

# UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



THESE

Présentée

A L'UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR TROISIEME CYCLE

Discipline : SCIENCES. Mention : PHYSIQUE

Par

Moustapha Sadibou TALL

Sujet de la thèse :

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES DANS LES  
PLASMAS

Soutenue le 31 juillet 1996 devant la commission d'examen composée de :

Président : M. Chérif

BADJI Professeur

Membres : M. Hamet

SEYDI Professeur

M. Christian Sina

DIATTA Professeur

M. Oumar

DIALLO Maître de Conférences

## **DEDICACES ET REMERCIEMENTS**

A la mémoire de *ATHOUMANE TALL*.

Ce travail a été fait sous la direction du Professeur Christian Sina DIATTA que je ne saurais jamais suffisamment remercier.

Je remercie le professeur Chérif BADJI pour avoir examiné ce travail et pour l'intérêt constant qu'il y a porté.

Mes remerciements vont aussi au Professeur Hamet SEYDI pour avoir accepté<sup>2</sup> de siéger à ce jury malgré ses nombreuses occupations. Je remercie également M. Oumar DIALLO pour son aimable sollicitude et pour avoir pris part au jury.

Mes remerciements vont aussi à toute l'équipe du Professeur Christian Sina DIATTA notamment à Ismaïla DIEDHIOU et à Mouhamed GAYE pour les nombreux conseils et pour les documents qu'ils m'ont prêtés.

La saisie du matériel a été facilitée par Ngagne DIEYE qui avec Youssouf MANDIAN n'ont cessé de m'encourager, je leur dis un grand merci.

A mes amis de L'ITNA, Maurice NDEYE, Diéne NDIAYE et Marthe COLY, j'exprime ma gratitude. Je remercie aussi tous mes amis des départements de Physique et de Mathématiques pour leur sollicitude. Ma reconnaissance va aussi à la bibliothèque centrale de l'Université qui m'a offert de nombreuses facilités d'accès aux documents.

Enfin je remercie toute ma famille pour le soutien constant et indéfectible.

## TABLE DES MATIERES

1	<b>Introduction</b>	page 1
2	<b>Equation pilote généralisée</b>	page 7
2.1	Etat, grandeur et évolution en mécanique statistique classique	page 7
2.2	Mécanique statistique	page 10
2.2.1	Etat statistique	page 10
2.2.2	Loi de répartition des valeurs d'une grandeur mécanique	page 14
2.2.3	Variance	page 16
2.3	Equation pilote de Zwanzig	page 18
2.3.1	Projecteur	page 18
2.3.2	Projection de l'équation de Liouville	page 20
3	<b>Equation pilote de Prigogine-Brout</b>	page 28
3.1	Dérivation de l'équation pilote de Prigogine-Brout	page 28
3.2	Etude de l'approximation de Zwanzig	page 31
4	<b>Etude des systèmes inhomogènes en interaction faible au moyen de l'opérateur de collision</b>	page 44
4.1	Introduction	page 44
4.2	Equation pilote de Muriel et Dresden	page 45
4.3	Equation pilote pour un système faiblement inhomogène	page 50
4.4	Méthode de l'opérateur de collision	page 51
5	<b>Processus stochastique dans un plasma homogène hors d'équilibre</b>	page 59
5.1	Introduction	page 59

5.2	Dérivation de l'équation BLG	page 60
5.2.1	Position du problème et hypothèses	page 60
5.2.2	Diagrammes	page 72
	<b>Conclusion</b>	page 78
	<b>Figures</b>	page 80

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES  
DANS LES PLASMAS**

# 1 Introduction

Le présent travail, applicable essentiellement aux plasmas est relatif à l'étude de systèmes statistiques hors d'équilibre thermodynamique.

D'un point de vue historique la démarche naturelle dans l'étude du plasma a consisté en la recherche des possibilités d'application des résultats de la théorie cinétique sous la forme que lui a donnée BOLTZMANN. Mais alors seuls les plasmas qui obéissent aux hypothèses physiques qui sous-tendent cette théorie se laissent décrire par l'équation intégrodifférentielle de BOLTZMANN<sup>[1]</sup> (1872). Dans ce cadre les fonctions de distribution des vitesses et des positions des particules chargées des gaz faiblement ionisés et peu denses peuvent être obtenues moyennant une résolution approchée de cette équation lorsque l'on considère que la distribution des particules neutres est maxwellienne et lorsque l'on néglige systématiquement les interactions coulombiennes de longue portée entre les particules chargées. De nombreuses techniques de résolution de l'équation de Boltzmann sont connues et dans ce travail notre intérêt portera surtout sur l'étude des hypothèses physiques qui fondent l'établissement des équations pilotes.

Lorsque nous avons un plasma complètement ionisé soumis à un champ électromagnétique extérieur et dilué au point que l'on puisse négliger l'interaction coulombienne, la considération de l'équation de BOLTZMANN sans second membre ou équation de VLASOV suffit pour rendre compte de l'évolution du système qui est alors analogue au modèle de la particule individuelle.

Mais en raison de la nature même des hypothèses de BOLTZMANN qui négligent les interactions multiples et excluent les systèmes dans lesquels siègent des forces d'interaction de longue portée, son équation est incapable de décrire les systèmes denses et les systèmes fortement ionisés pour lesquels l'intégrale de collision diverge comme le montre PRIGOGINE<sup>[2]</sup> (1962). La recherche d'un cadre théorique plus général qui permettrait de prendre en compte l'ensemble de ces phénomènes a été effectuée en partant des méthodes de la mécanique statistique.

C'est ainsi qu'à partir de l'équation de LIOUVILLE, une hiérarchie d'équation décrivant l'évolution des fonctions de distribution du système a pu être obtenue séparément par YVON<sup>[3]</sup>(1935), BORN<sup>[4]</sup>, KIRKWOOD<sup>[5]</sup>, BOGOLIUBOV<sup>[6]</sup>(1946) et GREEN<sup>[7]</sup> (1947). Cette hiérarchie considérée dans son ensemble est un système d'équations rigoureusement identiques à l'équation de LIOUVILLE; elle est dénommée hiérarchie BBGKY. Ces équations sont couplées; l'évolution d'une distribution de probabilité d'un ordre donné dépendant de la distribution de probabilité de l'ordre supérieur.

La dérivation de l'équation de BOLTZMANN à partir de la hiérarchie BBGKY permet de mieux comprendre la nature des hypothèses sur lesquelles elle repose. En effet il s'avère que des hypothèses de nature probabiliste sont implicitement introduites dans la théorie. PAUL et TATIANA EHRENFEST<sup>[8]</sup>, disciples de BOLTZMANN, ont pu montrer que son équation est descriptible au moyen d'un modèle stochastique markovien.

Une autre approche a été celle que PRIGOGINE<sup>[2]</sup> et al (1962) ont développée

pée à partir de la seconde moitié des années cinquante. Partant de l'équation de LIOUVILLE écrite sous la forme due à KOOPMAN, ils développent un formalisme mathématique complètement analogue à celui de la mécanique quantique obtenant ainsi un appareil qui se prête aux méthodes de la théorie des perturbations et de la théorie de la renormalisation. C'est ainsi que PRIGOGINE et BROUT<sup>[9]</sup> (1956), se fondant en grande partie sur les méthodes de calcul et sur les hypothèses physiques déjà développées par VAN HOVE<sup>[10,11]</sup> (1955,1957) pour établir l'équation pilote d'un ensemble statistique quantique pur, ont pu obtenir pour un gaz homogène une équation tout à fait identique à l'équation de BOLTZMANN. PRIGOGINE et BALESCU<sup>[12,13,14]</sup> (1959,1960) ont pu étudier par ces méthodes une vaste classe de problèmes de la physique statistique classique. C'est dans le cadre d'un tel travail que pour la première fois en 1959, BALESCU<sup>[15,16]</sup> (1959,1960) a pu établir une équation d'évolution non divergente pour un plasma homogène par une renormalisation convenable de l'énergie d'interaction coulombienne. GUERNSEY<sup>[17]</sup>(1960) et LENARD<sup>[15]</sup> arrivent au même résultat à partir de la hiérarchie BBGKY. Les travaux de l'école de Bruxelles ont pu être étendus par BALESCU<sup>[18,19]</sup>(1963) à l'étude des plasmas homogènes turbulents et des plasmas faiblement inhomogènes (1964). DAVIDSON<sup>[20]</sup>(1968) a pu traiter le cas du plasma inhomogène soumis à un champ extérieur.

L'un des traits communs à ces approches est la grande lourdeur de l'appareil mathématique mis en oeuvre, en effet les méthodes de renormalisation nécessitent l'emploi de diagrammes analogues aux diagrammes bien connus de FEYNMAN<sup>[21]</sup>



de la théorie quantique des champs. C'est en étudiant les approches de VAN HOVE<sup>[10]</sup> et de PRIGOGINE<sup>[2]</sup> que ZWANZIG<sup>[22]</sup> (1960) a proposé une reformulation complète du problème qui devrait permettre de contourner la lourdeur des calculs. Il parvient à dériver de manière simple et élégante une équation pilote généralisée en partant de l'équation de LIOUVILLE et en tenant compte des propriétés des opérateurs de projection définis sur les espaces de BANACH. A partir de cette équation il retrouve aisément l'équation de PRIGOGINE-BROUT. Dès lors s'est posée la question de l'identité des différentes équations pilotes et ZWANZIG<sup>[23]</sup> (1964) a pu montrer lui même l'équivalence de ces trois équations. Cependant des critiques ont été formulées quant aux hypothèses liées à la dérivation de l'équation de BOLTZMANN à partir de l'équation pilote de ZWANZIG. En effet dans ce cas ZWANZIG a négligé l'opérateur de LIOUVILLE décrivant les interactions des particules devant celui décrivant leur propagation libre au lieu d'analyser l'opérateur de collision de type LIPPMAN-SCHWINGER<sup>[24]</sup> (1950) contenu dans son équation.

MURIEL et DESDEN<sup>[25]</sup> (1969) ont fait la même hypothèse pour aboutir à la dérivation de l'équation de PRIGOGINE-BALESCU pour la fonction de distribution inhomogène à une particule en utilisant le formalisme de ZWANZIG. Mais ici, si l'équation obtenue pour la fonction de distribution à une particule est identique à celle de l'école de BRUXELLES, on note des différences profondes pour la fonction de distribution à deux particules. Ces différences ont été attribuées par ces auteurs à des opérations de moyennes implicites dans la première approche.

Cette tentative d'explication n'a pas été étayée par une démonstration rigoureuse.

En théorie de l'amortissement <sup>[26,27,28,29]</sup>, lorsque le formalisme de ZWANZIG est utilisé, on cherche à contourner de telles difficultés en invoquant la première approximation de BORN.

Tels sont les premiers problèmes auxquels on se confronte lorsqu'on veut mettre en oeuvre le formalisme de ZWANZIG.

Il est évident qu'une méthode de la mécanique statistique qui se heurte à des difficultés pour le traitement des gaz pourra difficilement rendre compte de l'évolution de systèmes de particules complètement ionisées.

L'objet de ce travail est l'étude de ce formalisme de ZWANZIG en vue de son extension aux plasmas. Dans cette optique, il nous a paru nécessaire d'étudier de plus près les méthodes d'approximation mises en oeuvre dans le cadre de ce formalisme en théorie cinétique des gaz. Nous parvenons ainsi à les légitimer en nous fondant sur le double processus limite de VAN HOVE<sup>[10]</sup> (1955) qui sous-tend la méthode de renormalisation de PRIGOGINE et en procédant par l'analyse de l'opérateur de collision de LIPPMAN-SCHWINGER. Cela est fait dans le troisième chapitre de ce travail après qu'on ait donné la dérivation de l'équation pilote généralisée de ZWANZIG dans le deuxième chapitre. La méthode que nous proposons alors et qui se fonde sur celle de KATO<sup>[30]</sup> nous semble être plus didactique que celle que nous trouvons dans la littérature relative à la théorie de l'amortissement. Au quatrième chapitre nous passons en revue le travail de MURIEL et DRESDEN afin de souligner le type de problèmes discutés

plus haut lorsqu'il s'agit de systèmes inhomogènes mais aussi pour insister sur l'économie de calcul et d'hypothèses simplificatrices auxquelles on peut arriver en tout cas tant que l'on s'intéresse à des systèmes en interaction faible. Enfin nous donnons à l'avant dernier chapitre une dérivation de l'équation de BALESCU-LENARD-GUERNSEY (communément appelée équation BLG) montrant ainsi que le formalisme de ZWANZIG est apte à prendre en compte un plasma avant de dégager des conclusions générales.

## 2 EQUATION PILOTE GENERALISEE

L'essentiel de ce travail, comme nous l'avons montré en introduction, repose sur la dérivation d'une équation pilote à partir de l'équation de LIOUVILLE. Son application à l'étude des processus stochastiques dans les plasmas est proposée.

Dans ce premier chapitre nous passons en revue les idées de bases qui fondent la mécanique statistique. Nous mettrons l'accent sur les notions d'état, de grandeur et de leur évolution en mécanique statistique classique<sup>[31]</sup>.

### 2.1 ETAT, GRANDEUR ET EVOLUTION EN MECANIQUE STATISTIQUE CLASSIQUE

L'état mécanique d'un système de  $N$  corpuscules ponctuels en mécanique classique non relativiste, est défini, à un instant donné  $t$ , par la valeur à cet instant des variables de position  $q^1, q^2, \dots, q^{3N}$  et des impulsions correspondantes  $p_1, p_2, \dots, p_N$  de ces corpuscules. Considérons dans un premier temps qu'il s'agit de corpuscules de masses  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , non chargés et sans structure interne. Les positions et les impulsions sont alors des vecteurs dans un espace à 3 dimensions et la phase  $(q^1, q^2, \dots, q^{3N}, p_1, p_2, \dots, p_{3N})$  que l'on note  $(q, p)$  en abrégé, est un point d'un espace à  $6N$  dimensions que l'on appelle espace des phases  $\Gamma$  du système.

Si l'on connaît avec certitude, par hypothèse, l'état mécanique initial  $(q_0, p_0)$  du système, son évolution sera complètement décrite par les équations canoniques de HAMILTON:

$$\frac{\partial q^j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = [q^j, H] \quad (1)$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} = [p_j, H] \quad (2)$$

où  $j = 1, 2, \dots, 3N$ ,

$$[A, B] = \frac{\partial B}{\partial p_l} \frac{\partial A}{\partial q^l} - \frac{\partial B}{\partial q^l} \frac{\partial A}{\partial p_l} \quad (3)$$

est le crochet de Poisson des fonctions scalaires  $A$  et  $B$  de la phase et où

$$H(q, p, t) = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{p_j^2}{2m_j} + U_j(\vec{R}, t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j=1}^N U_{jk}(|\vec{r}_{jk}|) \quad (4)$$

est l'Hamiltonien du système.

La fonction  $U_{jk}(|\vec{r}_{jk}|)$  est l'énergie d'interaction de la particule  $k$  et de la particule  $j$ , supposée ne dépendre que de leur distance relative  $|\vec{r}_{jk}|$ ; on a  $U_{jk} = U_{kj}$ . La fonction  $U_j(\vec{R}, t)$  est l'énergie potentielle de la particule  $j$  à l'instant  $t$  au point  $\vec{q}_j = \vec{R}$  dans le champ des forces extérieures, supposées non modifiées par la présence des particules. Si le système est dans une enceinte, les interactions de ces particules avec ses parois peuvent être représentées par les énergies potentielles de type  $U_j(\vec{R}, t)$ . L'énergie dépendra alors explicitement du volume  $V$  de l'enceinte et l'on pourra intégrer dans  $\Gamma$  de moins l'infini à plus l'infini sur les positions  $q^j$  comme sur les impulsions  $p_j$ . Les énergies potentielles dues aux champs extérieurs pourront dépendre explicitement du temps à travers des paramètres

extérieurs permettant ainsi de prendre en compte les expériences auxquelles on peut soumettre le système à travers la variation de ces paramètres.

Les équations canoniques (1) et (2) représentent un système de  $6N$  équations différentielles dont la solution nécessite la connaissance de  $6N$  intégrales premières:

$$f^s(q^j, p_j, t) = f^s(q_0^j, p_{j0}, t); s = 1, 2, \dots, 6N. \quad (5)$$

Ce système se résout en  $q^1, \dots, p_{3N}$  donnant:

$$q^k = Q^k(q_0^j, p_{j0}, t); p_k = P_k(q_0^j, p_{j0}, t), k = 1, \dots, 6N. \quad (6)$$

Toute fonction  $A(q, p, t)$  de la phase, dépendant explicitement ou non du temps est une grandeur mécanique du système. Sa valeur numérique à chaque instant  $t$  est déterminée par l'état mécanique du système décrite par la dernière équation donnant  $q^k$  et  $p_k$  :

$$A(q^j, p_j, t) = A[Q^k(q_0^j, p_{j0}, t); P_k(q_0^j, p_{j0}, t)]. \quad (7)$$

La dérivée par rapport au temps de cette expression de  $A(q^j, p_j, t)$ , compte tenu des équations de HAMILTON, donne son équation d'évolution:

$$\frac{dA}{dt}(q^j, p_j, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H]. \quad (8)$$

## 2.2 MECANIQUE STATISTIQUE

### 2.2.1 ETAT STATISTIQUE

Il n'y a pas intérêt pour les systèmes à grand nombre de particules à chercher à connaître l'état mécanique exact du système car cela nécessiterait de connaître un grand nombre d'informations que ne pourrait nous fournir aucun appareil de mesure jusqu'à ce degré de précision.

Puisque l'expérience ne permet de mesurer que des grandeurs moyennes du système, pour développer une théorie que l'on peut confronter à l'expérience, il est nécessaire de définir un état moyen du système à partir de ses états mécaniques.

GIBBS <sup>[32]</sup> a proposé de définir l'état d'un système à grand nombre de composantes par un ensemble statistique constitué d'un grand nombre de copies fidèles (mêmes corpuscules, mêmes forces). A l'instant  $t$ , à l'état mécanique exact de chaque copie correspond un point de l'espace des phases de sorte que si une propriété du système est observée à l'instant  $t$  sur chaque copie, elle se trouve réalisée un grand nombre de manières différentes. On convient alors de conserver comme propriété accessible à l'expérience la moyenne des propriétés mécaniques réalisées dans l'ensemble de GIBBS.

Si une observation est réalisée à l'instant  $t$ , on peut regrouper les copies qui réalisent le même état mécanique. Ainsi l'ensemble statistique tel que défini réalise en fréquence une répartition de probabilités définies dans  $\Gamma$  par le nom-

bre de copies se trouvant dans chacun des états mécaniques possibles pour le système. Il est donc équivalent de définir l'état statistique d'un système par un ensemble statistique ou par une répartition de probabilités qu'elle illustre. Cette répartition peut être continue ou discontinue et si elle est ponctuelle elle correspond à une état mécanique exact. Elle est définie par sa fonction de répartition  $F_N(q, p, t)$  et possède, quand elle est complètement continue une densité de répartition  $f_N(q, p, t)$  dont  $F_N(q, p, t)$  est une primitive. L'état statistique du système peut être représenté par cette densité de répartition lorsqu'elle est définie et lorsqu'elle obéit aux conditions de GIBBS c'est à dire lorsque qu'elle est une fonction réelle et non négative normée à l'unité dans  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} dF_N(q^j, p_j, t) = \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) = 1; \quad f_N(q^j, p_j, t) \geq 0 \quad (9)$$

où  $d\Gamma$  est l'élément d'extension en phase  $dq^1 \dots dp_{3N}$  et où l'indice  $N$  rappelle que ces fonctions sont relatives à la totalité des  $N$  corpuscules constitutives du système.

Cette définition de l'état du système exclut les situations physiques qui ne peuvent être décrites par une fonction de répartition continue. Il en est ainsi par exemple pour la distribution microcanonique qui ne possède pas une densité de répartition continue. On peut contourner cette difficulté en définissant l'état statistique du système par la fonction caractéristique  $\Phi_N$  à  $6N$  variables d'une répartition de probabilité dans  $\Gamma$  qui est la transformée de Fourier Stieltjes de



sa fonction de répartition  $f_N(q, p, t)$  qui existe quelque soit la répartition et est toujours continue. Dans ces conditions  $f_N(q, p, t)$  sera la transformée de Fourier de  $\Phi_N$  obéissant aux conditions de GIBBS mais elle ne pourra pas être une fonction au sens usuel.

Jusqu'ici nous avons considéré que les particules constitutives du système étudié étaient discernables. S'il se trouve que deux particules de même espèce ne peuvent être discernées, une permutation de leurs coordonnées de phase laisse inchangé leur état mécanique. Donc à un même état mécanique correspond, dans l'espace des phases, autant de points que de permutations de corpuscules de même espèce. Si le système est composé de  $N$  particules identiques, l'espace  $\Gamma$  se décompose en  $N!$  régions équivalentes qui est l'ensemble des états mécaniques possibles. L'état statistique qui représente notre information sur le système se définit maintenant par une densité de probabilité  $f_N^0(q, p, t)$ , fonction symétrique des coordonnées des corpuscules de même espèce assujettie aux conditions de GIBBS dans  $\Gamma_0$ :

$$\int_{\Gamma} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) = N! \int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) = N! \quad (10)$$

car

$$\int_{\Gamma} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) = 1. \quad (11)$$

On a:

$$f_N^o(q^j, p_j, t) = N! f_N(q, p, t) \quad (12)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A(q^j, p_j, t) = \frac{1}{N!} \int_{\Gamma} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A(q^j, p_j, t) \\ &= \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) A(q^j, p_j, t) \end{aligned} \quad (13)$$

où  $A(q^j, p_j, t)$  est une fonction symétrique par rapport aux permutations des corpuscules de même espèce et  $\bar{A}$  sa moyenne d'ensemble. On peut la développer selon:

$$A(q^j, p_j, t) = A_{1k}(q^j, p_j, t) + A_{2kl}(q^k, q^l, p_k, p_l, t) + \dots \quad (14)$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A(q^j, p_j, t) = \int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A_{1k}(q^j, p_j, t) + \\ &\int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A_{2kl}(q^k, q^l, p_k, p_l, t) + \dots \end{aligned}$$

Tenant compte de (10), on obtient:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A(q^j, p_j, t) \\ &= \frac{1}{N!} \int_{\Gamma} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A_{1k}(q^j, p_j, t) + \frac{1}{N!} \int_{\Gamma_0} d\Gamma f_N^o(q^j, p_j, t) A_{2kl}(q^k, q^l, p_k, p_l, t) + \\ &\dots \end{aligned}$$

Tenant compte de (12) et integrant, il vient:

$$\bar{A} = \int dq^1 dp^1 f_1 A_1 + \int dq^1 dp^1 dq^2 dp^2 f_2 A_2 + \dots \quad (15)$$

où

$$f_1 = \int dq^2 dp_2 \dots dq^{3N} dp_{3N} \frac{N}{N!} f_N^0 = N \int dq^2 dp_2 \dots dq^{3N} dp_{3N} f_N$$

$$f_2 = \int dq^3 dp_2 \dots dq^{3N} dp_{3N} \frac{N(N-1)}{N!} f_N^0 = N(N-1) \int dq^3 dp_2 \dots dq^{3N} dp_{3N} f_N$$

.

.

.

$$\begin{aligned} f_s &= \int dq^{s+1} dp_{s+1} \dots dq^{3N} dp_{3N} \frac{N(N-1)\dots(N-s)}{N!} f_N^0 \\ &= \frac{N!}{(N-s)!} \int dq^{s+1} dp_{s+1} \dots dq^{3N} dp_{3N} f_N \end{aligned}$$

et

$$\int dq^1 dp^1 f_1 = N ,$$

$$\int dq^1 dp^1 dq^2 dp^2 f_2 = N(N-1),$$

$$\int dq^1 dp^1 \dots dq^s dp^s f_s = \frac{N!}{(N-s)!}.$$

## 2.2.2 LOI DE REPARTITION DES VALEURS D'UNE GRANDEUR MECANIQUE

La loi de répartition des valeurs numériques possibles  $a$  de la grandeur  $A(q,p,t)$  est définie par sa fonction de répartition  $F(a,t)$  qui est la probabilité pour que la valeur de  $A$  soit inférieure ou égale au nombre  $a$ . Dans l'état statistique  $f_N$ , il lui correspond la somme des probabilité  $f_N d\Gamma$  attachées aux seules régions de  $\Gamma$  où  $A(q,p,t)$  a une valeur numérique inférieure à un nombre donné  $a$  :

$$\begin{aligned}
F(a, t) &= \int_{A \leq a} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) \\
&= \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) \Theta[a - A(q^j, p_j, t)] \\
&= \overline{\Theta[a - A(q^j, p_j, t)]} \tag{16}
\end{aligned}$$

où  $\Theta(x)$  est la fonction saut de Heaviside qui vaut l'unité si  $x > 0$  et zéro si  $x < 0$ .

On en déduit:

$$\begin{aligned}
f(a, t) &= \frac{d}{da} F(a, t) = \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) \frac{d}{da} \Theta[a - A(q^j, p_j, t)] \\
&= \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) \delta[a - A(q^j, p_j, t)] = \overline{\delta[a - A(q^j, p_j, t)]} \tag{17}
\end{aligned}$$

car  $\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x)$  qui est la mesure de Dirac.

La densité de répartition de la loi de probabilité de  $A$  est, quand elle existe, la moyenne pondérée de la grandeur  $\delta(a - A)$ . L'espérance mathématique ou moyenne de  $A$  se définit à partir de sa fonction de répartition par:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} a dF(a, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a f(a, t) da \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} a da \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) \frac{d}{da} \Theta[a - A(q^j, p_j, t)] f(a, t) \tag{18}
\end{aligned}$$

soit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a dF(a, t) = \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} a f_N(q^j, p_j, t) \frac{d}{da} \Theta[a - A(q^j, p_j, t)] da$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a dF(a, t) = \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) \int_{-\infty}^{+\infty} a \delta[a - A(q^j, p_j, t)] da$$

$$= \int_{\Gamma} d\Gamma f_N(q^j, p_j, t) A(q^j, p_j, t) = \bar{A} \quad (19)$$

La valeur moyenne de A est égale à sa moyenne pondérée dans l'état  $f_N$ . On peut définir de la sorte tous les moments d'ordre supérieur de A.

### 2.2.3 INVARIANCE

Dans l'ensemble statistique, chaque copie évolue de manière indépendante en obéissant aux équations canoniques de HAMILTON. La répartition de probabilité évolue comme une répartition de masses matérielles, de somme égale à +1, attachée chacune à un point différent de l'espace des phases dont le mouvement obéit aux équations canoniques. Il s'en suit que les masses attachées à des points isolés se conservent au cours de l'évolution. La densité dans  $\Gamma$  étant invariante dans le temps on a:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} dF_N(q^j, p_j, t) = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} f_N(q^j, p_j, t) d\Gamma = 0 \quad (20)$$

La masse associée à l'élément d'extension en phase  $d\Gamma$  qui vaut  $f_N(q, p, t)$  est constante. Or  $\Gamma$  est une constante de l'évolution naturelle d'un système mécanique de sorte que  $f_N(q, p, t)$  demeure constante lors de l'évolution. Elle est donc une intégrale première des équations canoniques et l'équation (8) écrite pour  $f_N(q, p, t)$  donne:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^j} \frac{dp^j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \quad (21)$$

c'est l'équation de Liouville.

Lorsque la répartition de probabilité est quelconque, la transformée de Fourier de la fonction caractéristique vérifie aussi (21). Il suffit pour s'en rendre compte de prendre les transformées inverses de Fourier des deux membres de cette équation. La notion d'état statistique ainsi définie permet de traiter par les méthodes du calcul des probabilités l'ensemble des problèmes qui se posent en mécanique statistique. En effet la répartition des valeurs de la phase  $(q, p)$  définie par l'état statistique  $f_N(q, p, t)$  détermine à chaque instant les lois de répartition des valeurs possibles des grandeurs mécaniques que l'on peut observer au niveau de chaque copie. Ces grandeurs mécaniques sont alors représentées par des variables aléatoires qui peuvent être étudiées par les méthodes statistiques de la théorie des variables aléatoires. Les processus en jeu dans le système sont déterminés de manière unique une fois que l'hamiltonien du système est connu et que la distribution de probabilité est spécifiée car alors non seulement les lois de probabilité des valeurs des fonctions de phase sont connues à chaque instant mais aussi les probabilités jointes d'observer  $A(q, p, t) < a_1, A(q, p, t) < a_2, \text{ etc...}$ , sont déterminées. De tels processus sont stochastiques. Leur traitement est souvent complexe sauf pour quelques cas comme les processus stochastiques stationnaires ou les processus markoviens auxquels on essaie souvent de se ramener moyennant des hypothèses simplificatrices.

## 2.3 EQUATION PILOTE DE ZWANZIG

L'équation de Liouville (21) peut se mettre sous la forme

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = Lf. \quad (22)$$

Cette équation définit l'opérateur de Liouville  $L$ . La solution formelle de cette équation est  $f(t) = \exp(-itL)f(0)$ .

L'opérateur  $\exp(-itL)$  est défini par (22). Il déplace toute fonction de phase dans le temps le long d'une trajectoire de phase.  $f(t)$  contient toute l'information sur l'évolution du système. Sa détermination revient à la résolution des  $6N$  équations de mouvement de Hamilton. Si l'on n'est intéressé que par certaines classes d'observables définies sur le système, on peut se borner à l'étude de densités de répartition spécifiques aux grandeurs physiques d'intérêt. Au moyen d'une transformation appropriée de l'équation fondamentale on établit alors une équation d'évolution de ces densités de répartition dite équation pilote. Pour cela, introduisons l'opérateur de projection  $P$ .

### 2.3.1 PROJECTEUR

Soit  $X$  un espace vectoriel et soit  $M$  et  $N$  deux sous-espaces complémentaires de  $X$ :

$$X = M \oplus N \quad (23)$$

$X$  est la somme directe de  $M$  et  $N$ .

Tout vecteur  $u$  de  $X$  s'exprime de manière unique sous la forme:  $u = u' + u''$ , avec  $u' \in M$  et  $u'' \in N$ .  $u'$  est appelé projection de  $u$  sur  $M$  selon  $N$ . Si  $v = v' + v''$ , selon la même décomposition,  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha$  et  $\beta$  complexes) a pour projection sur  $M$  selon  $N$  le vecteur  $\alpha u' + \beta v'$ . Si l'on pose  $u' = Pu$ , il suit que  $P$  est un opérateur linéaire de  $X$  dans lui-même (ou tout simplement projecteur). L'opérateur  $(1 - P)$  est le projecteur sur  $N$  selon  $M$  où 1 est ici l'opérateur identité. On a:  $Pu = u \iff u \in M$  et  $Pu = 0 \iff u \in N$ . L'ensemble image de  $P$  est  $M$  et son noyau est  $N$  puisque  $Pu \in M$  pour tout  $u \in M$ , nous avons  $PPu = Pu$ ; on dit que  $P$  est idempotent:

$$P^2 = P \quad (24)$$

Inversement, tout opérateur idempotent est un projecteur. Ces résultats s'étendent au cas où  $X$  est la somme directe de plusieurs sous-espaces:  $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s$ , on a alors:

$$\sum_{j=1}^s P_j = 1 \quad (25)$$

et

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_k \quad (26)$$

L'ensemble des densités de répartition définies sur l'espace des phases est un



espace vectoriel dont tout élément peut être décomposé au moyen d'un opérateur de projection convenable  $P$ , selon:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (27)$$

où

$$f_1(t) = Pf(t) \quad ; \quad f_2(t) = (1 - P)f(t) \quad (28)$$

### 2.3.2 PROJECTION DE L'EQUATION DE LIOUVILLE

Nous prenons  $P$  indépendant du temps de sorte qu'il commute avec l'opérateur de dérivation par rapport au temps. L'équation de Liouville peut alors être projetée dans deux sous espaces complémentaires:

$$P \left( i \frac{\partial f}{\partial t} \right) = i \frac{\partial f_1}{\partial t} = PL(f_1 + f_2) \quad (29)$$

$$(1 - P) \left( i \frac{\partial f}{\partial t} \right) = i \frac{\partial f_2}{\partial t} = (1 - P)L(f_1 + f_2). \quad (30)$$

La seconde équation peut se résoudre formellement pour  $f_2(t)$  en fonction de  $f_2(0)$  et  $f_1(t)$ ; elle est une équation différentielle du premier ordre inhomogène.

$$i \frac{\partial f_2}{\partial t} - (1 - P)Lf_2 = (1 - P)Lf_1. \quad (31)$$

Tenant compte de ce que la solution formelle de l'équation:

$$i \frac{\partial G}{\partial t} = (1 - P) L G \quad (32)$$

est:  $G(t) = \exp[-it(1 - P)L] G(0)$ , on a comme solution générale de l'équation sans second membre:

$$f_2(t) = \exp[-it(1 - P)L] f_2(0). \quad (33)$$

Cherchons la solution particulière de (31) par la méthode de la variation de la constante. Soit  $f_2^0(t)$  cette solution. Posons:

$f_2^0(t) = \exp[-it(1 - P)L] A(t)$  on a alors:

$$\frac{\partial f_2^0(t)}{\partial t} = -i(1 - P)L \exp[-it(1 - P)L] A(t) + \exp[-it(1 - P)L] \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Remplaçons dans (31):

$$(1 - P)L \exp[-it(1 - P)L] A(t) + \exp[-it(1 - P)L] \frac{\partial A}{\partial t} - (1 - P)L \exp[-it(1 - P)L] A(t) = (1 - P)L f_1.$$

D'où,

$$i \frac{\partial A}{\partial t} = \exp[-it(1 - P)L] (1 - P)L f_1(t).$$

Ce qui donne pour  $A(t)$  :

$$A(t) = -i \int_0^t ds \exp[-is(1 - P)L] (1 - P)L f_1(s), \text{ de sorte que:}$$

$$f_2^0(t) = -i \exp[-it(1 - P)L] \int_0^t ds \exp[-is(1 - P)L] (1 - P)L f_1(s),$$

ce qui s'écrit encore:

$$f_2^0(t) = -i \int_0^t ds \exp[-is(1 - P)L] (1 - P)L f_1(t - s).$$

La solution générale de l'équation inhomogène est finalement:

$$f_2(t) = \exp[-it(1-P)L]f_2(0) - i \int_0^t ds \exp[-is(1-P)L](1-P)L.f_1(t-s). \quad (34)$$

La substitution de cette expression dans l'équation d'évolution de  $f_1(t)$  donne:

$$i \frac{\partial f_1}{\partial t} = PL \exp[-it(1-P)L]f_2(0) + PLf_1(t) - i \int_0^t ds PL \exp[-is(1-P)L](1-P)L.f_1(t-s) \quad (35)$$

Cette équation est une généralisation de l'équation pilote de Van Hove<sup>[10]</sup>(1955) si:

(a) L'hamiltonien du système peut être séparé en une partie non perturbée et une partie décrivant la perturbation.

(b) On travaille dans la représentation pour laquelle l'hamiltonien non perturbé est diagonal.

(c) L'opérateur de projection est construit de telle sorte qu'il sélectionne la partie diagonale de toute matrice dans cette représentation.

On note que le terme d'interférence de Van Hove est contenu dans  $f_2(0)$ .

Zwanzig a montré l'équivalence de son équation d'avec celles de Van Hove et de Prigogine.

Si  $f_2(0) = 0$ , l'équation (35) devient une équation complète pour  $f_1(t)$ . Cette

hypothèse implique que, puisqu'alors  $f(0) = f_1(0)$ ,

$$Pf(0) = Pf_1(0) = f_1(0) = f(0). \quad (36)$$

Elle contient un terme de mémoire représenté par la convolution par rapport au temps.

Elle décrit un processus stochastique non markovien. Par ailleurs, l'évolution de  $f_1(t)$  est irréversible. Elle n'est pas invariante de forme par rapport à l'opération d'inversion du temps. On peut la mettre sous une forme plus appropriée au calcul de perturbations en prenant la transformée de Laplace de  $f_1(t)$  selon:

$$g(z) = \int_0^{\infty} dt \exp izt f_1(t) \quad (37)$$

où  $z = \omega + i\epsilon$ ,  $\omega$  et  $\epsilon$  réel,  $\epsilon > 0$  et  $\epsilon \rightarrow 0$ , assurant ainsi la convergence du second membre car  $g(z)$  doit être holomorphe. On a:

$$i \int_0^{\infty} dt \exp izt \frac{\partial f_1(t)}{\partial t} = zg(z) - if_1(0). \quad (38)$$

Faisant l'hypothèse que  $f_2(0) = 0$ , (35) se transforme en:

$$zg(z) - if_1(0) = PLg(z) + PL \frac{1}{z - (1-P)L} (1-P)Lg(z) \quad (39)$$

où nous avons tenu compte de ce que:

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(t)g(t-s)ds \right] = \mathcal{L}[f(t)] \mathcal{L}[g(t)] \quad (40)$$

où  $\mathcal{L}[f(t)]$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$ .

On a:

$$zg(z) = if_1(0) + \left[ PL + PL \frac{1}{z - (1-P)L} (1-P)L \right] g(z). \quad (41)$$

Cette équation est écrite en termes de l'opérateur  $PL + PL \frac{1}{z - (1-P)L} (1-P)L$  que l'on peut mettre sous une forme plus facile à manipuler et convenant au calcul de perturbation si l'on se met dans les conditions pour lesquelles l'hamiltonien du système sépare en  $H_0$  et  $H_1$  et l'opérateur de Liouville en  $L_0$  et  $L_1$  et si on construit l'opérateur de projection  $P$  de sorte qu'il projette dans le sous-espace des états propres de  $L_0$ . Pour cela remarquons d'abord que pour tout opérateur  $G$  représentant une fonction de phase déterminée, on a:

$$PL_0G = L_0PG = i[H_0, PG] = 0. \quad (42)$$

En effet  $PG$  est la partie diagonale de l'opérateur  $G$  dans la représentation définie par  $L_0$ . Ce qui permet d'écrire pour tout opérateur  $G$  :

$$PLG = PL_1G + PL_0G = PL_1G. \quad (43)$$

On a donc:

$$PL \frac{1}{z - (1-P)L} (1-P)L = PL_1 \frac{1}{z - (1-P)L} (1-P)L. \quad (44)$$

Mais

$$(1 - P)Lg(z) = (1 - P)L_0g(z) + (1 - P)L_1g(z).$$

Or

$$(1 - P)L_0g(z) = L_0(1 - P)g(z) = L_0 \int_0^{\infty} dt \exp izt \times (1 - P)f_1(t) = 0.$$

Il s'en suit que:

$$PL_1 \frac{1}{z - (1 - P)L} (1 - P)L = PL_1 \frac{1}{z - (1 - P)L_1} (1 - P)L_1 \quad (45)$$

Posons:

$$R(z) = \frac{1}{z - L_0 - (1 - P)L_1} \quad (46)$$

et

$$R_0(z) = \frac{1}{z - L_0}. \quad (47)$$

Tenant compte de l'identité opératorielle:

$$A^{-1} - B^{-1} = B^{-1} [B - A] A^{-1}, \quad (48)$$

on peut écrire:

$$R - R_0 = R_0(1 - P)L_1R.$$

Nous obtenons par itération:

$$R(z) = R_0(z) + R_0(z)(1 - P)L_1R_0(z) + \dots,$$

de sorte que l'on puisse écrire:

$$PL_1R(z)(1 - P)L_1 = PL_1 \sum_{n=1}^{\infty} [R_0(1 - P)L_1]^n. \quad (49)$$

On a au total:

$$PL + PL \frac{1}{z - (1 - P)L} (1 - P)L = P[L_0 + T(z)] \quad (50)$$

où

$$T(z) = L_1 + L_1 \sum_{n=1}^{\infty} [R_0(1 - P)L_1]^n. \quad (51)$$

$T(z)$  est un opérateur de collision vérifiant:

$$T(z) = L_1 + L_1 R_0(1 - P)T(z) \quad (52)$$

qui est une équation de type Lippmann-Schwinger.  $g(z)$  vérifie donc:

$$zg(z) = if_1(0) + PT(z)g(z). \quad (53)$$

On notera que  $R(z)$  et  $R_0(z)$  ne sont autres que les opérateurs résolvantes associés par transformation de Laplace aux opérateurs unitaires  $\exp[-is(-P)L_0]$  et  $\exp[-is(-P)L]$  sur les propriétés desquelles nous reviendrons dans la suite.

Telle est la forme finale de l'équation pilote généralisée de Zwanzig. Ce dernier l'a appliquée à l'étude de l'équation cinétique d'un système classique de  $N$  particules identiques en interaction faible obtenant ainsi une équation identique à celle de Prigogine -Brout. Nous donnons dans le chapitre qui suit telle qu'elle cette dérivation en remarquant que Zwanzig procède alors à l'analyse directe de l'équation (35) et invoque l'hypothèse d'interaction faible pour nég-

liger l'opérateur de Liouville décrivant l'interaction des particules devant celle décrivant leur propagation libre. Comme l'a souligné G.V.Chester<sup>[33]</sup>, cette hypothèse revient à négliger beaucoup de termes dans le développement en puissance de l'opérateur de développement du temps et on ne voit pas ce qui justifierait une telle procédure si le système n'obéit pas aux conditions de Van Hove. La justification de cette approximation nous a semblée nécessaire pour assurer les bases de ce formalisme avant de songer à l'appliquer à des systèmes plus complexes. Ce sera le point principal de ce deuxième chapitre.



### 3 EQUATION PILOTE DE PRIGOGINE-BROUT

#### 3.1 DERIVATION DE L'EQUATION

#### PILOTE DE PRIGOGINE-BROUT

Soit un système de  $N$  particules identiques en interaction faible, contenues dans un volume  $V$ . Leur Hamiltonien est:

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j^2}{2m} + \lambda \sum_{j < k}^N U(q_{jk}) \quad (54)$$

où la jème particule a pour impulsion  $\vec{p}_j$  et pour position  $\vec{q}_j$ , sa masse est  $m$ . L'énergie potentielle d'interaction entre les particules  $j$  et  $k$  est  $U(q_{jk})$ ; elle ne dépend que de la distance  $q_{jk}$  entre ces dernières. Le paramètre  $\lambda$  détermine l'intensité de l'interaction. L'opérateur de liouville correspondant est:

$$L = L_0 + \lambda L_1 \quad (55)$$

où

$$L_0 = -i \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} \quad (56)$$

et

$$L_1 = -i \sum_{j < k}^N \vec{F}_{jk} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k} \right] \quad (57)$$

et où  $\vec{F}_{jk} = \frac{\partial U(q_{jk})}{\partial \vec{q}_j}$  est la force exercée par la particule  $k$  sur la particule  $j$ .

Nous cherchons l'équation pilote pour la fonction de distribution des impulsions dans l'espace des phases. Nous introduisons l'opérateur de projection:

$$P \equiv (V^N)^{-1} \int_V d^N \vec{q} \quad (58)$$

qui a pour effet de prélever la dépendance spatiale de la fonction de distribution définie sur l'espace des phases tout entier:

$$Pf(\vec{q}, \vec{p}, t) = f_1(\vec{p}, t). \quad (59)$$

Nous ne considérons que les états initiaux spatialement homogènes de sorte que  $Pf(0) = f(0)$  et  $f_2(0) = 0$ .

L'équation (35) devient alors une équation fermée pour la partie spatialement homogène de  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ . La fonction projetée  $f_1(t)$  permet de calculer les moyennes d'ensemble des fonctions de phase ne dépendant que de l'impulsion.

Dans l'équation (35), le terme  $PL_1 f_1(t)$  s'annule. La contribution provenant de  $L_0$  s'annule car  $f_1(t)$  est indépendante de la position. La partie résiduelle est:

$$PL_1 f_1(t) = -i \sum_{j < k}^N (V^N)^{-1} \int_V d^N \vec{q}_j \vec{F}_{jk} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k} \right] f_1(\vec{p}, t) = 0. \quad (60)$$

Elle s'annule car l'intégrale d'une force aléatoire sur toutes les positions est

nulle. De la même manière le terme en  $PL_1f_1(t-s)$  s'annule. Il nous reste donc l'équation cinétique exacte:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = - \int_0^t ds PL \exp[-is(1-P)L] L.f_1(t-s) \quad (61)$$

Nous tenons également compte de ce que  $Lf_1 = L_1f_1$  puisque  $L_0f_1 = 0$ , et de ce que  $PLG = \lambda PL_1G$  puisque  $P$  enlève toute contribution provenant de  $L_0$ . Ce qui donne:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\lambda^2 \int_0^t ds K(s, \lambda).f_1(t-s) \quad (62)$$

où  $K(s, \lambda)$  est un opérateur défini sur l'espace des impulsions,

$$K(s, \lambda) = -PL_1 \exp[-is(1-P)L] L_1 \quad (63)$$

L'équation (62) est toujours une équation exacte qui peut être simplifiée davantage dans la limite des interactions faibles et des temps d'observation macroscopiques. Introduisons une nouvelle échelle de temps:  $\tau = \lambda^2 t$  et remplaçons  $f_1(t)$  par  $\rho(\tau)$ . L'équation (62) devient:

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial t} = \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} ds K(s; \lambda) \rho(\tau - \lambda^2 s). \quad (64)$$

Nous supposons que la mémoire de  $K(s, \lambda)$  ne s'étend que sur un intervalle de temps fini;  $0 < s < T$  dans l'échelle de temps originale, c'est à dire:  $K(s, \lambda) = 0$  si  $s > T$ .

Dans les cas pratiques, la mémoire s'étend en gros sur l'intervalle de temps nécessaire pour une particule d'impulsion  $\vec{p}$  de parcourir la distance sur laquelle l'interaction est non nulle. Nous pouvons maintenant prendre la limite  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\tau > 0$  étant fixé. Dans cette limite nous obtenons:

$$\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial t} = \int_0^{\infty} ds K(s; 0) \rho(\tau) \quad (65)$$

qui est une équation Markovienne. L'opérateur de mémoire dans cette limite est:  $K(s, 0) = -PL_1 \exp[-isL_0] L_1$  car  $(1 - P)L = L_0 + \lambda L_1 - PL$  et  $PL$  est de l'ordre de  $\lambda L_1$  en vertu de ce que  $PLG = \lambda PL_1 G$ . Les équations (65) et la relation donnant  $K(s, 0)$  constituent exactement, en notation beaucoup plus condensée, l'équation pilote de Prigogine-Brout. Nous voyons donc que Zwanzig procède par l'analyse directe de l'équation pilote (62) au lieu d'étudier les contributions des termes successifs de l'opérateur de collision de Lippmann-Schwinger et qu'il néglige complètement  $\lambda L_1$  devant  $L_0$  comme le montrent la relation de décomposition de  $(1 - P)L$  et la relation donnant  $K(s, 0)$ .

### 3.2 ETUDE DE L'APPROXIMATION DE ZWANZIG

L'équation de Prigogine-Brout obtenue par Zwanzig peut être établie à partir de l'étude de l'opérateur de collision en omettant dans son développement en puissance de l'opérateur d'interaction tous les termes d'ordre supérieur à deux. Il se pose alors la question de la validité d'une telle approximation. Nous montrons

dans la suite que tous les termes d'ordre supérieur à deux s'annulent lorsque le système remplit un certain nombre de conditions.

L'opérateur de collision, en raison des facteurs  $\lambda L_1$  qu'il contient dépend explicitement des variables d'espace donnant les positions des corpuscules constitutifs du système. Le développement de  $L_1$  en série de Fourier permet de rendre compte de cette dépendance spatiale et d'évaluer explicitement l'action de l'opérateur de projection sur les divers termes du développement donnant  $T(z)$ .

En effet nous avons:  $\vec{F}_{jk} = \frac{\partial U(q_{jk})}{\partial \vec{q}_j}$ ,  
 or  $U(q_{jk}) = \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\vec{l} \neq 0} U_{|\vec{l}|} \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k)$  où:

$$U_{|\vec{l}|} = U(|\vec{l}|) = \frac{1}{2\pi^2 l^2} = U_l \quad (66)$$

Ce qui donne pour  $L_1$ :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{j < k=1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} U_l \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) i \vec{l} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k} \right] \\ &= \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{j < k=1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} U_l \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jk} \end{aligned} \quad (67)$$

où  $\vec{D}_{jk} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k}$ .

Pour toute fonction  $g(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, z)$ , on a:  $PL_1 g(\vec{p}, z) = 0$  car:

$$P \exp i \vec{l} \cdot \vec{q}_j = \frac{1}{V} \int_V d\vec{q}_j \exp i \vec{l} \cdot \vec{q}_j = \frac{1}{V} \delta_{\vec{l}}^{Kr} = 0 \text{ puisque } \vec{l} \neq 0, \delta_{\vec{l}}^{Kr} \text{ étant}$$

le symbol de Kroneker.

$T(z)$  n'agissant que sur les fonctions de distribution homogènes, l'opérateur

$P$  ne s'applique que sur les facteurs  $L_1$  contenus dans l'expression donnant  $T(z)$ .

Nous avons:

$$PT(z) = P\lambda L_1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\lambda L_1 [R_0(1-P)\lambda L_1]^n. \quad (68)$$

Le premier terme donne zéro en vertu de l'action de  $P$ . Le second donne:

$$P\lambda L_1 R_0(1-P)\lambda L_1 g(z) = \lambda^2 PL_1 R_0 L_1 g(z) \text{ car } PL_1 R_0 PL_1 g(z) = 0.$$

Le troisième terme s'écrit:

$$\begin{aligned} & \lambda^3 PL_1 R_0(1-P)L_1 R_0(1-P)\lambda L_1 g(z) = \\ & = \lambda^3 PL_1 R_0(1-P)L_1 R_0 L_1 g(z) - \lambda^3 PL_1 R_0(1-P)L_1 R_0 PL_1 g(z) \\ & = \lambda^3 PL_1 R_0(1-P)L_1 R_0 L_1 g(z) = \lambda^3 PL_1 R_0 L_1 R_0 L_1 g(z) - \\ & \lambda^3 PL_1 R_0 PL_1 R_0 L_1 g(z). \\ & = \lambda^3 PL_1 R_0 L_1 R_0 L_1 g(z) \end{aligned}$$

car  $PL_1 R_0 PL_1 R_0 L_1 g(z) = 0$  puisque  $R_0 PL_1 R_0 L_1 g(z)$  ne dépend que des variables d'impulsion, l'opérateur  $P$  qu'il contient ayant enlevé toute dépendance spatiale. L'opérateur  $PL_1$  appliqué à cette fonction donne zéro. L'analyse des termes successifs en adoptant la même démarche montre que:

$P\lambda L_1 [R_0(1-P)\lambda L_1]^n = P\lambda L_1 (R_0\lambda L_1)^n$  ce qui permet de réécrire l'opérateur  $PT(z)$  sous la forme:

$$PT(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P\lambda L_1 (R_0\lambda L_1)^n. \quad (69)$$

L'équation pilote généralisée de Zwanzig (53) devient alors pour un système

homogène:

$$zg(z) = if_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} P\lambda L_1(R_0\lambda L_1)^n g(z) \quad (70)$$

où nous avons tenu compte de ce que  $PL_0g(z) = 0$ . Jusqu'ici, aucune approximation n'a été faite. Négligeons maintenant tous les termes d'ordre supérieur à deux. L'équation s'écrit alors:

$$zg(z) - if_1(0) = P\lambda L_1g(z) + \lambda^2 PL_1R_0L_1g(z). \quad (71)$$

Or le premier terme est nul en vertu de l'action de  $P$ . Avant d'évaluer le second terme, explicitons les propriétés de  $R_0$ . Il se développe en série de Neumann selon:

$$R_0(z) = \frac{1}{z - L_0} = z^{-1} (1 - z^{-1}L_0) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} L_0^n. \quad (72)$$

Ce développement est convergent si le module de  $z$  est plus grand que le rayon spectral de  $L_0$ , c'est à dire:

$$|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_0^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n=1,2,\dots} \|L_0^n\|^{\frac{1}{n}} \quad (73)$$

où

$$\|L_0\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L_0f\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} \|L_0f\|. \quad (74)$$

En tenant compte de ce que  $L_0$  est un opérateur de dérivation sur les variables spatiales, on voit que l'opérateur  $R_0L_1$  contient des facteurs de la forme:

$$\begin{aligned}
L_0 \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) &= \left( -i \sum_{j'=1}^N \frac{\vec{p}_{j'}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_{j'}} \right) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) \\
&= -i^2 \vec{l} \cdot \left( \frac{\vec{p}_j}{m} - \frac{\vec{p}_k}{m} \right) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k)
\end{aligned}$$

Il s'en suit que:

$$\begin{aligned}
L_0 L_1 g(z) &= i \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{j < k=1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} U_l \vec{l} \cdot \left( \frac{\vec{p}_j}{m} - \frac{\vec{p}_k}{m} \right) \\
&\exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jk} g(z)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} L_0^n L_1 g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j < k=1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} z^{-(n+1)} U_l \left[ \vec{l} \cdot \left( \frac{\vec{p}_j}{m} - \frac{\vec{p}_k}{m} \right) \right] \\
&\exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jk} g(z)
\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}
R_0 L_1 &= i \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{j < k=1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} U_l \frac{1}{z - \vec{l} \cdot \left( \frac{\vec{p}_j}{m} - \frac{\vec{p}_k}{m} \right)} U_l \\
&\exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jk}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 P L_1 R_0 L_1 g(z) &= -\lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} P \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{j_2 < k_2=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} U_{l_1} U_{l_2} \\
&\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{k_2}) i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \frac{1}{z - \vec{l}_1 \cdot \left( \frac{\vec{p}_{j_1}}{m} - \frac{\vec{p}_{k_1}}{m} \right)} \\
&\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1}.
\end{aligned}$$

S'il existe au moins une variable spatiale différente de toutes les autres, l'expression s'annule sous l'action de  $P$ . La contribution n'est non nulle que si chaque variable spatiale d'un facteur  $L_1$  est au moins égale à une variable spatiale d'un autre facteur. Par ailleurs cette égalité doit naturellement respecter les inégalités imposées aux indices sur les signes sommes; inégalités qui expri-



ment que deux corpuscules différents ne peuvent occuper la même position dans l'espace à un instant donné. La contribution d'ordre un représente un processus au cours duquel, après que la perturbation soit branchée, tous les corpuscules du système interagissent entre elles de sorte que la distribution des états du système devienne inhomogène (dépendance spatiale de la fonction  $L_1g(z)$ ) puis le système évolue librement (évolution décrite par  $R_0$ ) et les corpuscules interagissent à nouveau de sorte que la distribution des états redevienne homogène; l'action de  $P$  assurant ce retour à une distribution homogène par conservation du vecteur d'onde  $\vec{l}$ . Un tel processus peut être représenté par un diagramme dont on fera ample usage dans le dernier chapitre.

L'évaluation de l'action de  $P$  dans l'expression de  $\lambda^2 PL_1R_0L_1g(z)$  montre que ce terme n'est non nul que si  $j_1 = j_2$  et  $k_1 = k_2$  et on a:

$$\lambda^2 PL_1R_0L_1g(z) = -\lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} P \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} U_{l_1} U_{l_2} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \frac{1}{z - \vec{l}_1 \cdot \left( \frac{\vec{p}_{j_1}}{m} - \frac{\vec{p}_{k_1}}{m} \right)} \exp i(\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z).$$

L'évaluation de l'action de l'opérateur  $P$  donne:

$$\lambda^2 PL_1R_0L_1g(z) = -\lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} U_{l_1} U_{l_2} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \frac{1}{z - \vec{l}_1 \cdot \left( \frac{\vec{p}_{j_1}}{m} - \frac{\vec{p}_{k_1}}{m} \right)} \exp i(\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \cdot \delta_{\vec{l}_2 + \vec{l}_1}^{kr} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z).$$

La sommation sur  $\vec{l}_2$  donne:

$$\lambda^2 PL_1R_0L_1g(z) = -\lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i \vec{l}_1) \cdot$$

$$\vec{D}_{j_1 k_1} (z - \alpha_{j_1 k_1})^{-1} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z). \quad (75)$$

où  $\alpha_{j_1 k_1} = \vec{l}_1 \cdot \left( \frac{\vec{p}_{j_1}}{m} - \frac{\vec{p}_{k_1}}{m} \right)$ . La transformée de Laplace inverse de cette

expression est:

$$C_1(t) = -\lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i \vec{l}_1) \cdot \vec{D}_{j_1 k_1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ (z - \alpha_{j_1 k_1})^{-1} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z) \right] \text{ où}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ (z - \alpha_{j_1 k_1})^{-1} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z) \right] = -i \int_0^t dt_1 \exp(-i \alpha_{j_1 k_1} t_1) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} f_1(t - t_1)$$

est la transformée de Laplace inverse de  $(z - \alpha_{j_1 k_1})^{-1} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z)$ . On peut

écrire:

$$C_1(t) = i \lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i \vec{l}_1) \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \int_0^t dt_1 \exp(-i \alpha_{j_1 k_1} t_1) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} f_1(t - t_1) \quad (76)$$

Dans le cadre de notre approximation, l'équation pilote s'écrit:

$$i \frac{\partial f_1}{\partial t} = i \lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i \vec{l}_1) \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \int_0^t dt_1 \exp(-i \alpha_{j_1 k_1} t_1) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} f_1(t - t_1) \quad (77)$$

Introduisant la nouvelle échelle de temps  $t = \lambda^{-2}\tau$ , on a, en remplaçant  $f_1(t)$

par  $\rho(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
i\lambda^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} &= i\lambda^2 \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i\vec{l}_1) \cdot \\
&\quad \vec{D}_{j_1 k_1} \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \exp(-i\alpha_{j_1 k_1} t_1) i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \\
&\quad \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1)
\end{aligned} \tag{78}$$

Considérant que l'interaction a une durée finie de sorte que  $0 < t_1 < T$  et faisant tendre  $\lambda$  vers zéro,  $\tau$  conservant une valeur positive fixée, nous obtenons:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} = \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i\vec{l}_1) \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \int_0^\infty dt_1 \exp(-i\alpha_{j_1 k_1} t_1) i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau).$$

Cette équation s'écrit encore,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} &= \frac{(2\pi)^6}{V^2} \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} |U_{l_1}|^2 (-i\vec{l}_1) \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \pi \delta_-(\alpha_{j_1 k_1}) i\vec{l}_1 \cdot \\
&\quad \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau)
\end{aligned} \tag{79}$$

en vertu de ce que:

$\int_0^\infty dt_1 \exp(-i\alpha_{j_1 k_1} t_1) = \pi \delta_-(\alpha_{j_1 k_1})$ , avec  $\pi \delta_-(\alpha_{j_1 k_1}) = \pi \delta(\alpha_{j_1 k_1}) - i \text{Pr} \left( \frac{1}{\alpha_{j_1 k_1}} \right)$   
et où  $\delta$  est la distribution de Dirac et  $\text{Pr} \left( \frac{1}{\alpha_{j_1 k_1}} \right)$  est la partie principale de  $\frac{1}{\alpha_{j_1 k_1}}$ .

Nous avons là l'équation pilote de Prigogine-Brout. Elle correspond aussi à l'équation pilote de Zwanzig lorsque l'action de l'opérateur  $\exp -isL_0$  est évaluée.

Nous voyons donc que l'approximation de Zwanzig revient à négliger un grand

nombre de termes dans le développement de  $\exp -is(1 - P)L$  en puissance de la perturbation.

Nous allons maintenant montrer que tous les termes négligés s'annulent effectivement à la limite des faibles interactions pourvu que la mémoire de l'opérateur  $K(s; \lambda)$  ne s'étende que sur un intervalle de temps fini  $0 < t_1 < T$ , prouvant ainsi que pour un système homogène l'approximation de Zwanzig est valide.

Etudions la contribution d'ordre trois. Pour cela posons:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \lambda^{-2} C_2(t_1) \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1) \quad (80)$$

où  $C_2(t_1) = \mathcal{L}^{-1}[C_2(z)] = \mathcal{L}^{-1}[\lambda^3 L_1 R_0(z) L_1 R_0(z) L_1]$ , ou bien, explicitement:

$$C_2(t_1) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \begin{array}{l} \lambda^3 \sum_{j_3 < k_3=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq 0} \sum_{j_2 < k_2=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} U_{l_3} i \vec{l}_3 \cdot \\ \vec{D}_{j_3 k_3} \frac{1}{z - L_0} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_{j_3} - \vec{q}_{k_3}) \\ U_{l_2} i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \frac{1}{z - L_0} \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{k_2}) \\ U_{l_1} \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \end{array} \right]$$

L'évaluation de l'action de  $L_0$  et la transformation de Laplace inverse donnent:

$$\begin{aligned} C_2(t_1) = & -\lambda^3 \sum_{j_3 < k_3=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq 0} \sum_{j_2 < k_2=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} U_{l_3} U_{l_2} U_{l_1} \\ & \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_{j_3} - \vec{q}_{k_3}) \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{k_2}) \\ & \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \int_0^{t_1} dt_2 i \vec{l}_3 \cdot \\ & \vec{D}_{j_3 k_3} \exp -i(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) t_2 \times i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \\ & \exp -i(\alpha_{j_1 k_1})(t_1 - t_2) \times i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \end{aligned}$$

Remplaçant dans l'expression de  $I_2$ , il vient:

$$I_2 = -\lambda \sum_{j_3 < k_3=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq 0} \sum_{j_2 < k_2=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} U_{l_3} U_{l_2} U_{l_1} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_{j_3} - \vec{q}_{k_3})$$

$$\begin{aligned}
& \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{k_2}) \cdot \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \\
& \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_{j_3 k_3} \exp -i(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) t_2 \\
& i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \exp -i(\alpha_{j_1 k_1})(t_1 - t_2) \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \\
& \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1).
\end{aligned}$$

Introduisons le changement de variable suivant:  $t_1 = t_1$  et  $\tau' = t_1 - t_2$ . Notons

$I'_2$  l'intégrale double sur la variable temporelle:

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_{j_3 k_3} \exp -i(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) t_2 i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \\
& \exp -i(\alpha_{j_1 k_1})(t_1 - t_2) \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1).
\end{aligned}$$

Tenant compte du changement de variable sur le temps, elle s'écrit:

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2} - t_1} d\tau' i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_{j_3 k_3} \exp -i(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) \tau' \\
& i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \exp -i(\alpha_{j_1 k_1}) t_1 \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1) \\
I'_2 &= \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2} - t_1} d\tau' i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_{j_3 k_3} \exp -i(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) \tau' i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \\
& \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \exp -i(\alpha_{j_1 k_1}) t_1 \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1).
\end{aligned}$$

Lorsque  $\lambda \mapsto 0$  et  $0 < t_1 < T$ , cette expression devient:

$$\begin{aligned}
I'_2 &= \int_0^{\infty} d\tau' i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_{j_3 k_3} \exp -i(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) \tau' i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \\
& \int_0^{\infty} dt_1 \exp -i(\alpha_{j_1 k_1}) t_1 \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau),
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit:

$$I'_2 = i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_{j_3 k_3} \pi \delta_-(\alpha_{j_2 k_2} + \alpha_{j_1 k_1}) i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \pi \delta_-(\alpha_{j_1 k_1}) \cdot i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau).$$

Cette expression est indépendante de  $\lambda$ . De sorte que que l'on ait finalement:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_2(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\lambda \sum_{j_3 < k_3 = 1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq 0} \sum_{j_2 < k_2 = 1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq 0} \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} U_{l_3} U_{l_2} U_{l_1} \\
& \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_{j_3} - \vec{q}_{k_3}) \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{k_2}) \cdot
\end{aligned}$$

$$\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} I'_2 = 0.$$

$I_2(\lambda)$  tend donc vers zéro quand  $\lambda$  tend vers zéro.

Montrons qu'il en est ainsi pour tout  $n > 1$ . Posons:

$$C_n(z) = \lambda^{n+1} [L_1 R_0(z) \dots L_1 R_0(z) L_1] \quad (81)$$

La transformée de Laplace inverse du terme d'ordre  $n$  du développement de  $T(z)$  est:

$C_n(t) = \mathcal{L}^{-1} [C_n(z)] = \lambda^{n+1} \mathcal{L}^{-1} [L_1 R_0(z) \dots L_1 R_0(z) L_1]$ , où nous avons  $n$  facteurs  $L_1 R_0(z)$ .  $I_n(t, \lambda)$  s'écrit:

$$\begin{aligned} I_n(t, \lambda) &= (-i)^n \lambda^{n+1} \lambda^{-2} \sum_{j_{n+1} < k_{n+1}=1}^N \sum_{\vec{l}_n \neq 0} \dots \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} U_{l_n} \dots U_{l_1} \\ &\exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_{j_{n+1}} - \vec{q}_{k_{n+1}}) \dots \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \\ &i \vec{l}_{n+1} \cdot \vec{D}_{j_{n+1} k_{n+1}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ &\int_0^{t_{n-1}} dt_n \exp -i(\alpha_{j_n k_n} + \dots \alpha_{j_1 k_1})(t_{n-1} - t_n) \cdot \dots \\ &i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \exp -i(\alpha_{j_1 k_1}) t_1 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(t - t_1). \end{aligned}$$

Appelant à nouveau l'intégrale sur les variables temporelles  $I'_n(t, \lambda)$  et posant les changements de variables suivants:  $\tau_1 = t_1 - t_2$ ;  $\tau_2 = t_2 - t_3$ ; ... ;  $\tau_{n-1} =$

$t_{n-1} - t_n$ ;  $t = \lambda^{-2} \tau$ ;  $t_1 = t_1$ , il vient:

$$\begin{aligned} I'_n(t, \lambda) &= \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2}} dt_1 \int_0^{\frac{\tau}{\lambda^2} - t_1} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} d\tau_{n-1} i \vec{l}_{n+1} \cdot \vec{D}_{j_{n+1} k_{n+1}} \\ &\exp -i(\alpha_{j_n k_n} + \dots \alpha_{j_1 k_1}) \tau_{n-1} \dots \cdot i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \times \\ &\exp -i(\alpha_{j_1 k_1}) t_1 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau - \lambda^2 t_1). \end{aligned}$$

La limite de  $I'_n(t, \lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers zéro est:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} I'_n(\tau, \lambda) &= i \vec{l}_{n+1} \cdot \vec{D}_{j_{n+1}k_{n+1}} \pi \delta_{-}(\alpha_{j_n k_n} + \dots + \alpha_{j_1 k_1}) \\ & i \vec{l}_n \cdot \vec{D}_{j_n k_n} \pi \delta_{-}(\alpha_{j_{n-1} k_{n-1}} + \dots + \alpha_{j_1 k_1}) \times \dots \times \\ & \pi \delta_{-}(\alpha_{j_1 k_1}) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau), \end{aligned}$$

où nous avons tenu compte de ce que les durées  $\tau_j$  sont inférieures à la durée  $T$  à partir de laquelle le système perd la mémoire de l'interaction.

Portant cette limite dans l'expression de  $I_n(t, \lambda)$  et faisant tendre  $\lambda$  vers zéro, on obtient:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n(\tau, \lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{n-1} \sum_{j_{n+1} < k_{n+1} = 1}^N \sum_{\vec{l}_n \neq 0} \dots \sum_{j_1 < k_1 = 1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} U_{l_n} \dots U_{l_1} \\ & \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_{j_{n+1}} - \vec{q}_{k_{n+1}}) \dots \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) \times i \vec{l}_{n+1} \cdot \\ & \vec{D}_{j_{n+1}k_{n+1}} \pi \delta_{-}(\alpha_{j_n k_n} + \dots + \alpha_{j_1 k_1}) \\ & i \vec{l}_n \cdot \vec{D}_{j_n k_n} \pi \delta_{-}(\alpha_{j_{n-1} k_{n-1}} + \dots + \alpha_{j_1 k_1}) \times \dots \times \\ & \pi \delta_{-}(\alpha_{j_1 k_1}) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} \rho_1(\tau), \end{aligned}$$

$I_n(t, \lambda)$  tend vers zéro pour les mêmes raisons que pour le terme d'ordre deux. L'hypothèse de faible extension temporelle de l'opérateur mémoire de Zwanzig couplée à celle de la validité de la limite de Van Hove (narrowing limit) a permis de transformer le processus stochastique non markovien en un processus markovien. Il est utile de remarquer que si la décomposition de l'hamiltonien du système en deux termes est centrale, le caractère homogène ou non du système et le choix du projecteur ne semblent influencer en rien dans la démonstration car la mise en oeuvre de la limite de Van Hove ne concerne que la dépendance temporelle des expressions étudiées. Toutefois une étude des systèmes inhomogènes s'avère

nécessaire pour apprécier l'action de l'opérateur résolvant libre puisque c'est lui qui fournit les distributions de Dirac par transformation de Laplace inverse.

La théorie de l'amortissement de Zwanzig telle qu'exprimée par les équations (35) et (53) est une théorie exacte.

Le résultat que nous venons d'obtenir pour les systèmes homogènes ne fait que contribuer à donner un fondement sûr aux méthodes d'approximations mises en oeuvre lorsque la théorie est appliquée à l'étude de systèmes physiques définis. En effet bien que la théorie de l'amortissement telle que formulée par Zwanzig soit très largement utilisée dans l'étude des phénomènes de relaxation et partout où la séparation de l'opérateur de Liouville en une partie décrivant l'évolution libre du système et une partie décrivant l'interaction est possible, nous ne connaissons de justification de cette approximation lorsqu'elle est adoptée. Il en est ainsi par exemple en théorie de la relaxation des oscillateurs quantiques et pour certains problèmes de la spectroscopie des plasmas où la portée des interactions peut être considérée comme finie, malgré l'invocation de l'approximation de Born<sup>[26,27,28,29]</sup> dans bien des cas pour contourner la "narrowing limit".



# 4 ETUDE DES SYSTEMES INHOMOGENES EN INTERACTION FAIBLE AU MOYEN DE L'OPERATEUR DE COLLISION

## 4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous montrons que l'équation de Prigogine-Balescu obtenue par Muriel et Dresden au moyen de la technique des opérateurs de projection et sous l'approximation de Zwanzig se déduit d'un calcul au premier ordre du développement de l'opérateur de collision. Mais alors il s'avère nécessaire de faire l'hypothèse, comme nous le verrons, que notre système est faiblement inhomogène. Cette remarque est liée au fait que dans la dérivation due à Muriel et Dresden, l'hypothèse relative à la nature de l'inhomogénéité du point de vue de son extension spatiale est implicitement contenue dans leur hypothèse markovienne. Or ces deux hypothèses sont différentes et ne sont pas liées si l'on considère que l'hypothèse markovienne requiert que la variation de la fonction de distribution par rapport au temps soit indépendante de la fonction de distribution aux instants antérieurs. En d'autres termes l'hypothèse markovienne ne porte que sur la variation du système par rapport au temps alors que les hypothèses sur le degré d'homogénéité du système concernent sa variation par rapport aux variables d'espace.

Pour mieux nous rendre compte de ces considérations, nous allons donner dans ses grandes lignes la dérivation de l'équation pilote due à Muriel et Dresden puis nous montrerons qu'en introduisant l'hypothèse de faible inhomogénéité dès le départ, toutes hypothèses gardées par ailleurs, nous obtenons la même équation d'autant qu'elle est retrouvée à nouveau en considérant l'opérateur de collision de Lippman-Schwinger et en tenant compte du résultat établi au chapitre précédent pour les systèmes en interaction faible l'hypothèse de faible inhomogénéité restant maintenue. Dans toute la suite nous adopterons la notation de Muriel et Dresden.

## 4.2 EQUATION PILOTE DE MURIEL ET DRESDEN

Soit  $P_k$  l'opérateur de projection défini par:

$$P_k X = \frac{1}{\Omega^{N-k}} \int \dots \int X d\vec{q}_{k+1} \dots d\vec{q}_N \quad (82)$$

où  $\Omega$  est le volume du système et  $X$  est une fonction de phase intégrable quelconque. En faisant  $k = 0$ , on retrouve le projecteur de Zwanzig. Soit  $f_N$  la fonction de distribution à  $N$  variables d'espace et  $N$  variables d'impulsion, et soit  $f_k^N$  la fonction de distribution à  $k$  variables spatiales et  $N$  variables d'impulsion, nous avons:

$$f_k^N = P_k f_N = \frac{1}{\Omega^{N-k}} \int \dots \int d\vec{q}_{k+1} \dots d\vec{q}_N f_N(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad (83)$$

Soit aussi l'opérateur  $I_k$  définit par:

$$I_k X = \int \dots \int X d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \quad (84)$$

Nous avons:  $[I_k, P_k] = 0$ , où  $[A, B] = AB - BA$ .

La fonction de distribution réduite est:

$$f_k(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_k, \vec{p}_1 \dots \vec{p}_k, t) = I_k P_k f_N \quad (85)$$

La mise en oeuvre de la méthode de Zwanzig donne l'équation pilote suivante:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial f_k^N}{\partial t} &= P_k L G(t) (1 - P_k) f_N(0) + \\ &P_k L f_k^N(t) - i \int_0^t ds P_k L G(s) (1 - P_k) L \cdot f_k^N(t - s) \end{aligned} \quad (86)$$

où  $G(t) = \exp[-it(1 - P_k)L]$ ;  $L = L_0 + \lambda L_1$

L'application de  $I_k$  à (86) et la prise en compte des relations de commutation permet de l'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} &= - \sum_{j=1}^k \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{q}_j} + \lambda \sum_{j < j'=1}^k \frac{\partial V_{jj'}}{\partial \vec{q}_j} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_{j'}} \right) f_k - \\ &- \lambda^2 \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \int_0^t ds P_k L G(s) (1 - P_k) L_1 \cdot f_k^N(t - s) - \\ &- i \lambda \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N P_k L_1 G(t) (1 - P_k) f_N(0) \end{aligned} \quad (87)$$

où nous avons tenu compte de ce que:

$$\begin{aligned} L_0 &= -i \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} \text{ et} \\ L_1 &= i \sum_{j < j'=1}^k \frac{\partial V_{jj'}}{\partial \vec{q}_j} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_{j'}} \right) \text{ où } V_{jj'} = V(|\vec{q}_j - \vec{q}_{j'}|). \end{aligned}$$

Cette équation est une hiérarchie dans laquelle  $f_k$  est couplée à l'ensemble  $f_k^N$  qui contient le même nombre de variables spatiales mais comporte un nombre différent de variables d'impulsion. Ce mode de couplage remplace le couplage de  $f_k$  à  $f_{k+1}$  qui se manifeste dans la hiérarchie BBGKY.

Les termes cruciaux dans l'étude de l'évolution du système sont les deux derniers que nous notons:

$$M = -\lambda^2 \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \int_0^t ds P_k L G(s) (1 - P_k) L_1 \cdot f_k^N(t-s) \quad (88)$$

et

$$I = -i\lambda \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N P_k L_1 G(t) (1 - P_k) f_N(0) \quad (89)$$

Le développement en série de Fourier du potentiel selon:

$V_{jj'} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{j'})$ , et sa séparation en trois parties:  $V_{jj'} = V_{jj'}^I$  pour  $j$  et  $j' \leq k$ ;  $V_{jj'} = V_{jj'}^{II}$  pour  $j$  et  $j' > k$ ;  $V_{jj'} = V_{jj'}^{III}$  pour  $j < k$  et  $j' > k$ , facilite l'évaluation de l'action de l'opérateur de projection.

Si nous adoptons l'approximation de Zwanzig tout en tenant compte des identités suivantes:

$$\exp \left( -s \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial p} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial p} + \frac{s}{m} \frac{\partial}{\partial q} \right) \exp \left( -s \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} \right) \quad (90)$$

$$\exp \left( -s \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} \right) F(q) \equiv F \left( q - \frac{ps}{m} \right) \exp \left( -s \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} \right), \quad (91)$$

nous parvenons à exprimer le terme de mémoire sous la forme:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \int_0^t ds \sum_{i < j=1}^k \sum_{i'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} |V(\vec{l})|^2 \\
&\quad \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_i) \vec{l} \cdot \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \exp \left[ -\frac{i \vec{l}}{m} \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) s \right] \\
&\quad i \vec{l} \cdot \vec{D}_{ji'} f_k^N(\vec{q}_1 - \frac{\vec{p}_1 s}{m}; \dots \vec{q}_k \frac{\vec{p}_k s}{m}; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_N, t - s) \quad (92)
\end{aligned}$$

Muriel et Dresden introduisent à ce niveau l'hypothèse markovienne qui consiste à effectuer l'opération d'intégration sur la variable temporelle  $s$  de zéro à l'infini (au lieu de zéro à  $t$ ) en supposant que  $f_k^N$  ne dépende pas de  $s$ . Dans ces conditions le terme de mémoire s'écrit:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\pi \lambda^2}{\Omega^2} \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \sum_{i < j=1}^k \sum_{i'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} |V(\vec{l})|^2 \\
&\quad \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_i) \vec{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \delta_- \left[ \frac{\vec{l}}{m} \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) \right] \\
&\quad i \vec{l} \cdot \vec{D}_{ji'} f_k^N(\vec{q}_1; \dots \vec{q}_k; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_N, t). \quad (93)
\end{aligned}$$

Négligeant le terme d'interférence, on obtient pour  $f_k$  l'équation:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k}{\partial t} &= - \sum_{j=1}^k \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{q}_j} + \lambda \sum_{j < j'=1}^k \frac{\partial V_{jj'}}{\partial \vec{q}_j} \cdot \vec{D}_{jj'} f_k + \\
&\quad \frac{\pi \lambda^2}{\Omega^2} \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \sum_{i < j=1}^k \sum_{i'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} |V(\vec{l})|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_i - \vec{q}_{i'}) \vec{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \delta_- \left[ \frac{\vec{l}}{m} (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) \right] \\ & i \vec{l} \cdot \vec{D}_{j' i'} f_k^N(\vec{q}_1; \dots \vec{q}_k; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_N, t). \end{aligned} \quad (94)$$

qui pour  $k=1$  donne l'équation de Prigogine-Balescu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} &= -\frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} + \frac{\pi \lambda^2}{\Omega^2} \int \dots \int d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N \sum_{i'=2}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} |V(\vec{l})|^2 \\ & \vec{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} \delta_- \left[ \frac{\vec{l}}{m} (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) \right] i \vec{l} \cdot \vec{D}_{1i'} f_1^N(t). \end{aligned} \quad (95)$$

Les hypothèses qui sous-tendent l'intégration sur la variable  $s$  reposent sur l'idée de négliger la dépendance de la fonction de distribution d'avec  $s$ . Cela est suggérée par le fait que:

$$\frac{\vec{l} \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) s}{m} \equiv \frac{s}{\tau_D}, \text{ où } \tau_D \text{ mesure la durée de la collision entre les corpuscules d'indice } j \text{ et } i'.$$

Ils arguent que si l'intégrante de (92) ne prend des valeurs appréciables que pour les valeurs de  $s$  sensiblement égales à  $\tau_D$ , et si:

$$f\left(\vec{q}_1 - \frac{\vec{p}_1 \tau_D}{m}, \dots\right) \simeq f(\vec{q}_1, \dots), \text{ alors (93) est valable. Mais cete dernière}$$

équation signifie que la distribution des particules ne varie pas notablement pendant la durée d'une collision ce qui n'est autre que l'hypothèse de faible inhomogénéité.

Nous voyons que l'hypothèse markovienne telle qu'elle est invoquée par Muriel et Dresden contient en fait deux hypothèses; l'une liée à sa dépendance temporelle et l'autre à sa dépendance spatiale pour des durées de l'ordre de celle d'une collision et pour une observation du système sur des intervalles de temps très

longs par rapport à cette durée de collision. Ce constat induit la question suivante: l'hypothèse markovienne peut elle être invoquée pour un système d'inhomogénéité quelconque? Pour l'heure on peut au moins montrer que si l'hypothèse de faible inhomogénéité est formulée avant l'hypothèse markovienne, on aboutit à la même équation démontrant ainsi que les deux hypothèses sont bien découplées.

### 4.3 EQUATION PILOTE POUR UN SYSTEME FAIBLEMENT INHOMOGENE

Considérons un système faiblement inhomogène dans l'approximation de Zwanzig de sorte que l'on puisse considérer à chaque instant que sa fonction de distribution à  $k$  variables spatiales se comporte comme une constante pour de faibles variations de ces variables spatiales. Pour une telle fonction l'équation (85) s'écrit:  $\exp\left(-s\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}\right)F(q) \equiv F(q)$ , car du développement de l'exponentielle en série de l'opérateur de dérivation par rapport aux variables d'espace, seul le premier terme contribue de sorte que nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} M &= -\lambda^2 \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \int_0^t ds P_k L_1 \exp(-isL_0) (1 - P_k) L_1 \cdot f_k^N(t-s) \\ &= -\lambda^2 \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \int_0^t ds P_k L_1 (1 - P_k) L_1(s) \cdot f_k^N(t-s). \end{aligned} \quad (96)$$

La partie spatiale de la fonction de distribution du terme de mémoire n'est pas modifiée par l'action de la fonction de Green décrivant la propagation li-

bre du système. L'évaluation de l'action de tous les opérateurs donne comme précédemment pour le terme de mémoire:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \int \dots \int d\vec{p}_{k+1} \dots d\vec{p}_N \int_0^t ds \sum_{i < j=1}^k \sum_{i'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} |V(\vec{l})|^2 \\
&\quad \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_i) \vec{l} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \exp \left[ -\frac{i \vec{l}}{m} \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) s \right] i \vec{l} \cdot \\
&\quad \cdot \vec{D}_{j i'} f_k^N(\vec{q}_1; \dots \vec{q}_k; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_N, t - s). \tag{97}
\end{aligned}$$

Supposant maintenant que la variation de la fonction de distribution est indépendante de son histoire (hypothèse markovienne), nous écrivons que:

$$f_k^N(\vec{q}_1; \dots \vec{q}_k; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_N, t - s) = f_k^N(\vec{q}_1; \dots \vec{q}_k; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_N, t) \text{ de sorte que}$$

l'intégration sur  $s$  donne à la limite des faibles valeurs de  $\lambda$ :

$$\int_0^t ds \exp \left[ -\frac{i \vec{l}}{m} \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) s \right] = \pi \delta_- \left[ \frac{\vec{l}}{m} \cdot (\vec{p}_j - \vec{p}_{i'}) \right],$$

et en remplaçant dans (97) nous obtenons (93) et par suite (94). Pour  $k = 1$  nous obtenons l'équation de Prigogine-Balescu (95)

#### 4.4 METHODE DE L'OPERATEUR DE COLLISION

L'équation d'évolution écrite avec l'opérateur de collision(35) devient ici:

$$z g_k(z) = i f_k(0) + I_k P_k L_0 g_k^N(z) + I_k P_k T_k(z) g_k^N(z) \tag{98}$$

où  $g_k(z)$  est la transformée de Laplace inverse de  $f_k(t)$  et  $g_k^N(z)$  est celle de  $f_k^N(t)$ .

Le second terme du second membre écrit de manière explicite est:  $I_k P_k L_0 g_k^N(z) =$



$$\begin{aligned}
& I_k P_k \sum_{j=1}^N -i \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k^N(z) \\
&= I_k P_k \sum_{j=1}^N -i \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k^N(z) \\
&= \sum_{j=1}^N -i \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k(z),
\end{aligned}$$

car pour tout  $j > k$  nous avons:  $\frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k^N(z) = 0$ .

De plus,  $P_k$  laisse invariants tous les termes contenus sous le signe somme;  $P_k \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k^N(z) = \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k^N(z)$  et  $I_k g_k^N(z) = g_k(z)$ , puisque  $g_k^N(z)$  ne contient que des variables spatiales d'indice  $j < k$ . Tenant aussi compte de ce que:  $T_k(z) = L_1 + L_1 \sum_{n=1}^{\infty} [R_0(1 - P_k)L_1]^n$ ,

l'équation (98) s'écrit:

$$z g_k(z) = i f_k(0) - i \sum_{j=1}^N i \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k(z) + I_k P_k \sum_{n=0}^{\infty} L_1 [R_0(1 - P_k)L_1]^n g_k^N(z).$$

Dans l'approximation de zwanzig seuls les termes d'ordre  $n = 0$  et  $n = 1$  de  $T_k(z)$  contribuent, de sorte que (98) s'écrive:

$$\begin{aligned}
z g_k(z) &= i f_k(0) - i \sum_{j=1}^N i \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k(z) + I_k P_k L_1 g_k^N(z) + \\
&+ I_k P_k L_1 [R_0(1 - P_k)L_1] g_k^N(z)
\end{aligned} \tag{99}$$

Ecrivons  $L_1$  sous la forme:  $L_1 = L_1^I + L_1^{II} + L_1^{III}$  où  $L_1^I = \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{l' < n'=1}^N \sum_{\vec{l}' \neq 0} V(l) \exp i \vec{l}' \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l}' \cdot \vec{D}_{jn'}$ ,  $L_1^{II} = \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l}' \neq 0} V(l) \exp i \vec{l}' \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l}' \cdot \vec{D}_{jn'}$ ,  $L_1^{III} = \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{j < n'=k+1}^N \sum_{\vec{l}' \neq 0} V(l) \exp i \vec{l}' \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l}' \cdot \vec{D}_{jn'}$ .

Nous avons:  $P_k L_1^I g_k^N(z) = L_1^I g_k^N(z)$ , puisque  $P_k$  commute avec  $L_1^I$ .

Par ailleurs, tenant compte de la définition de  $P_k$ , nous avons:  $P_k L_1^{II} g_k^N(z) = 0$

et  $P_k L_1^{III} g_k^N(z) = 0$ , car  $L_1^{II}$  et  $L_1^{III}$  contiennent des variables spatiales d'indice

supérieur à  $k$  alors que  $g_k^N(z)$  n'en contient pas. Tenant compte de ces relations,

$$\text{il vient: } I_k P_k L_1 g_k^N(z) = I_k P_k L_1^I g_k^N(z)$$

$$= I_k L_1^I g_k^N(z) = \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{i' < n'=1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_{j'} - \vec{q}_{n'}) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k(z)$$

et

$$I_k P_k L_1 [R_0(1 - P_k)L_1] g_k^N(z) = I_k P_k L_1 R_0 L_1 g_k^N(z) - I_k P_k L_1 R_0 P_k L_1 g_k^N(z)$$

$$= M_1 - M_2$$

$$\text{avec: } M_1 = I_k P_k L_1 R_0 L_1 g_k^N(z) \text{ et } M_2 = I_k P_k L_1 R_0 P_k L_1 g_k^N(z).$$

Tenant compte des propriétés générales des opérateurs, nous avons:  $M_1 =$

$$I_k P_k L_1^I R_0 L_1^I g_k^N(z) + I_k P_k L_1^{II} R_0 L_1^{II} g_k^N(z)$$

et

$$M_2 = I_k P_k L_1^I R_0 L_1^I g_k^N(z),$$

de sorte que:

$$M_1 - M_2 = I_k P_k L_1^{II} R_0 L_1^{II} g_k^N(z).$$

L'opérateur  $R_0(z)$  est donné par (72). Son étude est cruciale dans l'évaluation de (98). Etudions d'abord l'action de  $L_0 L_1^{II}$  sur  $g_k^N(z)$ . Pour cela séparons  $L_0$  en

deux parties:  $L_0 = L_0^I + L_0^{II}$  avec:

$$L_0^I = \sum_{j'=1}^k -i \frac{\vec{p}_{j'}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_{j'}}$$

et

$$L_0^{II} = \sum_{j'=k+1}^N -i \frac{\vec{p}_{j'}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_{j'}}.$$

Nous avons alors:

$$L_0 L_1^{II} g_k^N(z) = \frac{-i^2 \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} \sum_{j'=1}^k V(l) \frac{\vec{p}_{j'}}{m}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \vec{q}_{j'}} \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z) + \\ & + \frac{i^2 \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} \sum_{j'=k+1}^N V(l) \frac{\vec{p}_{j'}}{m} \cdot \\ & \frac{\partial}{\partial \vec{q}_{j'}} \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z). \end{aligned}$$

Dans le premier terme l'opération de dérivation porte sur la fonction exponentielle et sur la fonction  $g_k^N(z)$  tandis que dans le second il ne porte que sur la fonction exponentielle; cette dernière étant seule à contenir des variables spatiales d'indice supérieur à  $k$ . Effectuant la dérivation, nous avons:

$$\begin{aligned} L_0 L_1^H g_k^N(z) &= \frac{-i^2 \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \frac{\vec{p}_j}{m} i \vec{l} \cdot \\ & \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z) - \\ & \frac{-i^2 \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \frac{\vec{p}_{j'}}{m} \cdot \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) \\ & i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k^N(z) \\ & \frac{-i^2 \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} \sum_{j'=1}^k V(l) \frac{\vec{p}_{n'}}{m} (-i \vec{l}) \cdot \\ & \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z). \end{aligned}$$

Si la fonction de distribution des corpuscules varie peu d'un point à un autre de l'espace, nous pouvons négliger le second terme devant le premier et obtenir, tout calcul fait,

$$\begin{aligned} L_0 L_1^H g_k^N(z) &= \frac{i \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'}) \\ & \left[ \frac{-\vec{l}}{m} (\vec{p}_{j'} - \vec{p}_{n'}) \right] i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z) \end{aligned}$$

et

$$L_0^n L_1^H g_k^N(z) = \frac{i \lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'})$$

$$\left[ \frac{-\vec{l}}{m} (\vec{p}_{j'} - \vec{p}_{n'}) \right]^n i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z);$$

d'où:

$$R_0 L_1^H g_k^N(z) = \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} z^{-(n+1)} V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'})$$

$$\left[ \frac{-\vec{l}}{m} (\vec{p}_{j'} - \vec{p}_{n'}) \right]^n i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z),$$

soit:

$$R_0 L_1^H g_k^N(z) = \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{j=1}^k \sum_{n'=k+1}^N \sum_{\vec{l} \neq 0} V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_{n'})$$

$$\frac{1}{z - \frac{\vec{l}}{m} (\vec{p}_{j'} - \vec{p}_{n'})} i \vec{l} \cdot \vec{D}_{jn'} g_k^N(z), \quad (100)$$

Nous avons alors:

$$I_k P_k L_1^H R_0 L_1^H g_k^N(z) = I_k P_k \lambda^2 \left( \frac{i}{\Omega} \right)^2 \sum_{j_2=1}^k \sum_{n_2=k+1}^N \sum_{j_1=1}^k \sum_{n_1=k+1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq 0}$$

$$\sum_{\vec{l}_1 \neq 0} V(l_2) V(l_1) \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{n_2}) \bullet \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{n_1})$$

$$i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 n_2} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1})} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} g_k^N(z).$$

L'évaluation de l'action de  $P_k$  qui intègre sur les variables spatiales  $\vec{q}_{n_1}$  et  $\vec{q}_{n_2}$

donne:

$$I_k P_k L_1^H R_0 L_1^H g_k^N(z) = I_k \lambda^2 \left( \frac{i}{\Omega} \right)^2 \sum_{j_2, j_1=1}^k \sum_{n_1=k+1}^N \sum_{\vec{l}_2, \vec{l}_1 \neq 0} V(l_2) V(l_1) \delta_{\vec{l}_2 + \vec{l}_1}^{K_r}$$

$$\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{j_2}) i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 n_2} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1})} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} g_k^N(z).$$

Sommant sur  $\vec{l}_2$ , nous obtenons:

$$I_k P_k L_1^H R_0 L_1^H g_k^N(z) = -I_k \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \sum_{j_2, j_1=1}^k \sum_{n_1=k+1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq 0} V^2(l_1)$$

$$\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{j_2}).$$

$$i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_2 n_1} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1})} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} g_k^N(z).$$

Pour un grand système nous pouvons écrire:  $I_k P_k L_1^{II} R_0 L_1^{II} g_k^N(z) = -I_k \frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_{j_2, j_1=1}^k$

$$\sum_{n_1=k+1}^N \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{j_2})$$

$$i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_2 n_1} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1})} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} g_k^N(z).$$

L'équation (99) s'écrit, en tenant compte de ces résultats,  $z g_k(z) = i f_k(0) -$

$$i \sum_{j=1}^N i \frac{\vec{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_j} g_k(z) +$$

$$\frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{j_1 < n_1=1}^N \int d\vec{l}_1 V(l_1) V(l) \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{n_1}) i \vec{l} \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} g_k(z)$$

$$- I_k \frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_{j_2, j_1=1}^k \sum_{n_1=k+1}^N \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{j_2})$$

$$i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_2 n_1} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1})} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} g_k^N(z).$$

La transformée de Laplace inverse de cette équation est:  $i \frac{\partial f_k(t)}{\partial t} = -i \sum_{j_1=1}^N i \frac{\vec{p}_{j_1}}{m}$

$$\frac{\partial f_k(t)}{\partial \vec{q}_{j_1}} + \frac{i\lambda}{\Omega} \sum_{j_1 < n_1=1}^N \int d\vec{l}_1 V(l_1)$$

$$\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{n_1}) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} f_k(t)$$

$$+ i I_k \frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_{j_2, j_1=1}^k \sum_{n_1=k+1}^N \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{j_2})$$

$$i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_2 n_1} \int_0^t dt_1 \exp \left[ -i \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) t_1 \right]$$

$$i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} f_k^N(t - t_1).$$

Si l'on suppose que le processus est markovien, on a:

$$f_k^N(t - t_1) = f_k^N(t).$$

Si par ailleurs on s'intéresse au comportement asymptotique du système, on a:

$$\int_0^t dt_1 \exp \left[ -i \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) t_1 \right] = \int_0^\infty dt_1 \exp \left[ -i \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) t_1 \right]$$

$\pi\delta_- \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) \right]$  et l'équation d'évolution de  $f_k(t)$  devient:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_k(t)}{\partial t} &= - \sum_{j_1=1}^N i \frac{\vec{p}_{j_1}}{m} \cdot \frac{\partial f_k(t)}{\partial \vec{q}_{j_1}} + \\
&\lambda \sum_{j_1 < n_1=1}^N \int d\vec{l}_1 V(l_1) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{n_1}) i \vec{l}_1 \\
&\cdot \vec{D}_{j_1 n_1} f_k(t) + I_k \frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_{j_2, j_1=1}^k \sum_{n_1=k+1}^N \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 \\
&\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{j_2}) i \vec{l}_1 \cdot \\
&\vec{D}_{j_2 n_1} \pi\delta_- \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) \right] i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} f_k^N(t) \quad (101)
\end{aligned}$$

Pour  $k = 1$ , nous avons:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(t)}{\partial t} &= - \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1(t)}{\partial \vec{q}_1} + I_1 \frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_{n_1=2}^N \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 i \vec{l}_1 \cdot \\
\vec{D}_{j_2 n_1} \pi\delta_- \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) \right] &i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 n_1} f_1^N(t).
\end{aligned}$$

Explicitant l'action de l'opérateur  $I_1$  et tenant en compte l'identité des particules,

il vient:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(t)}{\partial t} &= - \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1(t)}{\partial \vec{q}_1} + \pi \frac{\lambda^2 (N-1)}{\Omega} \int d\vec{p}_2 \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 \\
i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{12} \delta \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \right] &f_1^2(t),
\end{aligned}$$

la contribution due à la partie principale de  $\delta_- \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{n_1}) \right]$  s'étant annulée par symétrie. A la limite thermodynamique, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1(t)}{\partial t} &= - \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1(t)}{\partial \vec{q}_1} + \pi \lambda^2 C \int d\vec{p}_2 \int d\vec{l}_1 |V(l_1)|^2 i \vec{l}_1 \cdot \\
\bullet \vec{D}_{12} \delta \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \right] &f_1^2(t) \quad (102)
\end{aligned}$$

où:  $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Omega \rightarrow \infty}} \frac{N-1}{\Omega} = C.$

Cette équation est celle de Prigogine-Balescu. Nous l'avons obtenue à partir de l'analyse de l'opérateur de collision dans l'approximation de Zwanzig. Cette analyse nous a permis de voir qu'elle est valable pour un système de faible inhomogénéité.

En effet cette hypothèse se découple de l'hypothèse markovienne alors que dans la dérivation due à Muriel et Dresden, il ne semble pas en être ainsi.

# 5 PROCESSUS STOCHASTIQUE DANS UN PLASMA HOMOGENE HORS D'EQUILIBRE

## 5.1 INTRODUCTION

Les chapitres précédents nous ont permis de voir que l'approche de Zwanzig apporte de grandes simplifications dans la théorie des processus irréversibles tant que l'on s'intéresse à des systèmes en interaction faible pour lesquels l'approximation de Zwanzig est valable. Comme pour toutes les autres approches mentionnées plus haut, elle donne une intégrale de collision divergente pour les interactions de portée infinie. Ces divergences ont pu être levées autant dans le cadre de la théorie BBGKY que de celle de Balescu. Il se pose alors le problème de la levée de divergence dans le cadre du formalisme de Zwanzig. A notre connaissance aucune solution n'a été apportée à cette difficulté. Nous l'aborderons dans ce chapitre en nous appuyant sur les hypothèses physiques naturelles posées par Balescu.

Si l'on se rappelle que l'objectif premier de Zwanzig et de ses suivants fut d'établir une théorie moins lourde à manipuler que celle de Van Hove et Prigogine, on se rend compte de l'intérêt d'une telle étude pour les systèmes physiques comme les plasmas dont la description est très malaisée en raison de la nature même des interactions de longue portée dont ils sont le siège. Nous ne considérerons dans ce travail que le problème du plasma homogène.



## 5.2 DERIVATION DE L'EQUATION BLG

### 5.2.1 POSITION DU PROBLEME ET HYPOTHESES

Considérons un plasma homogène complètement ionisé dans l'approximation de la mécanique classique. La mise en oeuvre de l'approximation de Zwanzig conduit à une intégrale de collision divergente. Le fait est que nous ne disposons pas de paramètre de perturbation suffisamment petit pour développer une théorie de perturbation classique. Ce constat est une caractéristique générale de toutes les approches. Pour contourner la difficulté on peut remarquer avec Balescu qu'une théorie du plasma hors d'équilibre convenable doit être consistante par rapport à la théorie du plasma en équilibre thermodynamique qui montre de manière rigoureuse que le potentiel décrivant l'interaction coulombienne est atténué par le comportement collectif du plasma. En moyenne la portée du potentiel coulombien est finie de sorte que le potentiel effectif en un point de l'espace distant de  $|\vec{r}|$  d'une particule donnée du système est:

$$V_{eff} = \frac{e^2}{r} \exp\left(\frac{-4\pi e^2 C r}{kT}\right), \quad (103)$$

où  $e$  est la charge élémentaire,  $C$  la densité des électrons du système dans la limite thermodynamique,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température d'équilibre du système. Compte tenu de ce fait on peut ne retenir dans le développement de l'opérateur de collision que les termes donnant une contribution de l'ordre de  $e^2(e^2C)^n$ . Si par ailleurs nous faisons l'hypothèse de chaos

moléculaire à l'instant initial, le formalisme de Zwanzig s'avère être propre à une renormalisation de l'énergie levant ainsi la divergence de l'intégrale de collision et donnant une équation rigoureusement identique à l'équation BLG.

Dans les chapitres précédents nous nous sommes familiarisés avec les différents opérateurs essentiels au développement du formalisme. De l'étude du gaz homogène à celui du plasma homogène, seule change la nature du potentiel d'interaction de sorte que l'écriture formelle de l'opérateur de collision reste inchangée d'un problème à l'autre. Nous avons donc pour un tel système, dans le formalisme de Zwanzig, l'équation d'évolution de la fonction de distribution des vitesses donnée par:

$$zg(z) = if_1(0) + PT(z)g(z), \quad (104)$$

où  $g(z)$  est la transformée de Laplace de la fonction de distribution des vitesses et des positions des électrons,  $P$  est l'opérateur de projection dans l'espace des impulsions et  $T(z)$  est l'opérateur de collision (52) de Zwanzig,  $z$  étant un nombre complexe.

Si l'on s'intéresse à la fonction de distribution à une particule, on intègre (104) sur les impulsions de toutes les particules sauf celle de la particule numérotée  $\alpha$  obtenant:

$$zg_\alpha(z) = if_{1\alpha}(0) + I_\alpha PT(z)g(z), \quad (105)$$

où nous avons pour  $T(z)$  l'expression:

$$T(z) = \sum_0^{\infty} L^1 [R^0(z) (1 - P)L^1]^n, \quad (106)$$

avec:

$$L_1 = ie^2 \frac{\partial U(q_{jk})}{\partial \vec{q}_j} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k} \right), \quad (107)$$

$$\text{et } e^2 U(|\vec{q}_j - \vec{q}_k|) = \frac{e^2}{(|\vec{q}_j - \vec{q}_k|)}.$$

Soit, en prenant la transformée de Fourier de  $U(q_{jk})$ ,

$$L_1 = ie^2 \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{j < k=1}^N \sum_{\vec{l} \neq \vec{0}} \exp i \vec{l} \cdot (\vec{q}_j - \vec{q}_k) U_l i \vec{l} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \vec{p}_j} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_k} \right)$$

Il nous faut sélectionner les différents termes de l'opérateur de collision en ne retenant que ceux qui sont proportionnels à  $e^2(e^2C)^n$ . Par ailleurs nous adoptons l'hypothèse de chaos moléculaire à l'instant initial. On suppose que la fonction de distribution à  $N$  particules est égale au produit des fonctions de distribution de chacune des particules à l'instant initial. Kac<sup>[34]</sup> a montré que cette propriété une fois réalisée dans les conditions initiales se conserve dans le temps; cette hypothèse sera essentielle dans la dérivation qui suit.

Le terme d'ordre zéro est manifestement nul en vertu des propriétés de l'opérateur de projection. Evaluons explicitement la contribution d'ordre un, son étude a été faite lors de la dérivation de l'équation de Prigogine-Brout, il suffit d'y remplacer partout  $\lambda$  par  $e^2$ . On obtient alors:  $C_1(z) = I_\alpha P L_1 R^0(z) L_1 g(z)$  qui s'écrit:

$$C_1(z) = i^2 e^4 \frac{(2\pi)^6}{V^2} I_\alpha P \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) \times U_{l_2} U_{l_1} i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_\alpha$$

$$\frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{k_1})} \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) i \vec{l}_1 \vec{D}_{j_1 k_1} g(z)$$

On notera que pour obtenir ce résultat nous avons tenu compte de ce que  $I_\alpha$  et  $P$  commutent et nous avons supposé que toute fonction de phase  $X(q, p)$  est telle que:

$$\int_V d\vec{p} \frac{\partial X(q, p)}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (108)$$

De sorte que pour toute fonction de phase, l'expression  $I_\alpha \vec{D}_{j_2 k_2} X(q, p)$  n'est non nulle que si  $j_2 = \alpha$  ( $j_2 \neq k_2$ ) ou  $k_2 = \alpha$  ( $j_2 \neq k_2$ ). Ces considérations seront systématiquement utilisées dans la suite.

Puisque dans la contribution  $C_1(z)$  l'opérateur  $P$  n'agit que sur le produit  $\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1})$ , nous pouvons alléger l'écriture en restreignant l'étude de l'action de  $P$  à celle de  $P \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1})$ .

Nous avons vu que:  $P \exp(i \vec{l} \cdot \vec{q}) = \delta_{\vec{l}}^{Kr}$

$$\begin{aligned} \text{Supposons que l'on ait: } \vec{q}_{k_2} &= \vec{q}_{k_1}, \text{ alors: } P \exp -i \vec{l}_2 \cdot \vec{q}_{k_2} \exp -i \vec{l}_1 \cdot \vec{q}_{k_1} \\ &= P \exp -i (\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \vec{q}_{k_2} \\ &= P \exp -i (\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \vec{q}_{k_1} = \delta_{(\vec{l}_2 + \vec{l}_1)}^{Kr} = 1 \text{ si } (\vec{l}_2 + \vec{l}_1) = 0 \text{ ou zéro si } \\ &(\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Il en ressort que l'action de l'opérateur  $P$  sur le produit ne donne un résultat

non nul que si chaque variable spatiale d'un facteur est au moins égale à une variable spatiale d'un autre facteur compte tenu de l'inégalité imposée aux indices. Cette remarque est générale. Elle est valable pour tout produit de fonction exponentielle de la forme de celles que nous avons dans les différentes contributions. Dès qu'il existe une variable  $\vec{q}_m$  non identique à aucune autre variable, l'action de  $P$  annule le produit. Nous allons développer le calcul explicite pour mieux appréhender l'action de  $P$  et sélectionner les termes qui contribuent à  $C_1(z)$ , mais aussi pour nous rendre compte de la possibilité et de la nécessité d'utiliser des diagrammes pour représenter ces différents termes. Nous avons:

$$\begin{aligned}
P \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) &= \\
= P \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) [\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) + & \\
+ \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_3) + \dots + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_N) & \\
\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3) + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_4) + \dots + & \\
\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_N) + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_4) + \dots + & \\
\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_N) + \dots + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{N-1} - \vec{q}_N)]. &
\end{aligned}$$

Si  $\vec{q}_\alpha \neq \vec{q}_1$ ,  $\vec{q}_\alpha \neq \vec{q}_2$  et  $\vec{q}_{k_2} = \vec{q}_2$ , alors:  $P \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) = P \exp i \vec{l}_2 \cdot \vec{q}_\alpha$   
 $\exp -i(\vec{l}_2 - \vec{l}_1) \cdot \vec{q}_1 \exp -i \vec{l}_1 \cdot \vec{q}_2$   
 $= \delta_{\vec{l}_2}^{K_r} \delta_{(\vec{l}_2 - \vec{l}_1)}^{K_r} \delta_{\vec{l}_1}^{K_r} = \delta_{\vec{l}_2}^{K_r} \delta_{\vec{l}_1}^{K_r} = 0,$   
car par hypothèse:  $\vec{l}_2 \neq \vec{0}$  et  $\vec{l}_1 \neq \vec{0}$ .

Si  $\vec{q}_\alpha = \vec{q}_1$  et  $\vec{q}_{k_2} = \vec{q}_2$  alors:  $P \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_2}) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 -$

$$\vec{q}_2) = P \vec{q}_\alpha \exp i(\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \cdot \vec{q}_\alpha$$

$$\exp -i(\vec{l}_2 + \vec{l}_1) \cdot \vec{q}_2$$

$$= \delta_{(\vec{l}_2 + \vec{l}_1)}^{Kr} \delta_{-(\vec{l}_2 + \vec{l}_1)}^{Kr} = \delta_{(\vec{l}_2 + \vec{l}_1)}^{Kr}.$$

On a donc:

$$C_1(z) = i^2 e^4 \frac{(2\pi)^6}{V^2} I_\alpha \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \sum_{\vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \delta_{(\vec{l}_2 + \vec{l}_1)}^{Kr} U_{l_2} U_{l_1}$$

$$i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_\alpha \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{\alpha k_2} g(z)$$

$$C_1(z) = i^2 e^4 \frac{(2\pi)^6}{V^2} I_\alpha \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \sum_{\vec{l}_1 \neq \vec{0}} |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{k_2 \alpha} g(z).$$

Considérant que pour un grand système:

$$\frac{8\pi^3}{V} \sum_{\vec{l}_1 \neq \vec{0}} () \longrightarrow \int d\vec{l}_1, \text{ on a:}$$

$$C_1(z) = i e^4 \frac{i 8\pi^3}{V} I_\alpha \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{k_2 \alpha} g(z).$$

L'hypothèse de chaos moléculaire valable à chaque instant s'écrit:

$$f_1(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t) = f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_2, t) \dots f_1(\vec{p}_N, t) \quad (109)$$

Mais  $g(z)$  ne factorise pas de la même manière.

Soit  $\tilde{C}_1(t)$  la transformée de Laplace inverse de  $C_1(z)$ .  $\varsigma$  étant un contour convenable,

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varsigma} dz \exp(-izt) i e^4 \frac{i 8\pi^3}{V} I_\alpha \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha$$

$$\frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m}(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{k_2\alpha} g(z)$$

Nous pouvons opérer une transformation de Laplace inverse partielle pour pouvoir mettre à profit la relation (109):

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{2i\pi_0} \int_0^t dt_1 i e^4 \frac{i8\pi^3}{V} I_\alpha \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \int dz \exp(-izt_1) \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m}(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{k_2\alpha} f_1(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t - t_1)$$

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{2i\pi_0} \int_0^t dt_1 i e^4 \frac{i8\pi^3}{V} I_\alpha \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \int dz \exp(-izt_1) \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m}(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{k_2\alpha} f_1(\vec{p}_1, t - t_1) f_1(\vec{p}_2, t - t_1) \dots f_1(\vec{p}_N, t - t_1)$$

Tenant compte de ce que:

$\int d\vec{p}_j f_1(\vec{p}_j, t - t_1) = 1$  et explicitant l'action de l'opérateur  $I_\alpha$ , il vient:

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{2i\pi_0} \int_0^t dt_1 i e^4 \frac{i8\pi^3}{V} \sum_{k_2 \neq \alpha=1}^N \int d\vec{p}_{k_2} \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \int dz \exp(-izt_1) \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m}(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{k_2\alpha} f_1(\vec{p}_{k_2}, t - t_1) f_1(\vec{p}_\alpha, t - t_1).$$

Les corpuscules étant identiques, on a:

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{2i\pi_0} \int_0^t dt_1 i e^4 \frac{i8\pi^3}{V} (N - \alpha) \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \int dz \exp(-izt_1) \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m}(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_{k_2})} i \vec{l}_1 \vec{D}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t - t_1) f_1(\vec{p}_\alpha, t - t_1).$$

A la limite thermodynamique, on a:

$$\tilde{C}_1(t) = \frac{1}{2i\pi_0} \int_0^t dt_1 i e^2 (i8\pi^3) (e^2 C) \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \int dz \exp(-izt_1) \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m}(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1)} i \vec{l}_1 \vec{D}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t - t_1) f_1(\vec{p}_\alpha, t - t_1).$$

La contribution d'ordre un à la variation de la fonction de distribution à une particule est "non markovienne"; sa valeur à l'instant  $t$  dépend de l'histoire du système c'est à dire de sa valeur à l'instant  $t_1$ . Telle qu'elle est donnée cette contribution vaut pour toutes les étapes de l'évolution du système. Mais l'évaluation de l'intégrale sur le temps s'avère difficile et des hypothèses simplificatrices doivent être introduites pour parvenir à des expressions exploitables.

Nous avons:

$$\frac{1}{2i\pi} \int dz \exp(-izt_1) \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1)} = -i \exp -\frac{i \vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1) t_1$$

Il s'en suit que, lorsque l'hypothèse markovienne est faite et que l'intégration sur le temps est effectuée en considérant que les fonctions de  $\vec{l}_1$  et de  $\vec{p}_1$  varient lentement, la dernière expression de  $\tilde{C}_1(t)$  se réduit à:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1(t) = & 8\pi^3 e^2 (e^2 C) \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 |U_{l_1}|^2 i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \pi \delta_+^{\alpha 1} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{1\alpha} \\ & f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_\alpha, t) \end{aligned} \quad (110)$$

où

$$\pi \delta_+ \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1) \right] = \pi \delta \left[ \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1) \right] + i \text{Pr} \left( \frac{1}{\frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_1)} \right)$$

Evaluons les contributions d'ordre supérieur. La contribution d'ordre deux est:

$$C_2(z) = I_\alpha P L_1 R^0(z) L_1 R^0(z) L_1 g(z). \quad (111)$$



Soit en explicitant tous les facteurs:

$$\begin{aligned}
C_2(z) &= e^6 \left( \frac{i8\pi^3}{V} \right)^3 I_\alpha P \sum_{k_3 \neq \alpha=1}^N \sum_{j_2 < k_2=1}^N \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_3}) \\
&\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \vec{q}_{k_2}) \times U_{l_3} U_{l_2} U_{l_1} \\
&i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_\alpha \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_2}{m} \cdot (\vec{p}_{j_2} - \vec{p}_{k_2}) - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{k_1})} \\
&i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{j_2 k_2} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_{j_1} - \vec{p}_{k_1})} \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1}) i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{j_1 k_1} g(z).
\end{aligned}$$

Cette dernière expression s'explicite en opérant une sommation sur les indices  $(j_1, k_1)$ ;  $(j_2, k_2)$ ; et  $k_3$  et en prenant en compte les propriétés de l'opérateur de projection  $P$  mentionnées plus haut. Pour avoir une idée, explicitons l'expression:

$$\begin{aligned}
P \sum_{k_3 \neq \alpha=1}^N \sum_{j_2 < k_2=1}^N \sum_{j_1 < k_1=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_3}) \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{j_2} - \\
\vec{q}_{k_2}) \\
\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{j_1} - \vec{q}_{k_1})
\end{aligned}$$

Nous obtenons après avoir effectué les sommations sur les couples d'indices  $(j_1, k_1)$  et  $(j_2, k_2)$ , l'expression:

$$\begin{aligned}
P \sum_{k_3 \neq \alpha=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_3}) [\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) + \\
\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_3) + \dots + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_N) + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3) + \\
\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_4) + \dots + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_N) + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_4) + \\
\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_5) + \dots \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_N) + \dots + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_{N-1} - \vec{q}_N)] \\
[\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_3) + \dots + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_N) + \\
\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3) + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_4) + \dots + \\
\exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_N) + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_4) + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_5) + \dots +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_N) + \dots + \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{N-1} - \vec{q}_N)] \\
& = P \sum_{k_3 \neq \alpha=1}^N \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_3}) \{ \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\
& \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_3) + \dots + \\
& \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_N) + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\
& \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3) + \dots + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_N) + \\
& \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_4) + \dots + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\
& \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_3 - \vec{q}_N) + \dots + \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\
& \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_{N-1} - \vec{q}_N) + \dots + \text{autres termes} \}.
\end{aligned}$$

En effectuant la sommation sur  $k_3$ , le premier terme entre accolades donne, sous l'action de  $P$  une contribution nulle sauf si  $\alpha = 1$  et  $k_3 = 2$ . soit  $A_{\alpha 2}$  la contribution à  $C_2$  d'un tel terme, nous avons:

$$\begin{aligned}
A_{\alpha 2} & = e^6 \left( \frac{i8\pi^3}{V} \right)^3 I_\alpha P(N - \alpha) \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_2) \\
& \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_2) \\
& \times U_{l_3} U_{l_2} U_{l_1} i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_\alpha \\
& \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_2}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2) - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2)} \\
& i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{\alpha 2} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2)} i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{\alpha 2} g(z).
\end{aligned}$$

La prise en compte de l'action de  $P$  donne:  $A_{\alpha 2} = e^6 \left( \frac{i8\pi^3}{V} \right)^3 I_\alpha (N -$

$$\begin{aligned}
& \alpha) \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \delta_{\vec{l}_3 + \vec{l}_2 + \vec{l}_1}^{K_r} \times U_{l_3} U_{l_2} U_{l_1} \\
& i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_\alpha \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_2}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2) - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2)}
\end{aligned}$$

$$i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{\alpha 2} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2)} i \vec{l} \cdot \vec{D}_{\alpha 2} g(z).$$

En sommant sur  $\vec{l}_3$  nous obtenons:

$$A_{\alpha 2} = e^4 i^3 8 \pi^3 (e^2 C) I_\alpha \sum_{\vec{l}_3 \neq \vec{0}, \vec{l}_2 \neq \vec{0}, \vec{l}_1 \neq \vec{0}} \times U_{(-\vec{l}_2 + \vec{l}_1)} U_{l_2} U_{l_1} \\ i \vec{l}_3 \cdot \vec{D}_\alpha \frac{1}{z - \frac{(\vec{l}_2 + \vec{l}_1)}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2)} \\ i \vec{l}_2 \cdot \vec{D}_{\alpha 2} \frac{1}{z - \frac{\vec{l}_1}{m} \cdot (\vec{p}_\alpha - \vec{p}_2)} i \vec{l} \cdot \vec{D}_{\alpha 2} g(z). \quad (112)$$

Nous voyons donc que des termes de la sorte donnent à la limite thermodynamique, une contribution de l'ordre de  $e^4(e^2 C)$  que l'on peut négliger devant une contribution de l'ordre de  $e^2(e^2 C)$ . On remarquera que le nombre de relations entre les vecteurs d'onde exprimées par les facteurs  $\delta$  de Kroeneker est plus important pour la contribution non négligeable que pour la contribution négligeable. C'est cette propriété dite "singularité diagonale de Van hove" qui est à la base de son formalisme<sup>[33]</sup> et de celle de l'école de Bruxelles. Ici elle se trouve naturellement vérifiée par notre système et se manifeste sous l'action de l'opérateur de projection.

Le deuxième terme entre accolades dans la partie explicitée de  $C_2(z)$  ne donne une contribution non nulle que si  $\vec{q}_2$  et  $\vec{q}_3$  sont liées à  $\vec{q}_\alpha$  ou  $\vec{q}_{k_2}$ . Or  $\alpha$  est un indice fixé et a ici la valeur 1 (arbitrairement attribuée eu égard à l'identité des corpuscules) donc le second terme et tous les termes qui suivent jusqu'à

$\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_N)$  donne une contribution nulle sous l'action de  $P$ . Le terme  $\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3)$  donnera une contribution non nulle si  $k_3 = 3$  car on aurait le produit  $\exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_3) \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3)$  dans lequel il n'y a aucune variable qui ne soit égale à une autre provenant d'un autre facteur. Nous avons donc:  $P \exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_3) \exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_3) = \exp i(\vec{l}_3 + \vec{l}_2) \cdot \vec{q}_\alpha$

$$\exp -i(\vec{l}_3 + \vec{l}_1) \cdot \vec{q}_3 \exp -i(\vec{l}_2 - \vec{l}_1) \cdot \vec{q}_2 = \delta_{\vec{l}_3 + \vec{l}_2}^{Kr} \delta_{\vec{l}_3 + \vec{l}_1}^{Kr} \delta_{\vec{l}_2 - \vec{l}_1}^{Kr}.$$

Tous les autres termes jusqu'à  $\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_N)$  donnent une contribution nulle identique à la précédente lorsque  $k_3$  prend des valeurs allant de 4 à  $N$ .

Tous les termes qui suivent ayant le facteur  $\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2)$  donnent tous une contribution nulle. En effet ils comportent quatre variables toutes différentes qui ne peuvent compenser le facteur  $\exp i \vec{l}_3 \cdot (\vec{q}_\alpha - \vec{q}_{k_3})$  apporté par la sommation sur  $k_3$ . Toutefois la suite des termes abrégés dans "autres termes" ne donne pas des contributions toutes nulles; leurs contributions peuvent être évaluées comme pour les termes précédents. Ainsi si on considère le terme,

$\exp i \vec{l}_2 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_3) \exp i \vec{l}_1 \cdot (\vec{q}_1 - \vec{q}_2)$ , il donne une contribution non nulle pourvu que  $q_{k_3} = q_3$ .

L'évaluation de tous les termes contribuant à  $C_2(t)$  est en principe possible mais leur prise en compte pour un système justiciable de la mécanique statistique

est une entreprise désespérée. On remarquera en outre que l'on ne peut arrêter les calculs au premier ordre car chaque contribution  $C_n$  contient à la fois des termes négligeables et des termes non négligeables. Ce sont ces considérations qui nous fondent à mettre au point une technique de diagrammes.

Tant que l'on ne s'intéressait qu'à des systèmes physiques faiblement perturbés, le formalisme de Zwanzig avait l'avantage sur les autres théories de nous affranchir de l'usage des diagrammes, mais alors une théorie de perturbation au premiers ordres dans le développement de l'opérateurs de collision suffisait pour rendre compte de l'évolution du système. Pour un système tel que le plasma nous sommes obligés de prendre en compte toutes les contributions non identiquement nulles sous l'action de l'opérateur de projection dans le sous espace des impulsions de l'espace des phases.

Les différentes contributions à la dérivée par rapport au temps de la fonction de distribution homogène à une particule peuvent être représentées par des diagrammes qui permettent de sélectionner aisément les contributions non nulles et non négligeables.

### 5.2.2 DIAGRAMMES

La contribution à  $C_1(t)$  peut être symbolisée par le diagramme  $d_1$  de la Figure.1.(voir figures)

La ligne horizontale supérieure porte les variables spatiales indexées  $j$  (nous ne

marquons que l'indice) et la ligne horizontale inférieure celles indexées  $n$ . La ligne courbe, quelque soit sa position indique que les variables qu'elle relie sont égales. Les indices situées sur une même verticale sont ceux contenus dans l'expression d'un opérateur d'interaction donné. A une ligne courbe complète reliant plusieurs variables est associée un facteur  $\delta^{Kr}$  traduisant le résultat de l'évaluation de l'action de l'opérateur de projection  $P$ . A un vecteur  $\vec{l}_m$  quelconque contenu dans le delta de Kronecker est affecté un signe plus si la variable à laquelle il est rattaché appartient à la ligne horizontale supérieure et un signe moins si elle appartient à une ligne horizontale inférieure. En outre à chaque indice est associé un facteur  $eV^{-1/2}U(l)^{1/2}$ .

Cette règle de construction demeure valable pour les diagrammes représentant les contributions d'ordre supérieur. Puisqu'un diagramme représente un terme pour lequel l'action de l'opérateur de projection est déjà évaluée, il ne saurait contenir d'indice non relié à aucun autre indice du diagramme. Ainsi pour l'évaluation de  $C_2(t)$ , les diagrammes représentant certaines des contributions possibles sont ceux des Figures.2 à 5.

Le diagramme  $d_2$  est celui du terme dont l'évaluation a donné la contribution négligeable.

Le diagramme  $d_3$  bien que graphiquement possible est interdit par les inégalités sur les indices car il indique que:  $\alpha = n_1$ ,  $j_2 = n_3$  et  $j_1 = n_2$ . Or par hypothèse, on a:  $\alpha < n_3$ ,  $j_2 < n_2$  et  $j_1 = n_1$  donc:

$\alpha = n_1 > j_1 = n_2 > j_2 = n_3$ , soit donc:  $\alpha > j_1 > n_3$  ce qui est absurde.

En sus des diagrammes déjà mentionnés contribuant à  $C_2(t)$ , les autres diagrammes possibles et non négligeables sont  $d_4$  et  $d_5$ .

On peut étudier aisément de la sorte tous les diagrammes d'ordre supérieur à deux. Cette étude montre que les diagrammes qui se déduisent les uns des autres par adjonction d'une ligne oblique sont analytiquement reliés. Pour fixer les idées calculons la série de contributions de la Figure.6.

Dans ces diagrammes la première et la dernière variable de la ligne horizontale supérieure sont égales ainsi que les deux dernières variables de la ligne horizontale inférieure et toute variable d'indice  $j_m$  est égale à une variable d'indice  $n_{m+1}$ . On passe d'un diagramme d'un ordre donné à un diagramme d'un ordre immédiatement supérieur dans la série par adjonction d'une ligne oblique définie par les couples d'indices  $(j_m, n_{m+1})$ . Un calcul analogue à ceux précédemment développés nous permet d'obtenir pour cette somme que nous notons  $S_1$ :

$$\begin{aligned}
S_1(t) = & \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \pi \delta_+^{\alpha 1} e^2 |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{1\alpha} \\
& f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_\alpha, t) + \int d\vec{p}_2 \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| \\
& i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \pi \delta_+^{\alpha 2} i8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_2 f_1^2(\vec{p}_2, t) \pi \delta_+^{\alpha 1} i e^2 \times \\
& |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_\alpha, t) + \int d\vec{p}_3 \int d\vec{p}_2 \int d\vec{p}_1 \\
& \int d\vec{l}_1 i8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_\alpha \pi \delta_+^{\alpha 3} i8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \\
& \vec{D}_3 f_1^3(\vec{p}_3, t) \pi \delta_+^{\alpha 2} i8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i\vec{l}_1 \cdot \vec{D}_2 f_1^2 \pi \delta_+^{\alpha 1} i e^2
\end{aligned}$$

$$|U_{l_1}| i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_\alpha, t) + \dots \quad (113)$$

En vertu de l'identité des corpuscules nous avons, en posant:

$$Q_\alpha = \int d\vec{p}_{j,1} \pi \delta_+^{\alpha j} i 8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i \vec{l}_1 \cdot \vec{D}_j f_1^j(\vec{p}_j, t) \quad .$$

Où  $f_1^j(\vec{p}_j, t) = f_1(\vec{p}_j, t)$  :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i 8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| i \vec{l}_1 \cdot \\ &\quad \vec{D}_\alpha [1 + Q_\alpha + Q_\alpha^2 + \dots] \times \\ &\quad \pi \delta_+^{\alpha 1} i e^2 |U_{l_1}| i \vec{l}_1 \cdot \\ &\quad \vec{D}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_\alpha, t) + \dots \end{aligned} \quad (114)$$

$S_1(t)$ , transformée de Laplace inverse de toutes les contributions, est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $Q_\alpha$ . Posant:

$$\vec{d}_j = i 8\pi^3 e^2 C |U_{l_1}| \vec{D}_j \quad \text{et} \quad \vec{d}_{jn} = i \pi e^2 |U_{l_1}| \vec{D}_{jn},$$

nous pouvons mettre  $S_1(t)$  sous la forme:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i \vec{l}_1 \cdot \vec{d}_\alpha [1 - Q_\alpha]^{-1} \delta_+^{\alpha 1} i \vec{l}_1 \cdot \\ &\quad \vec{d}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t) f_1(\vec{p}_\alpha, t) \end{aligned} \quad (115)$$

$S_1(t)$  n'est autre que la série  $R_1$  obtenue par Balescu. Sa série  $R_2$  s'obtient en sommant les diagrammes construits en fixant la ligne courbe inférieure sur les deux premiers indices en lisant de la droite vers la gauche et en faisant varier



d'un diagramme à un autre le mode de liaison de l'indice  $\alpha$  aux indices de la ligne horizontale supérieure. Cette construction donne une serie  $S_2(t)$  dont le calcul fournit:

$$S_2(t) = \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i \vec{l}_1 \vec{d}_\alpha \cdot [1 - Q_\alpha]^{-1} \delta_+^{\alpha 1} i \vec{l}_1 \cdot (-\vec{d}_\alpha) f_1(\vec{p}_\alpha, t) \\ [1 - Q_1^*]^{-1} \int d\vec{p}_{11} \delta_+^{21} i \vec{l}_1 \vec{d}_{12} f_1(\vec{p}_1, t) f_2(\vec{p}_2, t) \quad (116)$$

où  $Q_1^*$  est le conjugué complexe de  $Q_1$ .

Les contributions qui suivent s'obtiennent en donnant à la boucle inférieure une nouvelle position et en faisant varier la position de la boucle supérieure, les lignes obliques intérieures se disposant de toutes les manières possibles. En adoptant la notation de Prigogine-Balescu, la somme de toutes les contributions est alors:

$$S(\alpha) = \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i \vec{l}_1 \cdot \vec{d}_\alpha [1 - Q_\alpha]^{-1} \delta_+^{\alpha 1} i \vec{l}_1 \cdot \vec{d}_{1\alpha} f_1(\vec{p}_1, t) \\ f_1(\vec{p}_\alpha, t) + \int d\vec{p}_1 \int d\vec{l}_1 i \vec{l}_1 \cdot \vec{d}_\alpha [1 - Q_\alpha]^{-1} \pi \delta_+^{\alpha 1} i \vec{l}_1 \\ \cdot (\vec{d}_\alpha^*) f_1(\vec{p}_\alpha, t) [1 - Q_1^*]^{-1} \times \int d\vec{p}_2 \int d\vec{p}_{11} \delta_+^{*12} i \vec{l}_1 \\ \cdot \vec{d}_{21}^* f_1(\vec{p}_1, t) f_2(\vec{p}_2, t) + \int d\vec{p}_1 \int d\vec{p}_2 \int d\vec{p}_3 \int d\vec{l}_1 \\ i \vec{l}_1 \cdot \vec{d}_\alpha [1 - Q_\alpha]^{-1} \pi \delta_+^{\alpha 1} \vec{d}_\alpha^* f_1(\vec{p}_\alpha, t) [1 - Q_1^*]^{-1} \delta_+^{*12} \vec{d}_1 \\ f_1(\vec{p}_1, t) [1 - Q_2^*]^{-1} \delta_+^{23} \vec{d}_{23} f_2(\vec{p}_2, t) f_3(\vec{p}_3, t) + \dots \quad (117)$$

où  $\vec{d}_\alpha^* = -\vec{d}_\alpha$ ,  $\vec{d}_{jn}^* = \vec{d}_{nj}$ ,  $\delta_+^{*jn} = \delta_+^{nj}$ .

L'équation d'évolution de la fonction de distribution à une particule, homogène, est:

$$i\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = S(\alpha) \quad (118)$$

Après quelques transformations de  $S(\alpha)$  , ( cf ref [2] ), Balescu obtient la dernière équation sous la forme:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = & 2e^2C \int \vec{dl} \int \vec{dv}_1 \vec{l} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} (\delta \vec{l} \cdot (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_1)) \times \\ & \left| l^2 - 4\pi e^2C \int \vec{dv}_2 \delta_+ [\vec{l} (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_2)] \vec{l} \cdot \frac{\partial f_2(\vec{p}_2, t)}{\partial v_2} \right|^{-2} \\ & \vec{l} \cdot \vec{D}_{\alpha 1} f_1(\vec{p}_\alpha, t) f_3(\vec{p}_3, t) \end{aligned} \quad (119)$$

où  $\vec{v}_j$  est la vitesse de la  $j^{\text{ième}}$  particule.

Telle est l'équation d'évolution de la fonction de distribution à une particule, homogène, pour un système de particules en interaction électrostatique pour la première fois établie par Balescu en 1960 et déduite de la méthode de Bogolioubov par Lenard la même année.

Elle a une structure différente de celle obtenue pour des systèmes en interaction faible par le fait que le produit  $f_1(\vec{p}_\alpha, t) f_3(\vec{p}_3, t)$  apparaît au dénominateur dans l'intégrale de collision. Cela est la structure caractéristique introduite par le comportement collectif du plasma. Lors du calcul de  $S(\alpha)$  les séries que nous avons sommées contenaient des produits de fonctions de distribution à une

particule traduisant ainsi la prise en compte du système à  $N$  corps;  $N$  étant arbitrairement grand. Le formalisme de Zwanzig permet de développer une technique de diagrammes qui rend compte d'une manière simple du comportement collectif du système. Comme dans le formalisme de Balescu, l'approximation adoptée se traduit par le fait qu'à un instant donné pendant le processus de collision seules deux particules sont corrélées mais que cette corrélation est continuellement transférée durant le processus d'une paire de particules à une autre.

En insérant l'expression:

$$8\pi^3 \lambda U(l) = \frac{4\pi e^2}{\left| l^2 - 4\pi i e^2 C \int d\vec{v}_2 \delta_+ \left[ \vec{l} \cdot (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_2) \right] \vec{l} \cdot \frac{\partial f_2(\vec{p}_2, t)}{\partial \vec{v}_2} \right|^{-2}} \quad (120)$$

dans (79), on retrouve (119) ce qui montre que la théorie de perturbation développée ici est équivalente à une renormalisation du potentiel d'interaction. Le potentiel effectif (120) signifie que la particule d'intérêt  $\alpha$ , du gaz est sollicitée autant par n'importe quelle particule prise individuellement que par le champ moyen du milieu. Dans les gaz ordinaires où l'interaction est faible, seul le premier effet influence le comportement de la particule. Le potentiel effectif donné par (120) se manifeste physiquement par la formation d'un nuage de particules autour de la particule d'intérêt, ce nuage se déformant dans le temps avec la variation de la fonction de distribution.

## CONCLUSION

L'étude des processus stochastiques dans les plasmas nous a permis d'aborder

le problème de la dérivation des équations cinétiques pour les plasmas sur la base de l'approche de Zwanzig. La résolution de ce problème présente des difficultés inhérentes à la nature des voies d'approche. En plus d'un formalisme mathématique approprié, des méthodes d'approximation spécifiques doivent être mises en oeuvre. Zwanzig a pu établir une équation pilote pour des systèmes homogènes au moyen d'une technique de projection et d'une hypothèse de faible interaction et sa méthode a été étendue par Muriel et Dresden à des systèmes inhomogènes.

Dans notre étude, nous avons pu déduire leurs résultats à partir d'une voie d'analyse alternative déjà indiquée par Zwanzig. Cette voie nous semble être plus concise et plus explicite du point de vue de la prise en compte des approximations dans le formalisme mathématique. Nous parvenons ainsi à montrer que la non prise en compte de l'opérateur de Liouville décrivant les interactions entre les particules dans l'opérateur de Green contenu dans le terme de mémoire de l'équation pilote généralisée est légitime lorsque l'on considère que le système ne garde mémoire de l'interaction que pendant un intervalle de temps fini. Par ailleurs la dérivation de l'équation pilote de Muriel et Dresden par une analyse de l'opérateur de collision, nous a permis de découpler de manière claire l'hypothèse de faible inhomogénéité et l'hypothèse markovienne qui est centrale dans cette dérivation.

Si l'approche de Zwanzig permet une économie de calcul considérable par rapport aux méthodes de Van Hove et de celle de l'école de Bruxelles quand il s'agit du traitement de systèmes physiques en interaction faible, en ce qu'elle s'affranchit

de la resommation de séries infinies de termes par des méthodes de diagrammes, elle ne peut contourner cet aspect du problème quand il s'agit d'étudier le cas des plasmas où régissent des forces d'interaction de longue portée. En effet, ici, la comparaison progressive de tous les termes du développement en série de la perturbation est nécessaire.

Dans ce travail nous avons pu mettre en oeuvre ce programme pour aboutir à une renormalisation de l'énergie d'interaction en développant une technique de diagramme spécifique qui non seulement décrit de manière claire les processus physiques mis en jeu mais aussi permet d'obtenir rapidement les expressions analytiques des séries de termes non négligés dans la procédure de renormalisation.

Cette méthode devrait permettre de prendre en compte les plasmas non homogènes et ceux soumis à des champs extérieurs. La prise en compte de la dynamique des ions, si essentielle en spectroscopie des plasmas et dans l'étude des turbulences de plasma devrait en principe pouvoir être assurée dans le cadre de ce formalisme.

## FIGURES

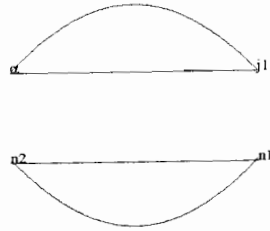


Diagramme  $d_1$  décrivant la contribution du second ordre à l'interaction.

Figure 1:

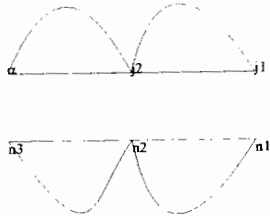


Diagramme  $d_2$  : contribution négligeable du troisième ordre à l'interaction.

Figure 2:

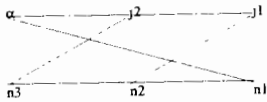


Diagramme  $d_3$  : contribution interdite du troisième ordre à l'interaction.

Figure 3:

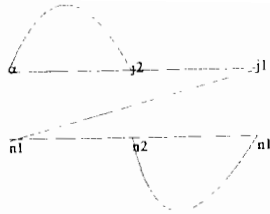


Diagramme  $d_4$  : contribution non négligeable du troisième ordre à l'interaction.

Figure 4:

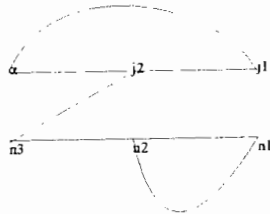


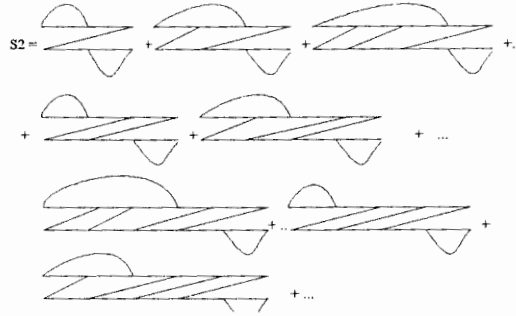
Diagramme  $d_5$  : contribution non négligeable du troisième ordre à l'interaction.

Figure 5:

$$S_1 = \frac{\alpha \text{---} j_1}{n_2 \text{---} n_1} + \frac{\alpha \text{---} j_2 \text{---} j_1}{n_3 \text{---} n_2 \text{---} n_1} + \frac{\alpha \text{---} j_3 \text{---} j_2 \text{---} j_1}{n_4 \text{---} n_3 \text{---} n_2 \text{---} n_1} + \dots$$

Somme de diagrammes contribuant à la première série  $S_1$  de Balescu.

Figure 6:



Somme de diagrammes contribuant à la deuxième série de Balescu.

Figure 7:

## BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig (1896-1898); Wien. Ber. 66, 275, (1872). In "non-equilibrium statistical mechanics" Vol. 1, by I. Prigogine, Interscience publishers John Wiley and sons, New York-London (1962).

[2] I. Prigogine, Non-Equilibrium Statistical Mechanics (Intersciences Publishers John Wiley and sons, New York, London, 1962 ).

[3] J. YVON, La théorie statistique des fluides et l'équation d'état, Hermann, Paris (1935).

[4] M.Born, Proc. Roy. Soc ( London ), A188, 10 ( 1946).

[5] J.G. Kirkwood, J. Chem. Phys. 14, 180 ( 1946).

[6] N.N. Bogolioubov, Problemi Dynamitcheskij theorie v staticheskey Phisike, OGIS, Moscow, (1946 ). English translation by E. KGORA, Problems of a dynamical theory in Statistical Physics, ASTIA document n<sup>0</sup> AD-213317.

[7] H.S.Green, Proc. Roy. Soc ( London ), A189, 10 ( 1947).



[8] P and T Ehrenfest, "Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung Mechanik," Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften, (1911); reprinted by Cornell University Press Ithaca, N.Y ( 1959 ).

[9] R. Brout and I. Prigogine, Physica 22 (1956) 621

[10] L. Van Hove, Physica 21 (1955) 512.

[11] L. Van Hove, Physica 23 (1955) 441.

[12] I. Prigogine and R. Balescu , Physica 25 (1959) 281.

[13] I. Prigogine and R. Balescu , Physica 25 (1959) 302.

[14] I. Prigogine and R. Balescu , Physica 26 (1960) 146.

[15] R. Balescu , Physica 25 (1959) 324.

[16] R. Balescu , Phys of Fluids 3, 62 (1960) 324.

[17] R. Guernsey, Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, (1960).

[18] R. Balescu, Journal of Mathematical Physics, Vol 4, n<sup>o</sup>8 (1963).

[19] R. Balescu and A. Kuzell, Journal of Mathematical Physics, Vol 5, n<sup>o</sup>8 (1964).

[20] R. Davidson , Physica 38 (1968) 587.

[21] R. P.Feynman , Phys. Rev 76, (1949) 749.

[22] R. Zwanzig, J. Chem. Phys. 33 (1960) 1338.

[23] R. Zwanzig, Physica. 30 (1964) 1109.

[24] B. A. Lippmann and J. Schwinger, Phys. Rev, 79 (1950) 469.

- [25] A. Muriel and M. Dresden, *Physica* 43 (1969) 749.
- [26] N. Hashitsumi, F. Shibata, M. Shingu, *J of stat Phys*, Vol. 17, n<sup>o</sup> 4, (1977).
- [27] F. Shibata and, N. Hashitsumi, *Journal of the physical society of JAPAN*, Vol. 44, n<sup>o</sup>. 5, (1978).
- [28] T. Arimutsi et al, *Physica* 100A, (1980) 507.
- [29] M. Saeki, *Progress of theoretical Physics*, Vol. 77 n<sup>o</sup>. 2, (1987).
- [30] T. Kato, *perturbation theory for linear operator*, (Springer Verlag, Berlin, 1966).
- [31] D. Massignon, *les propriétés locales en mécanique statistique classique et en mécanique quantique des fluides*. Thèse. Faculté des Sciences de l'Université de Paris. Série A, n<sup>o</sup> 2791.
- [32] J. W. Gibbs, *The collected Works*, Vol. 2, Longmans, Green and Co, London, New York (1928).
- [33] G . V. Chester, *The theory of irreversible process*, in "Many body problems" (Clarendon Press, London, 1968).
- [34] M. Kac, *Foundation of kinetic theory*, *Proceeding of the Berkley Symposium on Mathematical Statistics*, (1954).

