangle = \sum_{j=1}^{J} \int_{X_j} g_j((I_U u)_j(x_j)) \cdot (I_U v)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j), \quad (1.3.29)$$

On rappelle que I_U l'injection de $\mathcal{V}$ dans U et donc $(I_U u)_j$ est la j^{ieme} composante de $I_U u$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.3. *On suppose que les hypothèses (1.3.3) à (1.3.8) sont vérifiées pour les paires (A_1, B) et $(A_1, \mathcal{I}_U)$. Soient g_j, $j = 1, \cdots, J$ satisfaisant (1.3.26), (1.3.27) ainsi que*

$$g_j(x) \cdot x \geq m|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} : |x| \geq 1, \quad (1.3.30)$$
$$|x|^2 + |g_j(x)|^2 \leq G(g_j(x) \cdot x), \forall x \in \mathbb{R}^{N_j} : |x| \leq 1, \quad (1.3.31)$$

où m est une constante positive et $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ est une fonction concave strictement croissante telle que $G(0) = 0$. Si $(-A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie l'estimation de stabilité, alors il existe des constantes $c_2, c_3 > 0$ et $T_1 > 0$ (dependant de T, $\mathcal{E}(0)$, $\mu_j(X_j)$, $j = 1, \cdots, J$) telles que

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G\left(\frac{\psi^{-1}(c_2 t)}{c_2 T t}\right), \forall t \geq T_1, \quad (1.3.32)$$

pour toute solution u de (1.3.9), où ψ est donné par

$$\psi(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\phi(s)}\, ds, \forall t > 0. \quad (1.3.33)$$

pour ϕ defini par

$$\phi(s) = T\mu G^{-1}(\frac{s}{c_3}), \quad (1.3.34)$$

où $\mu = \min_{j=1,\cdots,J} \mu_j(X_j)$.

La preuve de ce théorème est basée sur l'inégalité intégrale suivante, établie dans [6]

Lemme 1.3.2. *Soit $\mathcal{E} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une fonction vérifiant l'inégalité*

$$\int_S^\infty \phi(\mathcal{E}(t))\,dt \leq T\mathcal{E}(S), \forall S \geq 0, \tag{1.3.35}$$

pour un $T > 0$ et une fonction ϕ convexe et strictement croissante de $[0,+\infty)$ à $[0,+\infty)$ telle que $\phi(0) = 0$. Alors, il existe un temps $t_1 > 0$ et un réel c_1 dependant de T et $\mathcal{E}(0)$ tels que

$$\mathcal{E}(t) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi^{-1}(c_1 t)}{c_1 T t}\right), \forall t \geq t_1, \tag{1.3.36}$$

où ψ est definie par (1.3.33)

Preuve du Théorème 1.3.3 : Le domaine $D(\mathcal{A})$ étant dense dans $\mathcal{H}$, il suffit d'établir (1.3.32) pour des données dans $D(\mathcal{A})$. Dans ce cas, u est solution (forte) de (1.3.9) et on considère p la solution du problème (1.3.17) et (1.3.18) avec $p_0 = u(T) \in D(\mathcal{A})$, $T > 0$ assez grand (l'existence est assurée par le Théorème 1.3.2). A partir de (1.3.9) et (1.3.17) on peut écrire

$$\langle \partial_t u + A_1 u + Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle \partial_t p + A_1 p - K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned}(\partial_t u, p)_{\mathcal{H}} &+ (\partial_t p, u)_{\mathcal{H}} + \langle A_1 u, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle A_1 p, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &+ \langle Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0.\end{aligned}$$

L'hypotèse (1.3.7) entraine

$$\langle A_1 u, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle A_1 p, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0,$$

et donc on a

$$(\partial_t u, p)_{\mathcal{H}} + (\partial_t p, u)_{\mathcal{H}} + \langle Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0.$$

En intégrant cette identité par partie pour $t \in (0,T)$, on obtient

$$(u(T), p(T))_{\mathcal{H}} - (u(0), p(0))_{\mathcal{H}} + \int_0^T (\langle Bu, p\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - \langle K, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}})\,dt = 0.$$

Avec les définitions de K et de B on arrive à

$$\begin{aligned}(u(T),p(T))_{\mathcal{H}} - (u(0),p(0))_{\mathcal{H}} &= \int_0^T \Big((K, I_U u)_U \\ &- \sum_{j=1}^J \int_{X_j} g_j((I_U u)_j(x_j)) \cdot (I_U p)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j)\Big)\, dt.\end{aligned}$$

En utilisant les conditions initiale et finale sur p, on obtient

$$2\mathcal{E}(T) = \int_0^T \left((K, I_U u)_U - \sum_{j=1}^J \int_{X_j} g_j((I_U u)_j(x_j)) \cdot (I_U p)_j(x_j)\, d\mu_j(x_j)\right) dt.$$

Une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}&2\mathcal{E}(T) \leq \|K\|_{L^2(0,T;U)} \|I_U u\|_{L^2(0,T;U)} \qquad (1.3.37)\\ &+\|I_U p\|_{L^2(0,T;U)} \left(\sum_{j=1}^J \int_0^T \int_{X_j} |g_j((I_U u)_j(x_j))|^2\, d\mu_j(x_j)\, dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Remarquons que l'estimation (1.3.24) et la condition finale sur p entraine

$$\int_0^T (\|I_U f(t)\|_U^2 + \|I_U g(t)\|_U^2)\, dt \leq \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\mathcal{E}(T).$$

Avec cette estimation, la définition de K et $p = g - f$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \|K(t)\|_U^2\, dt &\leq \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2}\mathcal{E}(T)\\ \int_0^T \|I_U p(t)\|_U^2\, dt &\leq \frac{2}{(1-\sqrt{d})^2}\mathcal{E}(T).\end{aligned}$$

Si on insère cette estimation dans (1.3.37) on obtient

$$\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{(1-\sqrt{d})^2}\left(\sum_{j=1}^J \int_0^T \int_{X_j} \{|(I_U u)_j(x_j)|^2 + |g_j((I_U u)_j(x_j))|^2\}\, d\mu_j(x_j)\, dt\right).$$

Avec les propriétés des g_j on estime le membre de droite et on obtient

$$\mathcal{E}(0) \leq c_3 G(\frac{\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)}{T\mu}),$$

pour une constante $c_3 > 0$ (dependant de T, $\mathcal{E}(0)$, $\max_j \mu_j(X_j)$, et $\min_j \mu_j(X_j)$). En appliquant cet argument sur $[t, t+T]$ (au lieu de $[0,T]$) on obtient

$$\mathcal{E}(t) \leq c_3 G(\frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{T\mu}) = \phi^{-1}(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)), \forall t \geq 0,$$

où ϕ est défini par (1.3.34). Comme ϕ est décroissante, cette estimation implique que , pour tout $0 \leq S < N$ avec N assez grand,

$$\begin{aligned} \int_S^N \phi(\mathcal{E}(t))\, dt &\leq \int_S^N (\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T))\, dt \\ &\leq T\mathcal{E}(S) - T\mathcal{E}(N+T)). \end{aligned}$$

En faisant tendre N on arrive à l'estimation (1.3.35) (voir lemme 5.1 de [6]) et on conclut par le Théorème 1.3.2. ∎

1.4 Décroissance de l'énergie

On suppose qu'il existe $\gamma_m \in]0, 2[$ tel que

$$|m_p \partial_p (a_{ijkl}) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}| \leq \gamma_m a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \tag{1.4.1}$$

pour tout tenseur symétrique ε_{ij}.

De (1.1.8), un calcul simple montre que

$$E'(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega |\nabla \theta(x,t)|^2 \, dx - \int_{\Gamma_2} g(u'(t)) \cdot u'(t) d\Gamma - \int_\Omega f(u'(t)) \cdot u'(t) dx,$$

et dès lors,

$$\begin{aligned} E(T) - E(S) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int_S^T \int_\Omega |\nabla \theta|^2 \, dx dt \\ &- \int_S^T \int_{\Gamma_2} g(u'(t)) \cdot u'(t)\, d\Gamma\, dt \\ &- \int_S^T \int_\Omega f(u'(t)) \cdot u'(t)\, dx dt, \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

pour tout S et T vérifiant $0 \leq S \leq T < \infty$. Les hypothèses (1.1.5), (1.1.6) et (1.1.7) conduisent à une décroissance de l'énergie.

Avec des hypothèses supplémentaires sur les fonctions f et g, nous allons préciser différents types de décroissance. On a le résultat de stabilisation suivant :

Théorème 1.4.1. *Soient Γ_1 et Γ_2 donnés par (1.1.1), (1.1.2) et vérifiant (1.2.1) et (1.2.2). On suppose que les coefficients a_{ijkl} satisfont les conditions (1.1.4) et (1.4.1) et que les fonctions f et g vérifient (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7), (1.2.3), (1.2.4), ainsi que les inégalités*

$$g(x) \cdot x \geq d|x|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ |x| \geq 1, \tag{1.4.3}$$

$$|x|^2 + |g(x)|^2 \leq G(g(x) \cdot x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ |x| \leq 1, \tag{1.4.4}$$

$$|x|^2 + |f(x)|^2 \leq G(f(x) \cdot x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ |x| \leq 1, \tag{1.4.5}$$

où d est une constante positive et G une fonction concave definie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $G(0) = 0$.
Alors, il existe des constantes positives τ, r_1, r_2 et un temps $T_1 > 0$ (dependant de $\tau, E(0), |\Gamma_2|, |\Omega|$) telle que l'énergie de la solution de (1.1.3) satisfasse

$$E(t) \leq r_2 G(\frac{\Psi^{-1}(r_1 t)}{r_1 \tau t}), \ \forall t \geq T_1, \tag{1.4.6}$$

où Ψ est donné par

$$\Psi(t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{\Phi(s)} ds, \tag{1.4.7}$$

avec

$$\Phi(s) = \tau R_1 G^{-1}(\frac{s}{r_2})$$

et $R_1 = \min(|\Gamma_2|; |\Omega|)$.

Des décroissances explicites seront données au paragraphe suivant.

Remarque 1.4.2. *Ce Théorème reste valable pour $f = 0$ et g vérifiant les hypothèses précédentes (cas d'un seul feedback frontière). Il en est de même pour un seul feedback distribué, c'est à dire $\Gamma_2 = \emptyset$ et f satisfaisant les hypothèses précédentes.*

Introduisons les constantes suivantes :

$$R_0 \ = \ \max_{x \in \overline{\Omega}} (\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{0k})^2)^{1/2},$$

γ et λ_0 les plus petits nombres réels positifs tels que, pour tout $u \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega))^n$ on ait

$$\int_{\Gamma_2} |u|^2 d\Gamma \leq \gamma^2 \left(\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u) dx + \int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma \right), \tag{1.4.8}$$

et

$$\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq \lambda_0^2 \left(\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u) dx + \int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma \right) \tag{1.4.9}$$

respectivement.

Pour démontrer le Théorème 1.4.1, il nous suffit de vérifier les conditions suffisantes du Théorème 1.3.3, autrement dit que le système linéaire associé à (1.1.3) est exponentiellement stable. Ce système a la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'' - div\sigma(u) + \alpha \nabla\theta + u' & = & 0 \text{ dans} Q, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta div u' & = & 0 \text{ dans} Q, \\ \theta & = & 0 \text{ sur} \Sigma, \\ u & = & 0 \text{ osur} \Sigma_1, \\ \sigma(u) \cdot \nu + au + u' & = & 0 \text{ sur } \Sigma_2, \\ u(.,0) = u_0, \ u'(.,0) = u_1, \ \theta(.,0) = \theta_0 & & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.4.10}$$

On rappelle que ce système est dissipatif, son énergie définie par (1.1.8) satisfaisant

$$\begin{aligned} E(T) - E(S) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int_S^T \int_\Omega |\nabla\theta|^2 \, dx dt \\ &- \int_S^T \int_{\Gamma_2} |u'(t)|^2 \, d\Gamma dt \\ &- \int_S^T \int_\Omega |u'(t)|^2 \, dx dt \leq 0, \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

pour tout S et T avec $0 \leq S \leq T < \infty$.

Pour utiliser les résultats du paragraphe 1.3, nous allons introduire les opérateurs A_1 et $\mathcal{I}_U$ associés à notre système (1.4.10). L'opérateur A_1 sera défini sur

$$\mathcal{V} := (H^1_{\Gamma_1})^n \times (H^1_{\Gamma_1})^n \times H^1_0(\Omega)$$

par

$$A_1\Phi = (-v, Au + \alpha\nabla\theta, \beta divv).$$

De même, eu égard aux feedbacks utilisés dans (1.4.10) et aux identités (1.3.11) et (1.4.11), nous allons faire le choix

$$U = (L^2(\Gamma_2))^n \times (L^2(\Omega))^n \times (L^2(\Omega))^n$$

et définire les formes

$$I_U : \mathcal{V} \longmapsto U$$
$$(u, v, \theta) \longmapsto (v_{|\Gamma_2}, v, \nabla\theta)$$

et $\mathcal{I}_U$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ par

$$\begin{aligned} &< \mathcal{I}_U(u,v,\theta), (u^*, v^*, \theta^*) >= (I_U(u,v,\theta), I_U(u^*, v^*, \theta^*)) \\ = &\int_{\Gamma_2} v \cdot v^* d\Gamma + \int_\Omega v \cdot v^* dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla\theta^* dx. \end{aligned}$$

Pour établir la stabilisation exponentielle du système (1.4.10), nous allons montrer que la paire $(-A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie l'estimation de stabilité (voir Théorème 1.3.1).

Commençons par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 1.4.1. *Soit (u, θ) une solution forte de (1.4.10) et la fonction M définie par*

$$M(u) = 2(m \cdot \nabla)u + (n-1)u.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$, il existe une constante positive η telle que

$$\|M(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \leq \eta E(t).$$

Preuve du Lemme 1.4.1 : Par une intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
\|M(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} &= \int_\Omega [|2(m\cdot\nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 4(n-1)u\cdot(m\cdot\nabla)u]dx \\
&= \int_\Omega [|2(m\cdot\nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 2(n-1)m\cdot\nabla(|u|^2)]dx \\
&= \int_\Omega [|2(m\cdot\nabla)u|^2 + (1-n^2)|u|^2]dx + 2(n-1)\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u|^2 d\Gamma \\
&\leq 4R_0^2\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2(n-1)\int_{\Gamma_2} m\cdot\nu|u|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

On conclut avec l'inégalité de Korn . ∎

Lemme 1.4.2. *Il existe une constante strictement positive constant C telle que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et tout $T>0$, on ait*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_2} a|u|^2 d\Gamma dt \leq \frac{C}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt.$$

Preuve du Lemme 1.4.2 : On procède comme dans [2]. Pour $t \geq 0$, on considère la solution $z = z(t)$ de

$$\left\{\begin{array}{l} div(\sigma(z)) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ z = u \text{ sur } \Gamma. \end{array}\right. \tag{1.4.12}$$

Cette solution est caractérisée par $z = \omega + u$ où $\omega \in (H_0^1(\Omega))^n$ est l'unique solution de

$$\int_\Omega \sigma(\omega) : \varepsilon(v)\,dx = -\int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\,dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Cette identité implique

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(v)\,dx = 0 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n. \tag{1.4.13}$$

En posant $v = z - u$ dans l'identité précédente, on a

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(u)\,dx = \int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(z)\,dx \geq 0. \tag{1.4.14}$$

Montrons maintenant que z vérifie

$$\int_\Omega f \cdot z\, dx = -\int_\Gamma z \cdot (\sigma(v_f)\nu)\, d\Gamma, \quad \forall f \in (L^2(\Omega))^n, \tag{1.4.15}$$

avec $v_f \in (H_0^1(\Omega))^n$ l'unique solution de

$$\int_\Omega \sigma(v_f) : \varepsilon(w) dx = \int_\Omega f \cdot w dx, \forall w \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

A partir (1.4.13) et de la propriété $\sigma(z) : \epsilon(v) = \sigma(v) : \epsilon(z)$ (conséquence de l'hypothèse $a_{ijkl} = a_{klij}$), on peut écrire

$$\int_\Omega \sigma(v_f) : \varepsilon(z) dx = 0.$$

Par la formule de Green, on déduit que

$$-\int_\Omega div\sigma(v_f) \cdot z\, dx + \int_\Gamma z \cdot (\sigma(v_f)\nu)\, d\Gamma = 0,$$

ce qui prouve l'égalité (1.4.15) avec $div\sigma(v_f) = -f$.

Si on pose $f = z$ dans l'identité (1.4.15), on peut écrire

$$\int_\Omega |z|^2 dx = -\int_\Gamma z \cdot (\sigma(v_z)\nu) d\Gamma.$$

Avec les conditions $z = u$ sur Γ et $u = 0$ sur Γ_1, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |z|^2 dx \leq \|u\|_{(L^2(\Gamma_2))^n} \|\sigma(v_z)\nu\|_{(L^2(\Gamma))^n}. \tag{1.4.16}$$

La frontière Γ étant de classe C^2 on a, par un résultat de régularité classique, $v_z \in (H^2(\Omega))^n$ et l'estimation

$$\|v_z\|_{(H^2(\Omega))^n} \leq K \|z\|_{(L^2(\Omega))^n},$$

avec K une constante positive. Cette estimation et les propriétés des traces donnent

$$\|\sigma(v_z)\nu\|_{(L^2(\Gamma))^n} \leq K_1 \|z\|_{(L^2(\Omega))^n},$$

où K_1 est une constante positive. Si on insère cette estimation dans (1.4.16) on arrive à

$$\int_\Omega |z|^2 dx \leq C_0 \int_{\Gamma_2} |u|^2 d\Gamma, \tag{1.4.17}$$

C_0 étant une constante positive. En remplaçant u par u', on a z' solution de (1.4.12) et l'estimation

$$\int_\Omega |z'|^2 dx \leq C_0 \int_{\Gamma_2} |u'|^2 d\Gamma. \tag{1.4.18}$$

Pour $0 < T < \infty$, on pose

$$\begin{aligned}
&Q_T = \Omega \times [0,T],\\
&\Sigma_T = \Gamma \times [0,T]; \;\; \Sigma_{1T} = \Gamma_1 \times [0,T]; \;\; \Sigma_{2T} = \Sigma_T \setminus \Sigma_{1T}.
\end{aligned}$$

On multiplit la première identité du système (1.4.10) par z et on intégre par partie sur Q_T. On obtient

$$\int_{Q_T} z(u'' - div(\sigma(u)) + \alpha\nabla\theta + u')\, dxdt = 0.$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte des conditions aux bords dans (1.4.10) et dans (1.4.12), on a

$$\int_{Q_T} (zu'' + \sigma(z) : \varepsilon(u) + \alpha z\nabla\theta + u'z)\, dxdt$$

$$+ \int_{\Sigma_{2T}} u(au + u')d\Sigma = 0.$$

On intégre par partie par rapport à la variable t puis on utilise (1.4.14), pour obtenir (on tient compte de la propriété $\sigma(z) : \epsilon(u) = \sigma(u) : \epsilon(z)$)

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_{2T}} a|u|^2 d\Sigma \;\; &\leq \;\; - \int_{\Sigma_{2T}} uu' d\Sigma + \int_{Q_T} z'u'\, dxdt \\
&- \;\; \alpha \int_{Q_T} z\nabla\theta\, dxdt - \int_{Q_T} u'z\, dxdt - \int_\Omega zu'|_0^T.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé. En utilisant l'inégalité de Young et (1.4.11), (1.4.17), (1.4.18) on peut estimer les différents termes du membre de droite de l'inégalité précèdente de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
-\int_{\Sigma_{2T}} uu'\,d\Sigma &\leq \varepsilon_0 \int_{\Sigma_{2T}} |u|^2\,d\Sigma + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2\,d\Sigma \\
&\leq 2\varepsilon_0\gamma^2 \int_0^T E(t)\,dt + \frac{1}{4\varepsilon_0}E(0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_T} z'u'\,dxdt &\leq \varepsilon_0 \int_{Q_T} |u'|^2\,dxdt + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_{Q_T} |z'|^2\,dxdt \\
&\leq 2\varepsilon_0 \int_0^T E(t)\,dt + \frac{C_0}{4\varepsilon_0}E(0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_T} \alpha\nabla\theta.z\,dxdt &\leq \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_0}\int_{Q_T} |\nabla\theta|^2\,dxdt + \varepsilon_0\int_{Q_T} |z|^2\,d\Sigma \\
&\leq \frac{\alpha\beta}{4\varepsilon_0}E(0) + 2\varepsilon_0 C_0\gamma^2 \int_0^T E(t)\,dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} u'z\,dxdt &\leq \varepsilon_0 \int_{Q_T} |z|^2\,dxdt + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_{Q_T} |u'|^2\,d\Sigma \\
&\leq \varepsilon_0 C_0\gamma^2 \int_0^T E(t)\,dt + \frac{1}{4\varepsilon_0}E(0),
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega zu'|_0^T\,dx \leq 4(1 + C_0\gamma^2)E(0).$$

En regroupant ces différentes estimations, on achève la preuve du lemme en posant

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 + 2 + 3C_0\gamma^2}$$

et

$$C = (\frac{1}{2} + \frac{C_0}{4} + \frac{\alpha\beta}{4} + 4(1 + C_0\gamma^2))(2\gamma^2 + 2 + 3C_0\gamma^2).$$

∎

Preuve du Théorème 1.4.1 : On multiplit d'abord la première identité de (1.4.10) par

$$M(u) = 2(m \cdot \nabla)u + (n-1)u$$

et on intégre par partie sur Q_T. Il vient :

$$\int_{Q_T} u'' \cdot M(u)\,dxdt = (u', M(u))|_0^T - \int_{\Sigma_{2T}} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma + \int_{Q_T} |u'|^2\,dxdt,$$

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} div\sigma(u) \cdot M(u)\,dxdt &= \int_{\Sigma_T} [(\sigma(u) \cdot \nu) \cdot M(u) - (m \cdot \nu)\sigma(u) : \varepsilon(u)] d\Sigma \\
&- \int_{Q_T} \sigma(u) : \varepsilon(u) dxdt \\
&+ \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl}) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) dxdt.
\end{aligned}$$

En combinant ces deux identités et en tenant compte des conditions aux limites dans (1.4.10) (qui impliquent en particulier $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial u_i}{\partial \nu}\nu_k$ sur Σ_{1T}), on obtient

$$\begin{aligned}
2\int_0^T E(t)dt &= -(u', M(u))|_0^T + \int_{\Sigma_{2T}} (m \cdot \nu |u'|^2 + a|u|^2) d\Sigma - \int_{Q_T} u' M(u)\,dxdt \\
&- \alpha \int_{Q_T} \nabla\theta . M(u) dxdt + \frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T} \theta^2\,dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_T} [(\sigma(u)\nu) M(u) - m.\nu\sigma(u) : \varepsilon(u)] d\Sigma \\
&+ \int_{Q_T} m_p \partial_p (a_{ijkl}) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) dxdt.
\end{aligned}$$

Cette identité sera reécrite

$$2\int_0^T E(t)dt = \sum_{i=1}^{6} I_i,$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &:= -(u', M(u))|_0^T, \\
I_2 &:= \int_{\Sigma_{2T}} (m\cdot\nu|u'|^2 + a|u|^2)d\Sigma, \\
I_3 &:= -\int_{Q_T} u'\cdot M(u)\,dxdt, \\
I_4 &:= \alpha\int_{Q_T} [\nabla\theta\cdot M(u)dxdt + \frac{\alpha}{\beta}\theta^2]\,dxdt, \\
I_5 &:= \int_{\Sigma_T} [(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - m\cdot\nu\sigma(u) : \varepsilon(u)]d\Sigma, \\
I_6 &:= \int_{Q_T} m_p\partial_p(a_{ijkl})\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(u)dxdt.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant estimer les différents termes I_i.

Pour $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on a

$$\int_\Omega u'(t)\cdot M(u)(t)dx \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|u'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} + \frac{\varepsilon}{2}\|M(u(t))\|^2_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Par le lemme 1.4.1 et l'identité (1.4.11), on a l'existence de deux constantes positives k_1 et k_3 telles que

$$I_1 \leq k_1 E(0)$$

et

$$I_3 \leq \frac{k_3}{\varepsilon}\int_{Q_T} |u'|^2\,dxdt + k_3\varepsilon\int_0^T E(t)dt.$$

De la même manière, par le lemme 1.4.2, il existe une constante positive k_2 telle que

$$I_2 \leq R_0\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_{2T}} a|u|^2 d\Sigma \leq R_0\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2 d\Sigma + \frac{k_2}{\varepsilon}E(0) + \varepsilon\int_0^T E(t)dt.$$

En appliquant la formule de Young et en tenant compte de (1.4.2) on a, de par la définition des constantes R_0 et λ_0,

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \frac{\alpha^2(n-1)^2}{4\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla\theta|^2+\varepsilon\int_{Q_T}|u|^2+\frac{\alpha^2R_0^2}{\varepsilon}\int_{Q_T}|\nabla\theta|^2+\varepsilon\int_{Q_T}|\nabla u|^2 \\
&+ \frac{\alpha}{\beta}\int_{Q_T}|\theta|^2\,dxdt, \\
&\leq [\frac{\alpha\beta(n-1)^2}{4\varepsilon}+\frac{\alpha\beta R_0^2}{\varepsilon}+\lambda_0^2]\int_{Q_T}\frac{\alpha}{\beta}|\nabla\theta|^2+\varepsilon\int_{Q_T}[|u|^2+|\nabla u|^2]\,dxdt \\
&\leq [\frac{\alpha\beta(n-1)^2}{4\varepsilon}+\frac{\alpha\beta R_0^2}{\varepsilon}+\lambda_0^2]\int_{Q_T}\frac{\alpha}{\beta}|\nabla\theta|^2+\varepsilon k_4\int_0^T E(t)dt \\
&\leq k_4'E(0)+\varepsilon k_4\int_0^T E(t)dt,
\end{aligned}$$

où k_4 et k_4' sont des constantes positives.

Nous allons estimer le terme I_5 avec l'utilisation de coordonnées locales [2]. En tout point $x\in\Gamma$, on considère la projection orthogonale $\pi(x)$ sur l'hyperplan tangent $T_x(\Gamma)$. Tout vecteur $v:\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ se décompose en

$$v(x)=v_T(x)+v_\nu(x)\nu(x),$$

où $v_T(x)=\pi(x)v(x)$ est la composante tangentielle de v et $v_\nu(x)=v(x)\cdot\nu(x)$. En notant ∂_T(resp. ∂_ν la dérivation tangentielle (resp. normale) à Γ, on écrit la différentielle de v :

$$dv=\pi(\partial_T v)\pi+v_\nu(\partial_T\nu)+(\partial_T v_T)\overline{v}+\nu(\partial_T v_\nu)+\overline{v_T}(\partial_T\nu)+(\partial_\nu v_\nu)\overline{\nu}$$

sur Γ, où $\overline{v}$ désigne le vecteur transposé de v.
Le tenseur de déformation se décompose de la manière suivante :

$$\varepsilon(v)=\varepsilon_T(v)+\nu\overline{\varepsilon_S(v)}+\varepsilon_S(v)\overline{\nu}+\varepsilon_\nu(v)\nu\overline{\nu}\qquad\text{sur}\quad\Gamma,$$

avec

$$\begin{aligned}
\varepsilon_T(v) &= \pi(\partial_T v_T)\pi+\pi\overline{\partial_T v_T}\pi+2v_\nu\partial_T\nu\,, \\
\varepsilon_S(v) &= \partial_\nu v_T+\nabla_T v_\nu-(\partial_T\nu)v_T\,, \\
\varepsilon_\nu(v) &= \partial_\nu v_\nu\,.
\end{aligned}$$

De la même manière le tenseur de contraintes se décompose en

$$\sigma(v) = \sigma_T(v) + \nu\overline{\sigma_S(v)} + \sigma_S(v)\overline{\nu} + \sigma_\nu(v)\nu\overline{\nu} \quad \text{sur} \quad \Gamma\,,$$

où $\sigma_T(v)$ est un endomorphisme sur l'hyperplan tangent, $\sigma_S(v)$ un vecteur tangent et $\sigma_\nu(v)$ un scalaire.

En définitive, on peut écrire

$$\varepsilon(v)\colon\varepsilon(v) = \varepsilon_T(v)\colon\varepsilon_T(v) + 2|\varepsilon_S(v)|^2 + |\varepsilon_\nu(v)|^2 \quad \text{sur} \quad \Gamma\,,$$

$$\sigma(v)\colon\varepsilon(v) = \sigma_T(v)\colon\varepsilon_T(v) + 2\overline{\sigma_S(v)}\varepsilon_S(v) + \sigma_\nu(v)\varepsilon_\nu(v) \quad \text{sur} \quad \Gamma\,.$$

On rappelle que la proposition 1 de [2] établit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Gamma |\nabla_T v_T|^2\, d\Gamma \leq C \int_\Gamma (|v_T|^2 + \varepsilon_T(v_T)\colon\varepsilon_T(v_T))\, d\Gamma, \forall\, v_T \in H^1(\Gamma)^{n-1}. \quad (1.4.19)$$

La condition de Dirichlet sur Γ_1 donne

$$M(u) = 2(m\cdot\nabla)u = 2m\cdot\nu\,\partial_\nu u\,, \quad \varepsilon_T(u) = 0\,, \quad 2\varepsilon_S(u) = \partial_\nu u_T,$$

et par conséquent

$$(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) \;=\; 2m\cdot\nu\big(\overline{\sigma_S(u)}\partial_\nu u_T + \sigma_\nu(u)\partial_\nu u_\nu\big) \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\,,$$

et

$$\sigma(u)\colon\varepsilon(u) \;=\; \overline{\sigma_S(u)}\partial_\nu u_T + \sigma_\nu(u)\partial_\nu u_\nu \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\,.$$

ces deux inégalités conduisent à

$$\int_{\Gamma_1} ((\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - m\cdot\nu\,\sigma(u)\colon\varepsilon(u))\, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} m\cdot\nu\,\sigma(u)\colon\varepsilon(u)\, d\Gamma\,.$$

Comme $m\cdot\nu \leq 0$ sur Γ_1 et $\sigma(u)\colon\varepsilon(u) \geq 0$, on déduit que

$$\int_{\Gamma_1} ((\sigma(u)\nu)M(u) - m\cdot\nu\,\sigma(u)\colon\varepsilon(u))\, d\Gamma \leq 0. \qquad (1.4.20)$$

En vertu des conditions au bord sur Γ_2, on peut écrire

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma(u)\nu)\cdot M(u)\, d\Gamma = -\int_{\Gamma_2} 2(au+u')\cdot(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_2} u\cdot(au+u')\, d\Gamma\,.$$

Cette identité, combinée à l'estimation (1.4.20) et l'hypothèse (1.1.4) donne

$$\begin{aligned} I_5 \;\le\; & C\int_{\Sigma_{2T}} (|u|^2+|u'|^2)d\Sigma) \\ & - \int_0^T\int_{\Gamma_2} 2(au+u')\cdot(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma\, dt \\ & - k\delta\int_0^T\int_{\Gamma_2} \left(\varepsilon_T(u)\colon \varepsilon_T(u) + 2|\varepsilon_S(u)|^2 + |\varepsilon_\nu(u)|^2\right)\, d\Gamma\, dt\,. \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

où C est une constante positive suffisament grande et k une constante positive telle que $m\cdot\nu \ge k > 0$ sur Γ_2. On estime d'abord le terme

$$\mathcal{I}_1 = \int_S^T \int_{\Gamma_2} 2au\cdot(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma\, dt.$$

On remarque que $u\cdot(m\cdot\nabla)u = \frac{1}{2}m\cdot\nabla(|u|^2)$ et en écrivant $\nabla u = \nabla_T u + \nu(\partial_\nu u)$, on obtient

$$u\cdot(m\cdot\nabla)u = \frac{1}{2}\nabla_T(|u|^2)\cdot m_T + m_\nu u_T\cdot(\partial_\nu u_T) + m_\nu u_\nu(\partial_\nu u_\nu) \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2\,.$$

Par la formule de Green, on a

$$\int_{\Gamma_2} a\nabla_T(|u|^2)\cdot m_T\, d\Gamma = -\int_{\Gamma_2} |u|^2 div_T(am_T)\, d\Gamma\,,$$

et par conséquent

$$\left|\int_{\Gamma_2} a\nabla_T(|u|^2)\cdot m_T\, d\Gamma\right| \le C\int_{\Gamma_2} |u|^2\, d\Gamma\,.$$

En utilisant l'expression de $\varepsilon_S(u)$, on peut écrire

$$m_\nu\, u_T\cdot\partial_\nu u_T = m_\nu\, u_T\cdot(2\varepsilon_S(u) + (\partial_T\nu)u_T - \nabla_T u_\nu) \qquad \text{sur} \quad \Gamma_2\,.$$

Par l'inégalité de Young, on a

$$\left|\int_{\Gamma_2} 4am_\nu\, u_T\cdot\varepsilon_S(u)\, d\Gamma\right| \le \theta\int_{\Gamma_2} |\varepsilon_S(u)|^2\, d\Gamma + \frac{C}{\theta}\int_{\Gamma_2} |u_T|^2\, d\Gamma\,.$$

pour tout $\theta \in (0,1)$ (qui sera choisi ultérieurement). De même, une application de la formule de Green donne

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} am_\nu\, u_T \cdot \nabla_T u_\nu \, d\Gamma &= -\int_{\Gamma_2} u_\nu div_T(am_\nu u_T)\, d\Gamma \\ &= -\int_{\Gamma_2} am_\nu\, u_\nu div_T u_T \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_\nu \nabla_T(am_\nu) \cdot u_T \, d\Gamma \,.\end{aligned}$$

Par l'estimation (1.4.19) et une réapplication de l'inégalité de Young, on obtient

$$\Big| \int_{\Gamma_2} 2am_\nu\, u_T \cdot \nabla_T u_\nu \, d\Gamma \Big| \leq \theta \int_{\Gamma_2} \varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T)\, d\Gamma + \frac{C}{\theta} \int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma \,.$$

Les termes restant sont aussi estimés à l'aide de l'inégalité de Young et on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_1| &\leq \theta \int_0^T \int_{\Gamma_2} \left(|\partial_\nu u_\nu|^2 + \varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) + |\varepsilon_S(u)|^2 \right) d\Gamma \, dt \qquad (1.4.22) \\ &+ \frac{C}{\theta} \int_0^T \int_{\Gamma_2} |u|^2 \, d\Gamma \, dt \,.\end{aligned}$$

Ensuite on estime le terme

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^T \int_{\Gamma_2} 2u' \cdot (m \cdot \nabla) u \, d\Gamma \, dt.$$

L'expression du gradient en coordonnées locales donne

$$\begin{aligned}u' \cdot (m \cdot \nabla) u &= u'_T \cdot (\partial_T u_T) m_T + (u_\nu u'_T - u'_\nu u_T) \cdot (\partial_T \nu) m_T \\ &+ u'_\nu m_T \cdot \nabla_T u_\nu + m_\nu (u'_T \cdot \partial_\nu u_T + u'_\nu (\partial_\nu u_\nu)) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \,.\end{aligned}$$

Les seules difficultés sont pour les termes $u'_\nu m_T \cdot \nabla_T u_\nu$ et $m_\nu u'_T \cdot \partial_\nu u_T$, les autres sont estimés avec l'inégalité de Young.
Pour le premier, en utilisant les cartes locales, la partition de l'unité et l'analyse de Fourier (voir [2] pour les détails) , on montre que

$$\Big| \int_0^T \int_{\Gamma_2} u'_\nu m_T \cdot \nabla_T u_\nu \, d\Gamma \, dt \Big| \leq C \left[\|u_\nu\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \right]_0^T .$$

Par la formule définissant l'énergie, on obtient

$$\Big|\int_0^T \int_{\Gamma_2} u'_\nu m_T \cdot \nabla_T u_\nu \, d\Gamma \, dt\Big| \le CE(0)\,.$$

Pour le second terme, on utilise l'expression de $\varepsilon_S(u)$ et on a

$$m_\nu u'_T \cdot \partial_\nu u_T = m_\nu u'_T \cdot (2\varepsilon_S(u) + (\partial_T \nu) u_T - \nabla_T u_\nu) \quad \text{sur} \quad \Gamma_2\,.$$

Les deux premiers termes sont estimés par l'inégalité de Young. Pour le dernier, une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Gamma_2} m_\nu \, u'_T \cdot \nabla_T u_\nu \, d\Gamma \, dt &= \Big[\int_{\Gamma_2} m_\nu \, u_T \cdot \nabla_T u_\nu \, d\Gamma\Big]_0^T \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_2} div_T(m_\nu \, u_T) u'_\nu \, d\Gamma \, dt.\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, avec l'estimation (1.4.19), on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T \int_{\Gamma_2} div_T(m_\nu \, u_T) u'_\nu \, d\Gamma \, dt\Big| &\le \theta \int_0^T \int_{\Gamma_2} \varepsilon_T(u_T) : \varepsilon_T(u_T) d\Gamma \, dt \\ &+ \frac{C}{\theta} \int_0^T \int_{\Gamma_2} (|u|^2 + |u'|^2) \, d\Gamma \, dt.\end{aligned}$$

Il reste à estimer $\int_{\Gamma_2} m_\nu \, u_T(t) \cdot \nabla_T u_\nu(t) \, d\Gamma$ à $t = 0$ ou T. Pour cela, on considère $\zeta \in H^1(\Gamma_2)$ solution de

$$\zeta - \Delta_T \zeta = div_T u_T(t) \text{ on } \Gamma_2.$$

Comme $div_T u_T(t)$ est dans $H^{-1/2}(\Gamma_2)$, ζ est dans $H^{3/2}(\Gamma_2)$, et en plus on a l'estimation

$$\|\zeta\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)} \le C \|div_T u_T(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \le C \|u_T(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \tag{1.4.23}$$

Notons qu'avec formulation variationnelle de ce problème on a

$$\|\zeta\|_{H^1(\Gamma_2)} \le C \|u_T(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}. \tag{1.4.24}$$

Par la formule de Green et la définition de ζ il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} m_\nu\, u_T(t)\cdot\nabla_T u_\nu(t)\,d\Gamma &= \int_{\Gamma_2} u_\nu(t) div_T(m_\nu\, u_T(t))\,d\Gamma\\ &= \int_{\Gamma_2} u_\nu(t)u_T(t)\cdot\nabla_T m_\nu\,d\Gamma\\ &- \int_{\Gamma_2} u_\nu(t)m_\nu\zeta\,d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_\nu(t)m_\nu\Delta_T\zeta\,d\Gamma.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et estimation (1.4.24), on obtient

$$\Big|\int_{\Gamma_2} u_\nu(t)\nabla_T m_\nu\cdot u_T(t)\,d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_\nu(t)m_\nu\zeta\,d\Gamma\Big| \le C\int_{\Gamma_2}|u(t)|^2\,d\Gamma.$$

Finalement, avec le fait que l'opérateur $-\Delta_T$ est non négatif et auto adjoint, on peut écrire

$$-\int_{\Gamma_2} u_\nu(t)m_\nu\Delta_T\zeta\,d\Gamma = \int_{\Gamma_2}(-\Delta_T)^{1/4}(u_\nu(t)m_\nu)(-\Delta_T)^{3/4}\zeta\,d\Gamma,$$

et par l'inégalité Cauchy-Schwarz et l'estimation (1.4.23), on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\Gamma_2} u_\nu(t)m_\nu\Delta_T\zeta\,d\Gamma\Big| &\le C\|u_\nu(t)m_\nu\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}\|\zeta\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)}\\ &\le C\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)}.\end{aligned}$$

Par les propriétés des traces et la définition de l'énergie, on obtient

$$\Big|\int_{\Gamma_2} m_\nu\, u_T(t)\cdot\nabla_T u_\nu(t)\,d\Gamma\Big| \le CE(t).$$

Finalement on arrive à

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_2| &\le \theta\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(\varepsilon_T(u_T)\colon\varepsilon_T(u_T) + |\varepsilon_S(u)|^2 + |\partial_\nu u_\nu|^2\right)\,d\Gamma\,dt \qquad (1.4.25)\\ &+ \frac{C}{\theta}\int_0^T\int_{\Gamma_2}(|u|^2+|u'|^2)\,d\Gamma\,dt + CE(0),\end{aligned}$$

pour tout $\theta \in (0,1)$. Les estimations (1.4.22), (1.4.25) et (1.4.21) conduisent à

$$\begin{aligned} I_5 &\leq k_5\left(E(0)+\int_{\Sigma_{2T}}(|u|^2+|u'|^2)\,d\Gamma\,dt\right) \qquad (1.4.26)\\ &+ 2\theta\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(\varepsilon_T(u_T):\varepsilon_T(u_T)+|\varepsilon_S(u)|^2+|\partial_\nu u_\nu|^2\right)\,d\Gamma\,dt\\ &- k\delta\int_0^T\int_{\Gamma_2}\left(\varepsilon_T(u):\varepsilon_T(u)+2|\varepsilon_S(u)|^2+|\partial_\nu u_\nu|^2\right)\,d\Gamma\,dt\,. \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in (0,1)$ et pour une certaine constante $k_5 > 0$.
En faisant le choix $\theta < k\delta/2$, on arrive à l'estimation

$$I_5 \leq k_5(E(0)+\int_{\Sigma_{2T}}(|u|^2+|u'|^2)d\Sigma).$$

Avec le Lemme 2.3.2, on obtient

$$I_5 \leq (k_5+\frac{k_6}{\varepsilon})E(0)+k_5\int_{\Sigma_{2T}}|u'|^2d\Sigma+\varepsilon\int_0^T E(t)dt,$$

avec $k_6 > 0$. En tenant compte de la definition de γ_m, on a

$$I_6 \leq \gamma_m\int_0^T E(t)dt.$$

En regroupant le tout, il vient

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E(t)dt &\leq (k_1+\frac{k_2+k_6}{\varepsilon}+k_5+k_4')E(0)\\ &+ (\frac{k_3}{\varepsilon}+k_5+R_0)[\int_{\Sigma_{2T}}|u'|^2d\Sigma+\int_{Q_T}|u'|^2\,dxdt]\\ &+ \varepsilon(2+k_3+k_4)\int_0^T E(t)\,dt+\gamma_m\int_0^T E(t)\,dt. \end{aligned}$$

Finalement, en choisissant

$$\varepsilon \in]0,(2-\gamma_m)/(2+k_3+k_4)[$$

et en posant

$$C_1 = \frac{\frac{k_3}{\varepsilon} + k_5 + R_0}{2 - \gamma_m - \varepsilon(2 + k_3 + k_4)}, \quad C_2 = \frac{k_1 + \frac{k_2+k_6}{\varepsilon} + k_5 + k_4'}{2 - \gamma_m - \varepsilon(2 + k_3 + k_4)},$$

on conclut que

$$\int_0^T E(t) \le C_2 E(0) + C_1 (\int_{\Sigma_{2T}} |u'|^2 d\Sigma + \int_{Q_T} |u'|^2 \, dx dt). \tag{1.4.27}$$

Cette estimation peut être étendue aux solutions faibles par un argument de densité. Dans le formalisme du paragraphe 1.3, l'estimation (1.4.27) signifie que la paire $(-A_1, \mathcal{I}_U)$ vérifie l'estimation de stabilité. On conclut donc par le Théorème 1.3.3 (Voir aussi Théorème 5.3 de [23] et tThéorème 2.1 de [10]).

■

1.5 Exemples

1. Si $f = 0$ et g satisfait (1.1.5), (1.1.6), (1.2.4), (1.4.3), (1.4.4), ainsi que

$$x \cdot g(x) \ge c_0 |x|^{p+1}, \ \forall |x| \le 1, \tag{1.5.1}$$

$$|g(x)| \le C_0 |x|^{\alpha}, \ \forall |x| \le 1, \tag{1.5.2}$$

où c_0, C_0 sont des constantes positives, $\alpha \in (0, 1]$ et $p \ge \alpha$. Alors g vérifie (1.4.5) avec

$$G(x) = x^{\frac{2}{q+1}} \text{ et } q = \frac{p+1}{\alpha} - 1.$$

Si $p = \alpha = 1$ on obtient les mêmes décroissance que dans le Théorème 2.3 de [17].

Si $p + 1 \ge 2\alpha$, alors $\Psi^{-1}(t) = t^{\frac{2}{1-q}}$ et on obtient une décroissance de l'ordre

$$t^{-\frac{2\alpha}{p+1-2\alpha}}.$$

2. Si $f = 0$ et $g(\xi) = \exp(-\frac{1}{|\xi|^{2p}}) \frac{\xi}{|\xi|^2}$ pour $|\xi|$ assez petit et $p > 0$, alors par 2.4 de [6], (1.4.4) est vrai avec

$$G(x) = \frac{C}{|\log x|^{\frac{1}{p}}}$$

et C une constante positive. On obtient

$$E(t) \leq \frac{C}{|\log t|^{\frac{1}{p}}}.$$

3.Si $f = 0$ et $g(\xi) = \exp(-\exp(1/|\xi|^{2p}))\frac{\xi}{|\xi|^2}$ pour $|\xi|$ assez petit et $p > 0$. on prend

$$G(x) = \frac{C}{|\log|\log x||^{\frac{1}{p}}}$$

$C > 0$ et on a

$$E(t) \leq \frac{C}{|\log|\log t||^{\frac{1}{p}}}.$$

Remarque 1.5.1. *Le Théorème 1.4.1 est aussi valable pour le cas isotrope (voir [24])*

$$\begin{cases} u'' - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla divu + \alpha\nabla\theta + f(u') & = 0 \ dans \ Q := \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ \theta' - \Delta\theta + \beta divu' & = 0 \ dans \ Q, \\ \theta & = 0 \ sur \ \Sigma = \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u & = 0 \ sur \ \Sigma_1 = \Gamma_1\times\mathbb{R}^+, \\ \nu\dfrac{\partial u}{\partial\mu} + (\lambda+\mu)\nu divu + g(u') & = 0 \ sur \ \Sigma_2 = \Gamma_2\times\mathbb{R}^+, \\ u(\cdot,0) = u_0, \ u'(\cdot,0) = u_1 \ \theta(\cdot,0) = \theta_0 & \quad sur \ \Omega, \end{cases}$$

ce qui étend les résultats de [17].

Chapitre 2

Structure vibrante pluridimensionnelle

2.1 Modèle de couplage

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, avec une frontière Γ de classe C^2. Comme dans le chapitre 1, on fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on définit la fonction $m(x) = x - x_0$; où $x \in \mathbb{R}^n$ et les sous ensembles suivants de la frontière Γ (voir figures FIG.2.1 et FIG.2.2) :

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\}, \tag{2.1.1}$$

$$\Gamma_N = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}. \tag{2.1.2}$$

On fixe un sous ensemble ouvert γ de Γ_0 définis par

$$\gamma = \{u \in \Gamma / \, m(x) \cdot \nu(x) \leq -\alpha_0 < 0\}$$

où $\alpha_0 > 0$ et on note

$$\Gamma_D = \Gamma_0 \setminus \gamma. \tag{2.1.3}$$

Dans tout ce chapitre, on suppose que $mes(\Gamma_D > 0)$, $mes(\Gamma_N > 0)$ et $mes(\gamma > 0)$.

On considère une poutre unidimensionnelle ω de longueur l attachée à Ω en un point $a \in \gamma$ et orthogonale à Γ. On représente chaque point de ω par son abscisse s de telle sorte que l'on puisse écrire

$$\omega = \{a + s\nu(a) : 0 < s < l\}.$$

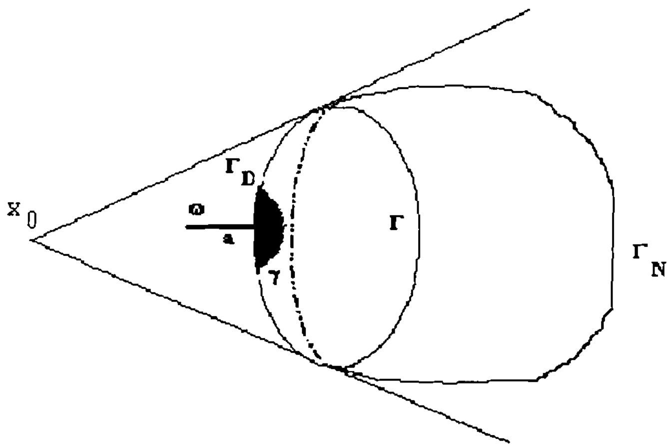

FIG. 2.1 – Un exemple de couplage pour n= 2

La dérivation suivant le paramètre s sera notée ∂. En fin, on introduit un nombre réel positif α et une fonction θ définie de γ vers $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 à support compact et telle que $\theta \neq 0$.

2.2 Existence de solution

On définit les espaces de Hilbert suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= (L^2(\Omega))^n \times L^2(\omega), \\
H^1_{\Gamma_D}(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}, \\
V &= \{(u,v) \in (H^1_{\Gamma_D}(\Omega))^n \times H^2(\omega); u = \theta v(0) \text{ sur } \gamma \text{ et } \partial v(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

L'espace V est munie de la norme :

$$\|(u,v)\|_V^2 = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u) dx + \int_\omega \rho(\partial^2 v)^2 ds,$$

où

$$\sigma(u) : \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)$$

.

Théorème 2.2.1. *Pour des données initiales* $((u_0, v_0), (u_1, v_1)) \in V \times \mathcal{H}$, *le système (2.1.4) a une unique solution (faible)* (u, v) *vérifiant*

$$(u,v) \in C^1([0,\infty); \mathcal{H}) \cap C([0,\infty); V). \tag{2.2.1}$$

Preuve : On réduit le système (2.1.4) a une équation d'évolution du premier ordre. On définit les opérateurs

$$A : V \longmapsto V' \quad \text{et } B : V \longmapsto V'$$

par

$$\begin{aligned}
< A(u,v), (u^*, v^*) >_{V',V} &= \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u^*) dx + \int_\omega \rho \partial^2 v \partial^2 v^* ds, \\
< B(u,v), (u^*, v^*) >_{V',V} &= \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu u \cdot u^* d\Gamma + \alpha v(0) v^*(0).
\end{aligned}$$

Soit (u^*, v^*) un élément de V. On multiplit la première équation du système (2.1.4) par u^* et on intégre par partie sur Ω. Avec les conditions aux bords sur Γ_D et Γ_N, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega [u'' - div(\sigma(u))] \cdot u^* dx \\
&= \int_\Omega u'' \cdot u^* dx - \int_\Gamma (\sigma(u) \cdot \nu) \cdot u^* d\Gamma + \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u^*) dx \\
&= \int_\Omega u'' \cdot u^* dx + \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u^*) dx + \int_{\Gamma_N} m \cdot \nu u' \cdot u^* d\Gamma \\
&- \int_\gamma [\sigma(u) \cdot \nu] \cdot u^* d\Gamma.
\end{aligned}
$$

De la même manière, on multiplit la seconde équation de (2.1.4) par v^* et on intégre par partie sur ω. Il vient

$$
\begin{aligned}
0 = \int_\omega [v'' + \rho\partial^4 v] v^* ds &= \int_\omega v'' v^* ds + \int_\omega \rho\partial^2 v \partial^2 v^* ds \\
&+ [\rho\partial^3 v v^*]_0^l + [\rho\partial^2 v \partial v^*]_0^l \\
&= \int_\omega v'' v^* ds + \int_\omega \rho\partial^2 v \partial^2 v^* ds - \rho\partial^3 v(0) v^*(0).
\end{aligned}
$$

En sommant ces deux identités et en tenant compte des conditions de transmission sur γ, on obtient

$$(u, v)'' + A(u, v) + B(u', v') = (0, 0) \text{ dans } V'.$$

On introduit maintenant les opérateurs définis sur $V \times V$ par

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}((u, v), (u^*, v^*)) &= ((-u^*, -v^*), A(u, v)), \\
\mathbb{B}((u, v), (u^*, v^*)) &= ((0, 0), B(u^*, v^*)).
\end{aligned}
$$

En posant

$$X = ((u, v), (u', v'))$$

et

$$\mathcal{A} = \mathbb{A} + \mathbb{B}, \tag{2.2.2}$$

on réduit le système (2.1.4) à

$$
\begin{cases}
X' + \mathcal{A} X = 0, \\
X(0) = ((u_0, v_0), (u_1, v_1)).
\end{cases} \tag{2.2.3}
$$

Lemme 2.2.1. *Sous les hypothèses précedentes, l'opérateur $\mathcal{A}$ défini sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ par (2.2.2), de domaine*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad &= \{((u,v),(u^*,v^*)) \in V \times \mathcal{H} : (-div(\sigma(u)), \partial^4 v) \in \mathcal{H}, \\ &\sigma(u)\cdot\nu + m\cdot\nu u^* = 0 \ sur\ \Gamma_N, \\ &\rho\partial^3 v(0) + \alpha v^*(0) + \int_\gamma [\sigma(u)\nu]\cdot\theta d\Gamma = 0, \\ &\partial v(0) = \partial^2 v(l) = \partial^3 v(l) = 0\}\end{aligned}$$

est maximal dissipative. De plus $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 1.2.1 du chapitre 1 (voir aussi lemme 3.2 de [17]).
Par la théorie des semi groupes [?] et [32], on a le Théorème 2.2.1 ∎

Remarque 2.2.2. *Pour des données initiales $((u_0,v_0),(u_1,v_1)) \in D(\mathcal{A})$, le système (2.1.4) a une solution unique forte (u,v) vérifiant*

$$(u,v) \in C^2([0,\infty);\mathcal{H}) \cap C^1([0,\infty);V) \cap C([0,\infty);D(\mathcal{A})). \qquad (2.2.4)$$

2.3 Stabilisation

L'énergie du système (2.1.4), définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{|u'|^2 + \sigma(u) : \varepsilon(u)\Big\}dx + \frac{1}{2}\int_\omega \Big\{|v'|^2 + \rho|\partial^2 v|^2\Big\}dx \qquad (2.3.1)$$

est décroissante. En effet, un calcul simple montre que

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_N} m\cdot\nu|u'(t)|^2 d\Gamma - \alpha v'(0,t)^2. \qquad (2.3.2)$$

Si $\bar\Gamma_N \cap \bar\Gamma_D \neq \emptyset$, on supposera que le système élastodynamique dans Ω est réduit au cas isotrope, précisement on a

$$\sigma(u) = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda divu I_n,$$

où $\lambda, \mu > 0$ sont les coefficients de Lamé et I_n la matrice identité de $\mathbb{R}^n$.
On aura besoin de supposer que (cf. [4]) $C := \bar\Gamma_N \cap \bar\Gamma_D$ est une $(n-2)$ variété

de classe C^3 telle qu'il existe un voisinage Ω' de $\mathcal{C}$ tel que $\Gamma \cap \Omega'$ soit une $(n-1)$-variété de classe C^3.
Si $\tau(x)$ est le vecteur unitaire normal le long de $\mathcal{C}$, on fait l'hypothèse

$$m(x) \cdot \tau(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{C}.$$

On fera en outre l'hypothèse suivante :

(H) : *Si le paramétre α est nul, la fonction θ vérifie*

$$(\frac{l}{2} + \int_\gamma m \cdot \nu |\theta(x)| d\Gamma) \leq 0 \tag{2.3.3}$$

et que la propriété de prolongement unique est vraie pour l'élasticité anisotrope dans Ω (si α est différent de zéro, il y a pas d'hypotèses supplémentaires).

On a le théorème suivant, qui donne le type de décroissance de l'énergie du système (2.1.4) :

Théorème 2.3.1. *On suppose que l'hypothèse (H) est vraie. Alors il existe deux constantes positives M et δ telles que l'énergie de la solution de (2.1.4) satisfasse*

$$E(t) \leq M e^{-\delta t}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.3.4}$$

On déduit de (2.3.2) que

$$E(S) - E(T) = \int_S^T [\int_{\Gamma_N} m \cdot \nu |u'(t)|^2 dx + \alpha v'(0,t)^2] \, dt, \tag{2.3.5}$$

pour tous S et T tels que $0 \leq S \leq T < \infty$.

On introduit μ la plus petite constante positive telle que, pour tout $u \in (H^1_{\Gamma_D}(\Omega))^n$ on ait

$$\int_{\Gamma_N} |u|^2 d\Gamma \leq \mu^2 \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u) dx. \tag{2.3.6}$$

De même, pour un réel T positif, on pose

$$\begin{aligned} Q &= \Omega \times (0,T); \, q = \omega \times (0,T) \\ \Sigma &= \Gamma \times (0,T); \ \Sigma_D = \Gamma_D \times (0,T); \ \ \Sigma_N = \Gamma_N \times (0,T). \end{aligned}$$

On démontre d'abord les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. *Soient* (u, v) *une solution forte de (2.1.4),* M *et* N *les fonctions définies par*

$$M(u) = 2(m \cdot \nabla)u + (n-1)u$$

et

$$N(v) = 2(s-l)\partial v - v.$$

On a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|M(u)(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} &\leq CE(t), \forall t \geq 0, \\ &\quad et \\ \|N(v)(t)\|^2_{L^2(\omega)} &\leq CE(t), \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

où $C > 0$ *est une constante independante de* (u, v).

Preuve du Lemme 2.3.1 : Par integration par partie, on a

$$\begin{aligned} \|M(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} &= \int_\Omega [|2(m \cdot \nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 4(n-1)u \cdot (m \cdot \nabla)u]dx \\ &= \int_\Omega [|2(m \cdot \nabla)u|^2 + (n-1)^2|u|^2 + 2(n-1)m \cdot \nabla(|u|^2)]dx \\ &= \int_\Omega [|2(m \cdot \nabla)u|^2 + (1-n^2)|u|^2]dx + 2(n-1)\int_\Gamma m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma \\ &\leq 4R_0^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2(n-1)\int_\Gamma m \cdot \nu |u|^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

On conclut avec l'inégalité de Korn, Γ_D étant non vide.

De même, pour la seconde estimation, une intégration par partie donne

$$\|N(v)(t)\|^2_{L^2(\omega)} \leq 4\int_\omega (s-l)^2(\partial v(s,t))^2\, ds + 3\int_\omega v^2(s,t)ds - 2lv^2(0,t).$$

Par l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_\omega (\partial v(s,t))^2\, ds + \int_\omega v^2(s,t)ds \leq C(\int_\omega (\partial^2 v(s,t))^2\, ds + v^2(0,t)).$$

Ces deux inégalités donnent

$$\|N(v)(t)\|^2_{L^2(\omega)} \leq C(E(t) + v^2(0,t)). \tag{2.3.7}$$

L'hypothèse $\theta \neq 0$ et la condition de transmission $u = \theta v$ sur γ impliquent

$$v^2(0,t) \leq \frac{1}{\displaystyle\int_\gamma \theta^2 d\Gamma} \int_\gamma |u|^2 d\Gamma,$$

et par l'inégalité de Korn on obtient

$$v^2(0,t) \leq C \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(u) d\Gamma \leq CE(t).$$

Cette estimation et (2.3.7) achèvent la preuve du lemme. ∎

Lemme 2.3.2. *Si $\alpha > 0$, il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et tout $T \geq 0$, on ait*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_N} |u|^2 d\Gamma dt + \int_0^T |v(0,t)|^2 \, dt \leq \frac{C}{\varepsilon} E(0) + \varepsilon \int_0^T E(t) dt.$$

Preuve du Lemme 2.3.2 : La démarche est la même que dans le lemme 1.4.2. Pour $t \geq 0$, on considère la solution $z = z(t)$ de

$$\begin{cases} div(\sigma(z)) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \\ z = u \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Cette solution est caractérisée par $z = \omega + u$ où $\omega \in (H_0^1(\Omega))^n$ est l'unique solution de

$$\int_\Omega \sigma(\omega) : \varepsilon(v) dx = - \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v) dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Cette égalité veut dire aussi que

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(v) dx = 0 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^n. \tag{2.3.9}$$

En prenant $v = z - u$ dans cette identité, on déduit que

$$\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(u) dx = \int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(z) dx \geq 0. \tag{2.3.10}$$

Il est claire que z vérifie (voir Lemme 5.2 de [10])

$$\int_\Omega f \cdot z dx = -\int_\Gamma z \cdot (\sigma(v_f)\nu) d\Gamma, \quad \forall f \in (L^2(\Omega))^n, \tag{2.3.11}$$

où $v_f \in (H_0^1(\Omega))^n$ est la solution unique de

$$\int_\Omega \sigma(v_f) : \varepsilon(w) dx = \int_\Omega f \cdot w dx, \forall w \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Dans l'identité, (2.3.11) en prenant $f = z$, on peut écrire

$$\int_\Omega |z|^2 dx = -\int_\Gamma z \cdot (\sigma(v_z)\nu) d\Gamma.$$

Avec les conditions aux limites $z = u$ sur Γ_N, $z = u = 0$ sur Γ_D et $z = u = \theta v$ sur γ, on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |z|^2 dx \le C(\|u\|_{(L^2(\Gamma_N))^n} + |v(0,t)|)\|\sigma(v_z)\nu\|_{(L^2(\Gamma))^n}. \tag{2.3.12}$$

La frontière Γ étant C^2, on a $v_z \in (H^2(\Omega))^n$ et de plus

$$\|v_z\|_{(H^2(\Omega))^n} \le K\|z\|_{(L^2(\Omega))^n},$$

pour une constante positive K.
Cette estimation, combinée aux propriétés classiques des traces donne

$$\|\sigma(v_z)\nu\|_{(L^2(\Gamma))^n} \le K_1\|z\|_{(L^2(\Omega))^n},$$

K_1 étant une constante positive. Si on insère cette estimation dans (2.3.12), il vient

$$\int_\Omega |z|^2 dx \le C(\int_{\Gamma_N} |u|^2 d\Gamma + |v(0,t)|^2). \tag{2.3.13}$$

Comme z' est solution du problème (2.3.8) avec condition au bord u' (au lieu de u), les arguments précédants donnent

$$\int_\Omega |z'|^2 dx \le C(\int_{\Gamma_N} |u'|^2 d\Gamma + |v'(0,t)|^2). \tag{2.3.14}$$

De la même manière, pour $t \ge 0$, on considère la solution $w = w(t)$ de

$$\begin{cases} \partial^4 w = 0 \text{ dans } \omega, \\ w(0) = v(0), \partial w(0) = \partial v(0) = 0, \partial^2 w(l) = \partial^3 w(l) = 0. \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Cette solution w se décompose en $w = w_1 + v$ où $w_1 \in W$ et est la solution unique de

$$\int_\omega \partial^2 w_1 \partial^2 k ds = -\int_\omega \partial^2 v \partial^2 k ds, \quad \forall k \in W, \tag{2.3.16}$$

l'espace de Hilbert W (avec sa norme naturelle) étant défini par

$$W = \{k \in H^2(\omega) : k(0) = \partial k(0) = \partial^2 k(l) = \partial^3 k(l) = 0\}.$$

Cette identité entraine

$$\int_\omega \partial^2 w \partial^2 k ds = 0 \quad \forall k \in W, \tag{2.3.17}$$

et en prenant $k = w - v$ on déduit que

$$\int_\omega \partial^2 v \partial^2 w = \int_\omega (\partial^2 w)^2 ds \geq 0. \tag{2.3.18}$$

Notons que w vérifie

$$\int_\omega g w \, ds = -w(0)\partial^3 k_g(0), \quad \forall g \in L^2(\omega), \tag{2.3.19}$$

où $k_g \in W$ est l'unique solution de

$$\int_\omega \partial^2 k_g \partial^2 k \, ds = \int_\omega g k \, ds, \forall k \in W.$$

Dans l'identité (2.3.19), si on prend $g = w$, on peut écrire

$$\int_\omega |w|^2 ds = -w(0)\partial^3 k_w(0),$$

et comme $w(0) = v(0)$, on obtient

$$\int_\omega |w|^2 ds \leq |v(0,t)||\partial^3 k_w(0)|. \tag{2.3.20}$$

Etant donné que k_w appartient à $H^4(\omega)$ avec l'estimation

$$||k_w||_{H^4(\omega)} \leq K^* ||w||_{L^2(\omega)},$$

pour une certaine constante positive K^*, on obtient par les injections de Sobolev

$$|\partial^3 k_w(0)| \leq K_1^* \|w\|_{L^2(\omega)},$$

K_1^* étant une constante positive. Si on insère cette estimation dans (2.3.20) on obtient

$$\int_\omega |w|^2 ds \leq C|v(0,t)|. \tag{2.3.21}$$

w' étant solution (2.3.8) (on a remplacé v par v'), donc

$$\int_\omega |w'|^2 ds \leq C|v'(0,t)|. \tag{2.3.22}$$

En utilisant l'inégalité de Korn et les Théorèmes standards des traces (ici $\Gamma_D \neq \emptyset$) on a

$$\int_{\Gamma_N \cup \gamma} |z|^2 d\Gamma \leq C \int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(z) dx.$$

Rappelons que $z = u$ sur Γ_N et $z = u = \theta v$ sur γ, et donc

$$\int_{\Gamma_N} |u|^2 d\Gamma + |v(0,t)|^2 \leq C \int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(z) dx.$$

Ceci implique que

$$\int_{\Gamma_N} |u|^2 d\Gamma + |v(0,t)|^2 \leq C(\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(z) dx + \rho \int_\omega (\partial^2 w)^2 ds).$$

En utilisant (2.3.10) et (2.3.18) on obtient

$$\int_{\Gamma_N} |u|^2 d\Gamma + |v(0,t)|^2 \leq C(\int_\Omega \sigma(z) : \varepsilon(u) dx + \rho \int_\omega \partial^2 v \partial^2 w).$$

Si on intégre cette identité pour $t \in (0,T)$, on trouve

$$\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Gamma dt + \int_0^T |v(0,t)|^2 \, dt \leq C(\int_Q \sigma(u) : \varepsilon(z) \, dx dt + \rho \int_q \partial^2 v \partial^2 w \, ds dt).$$

De même, en intégrant par partie par rapport à la variable d'espace, on obtient

$$\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Gamma dt + \int_0^T |v(0,t)|^2 \, dt \leq C(-\int_Q div\sigma(u) \cdot z \; dx dt + \rho \int_q \partial^4 v w \, ds dt$$
$$+ \int_\Sigma \sigma(u)\nu \cdot z \, d\Gamma dt + \rho \int_0^T w(0,t) \partial^3 v(0,t) \, dt).$$

Comme $z = u$ sur Σ_N, $z = 0$ sur Σ_D, $z = \theta v(0,t)$ sur $\gamma \times (0,T)$, et $w(0) = v(0,t)$, les conditions aux limites sur Σ_N et sur $\gamma \times (0,T)$ pour u nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sigma(u)\nu \cdot z d\Gamma dt &= \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu u' u \, d\Gamma dt \\ &- \int_0^T v(0,t)(\rho \partial^3 v(0,t) + \alpha v'(0,t)) \, dt.\end{aligned}$$

Cette identité, combinée à (2.1.4), donne

$$\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Gamma + \int_0^T |v(0,t)|^2 \, dt \leq C(-\int_Q u'' \cdot z \; dxdt - \int_q v'' w \, dsdt$$
$$+ \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu u' u \, d\Gamma dt - \alpha \int_0^T v(0,t) v'(0,t) \, dt).$$

On intégre maintenant par partie par rapport au temps, il vient

$$\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Gamma + \int_0^T |v(0,t)|^2 \, dt \leq C(\int_Q u' \cdot z' \, dxdt + \int_q v' w' \, ds dt \tag{2.3.23}$$
$$- \int_\Omega z u'|_0^T - \int_\omega w v'|_0^T$$
$$+ \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu u' u d\Gamma dt - \alpha \int_0^T v(0,t) v'(0,t) \, dt).$$

On fixe un réel $\varepsilon_0 \geq 0$. Si on utilise plusieurs fois (2.3.5), (2.3.13), (2.3.14), (2.3.21), (2.3.22) et l'inégalité de Young, on peut estimer les différentes intégrales du terme de droite de l'inégalité précédentes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_N} m\cdot\nu u u' d\Sigma &\leq \varepsilon_0 \int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Sigma + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_{\Sigma_N} m\cdot\nu |u'|^2 d\Sigma \\
&\leq 2\varepsilon_0\mu^2 \int_0^T E(t)dt + \frac{1}{4\varepsilon_0}E(0), \\
\int_Q z'u'\, dxdt &\leq \varepsilon_0 \int_Q |u'|^2\, dxdt + \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_Q |z'|^2\, dxdt \\
&\leq 2\varepsilon_0 \int_0^T E(t)dt + \frac{C}{4\varepsilon_0}E(0), \\
\int_q w'v'\, dxdt &\leq 2\varepsilon_0 \int_0^T E(t)dt + \frac{C}{4\varepsilon_0}E(0), \\
-\int_\Omega zu'|_0^T &\leq 4(1+C\mu^2)E(0), \\
-\int_\omega wv'|_0^T &\leq CE(0), \\
-\alpha\int_0^T v(0,t)v'(0,t)\, dt &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}\alpha\int_0^T |v'(0,t)|^2\, dt + \varepsilon_0\int_0^T |v(0,t)|^2\, dt. \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon_0}E(0) + \varepsilon_0\int_0^T |v(0,t)|^2\, dt.
\end{aligned}$$

En utilisant ces differentes estimations dans (2.3.23), on a l'estimation voulue par un choix approprié de ε_0 . ∎

Preuve du Théorème 2.3.1 : Supposons d'abord que (u,v) est une solution forte de (2.1.4). Si $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$, alors en multipliant la première identité de (2.1.4) par

$$M(u) = 2(m\cdot\nabla)u + (n-1)u$$

et en intégrant par partie sur Q on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= (u', M(u))|_0^T + \int_Q |u'|^2\, dxdt - \int_{\Sigma_N} m\cdot\nu |u'|^2 d\Sigma \\
&- \int_{\gamma\times[0,T]} m\cdot\nu|u'|^2 ds(x)dt \\
&+ \int_Q \sigma(u) : \varepsilon(u) dxdt \\
&- \int_\Sigma [(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - (m\cdot\nu)\sigma(u) : \varepsilon(u)] d\Sigma.
\end{aligned}$$

Si $\Gamma_D \cap \Gamma_N \neq \emptyset$, une application du Théorème 4.1 de [4] donne

$$\begin{aligned}
0 &\geq (u', M(u))|_0^T + \int_Q |u'|^2\, dxdt - \int_{\Sigma_N} m\cdot\nu |u'|^2 d\Sigma \\
&- \int_{\gamma\times[0,T]} m\cdot\nu|u'|^2 ds(x)dt \\
&+ \int_Q \sigma(u) : \varepsilon(u) dxdt \\
&- \int_\Sigma [(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - (m\cdot\nu)\sigma(u) : \varepsilon(u)] d\Sigma.
\end{aligned}$$

De la même manière, on multiplit la seconde identité de (2.1.4) par $N(v)$ et on intégre par partie sur q. Il vient :

$$\begin{aligned}
0 &= 2\int_0^T \int_\omega |v'|^2 - l\int_0^T |v'(0,t)|^2 dt \\
&+ \int_\omega v' N(v)|_0^T\, ds \\
&+ 2\rho \int_0^T \int_0^l (\partial^2 v)^2 dt + 2l\rho \int_0^T \partial^3 v(0,t)\partial v(0,t)\, dt \\
&+ \rho\int_0^T \partial^3 v(0,t) v(0,t) dt.
\end{aligned}$$

Ces deux identités (ou inégalitiés si $\bar\Gamma_D \cap \bar\Gamma_N \neq \emptyset$) nous permettent d'écrire

$$\int_0^T E(t)dt \leq \int_{\Sigma_N} m\cdot\nu|u'|^2 + \sum_{i=1}^4 I_i$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_\Omega (u', M(u))|_0^T - \frac{1}{2}\int_\omega N(v)v'|_0^T,\\
I_2 &= \int_{\Sigma_N\cup\Sigma_D} [(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - (m\cdot\nu)\sigma(u):\varepsilon(u)]d\Sigma,\\
I_3 &= \int_{\gamma\times(0,T)} m\cdot\nu|u'|^2 d\Gamma dt + \frac{l}{2}\int_0^T v'^2(0,t)dt,\\
I_4 &= \int_{\gamma\times(0,T)} [(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - (m\cdot\nu)\sigma(u):\varepsilon(u)]d\Sigma - \frac{1}{2}\rho\int_0^T \partial^3 v(0,t)v(0,t)dt.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.3.1 , on a

$$I_1 \leq CE(0).$$

Comme dans [2, 10] (voir aussi chapitre 1), le système de coordonnées locales nous permet d'estimer I_2 par

$$I_2 \leq C(E(0) + \int_{\Sigma_N} (|u|^2 + |u'|^2)d\Sigma).$$

La condition $u = \theta v$ sur $\gamma\times(0,T)$ dans le système (2.1.4) et l'hypothèse (2.3.3) nous permettent d'écrire

$$I_3 = (\frac{l}{2} + \int_\gamma m\cdot\nu|\theta(x)|^2)\int_0^T v'^2(0,t)dt \leq 0$$

si $\alpha = 0$

$$I_3 = (\frac{l}{2} + \int_\gamma m\cdot\nu|\theta(x)|^2)\int_0^T v'^2(0,t)dt \leq C\alpha\int_0^T v'^2(0,t)dt$$

si $\alpha > 0$.

Aussi, avec la condition aux limites $\gamma\times(0,T)$ dans le système (2.1.4) on obtient

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{\gamma\times(0,T)} [(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - (m\cdot\nu)\sigma(u):\varepsilon(u)]d\Sigma \qquad (2.3.24)\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\gamma\times(0,T)} (\sigma(u)\nu)\cdot\theta v(0,t)d\Sigma\\
&+ \frac{\alpha}{2}\int_0^T v'(0,t)v(0,t)dt.
\end{aligned}$$

On estime I_4 de la même manière que I_5 du chapitre 1. En utilisant les systèmes de coordonnées locales et les conditions aux limites sur $\gamma \times (0,T)$ dans le système (2.1.4) on a

$$\sigma(u)\nu = \sigma_S(u) + \sigma_\nu(u)\nu \text{ sur } \gamma \times (0,T),$$

$$M(u) = 2(m\cdot\nu)\partial_\nu u + v_1(\theta)v(0,t) \text{ sur } \gamma \times (0,T),$$

pour une fonction vectorielle $v_1(\theta)$ (dependant θ et du gradient tangentiel).

On a donc

$$\begin{aligned}
\sigma(u)\nu\cdot M(u) &= \overline{\sigma(u)\nu}M(u) \\
&= 2(m\cdot\nu)(\bar{\sigma}_S(u) + \sigma_\nu(u)\bar{\nu})\partial_\nu u + \sigma(u)\nu\cdot v_1(\theta)v(0,t) \\
&= 2(m\cdot\nu)(\bar{\sigma}_S(u)\partial_\nu u_T + \sigma_\nu(u)\bar{\nu}\partial_\nu u_\nu) \\
&+ \sigma(u) : C_1(\theta)v(0,t) \text{ sur } \gamma \times (0,T),
\end{aligned}$$

pour une matrice $C_1(\theta)$ (qui dépend aussi de θ). En d'autres termes, on a

$$\sigma(u)\colon\varepsilon(u) = \sigma_T(u)\colon\varepsilon_T(u) + 2\overline{\sigma_S(u)}\varepsilon_S(u) + \sigma_\nu(u)\varepsilon_\nu(u) \text{ sur } \gamma \times (0,T),$$

et avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\sigma(u)\colon\varepsilon(u) &= (\bar{\sigma}_S(u)\partial_\nu u_T + \sigma_\nu(u)\bar{\nu}\partial_\nu u_\nu) \\
&+ \sigma(u) : C_2(\theta)v(0,t) \text{ on } \gamma \times (0,T).
\end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
(\sigma(u)\nu)\cdot M(u) - (m\cdot\nu)\sigma(u) : \varepsilon(u) &= (m\cdot\nu)\sigma(u)\colon\varepsilon(u) \\
&+ \sigma(u) : C_3(\theta)v(0,t) \text{ sur } \gamma \times (0,T).
\end{aligned}$$

Si on insère cette identité dans (2.3.24), on obtient

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\gamma\times(0,T)} (m\cdot\nu)\sigma(u): \varepsilon(u)d\Sigma \\ &+ \int_{\gamma\times(0,T)} [\sigma(u) : C_3(\theta) + \frac{1}{2}(\sigma(u)\nu)\cdot\theta]v(0,t)d\Sigma \\ &+ \frac{\alpha}{2}\int_0^T v'(0,t)v(0,t)dt. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \int_{\gamma\times(0,T)} (m\cdot\nu)\sigma(u): \varepsilon(u)d\Sigma dt \\ &+ \epsilon\int_{\gamma\times(0,T)} |\sigma(u)|^2 d\Sigma dt + \frac{C}{\epsilon}\int_0^T |v(0,t)|^2\, dt \\ &+ \alpha\int_0^T |v'(0,t)|^2 dt, \forall\epsilon\in(0,1). \end{aligned}$$

L'hypothèse (1.1.4) nous permet décrire

$$|\sigma(u)|^2 \leq C|\varepsilon(u)|^2 \leq C\sigma(u): \varepsilon(u).$$

Par conséquent, comme $m\cdot\nu < -\alpha_0 < 0$ on γ, en fixant $\varepsilon < \frac{C\alpha_0}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \int_{\gamma\times(0,T)} \frac{m\cdot\nu}{2}\sigma(u): \varepsilon(u)d\Sigma dt \\ &+ C\int_0^T |v(0,t)|^2\, dt + \alpha\int_0^T |v'(0,t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Du fait que $m\cdot\nu \leq 0$ sur γ, on conclut que

$$I_4 \leq C\int_0^T |v(0,t)|^2\, dt + \alpha\int_0^T |v'(0,t)|^2 dt.$$

Ces estimations des termes $I_i, i = 1, \cdots, 4$ donnent

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E(t)dt &\leq C(E(0) + \int_{\Sigma_N} m\cdot\nu|u'|^2 d\Sigma + \alpha\int_0^T |v'(0,t)|^2 dt) \\ &+ C\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Sigma + C(\theta)\int_0^T v^2(0,t)dt. \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Maintenant, on distingue le cas $\alpha > 0$ et le cas $\alpha = 0$.

Si $\alpha > 0$, par le lemme 2.3.2 l'estimation précédente (2.3.25) devient

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E(t)dt &\leq C(E(0) + \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma + \alpha \int_0^T |v'(0,t)|^2 dt) \\ &+ \frac{C}{\varepsilon} E(0) + \varepsilon \int_0^T E(t)dt, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En choisissant ε assez petit, on arrive à l'inégalité d'observabilité

$$\int_0^T E(t)dt \leq C(E(0) + \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma + \alpha \int_0^T |v'(0,t)|^2 dt) \quad (2.3.26)$$

Cette estimation reste vraie pour des solutions faibles grace à un argument de densité. Dès lors, on peut conclure avec le paragraphe 1.3.1 du chapitre 1 (voir aussi le Théorème 3.3 de [23]).

Si $\alpha = 0$, on va utiliser un argument de compacité.
Remarquons d'abord que l'estimation (2.3.25) et l'identité (2.3.5) donnent, pour $T > 0$ assez grand

$$\begin{aligned} E(0) &\leq C(T)(\int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma \quad (2.3.27) \\ &+ \int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Sigma + \int_0^T v^2(0,t)dt). \end{aligned}$$

On fixe $T > 0$ de sorte que (2.3.27) soit vraie. Nous établirons dans le lemme 2.3.3 l'existence d'une constante positice $C(T) > 0$ (qui dépend de T) telle que

$$\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Sigma + \int_0^T v^2(0,t)dt \leq C(T) \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma. \quad (2.3.28)$$

En fin, si cette estimation est vraie, l'estimation (2.3.27) devient

$$E(0) \leq C(T) \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma,$$

et par conséquent on a l'inégalité d'observabilité

$$E(T) \leq C(T) \int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma,$$

ce qui donne la décroissance exponentielle (voir paragraphe 1.2.1 ∎

Il reste à prouver l'estimation (2.3.28) :

Lemme 2.3.3. *Toute solution faible (u, v) de (2.1.4) vérifit (2.3.28) pour une constante $C(T) > 0$.*

Preuve du Lemme 2.3.3 : Supposons que (2.3.28) soit faux. Alors il existe une suite (u_n, v_n) de solution de (2.1.4) telle que

$$\int_{\Sigma_N} |u_n|^2 d\Sigma + \int_0^T v_n^2(0,t)dt = 1, \tag{2.3.29}$$

$$\int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u_n'|^2 d\Sigma = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.30}$$

Avec l'estimation (2.3.27), cela veut dire que

$$E_n(0) \leq 2C(T), \forall n \in \mathbb{N},$$

où $E_n(t)$ est l'énergie de la solution (u_n, v_n) au temps t. Comme l'énergie est décroissante, on a

$$\int_0^T E_n(t)\, dt \leq 2TC(T), \forall n \in \mathbb{N},$$

donc la suite (u_n, v_n) est bornée dans $H^1(Q)^n \times H^2(q)$. Avec l'injection compacte de $H^1(Q)^n \times H^2(q)$ dans $L^2(\Sigma_N) \times L^2(0,T)$, on peut extraire une sous suite (qu'on notera aussi (u_n, v_n)) telle que

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ faiblement dans } H^1(Q)^n \times H^2(\omega), \text{ si } n \to \infty \tag{2.3.31}$$

$$(u_n, v_n(0)) \to (u, v(0)) \text{ fortement dans } L^2(\Sigma_N) \times L^2(0,T), \text{ si } n \to \infty \tag{2.3.32}$$

Ce qui implique, avec (2.3.29) et (2.3.30) que (u, v) est une solution faible de (2.1.4) et vérifie

$$\int_{\Sigma_N} |u|^2 d\Sigma + \int_0^T v^2(0,t)dt = 1, \tag{2.3.33}$$

et

$$\int_{\Sigma_N} m \cdot \nu |u'|^2 d\Sigma = 0,$$

ou de manière équivalente

$$u' = 0 \text{ sur } \Sigma_N. \tag{2.3.34}$$

En procédant de la même manière que dans la Proposition 4.1 de [11], et en utilisant l'estimation (2.3.27), on vérifit que l'espace $\mathcal{H}_T$ des solutions faibles de (2.1.4) vérifiant (2.3.34) est de dimension finie. par conséquent, avec l'invariance de $\mathcal{H}_T$ suivant $\frac{d^2}{dt^2}$, si $\mathcal{H}_T$ n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un nombre complexe λ et une solution $(u, v) \neq (0, 0)$ de

$$\begin{cases} div\sigma(u) & = \lambda u \text{ dans } \Omega, \\ \rho\partial^4 v & = \lambda v \text{ dans } \omega, \\ u & = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \sigma(u) \cdot \nu & = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ u' & = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ u(x) = v(0)\theta(x) & \quad \text{sur } \gamma, \\ \rho\partial^3 v(0) + \int_\gamma [\sigma(u) \cdot \nu] \cdot \theta(x) ds(x) = 0, & \\ \partial v(0) = \partial^2 v(l) = \partial^3 v(l) = 0. & \end{cases} \tag{2.3.35}$$

En posant $\tilde{u} = u'$, on a

$$\begin{aligned} div\sigma(\tilde{u}) &= \lambda \tilde{u} \text{ dans } \Omega, \\ \tilde{u} &= 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ \sigma(\tilde{u}) \cdot \nu &= 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{aligned}$$

et donc, par les Théorèmes d'unicité (voir par exemple Théorème 1.2 de [5] pour l'élasticité isotrope), $\tilde{u} \equiv 0$ in Ω. En revenant au problème (2.1.4), u vérifie

$$\begin{aligned} div\sigma(u) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \sigma(u)\cdot\nu &= 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{aligned}$$

et comme Γ_D est non vide, on obtient $u \equiv 0$. A ce niveau, on revient à (2.3.35) pour v et on a

$$\rho\partial^4 v = \lambda v \text{ in } \omega, \tag{2.3.36}$$

$$\partial^3 v(0) = 0, \tag{2.3.37}$$

$$v(0) = \partial v(0) = \partial^2 v(l) = \partial^3 v(l) = 0. \tag{2.3.38}$$

En d'autres termes, v est une valeur propre de l'opérateur $\rho\partial^4$ avec conditions aux limites (2.3.38) et (2.3.37). Or la seule solution de ce problème est $v = 0$. Donc $(u, v) = (0, 0)$ ce qui est impossible et montre que $\mathcal{H}_T = \{0\}$.
Revenant à la limite (u, v) de la suite (u_n, v_n), on voit qu'elle est dans $\mathcal{H}_T$, et est égale à $(0, 0)$, ce qui contredit (2.3.33). ∎

Remarque 2.3.2. *On a les mêmes résultats si on remplace dans le système (2.1.4) la condition*

$$\sigma(u)\cdot\nu + m\cdot\nu u' = 0 \ sur\ \Gamma_N \times \mathbb{R}^+$$

par

$$\sigma(u)\cdot\nu + m\cdot\nu g(u') = 0 \ sur\ \Gamma_N \times \mathbb{R}^+$$

où g est une fonction non linéaire vérifiant des hypothèses appropirés. En fait il suffit d'appliquer le Théorème 1.3.3 du chapitre 1, le système linéaire associé étant exponentiellement stable.

Chapitre 3

Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces de Sobolev d'ordres fractionnaires

On considère Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ et T un réel strictement positif. La contrôlabilité exacte de l'équation des ondes consiste pour tous couples (y_0, y_1) et (z_0, z_1) appartenant à un espace à determiner, à trouver un contrôle u tel que si y est solution du problème

$$(P)\begin{cases} y'' - \Delta y &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \\ y &= u \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times]0,T[, \\ y(0) &= y_0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ y'(0) &= y_1 \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

Alors à l'instant T, on a

$$(E)\begin{cases} y(T) &= z_0 \\ y'(T) &= z_1. \end{cases}$$

Etant donné la linéarité des problèmes (P) et (E), il suffit de prendre $z_0 = z_1 = 0$.

Dans [15] il a été établi, pour certains types de données initiales des équivalences de normes (qui sont à la base de sa méthode H.U.M de J.L.-Lions) donnant la contrôlabilité exacte à partir d'un temps T supérieur à une valeur T_0.

Dans ce chapitre, on définit les mêmes types d'estimations de normes avec des conditions initiales dans des espaces peu réguliers. On donne ensuite, par interpolation les mêmes estimations dans les espaces intermédiares et les résultats de contrôlabilité exactes correspondants.

3.1 Rappels

On suppose que la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω est de classe C^2.
Soit $\Sigma =]0, T[\times\partial\Omega$ et $\nu(x)$ le vecteur unitaire normal extérieur en un point $x \in \Gamma$. pour un vecteur $x^0 \in \mathbb{R}^2$ avec $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, on adoptera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} m(x) &= x - x^0 \quad (x \in \mathbb{R}^2), \\ \Gamma_0 &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \\ \Gamma_0^* &= \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) < 0\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &=]0, T[\times\Gamma_0, \\ \Sigma_0^* &=]0, T[\times\Gamma_0^*. \end{aligned}$$

On introduit aussi les constantes

$$R(x^0) = \max_{x\in\overline{\Omega}}(\sum_{k=1}^{k=2}(x - x_k^0)^2)^{1/2}$$

et

$$T_0 = 2R(x^0).$$

On considère maintenant le système

$$(E)\begin{cases} u'' - \Delta u &= 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{sur } \Omega, \\ u'(0) &= u_1 \quad \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

Pour des données initiales $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, ce problème a une solution unique et son énergie est défini par,

$$E_0 = \frac{1}{2}(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

On rappelle [15] l'inégalité directe

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt \leq c_0(T)E_0 \tag{3.1.1}$$

et, pour tout $T > T_0$, l'ingalité inverse

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt \geq c_1(T)E_0 \tag{3.1.2}$$

où $c_0(T), c_1(T)$ sont des constantes positives. Une conséquence de (3.1.1) et (3.1.2) est le théorème de controlabilité excate suivant [15] :

Théorème 3.1.1. *Pour des données initiales $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ il existe un contrôle $v \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0))$ tel que la solution y du système*

$$\begin{cases} y'' - \Delta y &= 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \\ y &= 0 \quad \textit{sur} \quad \Gamma_0^* \\ y &= v \quad \textit{sur} \quad \Gamma_0 \\ y(0) &= y_0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ y'(0) &= y_1 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

satisfasse, au temps T, y(T)=y'(T)=0.

3.2 Nouvelles estimations de normes

Soit $\theta \in [0,1]$. Pour $(\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, on pose

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{F_\theta}^2 = \int_0^T \left\|\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right\|_{H^{-\theta/2}(\Gamma_0)}^2 dt$$

où φ est la solution de l'équation des ondes homogène (E) correspondant aux données initiales (φ_0, φ_1).
On note par F_θ le completé de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{F_\theta}^2$. On a le théorème suivant

Théorème 3.2.1. *Il existe une constante positive C_T telle que, pour tout $\theta \in [0,1]$ et $T \geq T_0$, la solution φ de l'équation des ondes homogène (E) avec les données initiales $(\varphi_0, \varphi_1) \in F_\theta$ vérifie l'estimation suivante :*

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right\|_{H^{-\theta/2}(\Gamma_0)}^2 dt \geq C_T \left\{\|\varphi_0\|_{H_0^{1-\theta}(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{H^{-\theta}(\Omega)}^2\right\}. \tag{3.2.1}$$

Pour prouver le théorème (3.2.1), on démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit u la solution de l'équation des ondes homogène (E) avec données initiales $u_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. On a l'estimation suivante :*

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}^2 dt \geq C_T E_1 \tag{3.2.2}$$

où $E_1 = \frac{1}{2}(\|\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2)$ et C_T une constante positive .

Preuve du Lemme 3.2.1 : Si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, en posant

$$v = u';\ v(0) := u_1;\ v'(0) := \Delta u_0,$$

on a une solution v de (E) avec des données initiales u_1 et Δu_0. En appliquant l'inégalité (3.1.2), on obtient

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\sigma - x^0)\nu(\sigma) \left(\frac{\partial u'}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt \geq c(T) E_1, \tag{3.2.3}$$

où $c(T)$ est une constante positive.
Pour un réel $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit (tel que $T - 2\varepsilon - T_0 > 0$), on définit

la fonction $\varphi_\varepsilon \in D(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

i) $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$,

ii) supp $(\varphi_\varepsilon) \subset]0, T[$,

iii) $\varphi_{\varepsilon|[\varepsilon, T-\varepsilon]} = 1$.

Sachant que

$$\int_0^T \varphi_\varepsilon(t) \int_{\Gamma_0} (\sigma - x^0)\nu(\sigma) \left(\frac{\partial u'}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt \geq \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_0} (\sigma - x^0)\nu(\sigma) \left(\frac{\partial u'}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt,$$

alors, en multipliant membre à membre l'inégalité (3.2.3) par φ_ε et en intégrant par partie, on a

$$-\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left(\varphi_\varepsilon'(t) m(\sigma)\nu(\sigma) \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u'}{\partial \nu} + \varphi_\varepsilon(t) m(\sigma)\nu(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right) d\sigma dt \geq c(T)E_1 \quad (3.2.4)$$

Etant donné que

$$-\int_0^T \int_{\Gamma_0} \varphi_\varepsilon'(t) m(\sigma)\nu(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u'}{\partial \nu} d\sigma dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} \varphi_\varepsilon'(t) m(\sigma)\nu(\sigma)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt,$$

alors (3.2.4) peut être reécrit

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} \varphi_\varepsilon''(t) m(\sigma)\nu(\sigma)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_0} \varphi_\varepsilon(t) m(\sigma)\nu(\sigma)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u''}{\partial \nu} d\sigma dt \geq c(T)E_1.$$

En utilisant (3.1.1), on a

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} \varphi_\varepsilon''(t) m(\sigma)\nu(\sigma)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt \leq c_0 E_0.$$

De même, par dualité, on a

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \varphi_\varepsilon(m(\sigma)\nu(\sigma))\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u''}{\partial \nu} d\sigma dt \leq c_2 \int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \left\|\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} dt.$$

où c_2 est une constante positive. Ainsi, on a l'inégalité

$$c_0 E_0 + c_2 \int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \left\|\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} dt \geq c(T)E_1.$$

Une application de l'inégalité de Young entraine, pour toute constante positive $\delta > 0$,

$$c_0E_0 + \frac{c_2}{2}\left(\frac{1}{\delta}\int_0^T \left\|\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} dt + \delta\int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_0)} dt\right) \geq c(T)E_1.$$

En utilisant l'estimation

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq c\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

(c étant une constante positive) , on a

$$c_0E_0 + \frac{c_2}{2}\left(\int_0^T \frac{1}{\delta}\left\|\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} dt + \delta c^2\int_0^T \|u\|^2_{H^2(\Omega)}dt\right) \geq c(T)E_1.$$

Pour un choix particulier de δ, il existe une constante positive C_T telle que

$$c_0E_0 + c_3\int_0^T \left\|\frac{\partial u''}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} dt \geq C_TE_1. \tag{3.2.5}$$

Pour achever la preuve du lemme 3.2.1, il suffit de montrer l'existence d'une constante positive α telle que

$$E_0 \leq \alpha\|\gamma\frac{\partial u''}{\partial \nu}\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_0)}.$$

On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une suite $(\varphi_n)_n$ de solutions

$$\begin{cases} \varphi_n'' - \Delta\varphi_n = 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi_n(0) = \varphi_{0,n}, \\ \varphi_n'(0) = \varphi_{1,n}, \end{cases}$$

où

$$(\varphi_{0,n},\varphi_{1,n}) \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega),$$

satisfaisant

$$\|\nabla\varphi_{0,n}\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + \|\varphi_{1,n}\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$$

et

$$\lim \left\| \frac{\partial \varphi_n''}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} = 0.$$

Avec l'inégalité 3.2.3, on déduit que $(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n})$ est borné dans

$$(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

On peut donc y extraire une sous suite (qu'on notera aussi $((\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}))$ qui converge faiblement dans $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ vers $(\tilde{\varphi_0}, \tilde{\varphi_1})$ et donc par compacité, fortement dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
En notant $\tilde{\varphi}$ la solution correspondante aux données initiales $(\tilde{\varphi_0}, \tilde{\varphi_1})$, on obtient

$$\|\tilde{\varphi}_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{\varphi}_1\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$$

et

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}''}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} = 0,$$

ce qui est impossible par un théorème classique d'unicité [15]. ∎

Preuve de Théorème 3.2.1 : Soit $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et φ la solution correspondante de (E). On introduit la fonction définit par

$$u(t) = \int_0^t \int_0^s \varphi(\tau) d\tau ds - ty - z$$

avec y et z appartenant à $H_0^1(\Omega)$ et vérifiant $-\Delta y = \varphi_1$ et $-\Delta z = \varphi_0$, respectivement.
En appliquant le lemme 3.2.1 à u, on a

$$\int_0^T \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_0)} dt \geq C_T \left\{ \|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right\}. \tag{3.2.6}$$

Les inégalités (3.1.2 et (3.2.6) donnent par interpolation le Théorème (3.2.1) ∎

3.3 Contrôlabilité exacte

On note par Δ_Γ l'opérateur de Laplace-Beltrami .
Une conséquence de l'inégalité (3.2.1) est le Théorème de controlabilité exacte suivant :

Théorème 3.3.1. *Il existe un temps T_0 tel que, si $T > T_0$, alors pour tout $\theta \in [0,1]$ et des données initiales $(y_0, y_1) \in \left(H_0^\theta(\Omega) \times H^{\theta-1}(\Omega)\right)$, il existe $v \in L^2(0,T; H^{-\theta/2}(\Gamma_0))$ tel que , si y est la solution du problème*

$$\left\{\begin{array}{rcll} y'' - \Delta y &=& 0 & \textit{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \gamma y &=& 0 & \textit{sur } \Gamma_0^*, \\ \gamma y &=& (-\Delta_\Gamma)^{-\theta/2} v & \textit{sur } \Gamma_0, \\ y(0) &=& y_0 & \textit{dans } \Omega, \\ y'(0) &=& y_1 & \textit{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

alors, au temps T, $y(T) = y'(T) = 0$.

Preuve du Théorème 3.3.1 On applique la méthode d'unicité Hilbertienne (HUM [15]). On part de $\varphi_0 \in H_0^{1-\theta}(\Omega)$, $\varphi_1 \in H^{-\theta}(\Omega)$.
Soit $\varphi \in C\left(0,T; H_0^{1-\theta}(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; H^{-\theta}(\Omega)\right)$ la solution unique du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll} \varphi'' - \Delta\varphi &=& 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \varphi(0) &=& \varphi_0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi'(0) &=& \varphi_1 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma\varphi &=& 0 & \text{sur }]0,T[\times\Gamma. \end{array}\right.$$

Soit ξ l'unique solution definie par transposition de l'équation

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta\xi &= 0 \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ \xi(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \xi'(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \gamma\xi &= \eta \quad \text{sur }]0,T[\times\Gamma, \end{cases}$$

où $\eta \in L^2(0,T;H_0^{\theta/2}(\Gamma_0))$.

En posant $v = \gamma\dfrac{\partial}{\partial\nu}\varphi$ et en faisant le choix $\eta = (-\Delta_\Gamma)^{-\theta/2} v$, on a

$$\xi \in C(0,T;H_0^\theta(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{\theta-1}(\Omega))$$

et

$$\xi(0) \in H^\theta(\Omega), \;\; \xi'(0) \in H^{\theta-1}(\Omega).$$

Sous les hypothèses du Théorème 3.2.1, on a $F_\theta \subset H_0^{1-\theta}(\Omega) \times H^{-\theta}(\Omega)$ et donc $H^{\theta-1} \times H_0^\theta \subset F_\theta'$.
On définit l'application

$$\begin{aligned} \Lambda : F_\theta &\longmapsto F_\theta' \\ (\varphi_0,\varphi_1) &\longmapsto (\xi'(0);-\xi(0)). \end{aligned}$$

On a

$$\langle\Lambda(\varphi_0,\varphi_1),(\varphi_0,\varphi_1)\rangle_{F_\theta,F_\theta'} = \int_\Sigma \langle(-\Delta_\Gamma)^{-\theta/2}v, v\rangle_{H_0^{\theta/2}(\Gamma_0),H^{-\theta/2}(\Gamma_0)} d\sigma dt = \|v\|^2_{L^2(0,T;H^{-\theta/2}(\Gamma_0)}$$

et Λ est un isomorphisme. Ainsi, pour tout $T > T_0$ et tout $(y_0,y_1) \in F_\theta'$, il existe un élément $(\varphi_0,\varphi_1) \in F_\theta$ tel que

$$\Lambda(\varphi_0,\varphi_1) = (y_1,-y_0).$$

Soient φ et ξ les fonctions définies précèdement avec $\xi_0 = y_0$ et $\xi_1 = y_1$. grâce à l'unicité de la solution, on a $y = \xi$. Ainsi $y(T) = y'(T) = 0$. Ce qui achève la preuve du Théorème.

Conclusion

La méthode du chapitre 1 pourrait être appliquée au système de thermoélasticité avec une troisième variable potentielle. Il faudrait d'abord établir la décroissance exponentielle du système linéaire associé. Ce qui est fait par certains auteurs dont R. Racke mais avec une forte hypothèse de symétrie radiale. Il serait intéressant de voir si une telle hypothèse peut être affaiblie.

De même, nous envisageons d'étendre les résultats de contrôlabilité exacte du chapitre 3 au cas des ouverts polygonaux et aux cas non lináire.

Bibliographie

[1] BARBU V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces,* Noordhoff, Leyden, The Netherlands (1976)

[2] BEY R., HEMINNA A., LOHEAC J.-P., Boundary stabilization of a linear elastodynamic system with variable coefficients, E.J.D.E. (2001), Num. 78, 1-23.

[3] BODIAN K., SENE A., NIANE M.-T., Exact controllability for the wave equation in fractional orders spaces, C. R. A. Math Acad Sci.Soc. R. Can. Vol 27 Num 1(2005)

[4] BROSSARD R., LOHEAC, J.-P., Stabilisation frontière du système élastodynamique dans un polygone plan, *C. R. Acad. Sc. Math.* 338 (2004), 213-218.

[5] DEHMAN B., ROBBIANO L.; La propriété du prolongement unique pour un système elliptique. Le système de Lamé, J. Math. Pures Appl. (1993) 72 475-492 .

[6] ELLER M., LAGNESE J.-E., NICAISE S., *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping*, Comp. and Apppl. Math., 21 (2002), 135-165.

[7] GUESMIA A., Existence globale and stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité, Portugaliae Mathematica, 56 (1999), 361-379.

[8] HANSEN S.-W., Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod, J. Math. Anal. Appl. 167 (1992), 429-442.

[9] HEMINNA A., NICAISE S., SENE A., Stabilisation d'un système de la thermoélasticité avec feebacks non linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris, série I Math. 339 (2004), 561-566.

[10] HEMINNA A., NICAISE S., SENE A., Stabilization of an anisotropic thermoelasticity system by nonlinear boundary and internal feedback, Quarterly of applied mathematics, Num.63 ; Vol.3 (2005)

[11] HORN M.-A., Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the systemof linear elasticity, J. Math. Anal. Appl. 223 (1998), 126-50.

[12] KOMORNIK V., *Exact Controllability And Stabilisation, The Multiplier Method*, RMA 36, Masson, 1994.

[13] LEBEAU G. ; ZUAZUA E., Decay rates for the three-dimensional linear system of thermoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 148 (1999) 179–231.

[14] LEMRABET K., Étude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, *Thèse, U.S.T.H.B.*, Alger, (1987).

[15] LIONS J.-L., *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués*, tome 1, RMA Masson 1988.

[16] LIU W.J., Partial exact controllability and exponential stability in higher-dimensional linear thermoelasticity, ESAIM COCV 3 (1998), 23-48.

[17] LIU W.-J., ZUAZUA E., Uniform Stabilization of the higher dimentional System of thermoelasticity with a nonlinear boundary feedback Quaterly of Applied Mathematics 59 (2001), 269-314.

[18] LIU Z., ZHENG S., Exponential stability of the semigroup associated with a thermoelastic system, Quart. Appl. Math. LI (1993), 535-545.

[19] LOHEAC J.P., problèmes elliptiques à données peu régulières et applications, Thèse d'habilitaion Ecole Centrale Lyon (2001).

[20] NAKURAMA K., Boundary value control of thermoelastic systems, Hiroshima Math. J. 13 (1983), 227-272.

[21] NIANE M.-T., SENE A., Sur la contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes; Revista Matemática Complutense, Madrid (2002) vol.XV, Num.2, p.619-629.

[22] NICAISE S., Stability and controllability of the electromagneto-elastic system, Portugaliae Mathematica 60 (2003), 37-70.

[23] NICAISE S., Stability and controllability of and abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications, Rendiconti di Matematica, Serie VII, 23 (2003), 83-116.

[24] NICAISE S., SENE A., Stabilisation non linéaire d'un système de la thermoélasticité isotrope, *Preprint* MACS Univ.Valenciennes 03-12, 2003.

[25] NICAISE S., SENE A., Stabilization of a coupled multidimensional system à paraitre dans Revista Matemática Complutense)

[26] PUEL J.P., ZUAZUA E.; Exact controllability for somes models of multidimensional vibrating structure. Mathematics, climate and environnement. RMA : Research Notes in Applied Mathematics, 27, 288-295

[27] PUEL J.P., ZUAZUA E.; Exact controllability for a model of multidimensional flexible structure. Proc. Royal soc. Edinburgh, 123 A, 323-334.

[28] OLIVIERA L.A.F., Exponential decay of thermoelasticity, Commun. Appl. Anal. 1 (1997), 113-118.

[29] RIVIERA J.E.M., Decomposition of the displacement vector field and decay rates in linear thermoelasticity, SIAM J. Math. Anal. 24 (1993), 390-406.

[30] RIVIERA J.E.M., Asymptotic behaviour in n-dimensional thermoelasticity, Appl. Math. Lett. 10 (1997), 47-53.

[31] SENE A., On exact controllability for the semilinear waves equation (soumis dans Math. Res. Sc. Journal)

[32] SHOWALTER R.E., *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Math. Surveys and Monographs, 49, AMS, 1997.

[33] VALID R., La mécanique des milieux continus et le calcul des structures, *Eyrolles*, Paris, 1977.