UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE

Présentée pour obtenir le Grade de Docteur de 3e Cycle

Spécialité : Mathématiques Pures

Option : Algèbre

CARACTERISATION DES ANNEAUX COMMUTATIFS POUR LESQUELS LES MODULES VERIFIANT(S) SONT DE TYPES FINIS.

Présenté par :

Cheikh Thiécoumba GUEYE

Soutenue le 21 Mars 1998 devant la commission d'Examen

Président : Hamet SEYDI : Professeur à l'U.C.A.D
Membres : Chérif BADJI : Professeur à l'U.C.A.D.
Mamadou Makhtar DIOP : Maître-Assistant à l'U.C.A.D.
Mamadou SANGHARE : Chargé d'Enseignement à l'U.C.A.D.

Année Académique 1997 – 1998

REMERCIEMENTS

A nos maîtres,

Je prie Monsieur Mamadou SANGHARE qui est à l'origine de cette thèse, d'accepter mon entière reconnaissance , mes remerciements et ma profonde gratitude pour la bienveillance avec laquelle il m'a guidé et pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués tout le long de ce travail.

J'ai apprécié tout particulièrement sa patience, sa rigueur scientifique, sa sympathie et sa grande disponibilité à mon égard.

Je voudrais remercier, Monsieur le Professeur Hamet SEYDI qui m'a encouragé dans la voie de la recherche, et pour le grand honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

J'exprime m'a profonde gratitude à Monsieur le Professeur Chérif BADJI et à Monsieur Mamadou Makhtar DIOP, à qui je dois une partie de ma formation et pour l'honneur qu 'ils me font en acceptant de faire partie du jury.

J'associe à ces remerciements Madame Mbaye Seynabou NDIAYE, Madame Ndiaye Marième Soda DIOUF et Mademoiselle Adji Yacine CISSE,

secrétaires au département de Mathématiques et Informatique pour le soin qu'elles ont apporté à la dactylographie de cette thèse.

A tous les membres du département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences et Techniques.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'origine de ce travail est la proposition suivante :

"Soit **A** un anneau commutatif, **M** un A-module de type fini, alors tout endomorphisme surjectif de **M** est un isomorphisme ".

Soit **A** un anneau non nécessairement commutatif, **M** un **A**-module ; on dit que **M** vérifie la propriété **(S)** si tout **A**-endomorphisme de **M** surjectif est un isomorphisme.

Soit **A** un anneau, $\Im$ la classe des **A**-modules de type fini, $\mathfrak{S}$ la classe de **A**-modules vérifiant la propriété **(S),** en 1969 **W. V. Vasconcelos** a démontré que si **A** est commutatif $\Im \subseteq \mathfrak{S}$. En général cette inclusion est stricte : dans **[12] Kaïdi A.M** et **SANGHARE** ont donné l'exemple d'un module sur un anneau commutatif; qui vérifie **(S)** et qui n'est pas de type fini.

Notre travail est de caractériser les anneaux commutatifs pour lesquels $\Im$ et $\mathfrak{S}$ sont identiques.

Pour aborder cette étude nous avons divisé cette thèse en trois chapitres.

Le **Chapitre I** est un rappel de certains résultats classiques, des définitions, des notations que nous utiliserons tout au long ce travail.

Dans le **Chapitre II** nous faisons une synthèse de différents résultats que nous avons pu recueillir d'articles étudiant les modules qui vérifient la **propriété (S).** Notamment « on finitely generated flat modules » de **W. V. Vasconcelos** ; « on injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules » de **E.P. Armendariz, Joe W. Fisher, Robert L. Snider** ; et « une caractérisation des anneaux à idéaux principaux » de **Kaïdi El Amin Mobhtar** et **Sangharé Mamadou** .

Le **Chapitre III** est consacré à la caractérisation des **FGS**-anneaux commutatifs, en montrant d'abord que tout idéal premier d'un tel anneau est maximal et que les idéaux maximaux sont en nombre fini. En suite qu'un tel anneau est semi-parfait. Et enfin sous certaines conditions on montre qu'un **FGS**-anneau commutatif est artinien.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ce chapitre contient essentiellement des rappels et des résultats que nous utiliserons dans toute la suite de cette thèse. Il est divisé en quatre paragraphes : le premier traite des modules simples et semi-simples et on donne quelques résultats généraux ; le second des modules artiniens et noethériens ; le troisième étudie quelques propriétés des modules injectifs, projectifs, semi-parfaits et le quatrième un bref apperçu des P.I. anneaux

Dans tout ce travail, et sauf mention expresse du contraire, le mot anneau désignera un anneau associatif non (nécessairement) commutatif possédant un élément unité noté **1** ; le mot module, un module à gauche unitaire. Un anneau **A** muni de sa structure de **A**-module sera noté ${}_{A}A$. Soit **A** un anneau.On dit que l'anneau **A** est local s'il admet un seul idéal à gauche maximal m. Alors m est l'idéal bilatère ensemble des éléments non inversibles de A et l'anneau quotient A/m est un corps non nécessairement commutatif. Quand nous parlons de radical de **A**, il s'agira du radical de **Jacobson** de **A**.

Soit **M** un **A**-module on appelle série de composition de **M**, une suite de sous-modules de **M** tels que $(0) = M_n \subset M_{n-1} \subset \ldots \subset M_0 = M$ et M_i/M_{i+1} soit un **A**-module simple pour $1 \leq i \leq n-1$ **l'entier** $n = \ell(M)$ est appelé longueur du **A**-module **M**.

§1 – MODULES SIMPLES ET MODULES SEMI-SIMPLES

Soit **A** un anneau. On rappelle qu'un **A**-module **M** est simple (resp. semi-simple) s'il n'est pas réduit à **{0}** et s'il ne contient pas d'autres sous-modules que **M** et **{0}** (resp s'il est somme directe de sous-modules simples). Un anneau **A** est dit **simple** (resp. **semi-simple**) si le A-module ${}_{A}A$ est simple (resp semi-simple).

__Proposition I-1__ ([6] proposition 1 P. 46)

Soit A un anneau ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Tout A-module est semi-simple

b) Le module $_AA$ est semi-simple.

__Démonstration__ :

a) $\Rightarrow$ b) est évident

b) $\Rightarrow$ a) . En effet tout A-module est isomorphe au quotient d'un module $A^{(X)}$ or tout quotient d'un module semi-simple est semi-simple.

__Définition I-2__ :

*On appelle **radical** d'un A-module M (resp. de l'anneau A) le sous-module intersection des sous-modules maximaux de M, ou, ce qui revient au même, l'ensemble des éléments de M annulés par tout homomorphisme de M dans un A-module simple (resp. intersection des idéaux à gauche maximaux de A). On dit que M est sans radical si son radical est nul.*

__Proposition I-3__ ([6] proposition 5 P . 65)

Pour qu'un A-module M soit sans radical, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un sous-module d'un produit de A-modules simples.

__Démonstration__ :

Si **M** est sans radical, alors il existe une famille $(S_i)_{i\in I}$ de A-modules simples et une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'homomorphismes de **M** dans S_i, telles que les noyaux des f_i aient $\{0\}$ pour intersection. On a donc le diagramme de A-modules commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \Pi S_i,\ i \in I \arrow[dl, "P_i"] \\ & S_i & \end{tikzcd}$$

En effet si **M** est sans radical, alors il existe une famille (N_i) de sous-modules à gauche maximum de **M**. Pour tout i $M/N_i = S_i$ est un A-module simple et la surjection canonique

$M \xrightarrow{f_i} M/N_i = S_i$, x $\longmapsto$ $f_i(x) = \bar{x}$ est un homomorphisme de A-modules et

$\bigcap_{i\in I}$ **Ker f_i** = $\bigcap_{i\in I}$ N_i = {0}.

f_i = **$P_i$of** et **Kerf** = $\bigcap_{i\in I} Kerf_i$ or $\bigcap_{i\in I} Kerf_i$ = {0} donc **Kerf** = {0}, d'où f est une injection de **M** dans $\prod_{i\in I} S_i$. Par conséquent **M** $\simeq$ **Imf, Imf** étant un sous-module du produit de A-modules simples $\prod_{i\in I} S_i$.

Réciproquement si **M** est un sous-modules d'un produit de modules simples $\prod_{i\in I} S_i$, pour tout **x** $\neq$ **0** dans **M,** il existe un indice **i** $\in$ **I** tel que $P_i(x) = x_i \neq 0$. Soit g la restriction de P_i à **M, g** est un homorphisme de **M** dans S_i tel que **g(x)** $\neq$ **0** donc d'après la définition **I-2, M** est sans radical.

Corollaire I-4 :

Tout module semi-simple est sans radical.

2) **Modules artiniens et modules noethériens**

Soit **A** un anneau et **M** un A-module nous dirons que le module **M** est **artinien (resp.noethérien)** si toute suite décroissante (resp. croissante) de sous-modules de **M** est stationnaire. Le A-module M est dit de longueur finie si elle est à la fois artinien et noethérien. L'anneau A est dit artinien (resp. noethérien) si $_AA$ est artinien (resp. noethérien).

Proposition I-5 : ([25] proposition 1.17 p. 17)

Soit A un anneau et soit $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$

une suite exacte de A-modules et d'homorphismes de A-modules. M est artinien (resp. noethérien) si et seulement si N et K sont artiniens (resp. noethériens).

Démonstration :

On peut supposer que N est un sous-module de M et que $K \simeq M/N$.

Si **M** est artinien il en est de même que N car les sous-modules de **N** sont des sous-modules de **M**. Et M/N est artinien car la famille des sous-modules de M/N est en bijection avec celle des sous-modules de **M** qui contiennent **N**. Cette bijection conserve le sens de l'inclusion.

Réciproquement si **N** et M/N sont artiniens, soit (1) $\mathbf{M=M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq \dots}$ une suite de sous-modules de **M** décroissante. Alors il existe un entier n_o à partir duquel la suite $\mathbf{N = M_o \cap N \supseteq N \cap M_1 \supseteq \dots\dots \supseteq N \cap M_i \supseteq}$ .... est stationnaire et il existe un entier m_o à partir duquel

$M/N = M_0/N \supseteq M_1 + N/N \supseteq \dots\dots \supseteq M_i + N/N \supseteq$ ..... est stationnnaire.

Posons $\mathbf{q = sup\ (m_o,n_o)}$ alors $\mathbf{N \cap M_n = N \cap M_q}$ et $N + M_n/N = N + M_q/N \cdot \forall \mathbf{n \geq q}$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{M_n}$; si $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ alors $\mathbf{x} \in \mathbf{M_q}$ donc la suite est stationnaire.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{M_n}$ et $\mathbf{x} \notin \mathbf{N}$ alors la classe de x modulo N est un élément de $N + M_n/N = N + M_q/N$ donc il existe $\mathbf{y} \in \mathbf{M_q}$ tel que la classe de **x** modulo N est égale à la classe de **y** modulo N.

Donc $\overline{x - y} = \overline{0}$ d'où $\mathbf{x - y} \in \mathbf{N}$, puisque il appartient déjà à $\mathbf{M_q}$ alors $\mathbf{x - y} \in \mathbf{N \cap M_n}$ = $\mathbf{N \cap M_q}$ et par conséquent $\mathbf{x} \in \mathbf{M_q}$. La démonstration est identique pour le cas **noethérien**

<u>Corollaire I-6</u> : Toute somme directe finie de modules artiniens est artinien.

<u>Démonstration</u> :

La démonstration se fait par récurrence sur n. Soit $\mathbf{M} = \mathbf{M_1} \oplus \ldots\ldots \oplus \mathbf{M_n}$ où les M_i sont artiniens. Pour $\mathbf{n} = 2$ on a alors une suite exacte :

$$O \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow O$$

Il suffit d'appliquer la **proposition I.5.**

<u>Proposition I.7</u> : ([6] Théorème 4 P. 69)

Pour qu'un module soit semi-simple et de longueur fini, il faut et suffit qu'il soit artinien et sans radical.

<u>Démonstration</u> :

On sait déjà qu'un module semi-simple est sans radical (**corollaire I-4**) s'il est de longueur fini il est alors artinien.

Réciproquement, soit **M** un module artinien sans radical. Soit **R** un élément maximal de l'ensemble des intersections finies de sous-modules maximaux de **M**. Pour tout sous-module maximal **N** de **M,** on a : $\mathbf{N \cap R \subset R}$, d'où par définition de **R,** $\mathbf{N \cap R = R}$ et par suite $\mathbf{R \subset N}$. Comme le radical de **M** est nul, il en résulte que $\mathbf{R} = \{0\}$. Il existe donc une famille finie de sous-modules maximaux $\mathbf{M_i}$ $(\mathbf{1 \leq i \leq n})$ d'intersection nulle. Soit alors le diagramme d'homomorphisme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \prod_{i=1}^{n} \left(M/M_i \right) \arrow[dl, "P_i"] \\ & M/M_i & \end{tikzcd}$$

$\mathbf{f_i = P_i o f}$ et $\mathbf{Kerf} = \bigcap_{i=1}^{n} Kerf_i$

Or $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $Ker f_i = M_i$, donc $Ker f = \bigcap_{i=1}^{n} Ker f_i = \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \{0\}$ d'où **f** est injectif.

Posons $P = \prod_{i=1}^{n} \left(M / M_i \right)$ **P** est semi-simple, en tant que produit fini (somme directe externe) de module simple. **P** est de longueur finie en tant que produit fini de modules simples (un module simple est de longueur finie). Comme **P** est semi-simple et de longueur finie il en est de même que **M**.

<u>*Proposition I-8*</u> *: ([6] proposition 12 p. 71)*

Soit A un anneau possédant un idéal bilatère nilpotent J tel que A/J soit artinien de radical nul (par exemple un anneau artinien). Pour tout A-module M les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *M est de longueur finie*

b) *M est artinien*

c) *M est noethérien.*

<u>**Démonstration**</u> **:**

On sait d'après la définition d'un module de longueur finie que a)$\Rightarrow$ b) et a $\Rightarrow$c).

Supposons que **M** soit artinien (resp. noethérien).

Soit **P** un entier non nul tel que $J^P = \{0\}$. Soit le A-module **M/JM**, on sait que **M** est de longueur finie si et seulement si **JM** et **M/JM** sont de longueur finie (**Proposition I-5**) et que $\ell(M) = \ell(JM) + \ell(M/JM)$ (**[15] proposition 4-6**)

De même **JM** est de longueur finie si et seulement si J^2M et JM/J^2M sont de longueur finie, on poursuit ce raisonnement jusqu'à $J^{p-1}M$ et il sera de longueur finie si et seulement si J^pM et $J^{p-1}M/J^pM$ sont de longueur finie. Par conséquent pour montrer que **M** est de longueur finie, il suffit de démontrer que M/JM , JM/J^2M........$J^{p-1}M/J^pM$ sont de longueur finie. Or ces A-modules sont annulés par **J**, donc peuvent être considéré comme des A/J-modules. Puisque **A/J** est semi-simple (**Proposition I-7**) alors les

A/J-modules $J^{P-k}M/J^{P-k+1}M$ $1 \leq k \leq P$ sont semi-simples donc sont sans radical (**corollaire I-4**). Donc les A/J-modules $J^{P-k}M/J^{P-k+1}M$ sont de longueur finie (**proposition I-7**). D'où M est de longueur finie.

Corollaire I-9 :

Soit A un anneau artinien. Pour tout A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) M est de longueur finie

b) M est artinien et noethérien.

Démonstration :

Puisque **A** est artinien, le radical de **Jacobson** noté **J(A)** est un idéal bilatère nilpotent. **A/J(A)** est artinien puisque **A** est artinien (**proposition I-5**). **A/J(A)** est semi-simple donc il est de radical nul. Donc d'après **proposition I-8** les équivalences sont établies. En particulier tout anneau artinien est noethérien.

Proposition I-10 ([3] proposition 8-7 p. 90)

Tout anneau commutatif artinien A est produit direct fini d'anneaux artiniens locaux

Démonstration :

Soit m_i $(1 \leq i \leq n)$ les idéaux maximaux de A. On sait que

$$\prod_{i=1}^{n} m_i^k = \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^k = \left(\bigcap_{i=1}^{n} m_i\right)^k.$$

Posons $J = \bigcap_{i=1}^{n} m_i$ le radical de **Jacobson** de A, puisque **A** est artinien il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{n_0} = \{0\}$. Soit $n_0 = k$ donc $\left(\bigcap_{i=1}^{n} m_i\right)^k = \{0\}$. Or les m_i^k sont étranger deux à deux (car un idéal maximal qui contiendrait $m_i^k + m_j^k$ $(i \neq j)$ contiendrait m_i et m_j ce qui contredit le fait que $\mathbf{m_i}$ et $\mathbf{m_j}$ sont distincts si $\mathbf{i \neq j}$) donc $\prod_{i=1}^{n} m_i^k = \bigcap_{i=1}^{n} m_i^{\ k} = \{0\}$. Puisque

$\bigcap_{i=1}^{n} m_i^{\ k} = \{0\}$, alors l'homomorphisme $\varphi : A \longrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(A/m_i^k\right)$ est injectif. De même φ est surjectif car les m_i^k sont étrangers ([3] **propostion 1.10** P. 7). Donc φ est un isomorphisme. Puisque A est artinien alors $A/m^k{}_i$ est artinien (**Corollaire I-6**), en plus les $A/m^k{}_i$ sont des anneaux locaux. Donc A est un produit direct d'anneaux artiniens locaux.

Proposition I-11 ***([15] proposition 4-12 P. 128)***

Un anneau A est artinien si et seulement si $\ell(A)$ est finie ($\ell(A)$ est la longueur du A-module ${}_AA$. Dans ce cas tout A-module de type fini est de longueur finie.

Démonstration *:*

Si A est artinien d'après **corollaire I-9,** A est de longueur finie.

Supposons que ℓ**(A)** est finie donc **A** est à la fois artinien et noethérien. Soit **M** un A-module de type fini alors **M** admet un système de n générateurs, donc **M** est isomorphe à un module quotient du module $_A\mathbf{A^n}$. Puisque $_A$A est artinien alors $_A\mathbf{A^n}$ est aussi artinien (**Proposition I-5**). Par conséquent **M** est artinien et d'après le **corollaire I-9, M** est de longueur fini.

Proposition I-12 ***([3] proposition 8.8 P. 81)***

Soit A un anneau local, m son idéal maximal et ***k = A/m*** *son corps résiduel.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Tout idéal de A est principal

ii) L'idéal maximal m est principal

En combinant les **théorèmes de Köthe** [9] et de **Cohen et Kaplansky** [7] on obtient le théorème suivant :

Théorème I-13 :

Soit A un anneau commutatif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est artinien et tout idéal de A est principal

2) Tout A-module est somme directe de A-modules cycliques.

Proposition I-14 :

Soit A un anneau local artinien à idéaux principaux. L'ensemble des classes d'isomorphismes des A-modules cycliques est fini.

Démonstration :

Soit **M** un A-module cyclique alors $M \simeq A/I$, I est un idéal de A. Il suffit pour prouver la proposition de montrer que les idéaux de **A** sont en nombre fini. Soit **J** l'idéal maximal de A, on a $J = aA = \langle a \rangle$, $a \in J$, car A est principal. **J** est aussi nilpotent. De plus on a : $0 = \langle a^n \rangle \subset \langle a^{n-1} \rangle \subset \ldots\ldots \subset \langle a \rangle \subset A$ pour un certain **n**. Montrons que tout idéal de A est de la forme $\langle a^k \rangle$ $1 \leq k \leq n$.

Soit I un idéal de A, $I = \langle c \rangle = cA$ or $I \subset J$, donc il existe $\lambda \in A$ tel que $c = \lambda a$.

Si λ est inversible alors $a = \lambda^{-1} c$ ce qui implique que $J = I = \langle a \rangle$.

Si λ est non inversible alors $\lambda \in J$ et $\lambda = a\beta$ avec $\beta \in A$, ce qui implique $c = a^2\beta$.

On reprend le même raisonnement :soit β est inversible dans ce cas $I = \langle a^2 \rangle$ ou β est non inversible et on aura $c = a^3\beta$. Ainsi il existe $k \in \mathbb{N}$; $1 \leq k \leq n$ tel que $c = \beta a^k$ et β est inversible d'où $I = \langle a^k \rangle$. Ce qui prouve que tout idéal de A est de la forme $\langle a^k \rangle$ $1 \leq k \leq n$ et comme $\langle a^k \rangle$ sont en nombre fini. Donc les idéaux de **A** sont en nombre fini.

Proposition I-15 :

Soit A un anneau tel que $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des anneaux. Si M est un A-module alors M est un A_i-module tel que tout A-endomorphisme f de M est un produit de A_i-endomorphismes f_i de M_i.

Démonstration

Soit $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ posons :

$$e_i = \left(\delta_j^i\right)_{j=1}^{n} = (0, 0\ldots\ldots0, 1, 0\ldots.0)$$

$$\uparrow$$

ième place

Soit $\varphi : A_i \longrightarrow Ae_i$

$$a_i \longmapsto (0, 0, \ldots., 0, a_i, 0\ldots\ldots0)$$

φ est un isomorphisme d'anneaux.

Soit **M** un **A**-module, posons $M_i = e_iM$ avec $e_i \in A$. M_i est un sous-ensemble de **M**, c'est même un sous A-module de **M** car si $a \in A$ et $e_im \in M_i$ alors

$a(e_im) = e_i(am)$ or $e_i(am) \in e_iM = M_i$.

M_i est un e_iA-module c'est à dire un A_i-module par le produit suivant :

$a_i(e_im) = \varphi(a_i)e_im = e_i(0,\ldots,0, a_i, 0,\ldots.0)m$. Or $e_i(0, 0,\ldots..0, a_i, 0\ldots..0)\, m \in e_iM$.

Si $i \neq j$ $e_i e_j = (0,\ldots.,0)$ (1). De plus $(1,\ldots\ldots,1) = e_1 + e_2 + \ldots. + e_n = 1$

Donc $m = 1.m = e_1m + \ldots.\, e_nm$. Et d'après (1) $M_j \cap \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \{0\}$, avec $i \neq j$. D'où

$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow P_i & & \downarrow P_i \\ e_iM & \xrightarrow{f_i} & e_iM \end{array}$$

tel que $f_ioP_i = P_iof$ et $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$

f est un produit de A_i-endomorphisme f_i de $M_i = e_iM$

3) <u>Modules injectifs – Modules projectifs</u> :

On rappelle qu'un A-module M est dit **injectif** (resp. **projectif**) si tout diagramme de A-modules :

$$\begin{tikzcd} & & M \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "g"] & L \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp. } \begin{tikzcd} & M \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}\right)$$

où f est injectif (resp. surjectif), se prolonge dans un diagramme commutatif de la forme :

A-modules

$$\begin{tikzcd} & & M \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "g"] & L \arrow[u, dotted, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp. } \begin{tikzcd} & M \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] & \\ L \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}\right)$$

<u>Proposition I.16</u> ([20] P. 21-23)

Soit M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *M est injectif*

b) *M est facteur direct de tout module le contenant*

c) *Pour tout idéal à gauche I de A et tout homomorphisme f de I dans M, il existe* $x \in M$ *tel que* $f(a) = ax$ *pour tout* $a \in I$. ***(Condition de Baer)***

Un A-module M est dit indécomposable s'il n'existe pas deux sous-modules non nuls M_1 *et* M_2 *de M tels que* $M = M_1 \oplus M_2$.

On dit qu'une extension **E** d'un module **M** est une **extension essentielle** de **M** si pour tout sous-module **N** de **E**, la relation $N \cap M = \{0\}$ implique $N = \{0\}$. On dira aussi que M est un sous-module essentiel de **E.** On appelle **enveloppe injective** d'un module **M** toute extension essentielle injective de **M.** On sait que tout module admet une enveloppe injective unique à un isomorphisme près. Si **M** est un A-module nous noterons E(M) où $\hat{M}$ l'enveloppe injective de **M.** Soit **A** un anneau. Un élément **e** de **A** est dit idempotent si $e^2 = e$.

Deux idempotents e_1 et e_2 de A sont dits orthogonaux si $e_1e_2 = e_2\ e_1 = 0$.

Un idempotent **e** d'un anneau A est dit primitif si $e \neq 0$ et si pour tout couple d'idempotents orthogonaux (e_1, e_2) de A tels que $e = e_1 + e_2$ alors $e = e_1$ ou $e = e_2$.

__Proposition I-17__ :

Soit M un A-module non réduit à zéro alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *M est indécomposable*

2) *0 et 1_M sont les seuls idempotents de $End_A(M)$.*

3) *1_M est un idempotent primitif de $End_A(M)$.*

__Démonstration__ :

1$\Rightarrow$ 2) Soit **K** un facteur direct de M alors il existe un idempotent de $\mathbf{End_A(M)}$ tel que $K = eM$. Puisque M est indécomposable alors $K = \{0\}$ ou $K = M$.

Si $K = \{0\} \Rightarrow e = 0$; si $K = M \Rightarrow e = 1_M$ car $e/_K = 1_K$.

2) $\Rightarrow$ 3) évident

3) $\Rightarrow$ 1) Soit K un facteur direct de M. Soit K' un supplémentaire de K dans M et

e la projection de **M** sur **K** suivant **K'**, **e** est un idempotent de $\mathbf{End_A(M)}$, **e** et $1_M - e$ sont orthogonaux et $1_M = e + (1_M - e)$ donc $e = 0$ ou $e = 1_M$.

Si $e = 0$ alors $K = Me = \{0\}$; si $e = 1_M$ alors $K = Me = M$.

__Proposition I-18__ ([28] Lemme P. 205)

Soit A un anneau local. Alors les seuls idempotents de A sont 0 et 1.

__Démonstration__ :

Soit **e** un idempotent de A. Supposons $e \neq 0$ et $e \neq 1$. Alors la relation $e^2 = e$ qui est équivalente à $e(1-e) = 0$, entraîne que **e** et **1-e** ne sont pas inversibles dans A. Donc les idéaux **Ae** et **A(1-e)** sont différents de A ; Comme **A** est local, A admet un seul idéal maximal I, et cet idéal contient **Ae** et **A(1-e)**. D'où $e \in I$ et $1-e \in I$. Donc $1 = e\ (1-e) \in I$.

Ce qui est absurde car **I** est un idéal maximal.

Corollaire I-19 :

Si $End_A(M)$ est local alors M est indécomposable.

Soit M un module, N un sous-module de M est dit irréductible s'il n'existe pas de sous-modules K et L de M distincts qui contiennent strictement N tels que $N = K \cap L$.

***Proposition I-20** ([25] proposition 2.8 P. 48)*

Soit A un anneau et M un A-module injectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) *M est indécomposable*
2) *M est non nul et M est l'enveloppe injective de chacun de ses sous-modules non nuls*
3) *Le sous-module nul est irréductible.*

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 2)

Supposons **$M \neq 0$**. Soit **N** un sous-module non nul de **M**, alors M admet un sous-module **N'** qui est l'enveloppe injective de **N**. D'après la **proposition I-16** puisque **N'** est injectif, il est facteur direct de **M**. Puisque **M** est indécomposable donc **N' = M.**

2) $\Rightarrow$3)

Soit M_1 **et** M_2 des sous-modules de M tels que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Supposons que $M_1 \neq \{0\}$ donc $E(M_1) = M$ et ainsi M est une extension essentielle de M_1, par conséquent $M_2 = \{0\}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Supposons qu'il existe deux sous-modules non nuls M_1 et M_2 tels que $M = M_1 \oplus M_2$. Par conséquent $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Ce qui est contraire avec l'hypothèse.

Soit **A** un anneau, **M** un **A**-module, **x** un élément de **M**. On appelle annulateur de **x** dans **A** et on note **$Ann(x) = \{a \in A / ax = 0\}$**.

*__Proposition I-21__ ([16] **Proposition 2.4 P. 515**)*

*Soit **M** un A-module. **M** est injectif et indécomposable si et seulement si $M \simeq E(A/_J)$, où **J** est un idéal irréductible. Dans ce cas, pour tout **x** non nul de **M**, $Ann(x)$ est un idéal à gauche irréductible et $M \simeq E(A/_{Ann(x)})$.*

On rappelle qu'un sous-module **N** d'un module **M** est dit **superflu** dans **M** si, pour tout sous-module **L** de **M**, la relation N + L = M implique L = M.

Soit **M** un module et soit **P** un module projectif. On dit que **P** est une **enveloppe projective** de M s'il existe un homomorphisme surjectif f de P sur M tel que **Kerf** soit superflu dans P.

On montre que si un module admet une enveloppe projective, alors cette enveloppe projective est unique à un isomorphisme près. Les enveloppes projectives n'existent pas toujours. On dit qu'un anneau A est **semi-parfait** à gauche (**resp. parfait**) à gauche si tout A-module à gauche de **type fini** possède une enveloppe projective (resp. tout A-module à gauche admet une enveloppe projective). Les propositions suivantes donnent une caractérisation des anneaux semi-parfaits et parfaits.

*__Proposition I-22__ ([20] **Théorème 2-1 P.134**)*

*Soit A un anneau, J son radical de **Jacobson.** Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) A est semi-parfait à gauche

b) A est semi-parfait à droite

c) A/J est semi-simple et pour tout idempotent $\overline{x}$ de A/J il existe un idempotent e de A tel que $\overline{e} = \overline{x}$

<u>Proposition I-23</u> ([20) P. 130 th. 5)

Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est parfait

b) Les idéaux à droite monogènes de A vérifient la condition de chaîne descendante.

*c) i) Le radical de **Jacobson J** de A est T-nilpotent à gauche.*

ii) L'anneau A/J est semi-simple.

d) A ne contient pas une infinité d' idempotents orthogonaux.

Un sous-ensemble non vide **X** d'un anneau **A** est dit T-nilpotent à gauche si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de **X**, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_0 a_1 \dots\dots a_{n_0} = 0$.

Un anneau A est parfait si A est semi-parfait et vérifie la **propriété c) -i)** de la **proposition I-23.**

<u>Proposition I-24</u> : ([22] Théorème 3.9 P. 40)

*Soit **P** un module projectif et **f : B ——> P** un épimorphisme alors **B = Kerf⊕ P'** où **P' ≃ P.***

<u>Démonstration</u> :

Soit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dotted, "\gamma"'] \arrow[d, "1_P"] & \\
B \arrow[r, "f"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque **P** est projectif il existe $\gamma : P \longrightarrow B$ tel que $f o \gamma = 1_P$ donc γ est injectif. Soit $b \in B$ on a : $b = (\gamma\, o f)(b) + (b - (\gamma o f)(b))$. Or $(\gamma\, o f)(b) \in \mathrm{Im}\gamma$ et $\mathrm{Im}\gamma \simeq P$ et

$f[b-(\gamma of)\, b] = \bar{f}(b) - [fo\gamma)(f(b)) = 0$ d'où $b - (\gamma\, of)(b) \in$ **Kerf**. De plus $\mathbf{Im}\gamma \cap \mathbf{Kerf} = \{0\}$,

car si $x \in \mathrm{Im}\,\gamma \cap \mathrm{Kerf}$ on a : $x \in \mathrm{Im}\,\gamma$ et $x \in \mathrm{Kerf}$; $x \in \mathrm{Im}\,\gamma$

entraîne qu'il existe $y \in P$ tel que $\gamma(y) = x$; $x \in \mathrm{Kerf}$ entraîne que $f(x) = 0$.

Donc $f[\gamma(y)] = f(x) = 0$ d'où $y = 0$ ce qui entraîne que $x=0$.

__Proposition I-25__ :

Tout module projectif indécomposable vérifie la propriété (S).

__Démonstration__ :

Soit P un **A**-module projectif indécomposable et **f** un endomorphisme surjectif de P.

f : P ——> P ; d'après la **proposition I-25** P = **Kerf** ⊕ P' ou P' $\simeq$P or P est indécomposable donc **Kerf =0** d'où **f** est injectif.

__Proposition I-26__ ([26] proposition I-26 P. 16)

Sur un anneau semi-parfait tout module projectif vérifie la propriété (S).

__Proposition I-27__ ([1] Proposition 17- 10 P. 196)

*Soit A un anneau de radical J(A) = J. Si P est un A-module projectif (alors **Rad P = JP**. **(Rad P = radical de P)**.*

__Corollaire I-25__ ([1] Corollaire 17 – 12 P. 192)

*Soit **J** = J(A). **P** un A-module à gauche projectif tel que JP est superplu dans **P** (exemple si **P** est de type fini) alors **$J(End_A(P)) = Hom\,(P, JP)$** et*

$$End_A(P/J(End_A(P)) \simeq End_A(P/_{JP})$$

__Proposition I-28__ :

*Soit **M** un A-module produit direct de modules H_j ($j \in J$).*

Si $Hom_A(H_i, H_j) = 0$, pour tout $(i,j) \in J^2$ avec $i \neq j$ alors M vérifie la propriété (S) si et seulement si pour tout $j \in J$, H_j vérifie la propriété (S).

Démonstration :

Résulte de l'égalité $\mathbf{End_A\, M} = \prod_{j\in J} End_A H_j$

§4 – LES ANNEAUX A IDENTITES POLYNOMIALES

Définition I.21 :

Soit **A** un anneau. On dit que **A** vérifie une identité polynomiale, s'il existe un entier $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*$ et un polynôme $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ en les variables non commutatives $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2},\ldots, \mathbf{x_n}$ à coefficients dans le centre **C** de **A** tels que, pour tout $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2},\ldots, \mathbf{a_n}$ de **A**, l'on ait $\mathbf{P(a_1,a_2,\ldots, a_n) = 0}$.

Si de plus l'un au moins des coefficients de **P** est inversible dans A, on dira que A est à identité polynomiale ou tout simplement que **A** est un **P.I.** anneau.

CHAPITRE II

INTRODUCTION

Ce chapitre est divisé en trois parties : une première partie consacrée à la démonstration de la **proposition 1.2** de **W.V. Vasconcelos** dans [26] : « Dans un anneau commutatif A tout **A-module** de type fini vérifie la propriété (S) ». Cette démonstration est basée essentiellement sur le théorème de **Cayley Hamilton**. Dans la deuxième partie nous donnerons un exemple de module qui n'est pas de type fini et qui vérifie la propriété **(S)**. Cet exemple est tiré de **[12] , théorème 8 de Kaïdi El Amin** et **Sangharé Mamadou**. Enfin un exemple de module de type fini qui ne vérifie pas la **propriété** (S) [2].

1) <u>Un anneau sur lequel tout A-module M de type fini vérifie la propriété (S)</u>

<u>Théorème II-1</u> : (De Cayley Hamilton)

Soient **A** un anneau commutatif, **M** un A-module de type fini, **B** = $\mathrm{end}_A(M)$ et $f \in B$. Soient $\{x_1,\ldots,x_n\}$ un système générateurs de **M** et a_{ij} $(1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n)$ des éléments de A tels que $f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Si **P(T)** est le polynôme caractéristique de la matrice $\alpha = (a_{ij})_{1\le i\le n,\, 1\le j\le n}$ alors $P(f) = 0$

<u>Démonstration</u> :

Soit $A' = A[f] \subseteq B$ (car un élément de **A[f]** est de la forme $a_n f^n + \ldots + a_2 f^2 + a_1 f + a_0 1_M$, $n \in \mathbb{N}$).

A' est un anneau commutatif unitaire et l'application

$$\phi : A' \times M \longrightarrow M$$

$$(u,x) \longmapsto u(x) = u.x$$

définit une structure de A'-module sur **M**.

Soit x un élément de **M** alors $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I_M(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$ avec $\mathbf{u_i = \lambda_i \, 1_M}$

donc $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est un système générateurs du **A'**-module **M**.

Posons $\mathbf{L' = A'^n}$ et soit $\prod : A'^n \longrightarrow M$

$$e_i \longmapsto x_i$$

$e_1 = (1_M, 0,\ldots,0);\ldots\ldots\ldots\ldots;e_n = (0,\ldots,0, 0,\ldots,1_M)$.

$\prod$ est **A'**-linéaire et surjectif.

Remarque :

$\mathbf{L' = A'^n}$ est un **A'**-module libre dont une base est $\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$.

$f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad 1 \le i \le n.$

Soit $\varphi : L' \longrightarrow L'$ l'endomorphisme du **A'**-module **L'** défini par :

$\varphi(e_i) = \left[f.e_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right]$, $\mathbf{f \in A'}$ **et** $\mathbf{e_i \in A'^n}$.

$\prod o\varphi : L' \longrightarrow M'$ est **A'**-linéaire ,

et On a : $\prod[\varphi(e_i)] = \prod\left[f.e_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right]$, $\prod$ est **A'**-linéaire implique que

$\prod[\varphi(e_i)] = f.x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = f(x_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$ ce qui implique que $\prod o\varphi = O_B$.

$\varphi : L' \longrightarrow L'$ **A'**-linéaire, il existe $\varphi' : L' \longrightarrow L'$ tel que $\varphi o\varphi' = \varphi' o\varphi = \det \varphi . I_{L'}$

$\varphi(e_i) = f.e_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_i$ donc la matrice associe à φ est $(\delta_j^i f - a_{ij} 1_M)_{i,j}$ et $\det \varphi = P(f)$.

Soit $x \in M$, il existe $y \in L'$ tel que $\prod(y) = x$,

On a : $P(f)(x) = \det \varphi (\prod(y)) = \prod(\det \varphi(y)) = \prod(\varphi o\varphi'(y)) = \prod o \varphi\ [\varphi'(y)] = 0$

Ce qui implique $P(f) = O_B$.

Corollaire II.1 :

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A et M un A-module de type fini. On suppose $M = IM$, alors il existe $\alpha \in I$ tel que $(1+\alpha)x = 0 \ \ \forall x \in M$.

Démonstration :

Soit $\{x_1,\dots,x_n\}$ un système générateur de M .Soit $f = 1_M$, $f(x_i) = x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $a_{ij} \in I$.

$P(T) = \det(T I_n - X) = T^n + \alpha_1 T^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}T + \alpha_n$ où $X = (a_{ij})$ $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$

$= f^n + \alpha_1 f^{n-1} + \dots\dots\dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1 + \alpha_1 + \dots\dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$

$= 1 + \alpha$ **avec** $\alpha = \alpha_1 + \dots\dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \in I$

Or $P(u) = 0$ donc la multiplication par $1+\alpha$ est l'endomorphisme nul d'où

$(1+\alpha)\,x = 0 \quad \forall x \in M$.

Corollaire II.2 : (Lemme de Nakayama)

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A contenu dans le ***radical de*** *Jacobson de A. alors si M est un A-module de type fini tel que $M = IM$, on a nécessairement $M = 0$.*

Démonstration ;

D'après le **corollaire II.1**, il existe $\alpha \in I$ tel que $(1+\alpha)x = 0 \ \ \forall x \in M$. Or $1+\alpha$ est inversible dans A. Soit $\boldsymbol{a} = (1+\alpha)A$: si $\boldsymbol{a} \neq A$ alors $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{m}$ un idéal maximal de A, or $1 = (1+\alpha) - \alpha \in \boldsymbol{m}$ ce qui est absurde. Donc $\boldsymbol{a} = A$, donc $x = 0 \ \ \forall x \in M$, c'est à dire $M = 0$.

Corollaire II.3 :

Soit A un anneau commutatif et M un A-module. Si M est un A-module de type fini, soit f un endomorphisme surjectif du A-module M. Alors il existe $h \in A[f]$ tel que

$(1 + hf)(m) = 0 \quad \forall m \in M$.

<u>**Démonstration**</u> :

M est un **A**-module de type fini donc **M** est un **A[f]** module de type fini par le produit suivant : $\begin{pmatrix} A[f]\times M \to M \\ (u,m) \mapsto u(m) = u.m \end{pmatrix}$.

Posons I = (f) un idéal de l'anneau **A[f]**, I = (f) = A[f].f, on a donc : I.M = **M** car f.M = f(M) = **M**. Alors il existe d'après le **corollaire II.2** $\alpha \in$ **I** tel que **(1+α)(m) = 0** ∀m ∈M

α ∈ **I** ⇒ ∃h ∈ A[f] **:** α = **hf** donc (1 + hf)(m) = 0 ∀m ∈M.

***<u>Proposition II.4</u>* :**

*Soit **A** un anneau commutatif et **M** un A-module de type fini. Soit f un endomorphisme de **M** surjectif alors f est un isomorphisme.*

<u>**Démonstration**</u> :

D'après le **corollaire II.3,** il existe **h** ∈ A[f] tel que (1+ hf)(m) = 0 ∀**m** ∈**M.**

Soit **m** ∈**M** tel que **f(m)** = 0 alors (1 + hf)(m) = 0 ⇒ m + hf(m) = 0 ⇒ m = 0.

2) <u>**Exemple d'un module qui vérifie la propriété (S) et qui n'est pas de type fini.**</u>

Soit A un anneau commutatif artinien possédant un idéal non principal. On se propose de montrer qu'il existe un A-module qui n'est pas de type fini et qui vérifie la propriété (S). Cette construction est due à **Kaïdi El Amin Mokhtar et Sangharé Mamadou** (voir [12]).

Puisque **A** est artinien donc **A** est un produit fini d'anneaux artiniens locaux. Or on sait que si $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ alors A est un **FGS**-anneau si seulement si les A_i sont des **FGS**-anneaux (**Chapitre III, proposition III.8**), donc on peut supposer A artinien local. Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme II.5. :

*Soit A un anneau artinien local possédant au moins un idéal non principal. Alors A admet un anneau-quotient **B** qui est local d'idéal maximal **J** tel que $J^2 = \{0\}$ et tel que J/J^2 soit un **B/J** – espace vectoriel de dimension deux.*

Démonstration :

Soit **N** l'idéal maximal de **A**, posons $\mathbf{D} = A/N^2$ et $\mathbf{S} = N/N^2$ l'idéal maximal de D. Puisque **A** est non principal alors **N** n'est pas principal (**proposition I.12**) dans **A.** Donc **S** est non principal dans D ce qui implique que $\dim_{D/S}(S/S^2)$ est supérieure ou égale à deux.

Donc $S/S^2 = D/S\,a \oplus D/S\,b \oplus K'$, d'autre part $S^2 = (N/N^2)^2 = N^2/N^2 = (0)$ d'où $S/S^2 \cong S \cong D/S\,a \oplus D/S\,b \oplus K'$, c'est-à-dire S = Da ⊕ Db⊕ K. Comme K est un idéal de D alors $B = D/K$ est bien défini. Soit J un idéal maximal de B alors $J = S/K$ et $J^2 = S^2/K = (0)$. J/J^2 **est un B/J-espace vectoriel**, d'autre part $J = S/K \simeq Da \oplus Db$, puisque $J^2 = (0)$ alors J/J^2 qui est un B/J-espace vectoriel est de dimension deux ($J/J^2 = J = Da \oplus Db$). Donc l'anneau B = D/K répond à la question.

Lemme II.6 **:**

Soit **A** un anneau artinien local possédant un idéal non principal. Alors **A** admet un anneau quotient **B = C ⊕ bC** où **C** est un sous-anneau de **B** local d'idéal maximal $\mathbf{aC \neq 0}$ où b $\neq$ **0** avec $\mathbf{a^2 = ab = b^2 = 0}$.

Démonstration :

D'après le **lemme II.5**, **A** admet un anneau quotient **B** local d'idéal maximal **$J=xB\oplus bB$** où **$x \neq 0$** et **$b \neq 0$** avec **$J^2 = 0$**. Comme **B** est artinien et local d'après les deux théorèmes de **Cohen** [5] il existe un sous-anneau **C** de **B**, local d'idéal maximal **$aC \neq 0$**, tel que **$B = C + J = C + xB \oplus bB$**. On peut prendre **$x = a$** car **$a \in C$** et $x \in$ **J**. En remarquant que **$C = C + aB$**, **$bC = bB$** et que $C \cap bC = \{0\}$, on obtient $B = C\oplus bC$.

D'où le **lemme II.6.**

Lemme II.7 :

*Soit **C** un anneau local d'idéal maximal **$aC \neq 0$** avec **$a^2 = 0$**. Posons **M** l'anneau total des fractions de l'anneau des polynômes **C[x]** et σ le C-endomorphisme de M défini pour tout élément **m** de M par $\sigma(m) = axm$. Alors :*

a) $a\sigma = \sigma^2 = 0$

b) Si f est un C-endomorphisme de M commutant avec σ , alors pour tout $m \in M$,

$f(am) = am f(1)$ (1)

*c) **Tout C-endomorphisme surjectif de M commutant avec σ est un automorphisme de M.***

Démonstration :

Remarquons d'abord qu'un élément **m** de **M** est inversible dans **M** si et seulement si **$m\notin aM$** : En effet soit **$m \in aM$** et supposons que **m** est inversible dans **M** c'est-à-dire qu'il existe **$m'\in M$** tel que **$mm' = m'm = 1$**. Puisque **$m=am_1$**, où **$m_1 \in M$**, on a **$am_1m' = 1$** d'où **$a^2 m_1m' = a = 0$**. C'est une contradiction car **$a\neq 0$**. Inversement si **$m \notin aM$** alors **$m \notin aC$** (l'idéal maximal) donc **m** est inversible dans **C** donc dans **M**.

a) **$a \sigma (m) = a^2xm = 0 \quad \forall m \in M$**, et **$\sigma(\sigma(m)) = ax\sigma(m) = ax\, axm = a^2 x^2m = 0$ $\forall m \in M$**

donc **$a\sigma = \sigma^2 = 0$.**

b) Soit f un C-endomorphisme de M commutant avec σ , soit m un élément quelconque de M alors on a : σ (f(m)) = ax f(m) = f(σ (m)) = f(axm) donc quelque soit m dans M f(axm) = axf(m) (2).

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(ax^n m) = ax^n f(m)$.

D'après (2) f(axm) = ax f(m), supposons que $f(ax^{n-1}m) = ax^{n-1} f(m)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : (3) $f(ax^n m) = f(ax\, x^{n-1}m) = axf(x^{n-1}m)$ d'après (2).

D'autre part $ax^n f(m) = x(ax^{n-1} f(m)) = x\, f(ax^{n-1}m) = xa\, f(x^{n-1}m) = ax\, f(x^{n-1}m)$ (4).

En combinant (3) et (4) on a : $f(ax^n m) = ax^n f(m)$ quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte, compte tenu du fait que f est C-linéaire que pour tout $m' \in C[x]$ et pour tout $m \in M$

f(am'm) = am'f(m).

Soit $m \in M$ et $m' \in C[x] \setminus a\,C[x]$ tel que $m.m' \in C[x]$ on a : f(am' .m.1) = am'm f(1).

D'autre part f(am'm) = am'f(m), donc am' f(m) = am'm f(1). Puisque $m' \in C[x] \setminus aC[x]$ alors m' est inversible d'où af(m) = am f(1).

c) Soit g un C-endomorphisme surjectif de M commutant avec σ on a :

g(am) = am g(1) d'après b), g(1) est nécessairement inversible car sinon $g(1) \in aM$, c'est-à-dire il existe $m' \in M$ tel que g(1) = am' d'où $g(am) = amam' = a^2mm' = 0$ $\forall\, m \in M$ donc g(aM) = ag(M) = aM ={0} (g est surjectif) ce qui est absurde. Donc g(1) est inversible.

Soit m un élément de M :

1) Si $m \in aM$ alors il existe $m' \in M$ tel que m = am', supposons g(m) = 0, g(m) = g(am') =am'g(1) = 0. Puisque g(1) est inversible, alors am' = 0 c'est-à-dire m = 0.

2) Si $m \notin aM$, alors $m \neq am'$ $\forall\, m' \in M$ donc $am \neq 0$ d'où $am \in aM/\{0\}$, g(am) = ag(m) = amg(1) donc $g(am) \neq 0$ d'où $g(m) \neq 0$. g est donc un automorphisme.

Proposition II-8 :

Si A est un anneau artinien local admettant un idéal non principal, alors il existe un A-module qui n'est pas de type fini et dont l'anneau des endomorphismes E est un anneau local dont l'idéal maximal J est de carré nul.

Démonstration :

D'après le **lemme II-6** on peut supposer que A est de la forme $A = C \oplus bC$ où C est un sous-module de A et $a^2 = ab = b^2 = 0$.

Considérons l'anneau total des fractions M de l'anneau des polynômes $C[x]$ et soit φ l'application de A dans $End(M)$ définie pour tout élément $\lambda = \alpha + \beta b$ de A où $\alpha, \beta \in C$ par $\varphi(\lambda) = \alpha 1_M + \beta\sigma$, 1_M étant l'application identité de M et σ le C-endomorphisme de M défini dans le **lemme II-7**, φ est un homomorphisme d'anneaux qui confère à M une structure de A-module. Soit f un A-endomorphisme du A-module M alors f est un C-endomorphisme qui commute avec σ : En effet puisque f est un A-endomorphisme, alors f est un C-endomorphisme ($A = C \oplus bC$),

$f(\sigma(m)) = f(axm) = ax\, f(m) = \sigma(f(m))$.

Soit E l'anneau des A-endomorphismes du A-module M et J l'ensemble des éléments non inversibles de E. Si $f \in J$ alors $f(1)$ est un élément de aM (car $f(1)$ est non inversible).

Or d'après l'égalité (1) du **lemme II-7**, pour tout $m \in M$, $af(m) = f(am) = am\, f(1) = 0$ (car $f(1) \in aM$ et $a^2 = 0$) donc $f(m) \in aM$.

Montrons que J est un idéal de E bilatère :

Soient f et g deux élements de J et h un élément de E. Comme $f(M) \subseteq aM$ et $h(M) \subseteq aM$ pour tout élément m dans M on a :

i) $(ah\, f)(m) = ah\,[f(m)] = h[a\, f(m)] = a\, f(m)\, h(1) = 0$

ii) $(a\, fh)(m) = a\, f[h(m)] = f\,[ah\,(m)] = a\, h(m)\, f(1) = 0$

iii) $[a\,(f+g)(m)] = a\,f(m) + ag(m) = 0$

iv) $(fg)(m) = f\,[g(m)] = g(m)\,f(1) = 0$

Donc d'après **i)** , **ii)** et **iii)** **hf, fh** , **f + g** sont des éléments de **J**, **hf = fh** et d'après **iv)** $J^2 = (0)$. D'où **J** est un idéal bilatère et **E** est un anneau local d'idéal maximal **J** et $J^2 = (0)$.

Soit $H = \oplus A\,ax^n$, on sait que $ax^n \in C[x]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Puisque **M** est l'anneau total des fractions de l'anneau total des polynômes **C[x]**, alors $ax^n \in M$. Or **M** est un **A**-module donc $A\,ax^n \in M$. Considérons l'injection canonique

$f_n : A\,ax^n \longrightarrow M$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] & & M \\ & Aax^n \arrow[ul, "j_n"] \arrow[ur, "f_n"'] & \end{tikzcd}$$

tel que $f_n = f\circ j_n$ (j_n est l'injection canonique).

f est injectif car $\mathrm{Ker}f = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Ker}f_n$ $\mathrm{Ker}f_n = \{0\}$ donc $\oplus A\,ax^n \subseteq M$ ce qui implique que **M** n'est pas de type fini

<u>Proposition II.9</u> **:**

Soit A un anneau artinien possédant un idéal non principal. Alors il existe un A-module indécomposable, qui vérifie la propriété (S) et qui n'est pas de type fini.

<u>Démonstration</u> **:**

D'après la **proposition II-8**, il existe un A-module qui n'est pas de type fini dont l'anneau des A-endomorphismes **E** est un anneau local alors **M** est indécomposable (**proposition I-17 et I-18**). Soit **f** un A-endomorphisme de **M** surjectif, comme $M \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^n \neq 0$. On en déduit que $f \notin J$ donc **f** est inversible. Soit $f(m) = 0$ et soit **g** l'inverse de **f** alors $g[f(m)] = m = 0$. Donc **f** est un automorphisme.

3) <u>Exemple de A-module de type fini qui ne vérifie pas la propriété (S).</u>

Dans un anneau commutatif tout module de type fini verifie la propriete (S). Dans l'exemple ci-dessous on a remplacé la propriété de commutativité par la propriété d'identités polynomiales. Ainsi on peut trouver un A-module de type fini qui ne vérifie pas la propriété (S) sur un anneau **A** identités polynomiales. ([2] **Exemple 3.1**)

Soit **Q** le groupe des nombres rationnels, c'est un $\mathbb{Z}$-module.

Soit $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ le groupe commutatif engendré par les éléments non nuls $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$.. vérifiant $pC_0 = 0$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $pC_i = C_{i-1}$ où p est un entier naturel premier.

$\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est donc un $\mathbb{Z}$-module. Soit $M = Q \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, soit $S = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ et

$$A = \begin{bmatrix} q & 0 \\ s & z \end{bmatrix} \text{avec } q \in Q,\ s \in S \text{ et } z \in \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

A est un anneau à identités polynomiales, **M** comme A-module est cyclique et engendré par **(1,0)**.

Soit $f : M \longrightarrow M$ tel que : $m \longmapsto \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} m$.

f est un homomorphisme surjectif et f n'est pas injectif, car

$$f(0,C_o) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ PC_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

CHAPITRE III

FGS -ANNEAUX COMMUTATIFS

INTRODUCTION

Il est de tradition que des chercheurs s'intéressent à l'étude de certaines classes d'anneaux caractérisés par une propriété (P).

Dans [7] **I.S. COHEN** et **I. KAPLANSKY** étudient les anneaux commutatifs sur lesquels tout module est somme directe de modules cycliques.

Dans [8] **D. Z. DJOZOVIC** étudie les anneaux sur lesquels tout épimorphisme est un isomorphisme.

KAIDI El Amin Mokhtar et **SANGHARE Mamadou** dans [12] donnent une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux. Dans [24] **M. SANGHARE** étudie quelques classes d'anneaux liées au lemme de **FITTING**.

FISHER et **SNIDER** étudient les anneaux **A** qui sont tels que tout **A**-module de type fini vérifie la propriété **(S)** (resp. **(I)**) et en donnent plusieurs résultats. On rappelle qu'un module **M** sur un anneau **A** est dit vérifier la propriété **(S)** (resp. **(I)**) si tout **A**-endomorphisme surjectif (resp. injectif) de **M** est un automorphisme de **M**.

Dans le même ordre d'idées dans **[4] M. BARRY, C.T. GUEYE** et **M. SANGHARE** étudient les **FGI**-anneaux commutatifs. Un **FGI**-anneau est un anneau **A** commutatif sur lesquels tout **A**-module qui vérifie la propriété **(I)** est de type fini.

Partant du résultat bien connu de **W. VASCONCELOS** : Dans un anneau commutatif **A**, tout endomorphisme surjectif d'un **A**-module **M** de type fini est un automorphisme, nous étudions dans ce chapitre les anneaux commutatifs sur lesquels tout module qui vérifie **(S)** est de type fini.

§1 – FGS – ANNEAUX COMMUTATIFS

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont des anneaux commutatifs.

Définition III.1 :

Soit **A** un anneau commutatif. On dit que A est un FGS-anneau commutatif si tout A-module **M** qui vérifie **(S)** est de type fini.

Exemple :

Tout anneau semi-simple est un **FGS**-anneau.. Les anneaux artiniens sur lesquels tout idéal est principal sont des **FGS**-anneaux (**Proposition III-12**).

Proposition III.2

L'image homomorphe d'un FGS-anneau commutatif est un FGS-anneau commutatif.

Démonstration

Soit $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorphisme surjectif d'anneaux, tels que **A** est un **FGS**-anneau commutatif, **B** est un anneau commutatif. Soit **M** un **B**-module alors φ induit une structure de **A**-module sur la structure du groupe additif **M** par :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \longmapsto \varphi(\mathbf{a})\mathbf{m}$$

et l'application de $\mathbf{A} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ tel que $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \longmapsto \varphi(\mathbf{a})\mathbf{m}$ vérifie les axiomes définissant un **A**-module. Donc si **M** est un **B**-module alors **M** est un **A**-module et tout **B**-endomorphisme est un **A**-endomorphisme et inversement. De ce fait on ne peut pas avoir un **B**-module qui vérifie la propriété **(S)** et ne soit pas de type fini si **A** est un **FGS**-anneau. Donc si **A** est un **FGS**-anneau alors **B** est aussi un **FGS**-anneau.

Proposition III.3

Tout FGS-anneau intègre est un corps.

Démonstration

Soit K le corps des fractions de A, donc $K = S^{-1}A$ (A est un FGS-anneau intègre, $S = A - \{0\}$ la partie mutiplicative). Considérons le A-module K ; K est un groupe abélien, l'application $A \times K \longrightarrow K$ vérifie les axiomes d'un A-module

$(a, b) \longmapsto ak.$

Montrons que le A-module K vérifie la propriété (S). Soit $f \in End_A(K)$ tel que f soit surjective. Démontrons que f est injective c'est-à-dire si $f(s^{-1}a) = 0 \Rightarrow s^{-1}a = 0$;

$f(s^{-1}a) = s^{-1}s\, f(s^{-1}a) = s^{-1}f(ss^{-1}a) = s^{-1}f(a) = s^{-1}af(1)$ donc si $f(s^{-1}a) = 0 \Rightarrow s^{-1}a\, f(1) = 0$ puisque $f(1) \neq 0$ et $f(1) \in K$ donc $s^{-1}a = 0$ d'où f est injective.

Donc ${}_AK$ vérifie la propriété (S) il en résulte que ${}_AK$ est de type fini, et par conséquent K=A.

Proposition III.4

*Tout idéal premier d'un **FGS**-anneau commutatif est un idéal maximal.*

Démonstration :

Soit P un idéal premier, d'après **proposition III.2** l'anneau quotient intègre A/P est un FGS-anneau commutatif donc, d'après la **proposition III.3**, A/P est un corps.

Définition :

*Un anneau est dit **semi-local** si A/J est **semi-simple** (J le radical de **Jacobson** de A).*

Proposition III.5

*Un **FGS**-anneau commutatif A possède seulement un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Démonstration

Soit L l' ensemble des idéaux premiers de A.

Montrons que $Hom_A(A/p, A/p') = \{0\}$ si P et P' sont deux idéaux premiers distincts.

Soit $f : A/p \longrightarrow A/p'$ avec $P \neq P'$, $P' \neq 0$, $\overline{x}_p = x + p \longmapsto \overline{x}_{p'}$.

f est une application A-linéaire, montrons que f est identiquement nu . A/p est un corps donc A/p est simple soit $f \in \mathbf{Hom_A}(A/p, A/p')$ soit f est identiquement nul soit f est un isomorphisme d'après le **lemme SCHUR**.

Supposons que f est un isomorphisme, et soit $x \in P' - P$, $\bar{x}_p$ = classe de x modulo **P**.

On a : $\overline{O}_{p'} \neq f(\bar{x}_p) = f(x.\overline{1}_p) = x f(\overline{1}_p) = \overline{O}_{p'}$, contradiction. Donc $f \equiv 0$.

Soit $\mathbf{M} = \underset{p \in L}{\oplus} A/p$. Montrons que **M** vérifie la propriété **(S).**

Soit $f \in \mathbf{End_A(M)}$ tel que f est surjective.

Comme **A/P** vérifie **(S)** pour tout $P \in L$ et que $\mathbf{Hom_A}(A/p, A/p') = (0)$ si $P \neq P$, alors d'après la **proposition I.28**, $\mathbf{M} = \underset{p \in L}{\oplus} A/p$ vérifie la **propriété (S).** Donc **M** est de type fini

et par conséquent **L** est fini.

Soit **x** un élément d'un anneau **A, x** est dit nilpotent lorsqu'il existe un entier **n > 0** tel que $x^n = 0$. On appelle **nil-idéal** un idéal dont tous les éléments sont nilpotents.

__Proposition III-6__ :

Soit A un FGS anneau commutatif ; J son radical de Jacobson. Alors pour tout idempotent $\bar{x}$ de A/J il existe un idempotent e de A tel que $\bar{e} = \bar{x}$.

__Démonstration__ :

Soit $\bar{x}$ un idempotent de $A/_J$, alors $x^2 - x \in J$. Puisque **A** est un **FGS** anneau commutatif alors **J** est un nil-idéal (Tout idéal premier est maximal). Donc il existe **n > 0** tel que $(x^2 - x)^n = 0$; en développant par la formule du binôme on obtient la relation $x^n = x^{n+1}p(x)$ où $p(x)$ est un pôlynôme en **x** à coefficients entiers. On en déduit les égalités :

$x^n = x^{n+2}\, p(x)^2 = x^{n+3}\, p(x)^3 = \ldots\ldots = x^{2n}\, p(x)^n$.

L'élément $e = x^n p(x)^n$ est un idempotent de A :

$$e^2 = x^{2n} p(x)^{2n} = [x^{2n} p(x)^n] p(x)^n = x^n p(x)^n = e$$

Dans l'anneau **A/J** on a les relations :

$$\bar{x} = \bar{x}^n = \bar{x} p(\bar{x}) = \bar{x}^n p(\bar{x})^n = \bar{e}$$

<u>*Proposition III-7*</u> *:*

Soit A un FGS anneau commutatif ; J son radical de Jacobson. Alors A/J est semi-simple.

<u>**Démonstration de prop. III-7 :**</u>

D'après la **proposition III-5 A** possède un nombre fini d'idéaux maximaux c'est à dire $J = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ où les I_i sont les idéaux maximaux de A pour $1 \leq i \leq n$. D'où l'isomorphisme d'anneaux $\bigoplus_{i=1}^{n} A/I_i \simeq A/J$.

<u>*Proposition III-8*</u> *:*

Un FGS anneau commutatif est semi-local.

<u>**Démonstration**</u> **:**

C'est une conséquence de la définition d'un anneau semi-local et de la **proposition III-7.**

<u>*Proposition III-9*</u> *:*

Un FGS-anneau commutatif est semi-parfait.

<u>**Démonstration**</u> **:**

*La démonstration résulte des propositions **I-22 ; III-6** et **III-7**.*

<u>*Proposition III-10*</u> *:*

Un FGS anneau commutatif A est somme directe de modules projectifs locaux et $A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ où $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ est un système orthogonal et complet d'idempotents de A.

Démonstration :

Voir [20] proposition **6.3.4** et [**10**] proposition **18.23.**

Proposition III.11 :

Un produit d'anneau A_i $(1 \le i \le n)$ est un FGS-anneau si et seulement si chaque A_i est un FGS-anneau.

Démonstration *:*

Soit $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Supposons que **A** est un **FGS**-anneau, comme **Ai** $(1 \le i \le n)$ est

l'image homomorphe de A par la ième projection $A \xrightarrow{Pi} A_i$, d'après proposition **III.2**

A_i est un **FGS**-anneau en tant que image homomorphe de **A**. Inversement supposons que

A_i est un **FGS**-anneau pour tout **i** $(1 \le i \le n)$. Soit **M** un **A**-module d'après propriété (**I.15**),

Chapitre 1, **M** est un A_i-module pour tout i, $(1 \le i \le n)$.

Donc si **M** vérifie la propriété (S) alors **M** en tant que A_i-module est de type fini pour tout i,

$(1 \le i \le n)$. Puisque $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ donc **M** est de type fini en tant que **A**-module.

Proposition III.12 :

Tout anneau commutatif artinien dont tout idéal A est principal est un FGS-anneau.

Démonstration :

Soit A un anneau commutatif artinien à idéaux principaux. A est donc un produit directe d'un nombre fini d'anneau local artinien à idéaux principaux (**prop. I.10**). On peut supposer donc **A** lui-même local artinien et à idéaux principaux puisque d'après proposition **III.13 A** est un **FGS**-anneau si et seulement si A_i $(1 \le i \le n)$ est un **FGS**-anneau. Soit **M** un **A**-module d'après **proposition I.13, M** est somme directe de modules cycliques ($M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ où les M_i sont cycliques).

Supposons que M vérifie la propriété (S) et que M n'est pas de type fini.

Si M n'est de type fini, il existe une infinité dénombrable de facteurs cycliques isomorphes deux à deux (car l'ensemble des classes d'isomorphismes des A-modules cycliques est fini **proposition I-14**). $\mathbf{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{M}_i$ où I est infini, I s'écrit donc $\mathrm{I} = \mathrm{K} \cup \mathrm{L}$ avec $\mathrm{K} \cap \mathrm{L} = \emptyset$ et K dénombrable. D'où $\mathbf{M} = \left(\bigoplus_{i\in K} M_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i\in L} M_i\right)$, c'est à dire $\mathbf{M} = \left(\bigoplus_{n\in N} Ac_n\right) \oplus \mathbf{L}$ et $\mathbf{Ac}_i \simeq \mathbf{Ac}_j$. Considérons $\varphi : \left(\bigoplus_{n\in N} Ac_n\right) \longrightarrow \left(\bigoplus_{n\in N} Ac_n\right)$

$$\mathbf{c}_1 \longmapsto 0$$

$$\mathbf{c}_n \longmapsto \mathbf{c}_{n-1} \ \textbf{si} \ n > 1$$

L'homomorphisme φ est surjectif, mais il n'est pas injectif.

Soit $\mathbf{h} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$, $\mathbf{c} + \mathbf{x} \longmapsto \varphi(\mathbf{c}) + \mathbf{x}$

h est surjectif mais il n'est pas injectif, donc M ne vérifie pas la **propriété (S).**

On aboutit à une contradiction. Donc M est de type fini.

Proposition III-13 :

*Sur un **FGS**-anneau commutatif A tout A-module indécomposable projectif est de type fini.*

Démonstration :

Soit **P** un **A**-module indécomposable projectif. Alors **P** vérifie la propriété **(S).** Donc puisque **A** est un **FGS**-anneau commutatif, **P** est de type fini.

Proposition III-14 :

*Soit A un **FGS**-anneau commutatif artinien. Alors tout idéal de A est principal.*

Démonstration :

Il résulte de la **proposition II-9**.

Définition III-15 :

Soit $(E,\subseteq)$ un ensemble ordonné par l'inclusion. On dit que les sous-ensembles de E vérifie la condition de chaîne ascendante si toute suite $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ de E est stationnaire, c'est à dire il existe $n \in N^*$ tel que $I_n = I_{n+1}$.

Proposition III-16 :

Soit A un FGS anneau commutatif tel que les annulateurs des sous-ensembles de A vérifient la condition de chaîne ascendante. Alors J(A) est nilpotent.

Démonstration :

Montrons que **J(A)** est **T**-nilpotent.

Puisque **J(A)** est un nil-idéal d'après **[20] proposition 2-1-6 J(A)** est **T**-nilpotent. D'autre part : $\mathbf{Ann_A(J)} \subset \mathbf{Ann_A(J^2)} \subset \ldots$..

Soit **n** le plus petit entier tel que $\mathbf{Ann_A(J^n) = Ann_A(J^{n+1})}$. Supposons que J n'est pas nilpotent ; il existe alors un élément $\mathbf{x_1}$ de **J** tel que $J^n x_1 \neq \{0\}$, ce qui implique que $J^{n+1}x_1 \neq \{0\}$ etc... .

On met ainsi en évidence une suite $(\mathbf{x_n})$ d'élément de **J** telle que $x_n \times x_{n-1} \times \ldots \times x_1$ ne soit pas nul pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$. Ce qui contredit la T-nilpotence de **J**. Donc **J** est nilpotent.

Proposition III-17 :

Soit A un FGS-anneau commutatif tel que les annulateurs des sous-ensembles de A vérifiant la condition de chaîne ascendante. Alors A est artinien.

Démonstration :

On peut supposer **A** local et $\mathbf{J^2 = (0)}$. Alors $\mathbf{J/J^2}$ est un **A/J**-espace vectoriel.

Montrons que $\mathbf{\dim_{A/J} (J/J^2) = 1}$.

Supposons $\mathbf{\dim_{A/J} (J/J^2) \geq 2}$. Il en résulte d'après **[12]** il existe un A-module **M** qui n'est de type fini et qui vérifie **(S)**. Ce qui est absurde donc $\mathbf{\dim_{A/J} (J/J^2) = 1}$.

D'où J est principal . **A** est artinien de plus il est à idéaux principaux.

Proposition III-18 :

Soit A un anneau commutatif tel que les annulateurs des sous-ensembles de A vérifient la condition de chaîne ascendante. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1) *A est un **FGS**-anneau*

2) *A est artinien à idéaux principaux*

Démonstration :

1) $\Rightarrow$ 2) résulte de la **proposition III-17** et de la **proposition III-9.**

2) $\Rightarrow$ 1) résulte de la **proposition III-12.**

BIBLIOGRAPHIE

[1] **ANDERSON, F. W. and FULLER K.R. :** Rings and categories of modules. 1974.

[2] **Armendariz, E.P., Fisher, J.W. And Snider, R.L. :** On injective and surjective endomorphisms of fintely generated modules. Comm. In Algebra 6(7), (1978).

[3] **ATIYAH , Frs and MACDONALD I. G. :** Introduction to commutative Algebra. Addison – Wesley Publishing company (1969).

[4] **BARRY M., GUEYE C.T., SANGHARE M. :** On commutative FGI-Rings (à paraître dans Extracta mathématicae).

[5] **BOURBAKI, N :** Algèbre commutative Chap 8 et 9 Masson 1983.

[6] **BOURBAKI, N :** Algèbre II Chap.8 Herman 1958.

[7] **COHEN, I. S. and KAPLANSKY, I. :** Ring for which every module is a direct sum of cyclic modules Maths. 2 – 54 (1951) 97-101.

[8] **DJOKOVIC, D. Z. :** épimorphism of modules which must be isomorphisms. Can. Maths Bull, 16 (4), (1973), 513 – 515.

[9] **FAITH, C : On Köth rings. Math. Ann, 164 (1966), 207 – 212.**

[10] **FAITH, C :** Ring theory, Algebra II, Springer – Verlag (1976.

[11] **HIRANS, Y :** On fitting's lemma. Hiroshima math. J. (1979).

[12] **KAIDI, A.M. et SANGHARE, M . :** Une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux. Lec. Notes in Math. N° 1328 Springer-Verlag 245-254 (1988)

[13] **LAFON J. P. :** Algèbre commutative. Langages géométrique et Algébrique. Hermann. (1977).

[14] **LAFON J. P. :** Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative. Hermann.

[15] **MALLIAVIN M. P. :** Algèbre Commutative. Application en géométrie et théorie des nombres. Masson (1985).

[16] **MALTIS E. :** Injective module over noetherian rings Pacific J.Math volume 8 (1958) 511- 528.

[17] **MEGIBBEN Chasles :** Countable injective module are sigma injective. Proced of the amer. Math. J. Vol. 84 N° 1 (Janvier 1982).

[18] **ORZEH, M. :** Onto endomorphisms are isomorphisms. Amer. Maths. Monthly 78(1971) 357-362.

[19] **POSNER E. C. :** Prime rings satisfing a polynomial identity. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 180-183.

[20] **RENAULT G. :** Algèbre non commutative. Gauthier Villars (1975).

[21] **ROBERT B. and WARFIELD, Jr :** Rings whose modules have nice decomposition maths. 2. 125 (1972) 187 – 192.

[22] **ROTMAN J. J. :** Notes on Homological Algebras. University of Illinois, Urbana. Van Nostrand Reinhold Company – New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne.

[23] **SANGHARE Mamadou :** Sur une classe de modules et d'anneaux liés aux conditions de chaine. Thèse de Doctorat 3ème Cycle (1985). Rabat.

[24] **SANGHARE Mamadou :** Sur quelques classes d'anneaux liées au lemme de Fitting. Thèse d'Etat 1993 - Dakar

[25] **SHARPE D. W. and VAMOS P. :** injective module Camb. Un. Press. 1972.

[26] **VASCONCELOS W. V. :** On endomorphisms of finitely generated modules Proc. Amer. Maths. Soc 25 (1970) 900 – 901.

[27] **VASCONCELOS W. V. :** On finetely generated flat modules. Trans. Amer. Math. Soc. 138 (1969). 505 – 512.

[28] **ZARISKI and SAMUEL :** Commutative Algebra. D. Van Nostrand company, Inc 9 (1958).