

Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Thèse

présentée par

Babacar Diakhaté

Pour obtenir le grade de Docteur de 3^e Cycle ès -mathématiques

Option : Analyse réelle et complexe

Sujet : Problèmes extrêmes pour certaines classes de polynômes et fonctions entières de type exponentiel.

soutenue le 30-juin-2001

Membres du jury :

CHERIF BADJI	...	Président
ABDOUL.O.WATT	...	Directeur de thèse
AHMET SEYDI	...	Examineur
MAMADOU SANGHARE	...	Co-directeur
SERIGNE ALIOU LÔ	...	Examineur

Table des matières

I	Contribution sur un resultat de P.Erdős relatif à la distribution uniforme des zéros de certains polynomes	6
1	Chapitre Préliminaires	9
2	Résultats auxiliaires	12
2.1	Théorèmes obtenus	12
2.2	Démonstration du théorème 2.1.1	19
II	Propriétés extrêmes des fonctions entières de type exponentiel.	26
3	Chapitre préliminaire.	27
3.1	Ordre et type des fonctions entières	27
4	Théorème de Phragmen-Lindelöf et formules d'interpolation	30
4.1	Théorème de Phragmen-Lindelöf	30
4.2	Fonction indicatrice de Phragmen-Lindelöf et Propriétés	32
4.3	Formule d'interpolation des fonctions entières de type exponentiel :	33
4.4	Formule d'interpolation de Marcel Riesz pour les polynomes trigonométriques :	36
4.4.1	Résultats Auxiliaires	36
4.4.2	Formule d'interpolation de M.Riesz	37
5	Inégalités de Bernstein :	39
5.1	Inégalité de Bernstein et Extention de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques	40

5.1.1	Inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques :	40
5.1.2	Extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques :	40
5.2	Inégalité de Bernstein et extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques :	42
5.2.1	Inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques :	42
5.2.2	Extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques :	43
5.3	Inégalité de Bernstein et extension de l'inégalité de Bernstein pour les fonctions entières de type exponentiel :	44
5.3.1	Inégalité de Bernstein pour les fonctions entières de type exponentiel. :	44
5.3.2	Extension de l'inégalité de Bernstein pour les fonctions entières de type exponentiel. [voir [7]] :	45
5.4	Conjecture sur les fonctions entières de type exponentiel τ :	48

Remerciements

Au terme de ce travail, je veux remercier toutes les personnes qui, d'une façon ou d'une autre ont participé à sa réalisation, et plus particulièrement :
***M. Abdoul.O.Watt** chargé d'enseignements à l'école supérieure polytechnique de Thiès, qui m'a proposé le sujet et a dirigé mon travail. Sans sa pertinence scientifique, son attention permanente et les nombreuses discussions que nous avons eues , ce travail n'aurait jamais abouti. Sur un autre plan, je dois le remercier ainsi que sa femme Fatmata Ly Watt, pour la compréhension et la solidarité qu'ils ont portées envers moi et ma famille. Qu'ils sachent la force du respect que je leur porte.

***M. Mamadou Sangharé**, maître de conférences au département de mathématiques et informatique, qui a accepté de codiriger ma thèse.

***M. Cherif Badji**, professeur au département de mathématiques et informatique, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

***M. Ahmet Seydi**, professeur au département de mathématiques et informatique, directeur du technopole Dakar, qui a accepté de faire partie du jury.

***M. Scigne Aliou LÔ** maître-assistant au département de mathématiques et informatique, qui a accepté de faire partie du jury

Je remercie aussi :

***M. Cheikh Mbacké Diop**, maître-assistant au département de mathématiques et informatique, pour l'attention qu'il m'a accordée tout au long de l'élaboration de cette thèse, pour m'avoir initié au latex ; logiciel informatique utilisé pour taper ma thèse

***M. Pape Ngom**, assistant au département de mathématiques et informatique, pour m'avoir aidé à mieux comprendre ce logiciel et à obtenir une meilleure version du latex.

Mes remerciements aussi à tous les autres collègues du département pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

Enfin je suis très reconnaissant envers ma chère épouse **Olga** et mon fils **Cherif**, qui ont tout laissé pour m'accompagner dans cette étape de ma vie. Ils ont été mon soutien dans les moments difficiles. Je leur demande pardon pour tout le temps que je ne leur ai pas consacré pendant ces années.

Résumé

Dans un article intitulé "on a result of P. Erdős, about uniforme distribution of zeros of certain polynomials." Le professeur P. Erdős énonce et démontre dans un cas particulier le resultat suivant : Si

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i); \quad x_0 = 1, x_{n+1} = -1, \quad -1 \leq x_i \leq 1;$$

avec

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{c_1}{2^n}; \quad \text{et } \max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)| > \frac{c_2}{2^n}$$

$$k=0, \dots, n$$

alors le nombre de réels ϑ_i tels que $\cos \vartheta_i = x_i$ dans

$$(A, B), \quad 0 \leq A < B \leq \pi$$

est égal à :

$$N_n(A, B) = \frac{B - A}{\pi} n + O[\log(n(B - A))]$$

Nous avons montré dans ce travail que le resultat est vrai pour tout arc (A, B) de longueur donnée, quelque soit sa position sur $[0, \pi]$; que ce resultat est le meilleur possible. De façon incidente, nous avons amélioré la preuve de certains lemmes dudit article. Dans la deuxième partie, nous avons fait une synthèse des extensions de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques et trigonometriques ainsi que pour les fonctions entières de type exponentiel. Enfin, nous avons posé une conjecture sur la distance entre deux zéros consécutifs qui encadrent le plus petit maximum d'une fonction entière de type exponentiel τ , réel pour z réel et ayant tous ses zéros réels.

Première partie

Contribution sur un resultat de
P.Erdős relatif à la distribution
uniforme des zéros de certains
polynômes

Introduction

Dans [1], P. Erdős a démontré, dans un cas particulier, le resultat suivant :
si

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i); \quad x_0 = 1, x_{n+1} = -1, \quad -1 \leq x_i \leq 1;$$

avec

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{c_1}{2^n}; \quad \text{et} \quad \max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)| > \frac{c_2}{2^n}$$
$$k=0, \dots, n$$

alors le nombre de réels ϑ_i tels que $\cos \vartheta_i = x_i$ dans

$$(A, B), \quad 0 \leq A < B \leq \pi$$

est égal à :

$$N_n(A, B) = \frac{B - A}{\pi} n + O[\log(n(B - A))]$$

Nous montrons dans ce travail que le resultat est vrai pour tout arc (A, B) de longueur donnée, quelque soit sa position sur $[0, \pi]$. De façon incidente, nous améliorons la preuve de certains lemmes dudit article.

Pour les polynômes

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

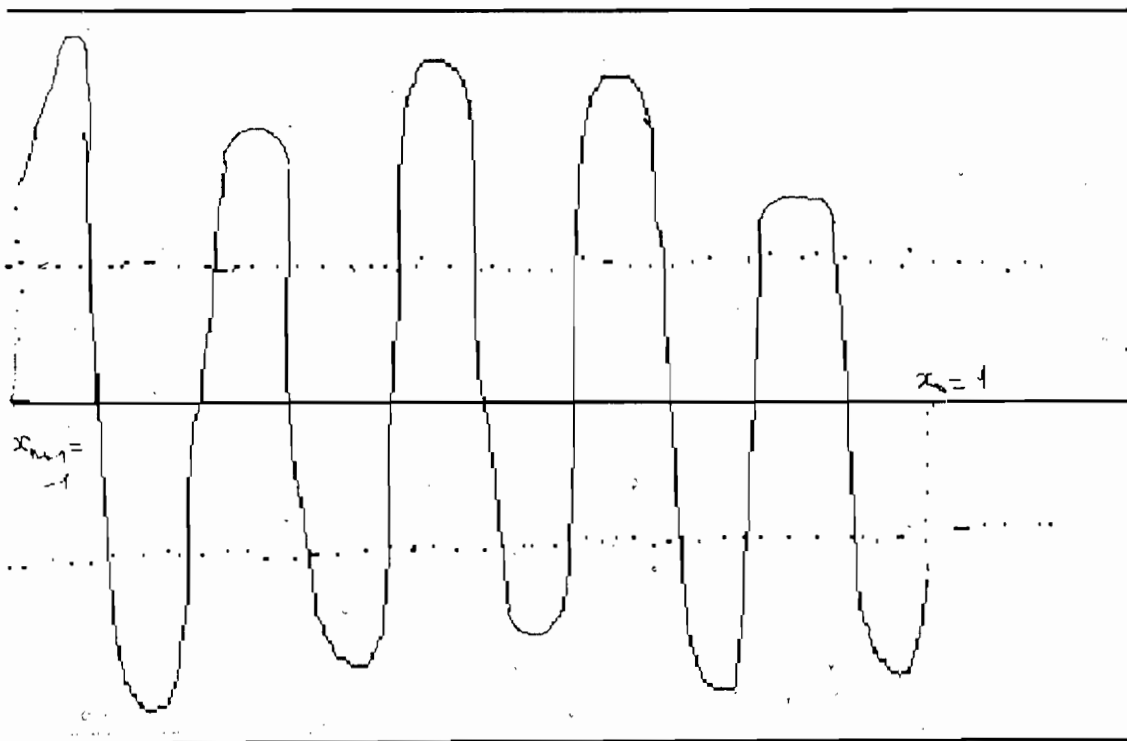
tels que

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{C_1}{2^n}$$

et

$$\max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)| > \frac{C_2}{2^n}, \quad k = 0, \dots, n$$

Nous avons la représentation suivante :



$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) ; x_0 = 1 ; x_{n+1} = -1 :$$

$$\max_{x_{i+1} \leq x \leq x_i} |\omega_n(x)| > \frac{C_1}{2^n} ; \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{C_2}{2^n}$$

figure 1

Chapitre 1

Chapitre Préliminaires

Notons :

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x)$$

le $n^{\text{ième}}$ Polynôme de Tchebicheff de première espèce.

Pour

$$\theta = \arccos x,$$

$$\tilde{T}_n(x) := \cos n\theta \text{ et } T_n(x) = \operatorname{Re}(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cos^n \theta + a_{n-2} \cos^{n-2} \theta + \dots + a_0$$

par conséquent

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

par contre, si n est impair alors

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x$$

En posant :

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}, \text{ alors } |\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Soit :

$\ell_k^{(n)}(x) \equiv$ les polynômes fondamentaux de Lagrange

$$\ell_k^{(n)}(x) := \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

i.e

$$\ell_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x)(x-x_k)} ; k = 0, \dots, n$$

où

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{k=n} (x - x_k)$$

Marcel Riez a montré la remarquable propriété suivante :

Théorème A :

Si $t_n(\theta)$ polynôme trigonométrique de degré n , atteint son maximum absolu en $\theta = \theta_0$ dans $[0, 2\pi]$, alors la distance entre les deux zéros de $t_n(\theta)$ qui encadre θ_0 est au moins $\frac{\pi}{n}$.

Suite à ce resultat Q.I.Rahman et A.O.Watt [2] ont montré :

Théorème B :

Soit

$$t_n(\theta) := \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (a_\nu \cos \nu \theta + b_\nu \sin \nu \theta)$$

a_ν et b_ν réels ou complexes, un polynôme de degré n dont tous les zéros sont réels et simples .

Soit

$$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{2n} < \theta_{2n+1} = \theta_1 + 2\pi$$

n'importe quel ensemble de $2n + 1$ zéros consécutifs de t_n et

$$M_j := \max_{\theta_j < \theta < \theta_{j+1}} |t_n(\theta)|, \quad 1 \leq j \leq 2n$$

Si M_j atteint son plus petit maximum en $j = k$, alors

$$\theta_{k+1} - \theta_k \leq \frac{\pi}{n}$$

corollaire [2], corollaire]

Soit

$$p(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=n} (x - x_\nu), \quad 1 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > -1$$

Notons θ_ν l'unique racine de

$$\cos \theta = x_\nu$$

dans l'intervalle

$$(0, \pi), 1 < \nu < n$$

et définissons

$$\theta_0 = -\theta_1; \theta_{n+1} = 2\pi - \theta_n$$

En outre, soit

$$\begin{aligned} m_0 &:= \max_{x_1 \leq x \leq 1} |p(x)|; \\ m_\nu &:= \max_{x_{\nu+1} \leq x \leq x_\nu} |p(x)|, 1 \leq \nu \leq n-1; \\ m_n &:= \max_{-1 \leq x \leq x_n} |p(x)|. \end{aligned}$$

Si $m_\mu \leq m_\nu$; ($0 \leq \nu \leq n$) alors

$$\theta_{\mu+1} - \theta_\mu \leq \frac{\pi}{n}$$

Chapitre 2

Résultats auxiliaires

2.1 Théorèmes obtenus

Théorème 2.1.1. *Soit*

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = -1, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

si

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{C_1}{2^n} \text{ et } \max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)| > \frac{C_2}{2^n};$$

$k = 0, \dots, n$

Alors

$$N_n(A, B) = \frac{B - A}{\pi} n + O[\log(n(B - A))], \quad 0 \leq A < B \leq \pi$$

Ce resultat est le meilleur possible.

Théorème 2.1.2. *Si* $|\ell_k^{(n)}(x)| < C_3$, *alors*

$$N_n(A, B) = \frac{B - A}{\pi} n + O[\log \log(n(B - A))], \quad 0 \leq A < B \leq \pi$$

Pour démontrer le théorème 2.1.1, nous allons utiliser les lemmes 2.1.1 et 2.1.2 suivants de P.Erdős [1] en améliorant les preuves.

lemme 2.1.1. Soit

$$x_0 = -1, x_{n+1} = 1, \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{i=n} (x - x_i)$$

Si

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| < \frac{C_1}{2^n} \text{ et } \max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)| < \frac{C_2}{2^n}, \quad k = 0, \dots, n \quad (2.1.1)$$

alors

$$\frac{C_4}{n} < \vartheta_{k+1} - \vartheta_k < \frac{C_5}{n}, \quad k = 0, \dots, n \quad (2.1.2)$$

Démonstration :

Nous allons d'abord montrer que le résultat est vrai pour $k = 1, \dots, n-1$ d'une part ; et d'autre part la preuve pour $k = 0$ et $k = n$.

Première partie :

$k = 1, \dots, n-1$, montrons que :

$$\frac{C_4}{n} < \vartheta_{k+1} - \vartheta_k < \frac{C_5}{n}$$

i.e $n(\vartheta_{k+1} - \vartheta_k)$ bornée.

Par l'absurde, supposons que $n(\vartheta_{k+1} - \vartheta_k)$ est non bornée :

$\exists K / n(\vartheta_{K+1} - \vartheta_K) > r(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = \infty$

Soient u et v symétriques par rapport au milieu de x_{K+1} et x_K et tels que

$$\arccos v - \arccos u = \frac{\pi + \epsilon}{n}, \quad \epsilon > 0 ; \quad u = \cos \alpha ; \quad v = \cos \beta$$

et soit

$$\Phi(x) := \omega_n(x) \frac{(x - u)(x - v)}{(x - x_K)(x - x_{K+1})}$$

si $v \leq x \leq u$ (α)

$$\frac{(x-v)(u-x)}{(x-x_{K+1})(x_K-x)} = \frac{(\cos\theta - \cos\beta)(\cos\alpha - \cos\theta)}{(\cos\theta - \cos\vartheta_{K+1})(\cos\vartheta_K - \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\theta+\beta}{2})\sin(\frac{\beta-\theta}{2})\sin(\frac{\alpha+\theta}{2})\sin(\frac{\theta-\alpha}{2})}{\sin(\frac{\theta+\vartheta_{K+1}}{2})\sin(\frac{\vartheta_{K+1}-\theta}{2})\sin(\frac{\vartheta_K+\theta}{2})\sin(\frac{\theta-\vartheta_K}{2})}$$

et les calculs montrent qu'il existe un réel C_6 tel que :

$$\frac{(x-v)(u-x)}{(x-x_{K+1})(x_K-x)} < \frac{C_6}{(r(n))^2}$$

soit

$$|\Phi(x)| < |\omega_n(x)| \frac{C_6}{(r(n))^2}$$

d'où

$$\max_{v \leq x \leq u} |\Phi(x)| < \max_{v \leq x \leq u} |\omega_n(x)| \frac{C_6}{(r(n))^2} \leq \max_{x_{K+1} \leq x \leq x_K} |\omega_n(x)| \frac{C_6}{(r(n))^2}$$

i.e

$$\max_{x_{K+1} \leq x \leq x_K} |\omega_n(x)| > \frac{(r(n))^2}{C_6} \max_{v \leq x \leq u} |\Phi(x)|$$

Pour $r(n)$ suffisamment grand, il est facile de voir que :

$$\vartheta_{K+1} - \arccos v > \frac{\pi}{n} \text{ et } \arccos u - \vartheta_K > \frac{\pi}{n}$$

Si

$$x \in (-1, x_{K+1}) \cup (x_K, 1) \quad (\beta),$$

sachant que $(x-u) + (x-v) = (x-x_K) + (x-x_{K+1})$, alors le produit $(x-u)(x-v)$ augmente si les facteurs tendent vers l'égalité. D'où

$$(x-u)(x-v) > (x-x_K)(x-x_{K+1}).$$

Donc pour les

$$x \in (-1, x_{K+1}) \cup (x_K, 1)$$

on a :

$$|\Phi(x)| > |\omega_n(x)|$$

Les zéros de $\Phi(x)$ sont les zéros de $\omega_n(x)$ où les points x_K et x_{K+1} sont remplacés par u et v . D'après ce qui précède on a :

$$\arccos v - \arccos u > \frac{\pi}{n}; \vartheta_{K+2} - \arccos v > \frac{\pi}{n}; \arccos u - \vartheta_{K-1} > \frac{\pi}{n}$$

Alors d'après le corollaire [2], corollaire], si $\max_{x_{i+1} < x \leq x_i} |\Phi(x)|$ prend sa plus petite valeur, elle ne peut être atteinte dans les intervalles :

$$(x_{K+2}, v); (v, u); (u, x_{K-1}).$$

Le point où le plus petit max est atteint appartient donc aux intervalles

$$(x_{i+1}, x_i); i \geq K+2 \text{ ou } i \leq K-2$$

donc, d'après le corollaire

$$\max_{v \leq x \leq u} |\Phi(x)| > \min_{j=0, \dots, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)|$$

comme

$$|\Phi(x)| > |\omega_n(x)|; x \in (-1, x_{K+1}) \cup (x_K, 1),$$

en utilisant la relation (2.1.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \max_{v \leq x \leq u} |\Phi(x)| &> \min_{j=0, \dots, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)| > \\ &\min_{j=0, \dots, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\omega_n(x)| > \frac{C_2}{2^n} \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{C_1}{2^n} > \max_{x_{K+1} \leq x \leq x_K} |\omega_n(x)| > \frac{(r(n))^2}{C_6} \max_{v \leq x \leq u} |\Phi(x)| > \frac{(r(n))^2 C_2}{C_6 2^n}$$

ce qui donne la contradiction pour $r(n)$ suffisamment grand. Donc

$$\vartheta_{K+1} - \vartheta_K < \frac{C_5}{n}.$$

Montrons que le resultat est vrai pour $K=0$ et $K=n$.

Pour :

$$K=0; \vartheta_1 - \vartheta_0 < \frac{C_5}{n}$$

Supposons le contraire, i.e $\vartheta_1 > \frac{r(u)}{n}$ avec $\overline{\lim} r(n) = \infty$. En adoptant la démonstration précédente, posons :

$$\Phi(x) := \omega_n(x) \frac{(x-u)}{(x-x_1)} ; \alpha = \arccos u = \frac{\pi + \epsilon}{n}, \epsilon > 0$$

alors, pour

$$u \leq x \leq 1 \ (\alpha'),$$

$$|\Phi(x)| < \frac{C_7 |\omega_n(x)|}{r(n)}, \text{ i.e } |\omega_n(x)| > \frac{r(n)}{C_7} |\Phi(x)|$$

d'où

$$\begin{aligned} \max_{u \leq x \leq 1} |\Phi(x)| &< \frac{C_7}{r(n)} \max_{u \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| \\ &\leq \frac{C_7}{r(n)} \max_{x_1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)|. \end{aligned}$$

Pour $r(n)$ suffisamment grand on a $\vartheta_1 - \arccos u > \frac{\pi}{n}$ alors d'après le corollaire :

$$\max_{u \leq x \leq 1} |\Phi(x)| > \min_{j \in \overline{0, n}} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)|$$

si

$$-1 < x < x_1$$

alors

$$u - x > x_1 - x \Rightarrow |\Phi(x)| = |\omega_n(x)| \frac{|x-u|}{|x-x_1|} > |\omega_n(x)|.$$

Par conséquent on a :

$$\max_{u \leq x \leq 1} |\Phi(x)| > \min_{j \in \overline{0, n}} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)| > \min_{j \in \overline{0, n}} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\omega_n(x)| >$$

d'où

$$\frac{C_1}{2^n} > \max_{x_1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x)| > \frac{r(n)}{C_7} \max_{u \leq x \leq 1} |\Phi(x)| > \frac{r(n)}{C_7} \frac{C_2}{2^n}$$

ce qui donne la contradiction car : $r(n) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour $K = n$,

montrons que :

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n < \frac{C_5}{n}; \vartheta_{n+1} = \pi$$

Supposons le contraire en posant :

$$n(\pi - \vartheta_n) > r(n) ; \overline{\lim} r(n) = \infty$$

et soit u tel que :

$$\alpha = \arccos u = \pi - \frac{\pi + \epsilon}{n} \text{ et } \Phi(x) := \omega_n(x) \frac{x-u}{x-x_n}$$

si

$$-1 \leq x \leq u$$

il existe une constante C_8 telle que : $|\frac{x-u}{x-x_n}| < \frac{C_8}{r(n)}$ d'où

$$|\Phi(x)| < \frac{C_8}{r(n)} |\omega_n(x)|$$

Donc

$$\max_{-1 \leq x \leq u} |\omega_n(x)| > \frac{r(n)}{C_8} \max_{-1 \leq x \leq u} |\Phi(x)|$$

---comme $\arccos u = \pi - \frac{\pi}{n}$ pour $r(n)$ assez grand et $\pi - \arccos u > \frac{\pi}{n}$ alors d'après le corollaire [[2], corollaire], le plus petit maximum de $|\Phi(x)|$ est atteint dans $(x_{n-1}, 1)$:

$$\max_{-1 \leq x \leq u} |\Phi(x)| > \min_{j=0, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)|$$

Si

$$x \in (x_{n-1}, 1)$$

on a alors : $x - u > x - x_n$; par conséquent $|\Phi(x)| > |\omega_n(x)|$ d'où

$$\max_{-1 \leq x \leq x_n} |\Phi(x)| > \min_{j=0, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)| > \min_{j=0, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\omega_n(x)|$$

Donc

$$\frac{C_1}{2^n} > \max_{-1 \leq x \leq x_n} |\omega_n(x)| > \frac{r(n)}{C_8} \max_{-1 \leq x \leq u} |\Phi(x)| >$$

$$\frac{r(n)}{C_8} \min_{j=0, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\Phi(x)| >$$

$$\frac{r(n)}{C_8} \min_{j=0, n} \max_{x_{j+1} \leq x \leq x_j} |\omega_n(x)| > \frac{r(n) C_2}{C_8 2^n}$$

ce qui donne la contradiction car $\overline{\lim} r(n) = \infty$; ce qui achève la démonstration de la première partie. Pour la deuxième partie, il faut démontrer la deuxième inégalité :

$$\frac{C_1}{n} < \vartheta_{k+1} - \vartheta_k ; k = 0, \dots, n$$

Pour ce faire, il faut adopter les techniques de démonstration de la première partie, en supposant :

$$\exists K / \vartheta_{k+1} - \vartheta_k < \frac{r(n)}{n} ; \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 0 .$$

De par le lemme 2.1.1, nous obtenons la conséquence suivante :

corollaire 2.1.1. Soit

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i); \quad x_0 = 1, x_{n+1} = -1 .$$

Si (2.1.1) et (2.1.2) sont vérifiés alors

$$\frac{C_9}{n} (1 - x_k^2)^{\frac{1}{2}} < x_k - x_{k+1} < \frac{C_{10}}{n} (1 - x_k^2)^{\frac{1}{2}}; \quad k = 1, \dots, n - 1$$

démonstration

$$x_k - x_{k+1} = (\vartheta_k - \vartheta_{k+1})(-\sin \vartheta')$$

or d'après le lemme 2.3

$$\frac{C_4}{n} \sin \vartheta' < x_k - x_{k+1} = (\vartheta_{k+1} - \vartheta_k)(\sin \vartheta') < \frac{C_5}{n} \sin \vartheta'$$

or on peut trouver un réel d tel que $\sin \vartheta' = d \sin \vartheta_k$ donc

$$\frac{C_4}{n} d \sin \vartheta_k < x_k - x_{k+1} < \frac{C_5}{n} d \sin \vartheta_k$$

par conséquent

$$\frac{C_9}{n} (1 - x_k^2)^{\frac{1}{2}} < x_k - x_{k+1} < \frac{C_{10}}{n} (1 - x_k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, \dots, n - 1 .$$

A partir du lemme 2.1.1 et du corollaire, nous avons le lemme 2.1.2 suivant :

lemme 2.1.2. Si la relation (2.1.1) est vérifiée, alors pour $-1 \leq x \leq 1$, on a :

$$|\ell_k^{(n)}(x)| < C_{11} \frac{(1-x_k^2)^{\frac{1}{2}}}{|x-x_k|}$$

Démonstration :

$$\ell_k^{(n)}(x) := \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)} ; k = \overline{1, n}$$

soit

$$\Psi(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \Psi(x) = \omega_n'(x_k)$$

supposons sans perte de généralité, qu'on a la situation suivante : (voir figure) ?

$$|\omega_n'(x_k)| = |\Psi(x_k)| \geq |\Psi(x)| ; \forall x / : x_{k+1} \leq x \leq x_k$$

d'où

$$|\omega_n'(x_k)| \geq |\Psi(x)| = \left| \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)} \right| > \left| \frac{\omega_n(x)}{(x_k-x_{k+1})} \right|$$

donc

$$|\omega_n'(x_k)| > \frac{\max_{x_{k+1} \leq x \leq x_k} |\omega_n(x)|}{x_k - x_{k+1}} > \frac{C_2}{2^n} \frac{n}{C_{10}(1-x_k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

en utilisant (2.1.1) et le corollaire du lemme (2.1.1). D'où le résultat escompté.

2.2 Démonstration du théorème 2.1.1

Sans perte de généralité prenons $[A, B] = [0, \vartheta]$, ϑ proche de 0. Montrons que :

$$\frac{\vartheta}{\pi} n - c_1 \log(n\vartheta) < N_n(0, \vartheta).$$

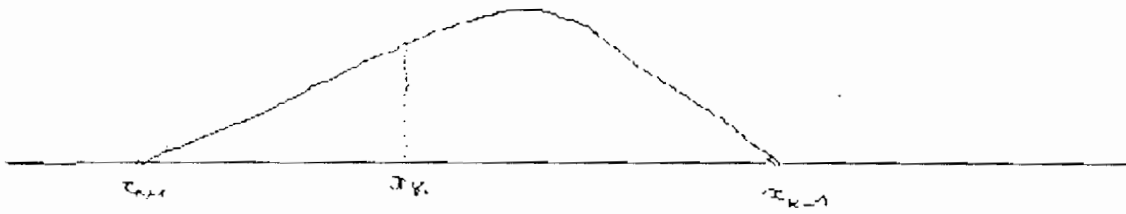


figure 2

Supposons le contraire i.e

$N_n(0, \vartheta) < \frac{\vartheta}{\pi}n - r(n) \log(n\vartheta)$; avec $\overline{\lim} r(n) = \infty$.

Soit ϵ tel que

$$\cos(\vartheta - \epsilon) = \cos\vartheta + \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}$$

On obtient alors :

$$\epsilon = \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{\log(n\vartheta)}{n} + O\left(\left(\frac{\log(n\vartheta)}{n}\right)^2\right).$$

Considérons le polynôme $g(x)$ dont les racines sont comme suit :

Dans

$$\left(-1, \cos\vartheta + \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}\right) \quad (2.2.1)$$

$g(x)$ a les mêmes racines que $T_{n-1}(x)$; Polynôme de Tchebisheff d'ordre $n-1$.

Aux points

$$\cos\vartheta + \left(\frac{3}{2}\right)^r \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n} ; r = 1, \dots, s \quad (2.2.2)$$

$g(x)$ a des zéros de multiplicité $[\alpha r(n)]$; partie entière de $\alpha r(n)$ où α sera spécifié , et s est tel que

$$\cos\vartheta + \left(\frac{3}{2}\right)^s \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n} \leq 1 < \cos\vartheta + \left(\frac{3}{2}\right)^{s+1} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n} \quad (2.2.3)$$

Enfin s'annule $g(x)$ aux zéros de $\omega_n(x)$ dans

$$(\cos\vartheta, 1) \quad (2.2.4)$$

Dans $\left(-1, \cos\vartheta + \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}\right)$, le nombre de zéros de $T_{n-1}(x)$ ne dépasse pas λ_1 avec

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \vartheta + \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{\log(n\vartheta)}{n} \right) (n-1) + 1$$

en effet

$$\lambda_1 < n - \frac{\vartheta}{\pi}n + \frac{\vartheta}{\pi \sin\vartheta} \log(n\vartheta) + 1 .$$

D'après (2.2.3) .

$$\left(\frac{3}{2}\right)^s \leq \frac{n}{\vartheta \log(n\vartheta)} (1 - \cos\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} \frac{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\log(n\vartheta)} = \frac{n \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\frac{\vartheta}{2} \log(n\vartheta)} \leq \frac{n}{\log(n\vartheta)} \frac{\vartheta}{2} < \frac{n\vartheta}{\log(n\vartheta)}$$

D'où

$$s \log \frac{3}{2} < \log(n\vartheta)$$

$$s < \frac{\log(n\vartheta)}{\log \frac{3}{2}}$$

Le degré de $g(x)$ dans $(-1, 1)$ ne dépasse pas :

$$\lambda = n + \frac{\vartheta \log(n\vartheta)}{\pi \sin \vartheta} + 1 + \alpha r(n) \frac{\log(n\vartheta)}{\log \frac{3}{2}} - r(n) \log(n\vartheta).$$

si

$$\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2},$$

$$\lambda = n + \frac{\vartheta \log(n\vartheta)}{\pi \sin \vartheta} + 1 - \frac{1}{2} r(n) \log(n\vartheta) \leq n + \frac{1}{2} \log(n\vartheta) + 1 - \frac{1}{2} r(n) \log(n\vartheta) < n - 1$$

si $r(n)$ est suffisamment grand. Par le théorème de M. Riesz, $g(x)$ atteint son maximum absolu dans $(\cos \vartheta + \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}, 1)$. Soit x_0 ce point, alors il existe un r_0 tel que

$$\cos \vartheta + \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n} < x_0 < \cos \vartheta + \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0+1} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}$$

Posons

$$q := \cos \vartheta + \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}$$

et soit $g_1(x) = \frac{g(x)}{(x-q)^p}$ où $p = [\alpha r(n)] = [\frac{1}{2} \log \frac{3}{2} r(n)]$. g_1 est un polynôme de degré inférieur à $n - 1$. Posons

$$u_t := \cos \vartheta - t \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}$$

si $x \in [u_{t+1}, u_t]$, alors

$$|x - q| \geq (t+1) \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}$$

et

$$|x_0 - q| < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n}$$

D'où

$$|g_1(x_0)| = \left| \frac{g(x_0)}{(x_0 - q)^p} \right| \geq \left| \frac{g(x)}{(x_0 - q)^p} \right| = |g_1(x)| \left| \frac{x - q}{x_0 - q} \right|^p > |g_1(x)| (2(t+1))^p :$$

D'autre part, par l'interpolation de Lagrange on a :

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^n g_1(x_k) l_k^{(n)}(x) ;$$

x_k zéros de $\omega_n(x)$. Alors :

$$|g_1(x_0)| \leq \sum_{k=1}^n |g_1(x_k)| |l_k^{(n)}(x_0)| = \sum_{x_k < \cos \vartheta} |g_1(x_k)| |l_k^{(n)}(x_0)|$$

D'où

$$1 \leq \sum_{t \geq 0} \sum_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \left| \frac{g_1(x_k)}{g_1(x_0)} \right| \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)|$$

Soit

$$1 \leq \sum_{t \geq 0} \frac{M_n(u_{t+1}, u_t) \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)|}{\{2(t+1)\}^p}$$

où $\sum_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} = M_n(u_{t+1}, u_t)$ est le nombre des x_k dans $[u_{t+1}, u_t]$.
Soit U_T la subdivision la plus proche de -1 . Alors

$$1 \leq \sum_{t \geq 0} \frac{M_n(u_{t+1}, u_t) \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)|}{\{2(t+1)\}^p} = \sum_{0 \leq t \leq T-2} \frac{M_n(u_{t+1}, u_t) \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)|}{\{2(t+1)\}^p} + \sum_{x_k < u_{T-1}} \frac{M_n(u_{t+1}, u_t) \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)|}{\{2(t+1)\}^p} \\ =: \Sigma_1 + \Sigma_2 .$$

Posons

$$\delta := \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta \frac{\log(n\vartheta)}{n} .$$

Alors, par le corollaire 2.1.1 et le lemme 2.1.2, on obtient :

$$M_n(u_{t+1}, u_t) \leq \frac{n\delta}{C_{11}} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}} < \frac{n\delta}{C_{11}} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-u_t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-u_{t+1}^2}} \right\}$$

on obtient :

$$x^{n-m} = (x^{2n} + 1) \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{e^{i(n-m)\theta_k}}{(x - e^{i\theta_k}) 2n e^{i(2n-1)\theta_k}} \quad (4.4.1)$$

et en posant $x = 1$ on a :

$$1 = 2 \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{e^{i(n-m)\theta_k}}{2n e^{i(2n-1)\theta_k} (1 - e^{i\theta_k})} \quad (4.4.2)$$

En dérivant (5.1.1) , on obtient :

$$(n-m)x^{n-m-1} = 2nx^{2n-1} \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{e^{i(n-m)\theta_k}}{2n(x - e^{i\theta_k}) e^{i(2n-1)\theta_k}} - (1+x^{2n}) \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{e^{i(n-m)\theta_k}}{2n e^{i(2n-1)\theta_k} (x - e^{i\theta_k})^2}$$

en posant $x = 1$, et d'après (5.1.2) :

$$m = 2 \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{e^{i(n-m)\theta_k}}{2n e^{i(2n-1)\theta_k} (1 - e^{i\theta_k})^2}$$

d'où le resultat après avoir effectué quelques transformations .

4.4.2 Formule d'interpolation de M.Riesz

proposition 4.4.1. Soit t_n un polynôme trigonométrique de degré n défini par :

$$t_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu \cos \nu \theta + b_\nu \sin \nu \theta$$

si,

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, 2n$$

Alors :

$$t'_n(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} t_n(\theta + \theta_k). \quad (4.4.3)$$

Démonstration :

Soit $a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$, le terme général de $t_n(\theta)$, alors le terme général de $t_n(\theta + \theta_k)$ est

$$a_\nu \cos \nu(\theta + \theta_k) + b_\nu \sin \nu(\theta + \theta_k)$$

après avoir développé

$$\cos \nu(\theta + \theta_k) \text{ et } \sin \nu(\theta + \theta_k),$$

la partie droite de l'expression (5.2.1) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \{a_\nu \cos \nu \theta \cos \nu \theta_k - a_\nu \sin \nu \theta \sin \nu \theta_k + b_\nu \sin \nu \theta \cos \nu \theta_k + b_\nu \sin \nu \theta_k \cos \nu \theta\} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \left[\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} a_\nu \{ \cos \nu \theta \cos \nu \theta_k - \sin \nu \theta \sin \nu \theta_k \} + \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} b_\nu \{ \sin \nu \theta \cos \nu \theta_k + \sin \nu \theta_k \cos \nu \theta \} \right] \\ &= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} -a_\nu \nu \sin \nu \theta + b_\nu \nu \cos \nu \theta \\ &= t'_n(\theta) \end{aligned}$$

Chapitre 5

Inégalités de Bernstein :

Commençons par donner les théorèmes suivants, utiles pour la suite :

Théorème de Rouché (voir (4), page 211)

Soit Ω un sous ensemble ouvert connexe non vide du plan complexe et $H(\Omega)$, la classe des fonctions holomorphes dans Ω .

Supposons que f et $g \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, et

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ si } |z - a| = r.$$

Les fonctions f et g ont même nombre de zéros dans $D(a,r)$ (à condition de les compter suivant leur ordre de multiplicité).

Théorème de Gauss-Lucas [voir [5], p29]

Si z_1, \dots, z_n sont les zéros de $p(z)$ dans un domaine convexe D , alors les zéros de $p'(z)$ sont également dans D ; et tout zéro ζ , de $p'(z)$ s'écrit sous la forme :

$$\zeta = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n, \text{ avec } \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1.$$

Théorème de Hurwitz [voir [6], p119]

Soit $f_n(z)$ une suite de fonctions analytiques dans D . on suppose que la frontière de D est une courbe fermée simple et $f_n(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément sur D avec $f(z)$ non identiquement nulle. Soit z_0 un point intérieur de D , alors

z_0 est un zéro de $f(z)$ si et seulement si, z_0 est limite de la suite des zéros des fonctions $f_n(z)$

5.1 Inégalité de Bernstein et Extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques

5.1.1 Inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques :

Théorème 5.1.1.

Si $p(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\nu} z^{\nu}$ / $|p(z)| \leq 1$ pour $|z| = 1$ alors $|p'(z)| \leq n |z|^{n-1}$ pour $|z| \geq 1$

Démonstration :

En effet, considérons le polynôme

$$P(z) := p(z) + \lambda z^n, \text{ t.q. } |\lambda| > 1$$

Sachant que :

$$|p(z)| \leq 1 \text{ et } |\lambda z^n| = |\lambda| > 1$$

alors en appliquant le théorème de Rouché, $P(z)$ a tous ses zéros dans le disque unité. D'après le théorème de Gauss-Lucas

$$P'(z) = p'(z) + n\lambda z^{n-1}$$

a aussi tous ses zéros dans le disque unité

$$\text{i.e. } P'(z) \neq 0 ; \text{ pour } |z| \geq 1 \implies |p'(z)| \leq n |z|^{n-1}$$

5.1.2 Extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes algébriques :

Théorème 5.1.2.

Si $p(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\nu} z^{\nu}$ / $|p(z)| \leq 1$ pour $|z| = 1$ et $q(z) := z^n \overline{p(\frac{1}{z})}$

alors

$$|p'(z)| + |q'(z)| \leq n \text{ pour } |z| = 1$$

Démonstration

Soit

$$P(z) := p(z) + \lambda z^n, \text{ t.q. } |\lambda| > 1 \text{ et } Q(z) = \overline{z^n(P(\frac{1}{\bar{z}}))}$$

$$Q(z) = \overline{z^n P(\frac{1}{\bar{z}})} = \overline{z^n p(\frac{1}{\bar{z}}) + \lambda z^n} =$$

$$|Q'(z)| = |q'(z)|$$

considérons la fonction : $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. $Q(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur du disque unité, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans $|z| \leq 1$,

$$|P(e^{i\theta})| = |Q(e^{i\theta})| \Rightarrow |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = 1 \text{ pour } |z| = 1.$$

Par le principe du module maximum :

$$|f(z)| \leq 1 \text{ pour } |z| \leq 1$$

soit

$$|Q(z)| \leq |P(z)| \text{ pour } |z| \geq 1,$$

en remplaçant z par $\frac{1}{\bar{z}}$. Alors

$$Q(z) - \mu P(z)$$

aura ses zéros dans

$$|z| \leq 1 \text{ si } |\mu| > 1.$$

En effet

$$|Q(z)| \leq |P(z)| \text{ pour } |z| \geq 1 \Rightarrow |Q(z)| < |\mu| |P(z)|$$

ce qui fait que

$$Q(z) - \mu P(z) = 0 \text{ pour } |z| \geq 1$$

est impossible.

D'après le théorème de Gauss-Lucas, sachant que $Q(z) - \mu P(z)$ a tous ses zéros dans $|z| \leq 1$, alors $Q'(z) - \mu P'(z)$ a aussi tous ses zéros dans $|z| \leq 1$

Par conséquent

$$|Q'(z)| \leq |P'(z)| \text{ pour } |z| \geq 1$$

$$| - | p'(z) | + | \lambda | n | z |^{n-1} | < | p'(z) + \lambda n z^{n-1} | < | \overline{p'(z)} | + | \lambda | n | z |^{n-1}$$

comme

$$| p'(z) | \leq n | z |^{n-1}, | \lambda | > 1 \text{ et } | z | \geq 1,$$

on peut choisir :

$$\lambda / | p'(z) + \lambda n z^{n-1} | = | \lambda | n | z |^{n-1} - | p'(z) |$$

D'autre part

$$| Q'(z) | \leq | P'(z) | + | p'(z) + \lambda n z^{n-1} |$$

or $| Q'(z) | = | q'(z) |$

$$d'où $| q'(z) | \leq | \lambda | n | z |^{n-1} - | p'(z) | \Leftrightarrow | p'(z) | + | q'(z) | < | \lambda | n | z |^{n-1}, | z | > 1, | \lambda |$$$

Donc pour

$$\lambda \rightarrow 1, | z | = 1$$

on a

$$| p'(z) | + | q'(z) | \leq n, \quad (5.1.1)$$

d'où le resultat.

5.2 Inégalité de Bernstein et extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques

5.2.1 Inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques

Théorème 5.2.1. Si

$$t_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu \cos \nu \theta + b_\nu \sin \nu \theta$$

est un polynôme trigonométrique de degré n tel que $| t(\theta) | \leq 1, t(\theta)$ réel pour θ réel, alors $| t'_n(\theta) | \leq n$.

et

$$\begin{aligned} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)| &< \frac{C_{12}}{n\delta} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \sqrt{1 - u_t^2} \\ &< \frac{C_{13}}{n\delta} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \{ \sqrt{1 - u_t^2}, \sqrt{1 - u_{t+1}^2} \} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \sum_{0 \leq t \leq T-2} \frac{M_n(u_{t+1}, u_t) \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} |l_k^{(n)}(x_0)|}{\{2(t+1)\}^p} \\ &< \sum_{0 \leq t \leq T-2} \frac{\frac{n\delta}{C_{11}} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-u_t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-u_{t+1}^2}} \right\} \frac{C_{13}}{n\delta} \max_{u_{t+1} \leq x_k \leq u_t} \{ \sqrt{1-u_t^2}, \sqrt{1-u_{t+1}^2} \}}{\{2(t+1)\}^p} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Pour $t = 0 \dots T-2$, on a $\delta = \left(\frac{3}{2}\right)^{r_0} \vartheta^{\frac{\log(n\vartheta)}{n}} \leq 1 - |u_{t+1}|$ d'où :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - u_t^2} &= \sqrt{1 - (u_{t+1} + \delta)^2} < \sqrt{1 - u_{t+1}^2 + 2|u_{t+1}|\delta} \\ &\leq \sqrt{1 - u_{t+1}^2} \sqrt{1 + \frac{2|u_{t+1}|}{1 + |u_{t+1}|}} < \sqrt{2} \sqrt{1 - u_{t+1}^2} \end{aligned}$$

Alors d'après (2.2.5) on a :

$$\Sigma_1 < \frac{C\sqrt{2}}{2^p} \sum_{t \geq 0} \frac{1}{(t+1)^p} = \frac{A}{2^p} < \frac{1}{2}$$

pour p suffisamment grand.

$$\Sigma_2 := \sum_{x_k \leq u_{t-1}, t \geq T-1} \frac{M_n(u_{t+1}, u_t) \max_{x_k \leq u_{T-1}} |l_k^{(n)}(x_0)|}{\{2(t+1)\}^p}$$

d'après le lemme 2.1.2

$$\max_{-1 \leq x_k \leq u_{T-1}} |l_k^{(n)}(x_0)| < \frac{C_{14}}{n} \max_{-1 \leq x_k \leq u_{T-1}} \frac{(1 - x_k^2)^{\frac{1}{2}}}{|x_0 - x_k|} < \frac{C_{14}}{n} \frac{1}{|x_0 - u_{T-1}|}$$

Donc

$$\Sigma_2 < \frac{B}{2^p T^p} < \frac{B}{2^p} < \frac{1}{2}$$

pour p suffisamment grand. On obtient alors la contradiction :

$$1 < \Sigma_1 + \Sigma_2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

D'où la conclusion :

$$\frac{\vartheta}{\pi} n - c_1 \log(n\vartheta) \leq N_n(0, \vartheta) .$$

L'autre inégalité :

$$N_n(0, \vartheta) < \frac{\vartheta}{\pi} n + c_2 \log(n\vartheta)$$

s'obtient en procédant de la même façon que la précédente.

RÉMARQUE :

La démonstration du théorème 2.1.2 s'obtient en adoptant les mêmes techniques que le théorème 2.1.1. Seulement on choisira $g(x)$ tel qu'il aura des racines d'ordres de multiplicité $[cr(n)\log n]$.

L'exemple suivant montre que l'erreur dans le théorème 2.1.1 est la meilleure possible :

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} ;$$

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{i} ;$$

$$\vartheta_l = \frac{\pi}{2} - k \frac{\pi}{n} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{i=l} \frac{1}{i} ;$$

$$k, l \text{ sont tels que } \vartheta_k < \pi - \frac{1}{n^2} ; \vartheta_l > \frac{1}{n^2}$$

On voit que le nombre de ϑ_i est

$$n + O(1)$$

Deuxième partie

Propriétés extrêmes des fonctions
entières de type exponentiel.

Chapitre 3

Chapitre préliminaire.

3.1 Ordre et type des fonctions entières .

Posons :

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Définition 3.1.1. Soit f une fonction entière . f est dite d'ordre fini s'il existe :

$$\alpha > 0 / M_f(r) < e^{r^\alpha}, r > R_\alpha \quad (3.1.1)$$

Exemple 3.1.1. $f(z) = e^z$; $M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)| = e^r$

Exemple 3.1.2. $f(z) = e^{z^2}$; $M_f(r) = e^{r^2}$

si (3.1.1) n'est vérifiée pour aucun α alors f est dite fonction entière d'ordre infini comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.1.3. $f(z) = e^{z^2}$

Définition 3.1.2. soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini. Alors l'ordre ρ de cette fonction est l'infimum des α pour lesquels (3.1.1) a lieu :

$$\rho = \inf\{\alpha\}$$

Exemple 3.1.4. $f(z) = e^z$, $M_f(r) < e^{r^\alpha} \forall \alpha > 1 \Rightarrow \rho = 1$

Soit ρ l'ordre de f .

$$\forall \epsilon > 0 ; (3.1.1) \Rightarrow M_f(r) < e^{r^{(\rho+\epsilon)}} ,$$

à partir d'un certain rang. Alors

$$\ln \ln M_f(r) < (\rho + \epsilon) \ln(r)$$

d'où

$$\frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln(r)} < \rho + \epsilon \quad (*)$$

Puisque

$$\rho = \inf\{\alpha\},$$

alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_n / M_f(r_n) > e^{r_n^{\rho-\epsilon}}$$

d'où

$$\frac{\ln \ln M_f(r_n)}{\ln(r_n)} > \rho - \epsilon \quad (**)$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow \rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln(r)}$$

Cette formule permet de trouver l'ordre d'une fonction entière d'ordre fini.

Exemple 3.1.5. $f(z) = \sin z$; alors

$$M_f(r) = e^r \left(\frac{1 - e^{-2r}}{2} \right) \Rightarrow \rho = 1$$

Définition 3.1.3. Une fonction entière d'ordre $\rho / 0 < \rho < +\infty$ est de type fini si :

$$\exists A > 0 / M_f(r) < e^{Ar^\rho} \quad (3.1.2)$$

à partir d'un certain rang.

Définition 3.1.4. On appelle type τ d'une fonction entière d'ordre fini ρ , l'infimum des A tel que (3.1.2) est vérifiée :

$$\tau := \inf(\{A\})$$

il est donc facile de montrer que :

$$\tau := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$$

Définition 3.1.5. une fonction entière f est dite de type exponentiel τ si :

$$\forall \epsilon > 0, |f(z)| = O(e^{(\tau+\epsilon)|z|}); |z| \rightarrow +\infty$$

Plus généralement si cette relation a lieu dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ non borné où f est holomorphe, alors f est dite de type exponentiel τ dans Ω .

Pour la classe des fonctions entières de type exponentiel τ , on montre facilement que $0 < \rho \leq 1$

Exemple 3.1.6. $f(z) = e^z$; $|f(z)| \leq e^{|z|} < e^{(1+\epsilon)|z|}$,
 e^z est donc une fonction entière de type exponentiel 1.

Exemple 3.1.7.

$$t_n(z) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} a_\nu e^{i\nu z}$$

est une fonction-entière de type exponentiel n , par contre

$$f(z) = e^{z^2} / \rho = 2; \tau = 1$$

n'appartient pas à la classe des fonctions entières de type exponentiel.

Chapitre 4

Théorème de Phragmen-Lindelöf et formules d'interpolation

4.1 Théorème de Phragmen-Lindelöf

Soit le secteur :

$$S = \{z \in \mathbb{C} / |\theta - \theta_0| < \frac{\pi}{2\alpha} ; \theta_0 \text{ fixé}, \theta = \arg z\}.$$

Choisissons une fonction $\omega(z)$ telle que $f(z)[\omega(z)]^\delta$, soit continue dans le secteur fermé \bar{S} pour tout $\delta > 0$ et $f(z)$ une fonction holomorphe sur S . Puisque pour la suite nous voulons que :

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} f(z)[\omega(z)]^\delta$$

existe alors il est évident que :

$$\omega(z)_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Une forme simple de ces types de fonctions est :

$$\omega(z) = e^{-\epsilon z^\gamma} ; \epsilon > 0 \quad | \arg z | \leq \frac{\pi}{2\alpha} , \gamma > 0$$

En effet , posons $\theta_0 = 0$ pour la suite .

$$| \omega(z) | = e^{\operatorname{Re}(-\epsilon z^\gamma)} \rightarrow 0 ; \text{ si } \cos(\gamma\theta) > 0$$

$$\cos(\gamma\theta) \geq \epsilon_0 > 0 ; |\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha} \text{ et } |\gamma\theta| \leq \frac{\gamma\pi}{2\alpha} < \frac{\pi}{2} \text{ si } \gamma < \alpha$$

Donc la fonction

$$\omega(z) = e^{-cz^\gamma} \rightarrow 0 \text{ et } |\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha} \text{ avec } \gamma < \alpha$$

Théorème 4.1.1. de Phragmen-Lindelöf

Soit $f(z)$, une fonction holomorphe sur S , continue sur le secteur fermé et vérifiant :

1) $|f(z)| \leq M$ sur la frontière.

2) $f(re^{i\theta}) = O(e^{r^\beta})$ où $\beta < \alpha$, uniformément par rapport à θ , pour une suite $\{r_n\} \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$

Alors :

$$|f(z)| \leq M \text{ sur } S$$

Démonstration :

Soit $F(z) := e^{-cz^\gamma} f(z)$ où $\beta < \gamma < \alpha$ et

$$c > 0; \theta = \arg z$$

$$|F(z)| = e^{-cRe(z^\gamma)} |f(z)| = e^{-c r^\gamma \cos(\gamma\theta)} |f(z)|$$

Sur la frontière :

$$|F(z)| \leq |f(z)| \leq M$$

Sur l'arc

$$z = r_n e^{i\theta}; \quad \frac{-\pi}{2\alpha} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\alpha}$$

$$|F(z)| = e^{-c r_n^\gamma \cos(\gamma\theta)} |f(r_n e^{i\theta})|$$

$$< C e^{-c r_n^\gamma \cos(\gamma \frac{\pi}{2\alpha})} e^{r_n^\beta} \rightarrow 0; \beta < \gamma < \alpha; \text{ pour } r_n \rightarrow \infty$$

donc F est bornée sur l'arc.

Puisque r_n peut être choisi arbitrairement grand, nous avons : $|F(z)| \leq M$ sur S donc $|f(z)| \leq M e^{c r^\gamma}$ sur S . En faisant tendre $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$|f(z)| \leq M \text{ sur } S.$$

4.2. Fonction indicatrice de Phragmen-Lindelöf et Propriétés

Définition

La fonction :

$$h_f(\theta) : \theta \rightarrow \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r},$$

appelée fonction indicatrice de Phragmen-Lindelöf de la fonction entière f de type exponentiel dans le secteur :

$$\{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \theta_1 \leq \theta = \arg(z) \leq \theta_2\},$$

caractérise la dépendance de la croissance de f , en fonction de la direction suivant laquelle $z \rightarrow \infty$.

Propriétés de la Fonction indicatrice de Phragmen-Lindelöf

propriété 4.2.1. *Propriété de convexité trigonométrique* : Soit :

$$\{z \in \mathbb{C} / \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

tel que :

$$0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$$

et

$$h_f(\theta_1) \leq h_1 ; h_f(\theta_2) \leq h_2$$

alors

$$\forall \theta \in (\theta_1, \theta_2), h_f(\theta) \leq \frac{h_1 \sin(\theta_2 - \theta) + h_2 \sin(\theta - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

propriété 4.2.2. si $h_f(\theta_0) < 0$ alors $f(z)$ est bornée sur le rayon $z = re^{i\theta_0}$ par conséquent $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta_0})|}{r} < 0$

En effet

$$\frac{\log |f(re^{i\theta_0})|}{r} < -\epsilon, \epsilon > 0 \Rightarrow |f(re^{i\theta_0})| < e^{-\epsilon r}.$$

conclusion si $h_f(\theta_0) < 0$, alors $f(re^{i\theta_0})$ est bornée.

propriété 4.2.3. si $h_f(\theta_0) > 0$, alors, $f(re^{i\theta_0})$ tend vers l'infini

$$\frac{\log |f(re^{i\theta_0})|}{r} > \epsilon, \epsilon > 0 \Rightarrow f(z) \rightarrow \infty$$

donc si $h_f(\theta_0) > 0$ alors $f(re^{i\theta_0})$ y est non bornée.

propriété 4.2.4. si $h_f(\theta_0) = 0$ alors $f(z)$ peut y être bornée ou non.

Exemple 4.2.1.

$$f(z) = e^{iz} : \rho = 1, h_f(0) = 0$$

$$|f(z)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \Rightarrow f(z) \text{ est bornée pour } \theta = 0$$

Exemple 4.2.2.

$$f(z) = e^{iz^2+z}$$

en prenant $\theta_0 = 0$, sachant $\rho = 2$, on obtient $h_f(0) = 0$ et

$$|f(z)| \rightarrow \infty, \text{ lorsque } r \rightarrow \infty, \theta = 0 \Rightarrow f(z)$$

n'est pas bornée pour $\theta = 0$

propriété 4.2.5. si f et g sont deux fonctions entières de même type τ alors :

$$h_{f.g}(\theta) \leq h_f(\theta) + h_g(\theta)$$

et

$$h_{f+g}(\theta) \leq \max\{h_f(\theta); h_g(\theta)\}$$

la preuve découle de la définition de $h_f(\theta)$.

4.3 Formule d'interpolation des fonctions entières de type exponentiel :

Avant d'énoncer la formule sous forme de théorème, démontrons le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. Si f est une fonction entière de type exponentiel τ , alors

$$|f(x + iy)| \leq e^{\tau y} \|f\|_{\infty}, \quad 0 \leq y < \infty;$$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|.$$

Démonstration :

Si $|f|$ est non bornée sur l'axe des réels, le résultat est évident : par conséquent supposons que $M := \|f\|_{\infty} < \infty$. Pour chaque $T > \tau$ la fonction

$$F_T(z) := e^{iTz} f(z)$$

est bornée par M sur l'axe réel positif et par un certain nombre N , atteint, sur l'axe réel pour l'axe imaginaire positif (puisque $F_T(iy) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow \infty$). Grâce au théorème de Phragmen-Lindelöf $|F_T(z)| \leq \max M, N$ dans le premier quadrant et de manière analogue $|F_T(z)| \leq \max M, N$ dans le second quadrant. Puisque $|F_T(z)| = N$ en un certain point de l'axe imaginaire positif, nous devons avoir $N < M$. Sinon $|F_T(z)|$ prendrait sa valeur maximale en un point intérieur du demi-plan supérieur et serait constante et égale à M . Pour tout $T > \tau$, nous pouvons faire tendre T vers τ pour obtenir le résultat.

Théorème 4.3.2. Si f est une fonction entière de type exponentiel τ bornée sur l'axe réel, alors

$$f'(x) = \frac{4\tau}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} f\left(x + \frac{(2k+1)\pi}{2\tau}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Démonstration :

Soit

$$F(z) := \frac{f(z)}{z^2 \cos z}$$

F est méromorphe et ses pôles sont aux points, multiples impaires de $\frac{\pi}{2}$ et en 0. Si

$$\zeta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

alors :

$$\operatorname{res}_{z=\zeta} F(z) = (-1)^{k+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}$$

et

$$\operatorname{res}_{z=0} F(z) = f'(0).$$

Soit Γ_n le contour carré de sommets :

$$n\pi(\pm 1, \pm i)$$

alors par le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} F(z) dz = f'(0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f((2k+1)\frac{\pi}{2})}{(2k+1)^2} \frac{4}{n^2}$$

il est facile de voir que

$$|\cos z| > \frac{1}{3} e^{|y|} \text{ sur } \Gamma_n.$$

En utilisant le théorème dessus nous avons :

$$|F(z)| = \frac{|f(z)|}{z^2 |\cos z|} \leq \frac{e^{\tau y} \|f\|_{\infty}}{|z|^2 |\cos z|} < \frac{e^{\tau y} \|f\|_{\infty} \cdot 3}{|z|^2 e^{|y|}} = \frac{C}{|z|^2}$$

avec $z \in \Gamma_n$ par conséquent,

$$\int_{\Gamma_n} F(z) dz \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

Ainsi, obtient-on :

$$f'(0) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} f((2k+1)\frac{\pi}{2})$$

en utilisant $f(z+x_0)$, on obtient :

$$f'(x_0) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} f(x_0 + (2k+1)\frac{\pi}{2}); \forall x_0 \in R, \tau = 1$$

en considérant

$$z \mapsto f\left(\frac{z}{\tau}\right)$$

lorsque f est de type exponentiel τ ; d'où la formule . .

4.4 Formule d'interpolation de Marcel Riesz pour les polynômes trigonométriques :

4.4.1 Résultats Auxiliaires

lemme 4.4.1. Soit t_n le polynôme trigonométrique de degré n défini par :

$$t_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \cos \nu \theta + b_\nu \sin \nu \theta$$

si

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 0, \dots, 2n \text{ sur } [0, 2\pi]$$

Alors les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \sin(m\theta_k) = m ;$$

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2 \sin^2 \frac{\theta_k}{2}} \cos(m\theta_k) = 0, m \leq n$$

Démonstration :

En effet les points

$$x_k = e^{i\theta_k}$$

étant les zéros de

$$\psi(x) = x^{2n} + 1$$

on a la formule d'interpolation de Lagrange suivante :

$$p(x) = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{p(e^{i\theta_k}) \psi(x)}{(x - e^{i\theta_k}) \psi'(e^{i\theta_k})}$$

En prenant

$$p(x) = x^{n-m},$$

Démonstration :

$$|t'_n(\theta)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{2\sin^2 \frac{\theta_k}{2}} = n$$

d'après le lemme 5.1.2 de la formule d'interpolation de Marcel Riesz pour les polynômes trigonométrique .

5.2.2 Extension de l'inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques

Théorème 5.2.2. *Soit*

$$t_n(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu e^{i\nu\theta}$$

un polynôme trigonométrique de degré n tel que

$$|t_n(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$$

alors

$$n^2 t_n^2(\theta) + \{t'_n(\theta)\}^2 \leq n^2$$

Démonstration :

Considérons

$$e^{in\theta} t_n(\theta) = P(i\theta) \text{ tel que } P(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=2n} c_\nu z^\nu$$

alors

$$|P(z)| \leq 1, \text{ pour } |z| = 1$$

posons

$$Q(z) = z^{2n} \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)},$$

alors d'après (6.1.1), on a

$$|P'(z)| + |Q'(z)| \leq 2n, \text{ pour } |z| = 1. (\star)$$

$$|P'(e^{i\theta})| = \left| \frac{d}{d\theta} P(e^{i\theta}) \right| = \left| \frac{d}{d\theta} (e^{in\theta} t_n(\theta)) \right| =$$

$$\left| \frac{d\theta}{d e^{in\theta}} \frac{d}{d\theta} (e^{in\theta} t_n(\theta)) \right| = \left| \frac{1}{i e^{i\theta}} (i n e^{in\theta} t_n(\theta) + e^{in\theta} t'_n(\theta)) \right| = |n t_n(\theta) - i t'_n(\theta)| = |n t_n(\theta) + i t'_n(\theta)|$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
 |Q'(e^{i\theta})| &= \left| \frac{d}{de^{i\theta}}(Q(e^{i\theta})) \right| = \left| \frac{d\theta}{de^{i\theta}} \frac{d}{d\theta}(e^{in\theta} \overline{t_n(\theta)}) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{ie^{i\theta}} (ine^{in\theta} \overline{t_n(\theta)} + e^{in\theta} \overline{e^{in\theta}}) \right| = \left| n \overline{t_n(\theta)} - it'_n(\theta) \right| = \left| nt_n(\theta) + it'_n(\theta) \right|
 \end{aligned}$$

alors (*) devient :

$$|nt_n(\theta) + it'_n(\theta)| + |nt_n(\theta) - it'_n(\theta)| \leq 2n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Donc

$$|t_n(\theta)| \in \mathbb{R} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\sqrt{n^2 t_n^2 + \{t'_n(\theta)\}^2} \leq 2n \Rightarrow n^2 t_n^2 + \{t'_n(\theta)\}^2 \leq n$$

5.3 Inégalité de Bernstein et extension de l'inégalité de Bernstein pour les fonctions entières de type exponentiel

5.3.1 Inégalité de Bernstein pour les fonctions entières de type exponentiel.

Théorème 5.3.1. *Si f est une fonction entière de type exponentiel τ , alors pour tout réel x*

$$|f'(x)| \leq \tau \|f\|_{\infty}$$

Démonstration

En prenant

$$f(z) := \sin(\tau z) \text{ et } x = 0$$

dans la formule d'interpolation du théorème 4.2.2, on obtient

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1.$$

ce qui donne l'inégalité à prouver.

5.3.2 Extension de l'inégalité de Bernstein pour les fonctions entières de type exponentiel. [voir [7]]

Avant de donner l'extension de l'inégalité de Bernstein, démontrons le théorème suivant :

Théorème 5.3.2. Soit $f(z)$ une fonction entière, réelle pour z réel; satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq 1, \quad x \in \mathbb{R} \\ |f(z)| &= O(e^{\lambda|z|}), \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

uniformement sur le plan. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\lambda z + \alpha) - f(z)$$

n'a que des zéros réels ou est identiquement nulle; de plus tous ses zéros sont simples sauf peut être aux points de l'axe réel où $f(x) = \pm 1$.

Démonstration :

Sans perte de généralité, posons $\alpha = 0$ Considérons la fonction

$$g(z) := \cos(\lambda z) - f(z)$$

Soient

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon < 1 \text{ et } f_\epsilon(z) &:= \frac{\sin(\lambda \epsilon z)}{\lambda \epsilon z} (1 - \epsilon) f((1 - \epsilon)z) \\ &\quad \sin(\lambda \epsilon z), f((1 - \epsilon)z) \end{aligned}$$

sont des fonctions entières telles que :

$$f((1 - \epsilon)z) = O(e^{\lambda(1-\epsilon)|z|}) \text{ et } |\sin(\lambda \epsilon z)| \leq e^{\lambda \epsilon |y|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_\epsilon(z)| &\leq \frac{e^{\lambda \epsilon |y|}}{\lambda \epsilon |z|} (1 - \epsilon) e^{\lambda(1-\epsilon)|y|} \\ &< \frac{e^{\lambda |y|}}{\lambda \epsilon |z|} \quad (*) \end{aligned}$$

Pour $y = \pm y_0$ fixé assez grand, nous avons

$$\frac{e^{\lambda |y_0|}}{\lambda \epsilon |z|} < \frac{e^{\lambda |y_0|}}{4} \text{ soit } |f_\epsilon(z)| < |\cos(\lambda z)|$$

De (*) et sur les lignes $x = \pm K \frac{\pi}{\lambda}$ où K suffisamment grand, positif on a :

$$|f_\epsilon(z)| < |\cos(\lambda z)|$$

soit ξ le contour d'un rectangle fermé, constitué des lignes :
 $x = \pm K \frac{\pi}{\lambda}$; $y = \pm y_0$. Sur ξ on a :

$$|\cos(\lambda z)| > |f_\epsilon(z)|$$

donc d'après le théorème de Rouché :

$$\cos(\lambda z) - f_\epsilon(z) \text{ et } \cos(\lambda z)$$

ont même nombre de zéros dans ξ soit $2K$.

Sur l'axe des réels

$$|f_\epsilon(z)| < (1 - \epsilon) < 1$$

et aux points :

$$x_\nu = \frac{\nu\pi}{\lambda} \quad \nu = -K, -K + 1, \dots, K ; \quad |f_\epsilon(z)| < |\cos(\nu\lambda)|$$

donc

$$\cos(\lambda z) - f_\epsilon(z)$$

prend des valeurs positives ou négatives alternativement et dans ξ cette fonction a au plus $2K$ zéros réels et de façon plus précise exactement $2K$ zéros réels simples, unique dans chaque intervalle

$$\left(\frac{\nu\pi}{\lambda}, \frac{(\nu+1)\pi}{\lambda}\right); \nu = -K, -K + 1, \dots, K - 1$$

Donc pour

$$y_0 \text{ et } K \text{ suffisamment grand } \cos(\lambda z) - f_\epsilon(z)$$

admet des zéros réels et simples dans ces intervalles. Pour ϵ tendant vers 0 $\cos(\lambda z) - f_\epsilon(z)$ tend uniformément vers $\cos(\lambda z) - f(z)$ dans n'importe quel domaine borné ; et d'après le théorème de Hurwitz si $f \not\equiv 0$ alors les zéros de la fonction limite, sont les points limites des zéros de

$$\cos(\lambda z) - f_\epsilon(z)$$

Il sont donc infinis, réels et simples sauf aux points

$$\frac{\nu\pi}{\lambda} \text{ si } f\left(\frac{\nu\pi}{\lambda}\right) = (-1)^\nu.$$

Théorème 5.3.3. Si $f(z)$ est une fonction entière, réelle pour z réel, vérifiant les conditions :

$$|f(z)| \leq 1; x \in R$$

$$|f(z)| = O(e^{\lambda|z|}), \lambda > 0$$

uniformément sur le demi plan supérieur. Alors

$$(*) \{f'(z)\}^2 + \lambda^2 \{f(z)\}^2 \leq \lambda^2$$

sur l'axe réel.

Démonstration :

Supposons que $f(z)$ satisfait les conditions du théorème (6.3.2) et n'est pas de la forme

$$\cos(\lambda z + \alpha)$$

Aux points de l'axe réel où $f(z) = \pm 1$ nous pouvons avoir $f'(z) = 0$ et dans ce cas (*) est vraie. Alors pour un choix judicieux de $\gamma; 0 < \gamma \leq 1$ nous avons

$$(*.*) \{\gamma f'(z)\}^2 + \lambda^2 \{\gamma f(z)\}^2 = \lambda^2$$

alors si $\cos(\lambda z + \alpha)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\left[\frac{d}{dz} \cos(\lambda z + \alpha)\right]^2 + \lambda^2 [\cos(\lambda z + \alpha)]^2 = \lambda^2$$

$\exists \alpha \in R/$ au point z_0

$$\cos(\lambda z + \alpha) = \gamma f(z)|_{z=z_0}; \frac{d}{dz} \cos(\lambda z + \alpha) = \gamma f'(z)|_{z=z_0}$$

par conséquent $\cos(\lambda z + \alpha) - \gamma f(z)$ admet un point double en z_0 de plus

$$|\cos(\lambda z_0 + \alpha)| = |\gamma f(z_0)| < 1$$

ce qui est impossible d'après le théorème (6.3.2). D'où le résultat.

5.4 Conjecture sur les fonctions entières de type exponentiel τ .

Conjecture.

Soit $f(z)$ une fonction entière de type exponentiel τ , réel pour z réel et ayant tous ses zéros réels et simples . Alors la distance entre deux zéros consécutifs qui encadrent le plus petit maximum ne dépasse pas $\frac{\pi}{\tau}$.

Bibliographie

- [1] P. Erdős, *An uniform distribution of the roots of certain polynomials*, *Annals of Math.* Vol 43, n°1, January, 1942, 59-64.
- [2] Q.I.Rahman; A.O.Watt, *on trigonometric polynomials with only real zeros*. *Journal of mathematical Analysis and applications*. Vol 182, n°2, march 1, 1994, 405-408
- [3] M.Riesz, *Eine Trigonometrische interpolationsmel Und einige ungleichungen für polynome*, *Jahresb. der Deutschen Math.* Ver., 23 (1914), pp.354-368.
- [4] W.Rudin, *analyse réel et complexe*, page 211. Huitième édition Mason, Paris. Barcelon 1995.
- [5] Lars V.Ahlfors. *Complex Analysis Third Edition*, p29.
- [6] E.C.Titchmarsh. *"The theory of fonctions"* Oxford University Press. second Ed. 1939.
- [7] R.Düffin and A.C.Schaeffer; *some propeties of fonctions of exponential type*. *Bull.Amer.Math.Soc.* 44 (1938), pp :236-240.