



## **Apport du logiciel CABRI II PLUS dans l'enseignement de la géométrie au secondaire**

✉ Malonga MOUNGABIO F. A.\*\* , Tathy C.\*\* , Loumouamou A. N.\*\* , Nzaba Mbongolo O.\*

\*\*Enseignant, Ecole Normale Supérieure, UMNG

\*Doctorant, Chaire UNESCO en Sciences de l'Education, UMNG

*E-mail* : malongaf@gmail.com

---

### **RESUME**

*Cet article issu d'un travail de thèse présente une partie des résultats d'une expérimentation menée dans un lycée en République du Congo. Le but est d'examiner le rôle du logiciel de géométrie dynamique CABRI II PLUS dans la résolution des situations géométriques. Il s'agit principalement de susciter chez l'élève du lycée, à partir de deux espaces de travail géométriques différents, la possibilité de passer d'une géométrie d'observation (G1) à une géométrie proto-axiomatique (G2). L'analyse des productions des élèves révèle le rôle important du logiciel CABRI II PLUS conduisant à un nouveau de regard sur la conjecture et la démonstration..*

---

**Mots-clés :** enseignement, géométrie dynamique, géométrie d'observation, géométrie proto-axiomatique, logiciel.

---

### **INTRODUCTION**

Les Technologies de l'Information et de la Communication dans l'Enseignement (TICE) sont devenues, dans de nombreux systèmes éducatifs, un outil indispensable pour l'amélioration de la qualité de l'enseignement. Au Congo, les nouvelles technologies ne font pas encore partie des curricula de l'enseignement primaire et secondaire. Cependant, le rôle déterminant qu'elles peuvent jouer dans le développement

---

### **ABSTRACT**

*This thesis article presents part of the results of an experiment carried out in a high school in the Republic of Congo. The aim is to examine the role of the CABRI II PLUS dynamic geometry software in the resolution of geometric situations. The main aim is to create a geometry of observation (G1) and a proto-axiomatic geometry (G2) from two different geometric workspaces. The analysis of the students' productions reveals the important role of the software CABRI II PLUS leading to a new look of conjecture and demonstration*

---

**Key words:** teaching, dynamic geometry, observation geometry, proto-axiomatic geometry, software

---

économique et social est bien perçu par le gouvernement qui déjà, en 2004 publiait un document sur les stratégies à mettre en place pour développer ces technologies en vue d'introduire les TICE de l'école primaire à l'université. De plus, à la 10<sup>ème</sup> session ordinaire du Conseil National de l'Education (Brazzaville 23-24 septembre 2008), l'une des mesures prises pour améliorer les performances des élèves était le recours aux nouvelles méthodes et technologies.

Certains établissements scolaires ont été dotés de salles informatiques. Cependant, très peu d'actions en faveur de l'intégration

des TICE sont développées. Ce manque d'enthousiasme peut être justifié au fait qu'il n'y a pas beaucoup de formation articulant enseignement disciplinaire et TICE.

C'est dans ce contexte que nous situons notre étude. Nous nous intéressons aux apports et aux enjeux didactiques du logiciel CABRI II PLUS dans le processus de démonstration de certaines propriétés géométriques au lycée d'enseignement général. Ainsi, nous nous demandons comment l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique comme CABRI II PLUS peut-elle modifier ou améliorer les conceptions des élèves dans le processus de démonstration notamment sur la distinction entre un dessin et une figure géométrique <sup>1</sup>?

## 1. Méthodologie

### 1.1. Mise en place d'une expérimentation

Nous avons choisi de travailler avec des élèves de la classe de première C du lycée 5 février 1979 de Kinkala. Cette classe est constituée de 14 élèves. Nous nous sommes rassurés que tous ces élèves ont connu une scolarité normale et ont toujours eu comme professeurs de mathématiques, des enseignants ayant reçu une formation en géométrie à l'université. Aucun d'eux ne dispose d'un ordinateur personnel.

La complexité de notre travail vient du fait que nous abordons la question d'intégration des TICE alors que cette problématique n'est pas encore prise en compte par les programmes scolaires. De plus, l'enseignement des mathématiques au Congo, encore sous l'influence du courant dit « des mathématiques modernes » des années 60, est très « algorithmisé » ; il privilégie les problèmes de calculs plutôt que le raisonnement. Ainsi, la maîtrise de la démonstration demeure un vrai problème pour les enseignants ainsi que pour leurs élèves. C'est ainsi que nous avons mis en place une expérimentation dans les classes de première C qui s'appuie principalement sur deux activités. Concernant la première activité, dans le souci de favoriser les conflits socio-cognitifs, les élèves ont travaillé en binômes successivement dans l'environnement

papier/crayon et dans l'environnement informatique CABRI II PLUS. La deuxième activité est une variante de la première. Pour cette activité, les élèves travaillent individuellement.

### 1.2. Choix des activités : Changement de paradigmes géométriques

Notre expérimentation consiste à proposer aux élèves des situations simples de géométrie afin de favoriser, à travers l'utilisation du logiciel CABRI II PLUS, le passage de la géométrie d'observation (G1) à la géométrie proto-axiomatique (G2). Afin de caractériser les productions des élèves suite à notre expérimentation, nous empruntons à Houdement et Kuzniak (1999, p. 178) la notion de paradigmes géométriques. La notion de paradigme est à comprendre au sens que lui donne Kuhn, dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques, suivant deux facettes que l'on peut résumer comme suit :

- 1) Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème.
- 2) Kuhn utilise aussi le terme de paradigme pour caractériser les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de leur champ disciplinaire.

Relativement à la nature des objets géométriques (spatiaux, spatio-graphiques, théoriques) mise en jeu, la nature des tâches du sujet ainsi que la nature des méthodes de validation, Houdement et Kuzniak (op. cit, p. 181) distinguent trois conceptions de la géométrie.

#### La géométrie naturelle (G1)

La géométrie naturelle s'appuie sur une approche concrète de l'espace, où les tâches sont résolues directement par l'action sur des objets physiques et, en général, n'impliquent

<sup>1</sup> La figure est un objet abstrait qui appartient à l'espace géométrique alors que le dessin

représente la figure et appartient à l'espace graphique.

pas une anticipation ; les ajustements peuvent s'effectuer en cours d'action et la validation est pratique. Les formes sont vues globalement sans être nécessairement décomposées en éléments plus simples. Cette géométrie a pour source de validation la réalité, le monde sensible.

### La géométrie axiomatique naturelle (G2)

La géométrie axiomatique naturelle ou « *géométrie comme schéma de la réalité* » se distingue de la géométrie naturelle par le fait que sa source de validation est fondée sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique le plus précis possible (Kuzniak, 2004, p. 20).

### La géométrie axiomatique formaliste (G3).

Dans la géométrie axiomatique formaliste, « *les axiomes ne sont plus fondés sur le monde sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose* » (Kuzniak 2004, p 20). La source de validation est le raisonnement logique, hypothético-déductif. Les deux dernières géométries se distinguent par la complétude du système d'axiomes. En effet, ce système est partiel dans la Géométrie 2 et il est essentiel dans la Géométrie 3. Parzys (2006, p. 185) souligne que pour certains problèmes, ces trois géométries coexistent et génèrent une ambiguïté forte chez l'élève.

## 2. Résultats et discussion

### 2.1. Présentation de l'activité 1

Quelques séances d'initiation au logiciel ont permis aux élèves de construire et d'explorer des figures, de conjecturer certaines propriétés à partir de la manipulation.

Nous présentons ici deux activités traitées par les élèves avant d'analyser leurs productions. Ces activités sont réalisées en deux étapes, de sorte que les élèves travaillent successivement d'abord dans l'environnement papier-crayon et puis dans l'environnement informatique CABRI II PLUS .

#### ➤ Etape 1 : utilisation uniquement de l'environnement Papier-crayon,

Dans cette activité, les élèves examinent la possibilité pour que quatre points donnés appartiennent à un même cercle.

### Encadré 1 : Activité 1, version 1 (Voir en Annexe)

Cette activité est donnée dans le but de mieux cerner l'état initial des connaissances des élèves avant l'utilisation du logiciel.

#### ➤ Etape 2 : utilisation du logiciel CABRI II PLUS puis de l'environnement papier-crayon

Les élèves ont déjà été initiés à l'utilisation du logiciel CABRI II PLUS . Quinze séances de deux heures chacune ont été nécessaires pour cette initiation.

Nous proposons la même activité qu'à l'étape 1 en changeant juste la nomenclature des points.

### Encadré 2 : Activité 1, version 2 (Voir en Annexe)

#### 3.1.1. Analyse a priori de l'activité 1 : Procédures possibles

Pour justifier les réponses à l'aide d'une démonstration, plusieurs Procédures pourront être utilisées par les élèves. Pour chacune des procédures, la construction d'une figure s'impose.

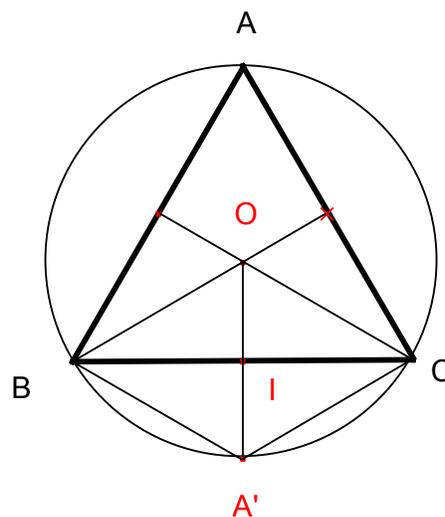


Figure 1

Nous vous proposons trois procédures (ainsi que leurs variantes) susceptibles d'être utilisées par les élèves.

#### ➤ Procédures utilisant les angles orientés de couples de vecteurs.

Ces procédures consistent à examiner si les quatre points donnés sont les sommets d'un quadrilatère convexe ayant deux angles opposés supplémentaires.

Examiner si les angles  $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})$  et  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'})$  sont supplémentaires.

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) [2\pi].$$

$ABC$  étant un triangle équilatéral,  $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ .

$A'BO$  est un triangle isocèle en  $B$  car  $(BC)$  est la médiatrice de  $[OA]$ .

Donc  $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BO}) [2\pi]$ . Comme

$$(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{6} \text{ alors } (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BI}) = \frac{\pi}{6}. \text{ Ainsi}$$

$$(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \text{ soit}$$

$$(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}.$$

Un raisonnement analogue au premier permet d'établir que  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = \frac{\pi}{2}$ . Le quadrilatère convexe  $ABA'C$  a deux angles opposés qui sont supplémentaires car

$$(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = \pi \text{ par}$$

conséquent ses sommets sont cocycliques.

On pouvait aussi examiner si les angles

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  et  $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$  sont supplémentaires.

#### ➤ Procédure utilisant les angles orientés des couples de droites

Ces procédures consistent à établir la cocyclicité des quatre points donnés à partir des égalités des angles de couples de droites.

On montre par exemple  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})[\pi]$ .

Nous avons  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [\pi]$  ( $ABC$  est un triangle équilatéral)  $A'$  est le symétrique de  $O$  par rapport à  $I$  donc

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})[\pi]$$

(conservation de la mesure de l'angle par un déplacement). Or  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$

(propriété d'un triangle équilatéral)

$$\text{donc } (\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}) = \frac{2\pi}{3}$$

Comme  $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}) + (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = \pi[\pi]$ , donc  $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) = \frac{\pi}{3}$ .

Ainsi,  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})[\pi]$ .

Il est aussi possible d'examiner l'égalité  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C})[\pi]$  ou de

chercher à établir l'égalité

$$(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) = ((\overrightarrow{CA}), (\overrightarrow{CB}))[\pi] \\ \text{ou encore de vérifier l'égalité} \\ ((\overrightarrow{CA}), (\overrightarrow{CA'})) =$$

$$((\overrightarrow{BA}), (\overrightarrow{BA'}))[\pi].$$

#### ➤ Procédures n'utilisant pas les angles orientés

##### ▪ Procédure 1 :

Cette procédure consiste à établir l'équidistance du centre du triangle  $ABC$  au sommet de ce quadrilatère  $ABCA'$ . Pour cela, l'élève peut s'appuyer principalement sur l'une des propriétés de la médiane : l'équidistance du centre de gravité du triangle équilatéral aux sommets de ce triangle permet d'écrire  $OA = OB = OC$ . De plus, les points  $O$  et  $A'$  étant symétriques par rapport à  $(BC)$ , on montre que

$OA = OA'$ , d'où les points  $A, B, A'$ , et  $C$  sont cocycliques.

##### ▪ Procédure 2 :

La procédure 2 consiste à montrer que le quadrilatère convexe  $ABA'C$  est composé de deux triangles rectangles de même hypoténuse  $[AA']$  afin de déduire la cocyclicité des points constituant les sommets de ce quadrilatère.

#### 3.1.2. Analyse a posteriori de l'activité 1

##### ➤ Etape 1 : utilisation uniquement de l'environnement Papier-crayon

##### ▪ Construction de la figure

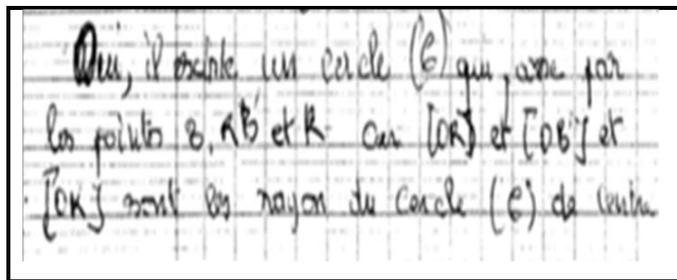
Tous les binômes ont construit le cercle circonscrit au triangle  $BRK$  en affirmant ensuite qu'il existe un cercle qui passe par les points  $B, R, B'$  et  $K$ .

##### ▪ Démonstration

##### Procédures correctes

Nous avons constaté que tous les binômes ont utilisé des procédures ne s'appuyant pas sur les angles orientés. Parmi eux, cinq binômes ( $B_2, B_3, B_4, B_6, B_7$ ) ont utilisé des procédures correctes mais sans réussir la démonstration.

Les binômes  $B_3, B_4$  et  $B_6$ , ont utilisé comme procédure, l'équidistance du centre du triangle aux sommets du quadrilatère  $BRB'K$ , comme nous pouvons l'illustrer à travers la production du binôme  $B_4$ .



### Encadré 3 : production du binôme 4

Ce binôme ne détaille pas sa réponse. Il ne justifie pas en quoi  $[OB']$  est un rayon du cercle. Sa procédure pouvait être influencée par le fait d'avoir construit un cercle avant la démonstration ; en effet, il semble que ce binôme utilise uniquement la perception, c'est-à-dire qu'il constate que le cercle construit passe par le point  $B'$ .

Les binômes  $B_2$  et  $B_7$  ont utilisé une autre procédure pour justifier qu'il existe un cercle passant par les quatre points (comme le montre la production du binôme 2). (Voir en Annexe)

### Encadré 4 ; production du binôme 2

Ce binôme affirme l'existence d'un cercle qui passe par les points  $B, R, B'$  et  $K$  parce que  $BRK$  est un triangle équilatéral et que  $B'$  est l'image de  $O$  le centre du triangle  $BRK$ . Cette démonstration n'est pas recevable dans la mesure où le passage de la proposition antécédente à la conclusion n'est pas explicite. Le binôme semble utiliser la propriété suivante et qui est correcte : « dans un triangle équilatéral, les symétriques du centre du triangle par rapport aux côtés de ce triangle sont situés sur le cercle circonscrit à ce triangle ».

#### Procédures incorrectes

Deux des sept binômes ( $B_1$  et  $B_5$ ) ont utilisé une procédure incorrecte comme on peut l'illustrer à travers la production du binôme 5 : (Voir en Annexe)

### Encadré 5 : production du binôme 5

Ce binôme affirme que les points  $B, R, R'$  et  $K$  se trouvent sur le même cercle car ils ont la même origine. Nous relevons dans cette production des erreurs de langage ou de formulation. L'expression utilisée par ce binôme « ils ont de même origine  $O$  » n'a pas de sens. Il voulait peut-être dire que ces points

sont situés à la même distance par rapport au point  $O$ , en appelant "origine" par "centre". Une telle preuve, à ce niveau de scolarité, est étonnante car les élèves de lycées sont censés maîtriser le vocabulaire de la géométrie de base. Cette production est invalide car ce binôme utilise la perception de la figure pour justifier l'existence de ce cercle.

#### ➤ Etape 2 : utilisation du logiciel CABRI II PLUS puis de l'environnement papier-crayon

- Construction de la figure

L'usage direct des outils du logiciel a permis aux élèves de générer des instruments efficaces pour la construction de la figure qui se rapporte à l'énoncé. Nous constatons que tous les binômes ont réussi la construction de leur figure.

- Existence du cercle circonscrit au quadrilatère  $ABA'C$

Comme dans l'environnement papier-crayon, les élèves commencent par construire d'abord le cercle avec l'outil *Cercle* ou avec les outils *Médiatrices* et *Compas* du logiciel CABRI II PLUS. Après cette construction, tous les binômes ont affirmé qu'il existe un cercle qui passe par les points  $A, B, C$  et  $A'$ .

- La démonstration

Aucun binôme n'a réussi à fournir une démonstration correcte. Cependant nous avons noté une évolution des productions de certains binômes comme  $B_1$  et  $B_2$ .

La procédure de  $B_2$  (voir annexe) utilise les angles orientés et l'équidistance du centre du triangle au sommet du quadrilatère considéré. Mais ce binôme se trompe dès le départ car il considère déjà le point  $A'$  comme un point du cercle.

Cette production est révélatrice d'un manque de maîtrise des pas d'une démonstration. De plus les phrases «  $(OB)$  est la médiatrice à  $(AC)$  », «  $(AO)$  est la médiatrice à  $(BC)$  » non seulement elles sont incorrectes (car on parle de la médiatrice d'un segment et non d'une droite) mais conduisent aux égalités  $(\vec{OB}, \vec{OC}) = 2(\vec{AB}, \vec{AC})[2\pi]$  et  $(\vec{A'B}, \vec{A'C}) = 2(\vec{AB}, \vec{AC})[2\pi]$ . La première

égalité vient du fait que  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$  est un angle au centre qui intercepte le même arc de cercle que l'angle inscrit  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Le binôme affirme que :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) [2\pi] \text{ car ils}$$

interceptent le même arc, ce qui est totalement faux et ce qui montre aussi que les deux élèves n'ont pas la maîtrise de la notion d'arc intercepté par deux angles. Enfin, nous relevons aussi des erreurs liées à la non maîtrise de certains concepts géométriques, par exemple, une droite est prise pour le milieu d'un segment : «  $(BC)$  est le milieu de  $[OA']$  ». Nous constatons aussi une difficulté à établir l'égalité des mesures d'angles dans le plan orienté :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}) [2\pi]$  au lieu de  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}) [2\pi]$ .

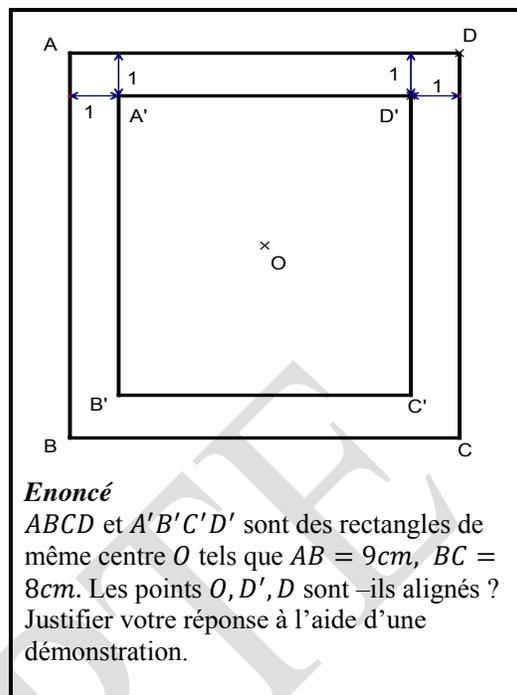
### 3.1.3. Synthèse

À l'issue de l'analyse de cette activité, nous avons constaté que les élèves ont des difficultés pour structurer une démonstration. Les sources de validation des réponses avant et après l'usage du logiciel s'appuient sur la perception de la figure, le mesurage et l'explication. En dépit d'une petite amélioration dans les productions de certains élèves après l'usage du logiciel, le passage de la géométrie (G1) à la géométrie (G2) souhaité ne s'est pas fait, ce qui nous a amené d'envisager l'activité 2.

### 2.2. Présentation de l'activité 2

Comme pour la première activité, nous procédons en deux étapes, de sorte que les élèves travaillent individuellement d'abord dans les environnements papier-crayon, puis avec CABRI II PLUS (informatique) et enfin, un retour dans l'environnement papier-crayon. Les élèves examinent la position relative de trois points. Pour cette activité, deux élèves n'ont pas réussi de nous rejoindre. Nous avons donc travaillé avec 12 élèves.

- **Etape 1 : utilisation uniquement de l'environnement Papier-crayon.**



#### Enoncé

$ABCD$  et  $A'B'C'D'$  sont des rectangles de même centre  $O$  tels que  $AB = 9\text{cm}$ ,  $BC = 8\text{cm}$ . Les points  $O, D', D$  sont-ils alignés ? Justifier votre réponse à l'aide d'une démonstration.

### Encadré 6 : Activité 2

- **Etape 2 : utilisation du logiciel CABRI II PLUS puis de l'environnement papier-crayon**

Au cours de cette étape, nous avons à nouveau placé les élèves dans les environnements de travail géométrique que nous avons utilisé à l'étape 2 de l'activité 1. Les élèves reproduisent d'abord la figure et explorent ses propriétés avec les outils du logiciel CABRI II PLUS. Puis, ils évoluent à nouveau dans l'environnement papier-crayon pour démontrer la propriété perçue.

#### 3.2.1. Analyse a priori de l'activité 2 : Procédures possibles

Plusieurs procédures pourront être utilisées par les élèves et nous en proposons quelques-unes.

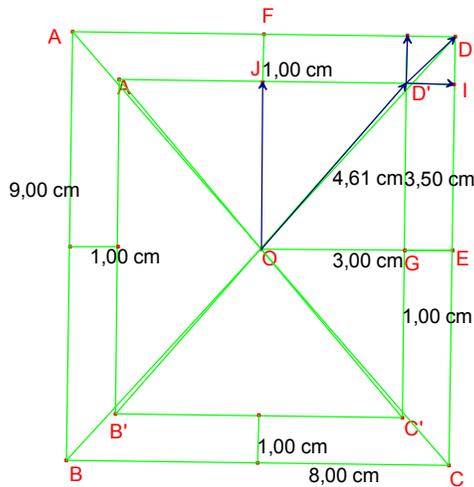


Figure 2

➤ **Première procédure : utilisation du théorème de Thalès**

Considérons le triangle  $OED$  où  $E$  est le milieu de  $[DC]$  et la parallèle  $(D'I)$  à  $(OE)$ .

Si les points  $O, D', D$  sont alignés alors  $\frac{DI}{DE} = \frac{DD'}{DO}$ . Or,  $\frac{DI}{DE} = \frac{1}{4,5}$  et  $\frac{DD'}{DO} = \frac{1}{4}$  donc  $\frac{DI}{DE} \neq \frac{DD'}{DO}$ . Les points  $O, D', D$  ne sont pas alignés.

➤ **Deuxième procédure : utilisation du théorème de Pythagore**

C'est dans le but de comparer les distances  $OD$  et  $OD' + D'D$ . D'après ce théorème,  $OD^2 = OE^2 + ED^2$

donc  $OD = \sqrt{4^2 + (4,5)^2}$ .

$OD'^2 = OG^2 + GD'^2$  donc  $OD' \approx$

$4,61$ .  $D'D^2 = D'I^2 + ID^2$  soit  $D'D =$

$\sqrt{1^2 + 1^2}$ . On obtient :

$OD \approx 6,0207$  et  $OD' + D'D \approx 6,0239$ .

Comme  $OD \neq OD' + D'D$ , les points  $O, D', D$  ne sont pas alignés.

➤ **Troisième procédure : utilisation d'une homothétie**

Elle consiste à examiner s'il existe une homothétie de centre  $O$  qui transforme le rectangle  $ABCD$  en le rectangle  $A'B'C'D'$ . Dans l'affirmative, les mesures des côtés de ces deux rectangles sont proportionnelles.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{9}{7}$  et  $\frac{AD}{A'D'} = \frac{8}{6}$ . Ces rapports étant différents, cette homothétie n'existe pas. Donc les points considérés ne sont pas alignés.

➤ **Quatrième procédure : examiner la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{OD'}$  et  $\overrightarrow{D'D}$**

$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OG}$  soit

$\overrightarrow{OD'} = 3,5\overrightarrow{JF} + 3\overrightarrow{GE}$ . Or  $\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{GE} =$

$\overrightarrow{D'D}$  et  $3 \neq 3,5$  donc il n'existe pas un réel non nul  $k$  tel que  $\overrightarrow{OD'} = k\overrightarrow{D'D}$ .

Les points  $O, D', D$  ne sont pas alignés.

➤ **Cinquième procédure : utilisation des angles orientés ou des angles géométriques**

On peut montrer l'alignement des points  $O, D', D$  en montrant par exemple que

$(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'D}) = \pi[2\pi]$ .

$(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'D}) = (\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'G}) + (\overrightarrow{D'G}, \overrightarrow{D'I}) +$

$(\overrightarrow{D'I}, \overrightarrow{D'D}) [2\pi]$ .

Or  $(\overrightarrow{D'G}, \overrightarrow{D'I}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ,  $(\overrightarrow{D'I}, \overrightarrow{D'D}) =$

$\frac{\pi}{4} [2\pi]$

$(D'ID$  est un triangle rectangle et isocèle en  $I$ ).

Dans le triangle rectangle  $OGD'$  et non isocèle

on a :  $\cos(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'G}) = \frac{3,5}{4,61}$  et

$\sin(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'G}) = \frac{3}{4,61}$

Donc  $(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'G}) < \frac{\pi}{4} [2\pi]$

car  $\cos(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'G}) > \sin(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'G})$

On en déduit que  $(\overrightarrow{D'O}, \overrightarrow{D'D}) < \pi[2\pi]$ . Les

points  $O, D'$  et  $D$  ne sont pas alignés.

➤ **Sixième procédure : utilisation de la comparaison des aires**

L'aire du triangle  $OGD'$  est :

$\frac{OG \times OD'}{2} = \frac{3 \times 3,5}{2}$  soit  $5,25 \text{ cm}^2$ .

L'aire du triangle  $OED$  est :  $\frac{OE \times ED}{2} =$

$\frac{4 \times 4,5}{2}$  soit  $9 \text{ cm}^2$ .

L'aire du trapèze  $GEDD'$  est :

$\frac{(ED + GD') \times GE}{2} = \frac{(4,5 + 3,5) \times 1}{2}$  soit  $4 \text{ cm}^2$

L'aire du quadrilatère  $OEDD'$  est :  $5,25 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2$  soit  $9,25 \text{ cm}^2$

Comme l'aire du triangle  $OED$  est différent de l'aire du quadrilatère  $OEDD'$ , les points  $O, D'$  et  $D$  ne sont pas alignés.

3.2.2. Résultats de l'activité 2

➤ Etape 1 : utilisation uniquement de l'environnement Papier-crayon

### ▪ Position relative des trois points

La plupart des élèves (10 sur 12) ont affirmé que les trois points donnés sont alignés. Pour émettre ces conjectures, certains élèves se sont basés sur la simple perception de la figure. D'autres ont tracé la droite passant par deux de ces trois points et ont estimé que ces points sont alignés. Pour ces derniers, le petit écart observé sur l'appartenance du troisième point à la droite tracée est engendré par un usage erroné de la règle. Enfin, pour émettre cette conjecture, certains élèves ont utilisé la règle sans chercher à tracer la droite passant par ces points.

La deuxième question consistait à démontrer leur affirmation. Nous constatons qu'aucun élève n'a réussi sa démonstration. Ils ont utilisé les procédures suivantes.

#### ➤ Procédures correctes

Une seule procédure correcte a été utilisée par les élèves E<sub>4</sub>, E<sub>6</sub>, E<sub>7</sub>, E<sub>10</sub>, E<sub>11</sub>, E<sub>12</sub> sans malheureusement aboutir à une réponse correcte. Cette procédure consiste à examiner la colinéarité des vecteurs  $\overrightarrow{OD'}$  et  $\overrightarrow{D'D}$  ou des vecteurs  $\overrightarrow{OD}$  et  $\overrightarrow{OD'}$ .

Exemple

oui O, D' et D sont alignés

O, D' et D alignés  $\Leftrightarrow \overrightarrow{D'O} = k \overrightarrow{DO}$

car  $\overrightarrow{D'O}$  colinéaire à  $\overrightarrow{DO}$

On sait que O milieu de [BO] et [B'O]

AB = 7, BC = 8  
DC = 9

D'après le théorème de Pythagore

$$DB^2 = BC^2 + CD^2$$

$$DB^2 = 8^2 + 9^2$$

$$DB^2 = 145$$

$$DB = \sqrt{145}$$

$$DB = 12,04 \approx 12 \text{ or } OD = \frac{1}{2} BD = 6$$

On sait que D'O = 1

On a :  $\overrightarrow{D'O} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DO}$  Vrai

#### Encadré 7 : Production de l'élève E<sub>11</sub>

Cet élève maîtrise les prémisses et la conclusion à atteindre mais, certains pas de déduction ne sont pas valides. Il cherche à

montrer l'existence d'un réel  $\alpha$  tel qu'on ait l'égalité

$$\overrightarrow{DD'} = \alpha \overrightarrow{DO};$$

sa procédure est donc correcte.

Cependant la démarche qui le conduit à cette

égalité est totalement fautive. En effet, il

applique le théorème de Pythagore au triangle

BCD et obtient  $BD = \sqrt{145}$ . Il commet la

première erreur en arrondissant  $\sqrt{145} \approx 12,04$

puis la seconde erreur en ramenant 12,04 à 12.

Il perd ainsi la valeur exacte de la distance BD

soit  $\sqrt{145}$ . L'égalité  $OD = \frac{1}{2} BD$  est correcte

puisque O est le milieu du segment [BD]. Par

contre l'égalité  $OD = \frac{1}{2} BD = 6$  est erronée car

$$OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \sqrt{145}. \text{ Le pas de déduction}$$

$OD = 6$  et  $D'D = 1$  donc  $\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DO}$  n'est

pas valide. Car  $OD \neq 6$  et  $DD' \neq 1$ . [DD'] est

une diagonale d'un carré dont le côté mesure

1cm donc  $DD' = \sqrt{2}$ . Pour obtenir l'égalité

vectorielle  $\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DO}$ , cet élève part des

distances  $OD = 6$  et  $D'D = 1$  qui lui donnent

$DD' = \frac{1}{6} DO$ . Ce pas de déduction n'est pas

valide car l'égalité des distances ne donne pas

forcément l'égalité des vecteurs. Cette erreur

est engendrée par une mauvaise assimilation de

l'égalité de deux vecteurs.

#### ➤ Procédures incorrectes

Six élèves ont utilisé des procédures

incorrectes ; il s'agit des élèves E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub>, E<sub>5</sub>,

E<sub>8</sub> et E<sub>9</sub>.

Les élèves E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub>, E<sub>5</sub>, et E<sub>8</sub> se sont

contentés de donner une phrase qui résume la

preuve attendue. Leurs démonstrations ne sont

pas structurées.

Exemple

Malgré le milieu O commun entre ces deux rectangles les pts ne sont pas alignés. Tout dépend de l'écart entre les deux rectangles. Ces points peuvent être alignés mais dans notre cas cela ne se valide pas.

### Encadré 8 : Production de l'élève E<sub>2</sub>

La conjecture juste émise par cet apprenant n'est pas validée par une démonstration. Il y a une confusion entre la démonstration et l'explication. Mais, derrière cette explication, l'apprenant évoque un cas particulier dans lequel les points considérés sont alignés. Il s'agit du cas où les deux rectangles sont des carrés.

- Etape 2 : utilisation du logiciel CABRI II PLUS puis de l'environnement papier-crayon
  - Notre intervention

Après le précédent travail effectué dans l'environnement papier/crayon, nous avons demandé aux élèves de reproduire cette figure avec le logiciel CABRI II PLUS et d'examiner la position relative de ces trois points. Pour permettre la genèse instrumentale, nous avons suggéré un ensemble d'outils susceptibles d'être utilisé pour cette tâche. Il s'agit des outils : *point, segment, point d'intersection, segment, droite perpendiculaire, droite parallèle, compas, nombre, rotation, translation*. Concernant la position relative de ces points, nous avons suggéré l'usage de l'un des outils : *droite, segment, alignés ?* Nous avons ensuite invité les élèves à explorer les propriétés de la figure à l'aide des outils de ce logiciel. Ces propriétés peuvent servir d'éléments de conjectures dans l'élaboration des pas de déductions. Enfin, nous avons expliqué la structure d'une démonstration en insistant sur la validité d'un pas de déduction. A cet effet, nous avons souligné la nécessité de l'usage des outils de validation des conjectures tels que les théorèmes et les propriétés des figures afin de passer de la géométrie d'observation (G1) à la géométrie proto-axiomatique (G2).

- Les Résultats

La figure a été reproduite à l'aide du logiciel CABRI II PLUS avec succès par ces élèves que nous avons momentanément regroupé en binômes. En utilisant l'outil *Droite* ou l'outil *Alignés ?* de ce logiciel, les élèves se sont rendus compte que leur perception de la figure était erronée. Donc, ces trois points ne sont pas alignés.

Après l'invalidation de leurs conjectures par l'artefact CABRI II PLUS et

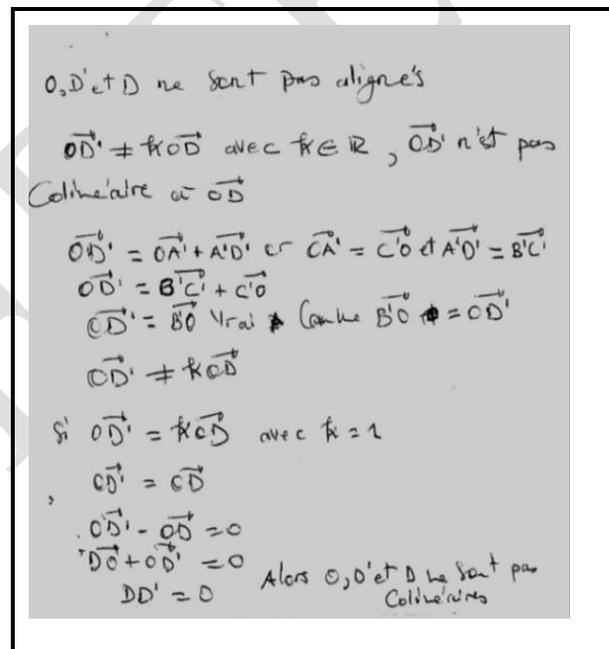
l'exploration des propriétés des figures sous-jacentes, nous avons demandé aux élèves de reprendre l'activité pour prouver le non alignement de ces points.

Huit élèves (E<sub>5</sub>, E<sub>7</sub>, E<sub>8</sub>, E<sub>6</sub>, E<sub>9</sub>, E<sub>10</sub>, E<sub>11</sub>, E<sub>12</sub>) seulement sur les 12 ont tenté de démontrer le non alignement de ces points.

Sur ces 8 élèves qui ont repris la démonstration, 5 ont réussi à prouver le non alignement de ces points. Il s'agit des élèves : E<sub>5</sub>, E<sub>7</sub>, E<sub>8</sub>, E<sub>6</sub> et E<sub>12</sub>.

Les trois autres élèves (E<sub>9</sub>, E<sub>10</sub>, E<sub>11</sub>) se sont à nouveau heurtés aux mêmes facteurs qui ont entravé la première démonstration.

- Exemples des productions des élèves



### Encadré 9 (Voir en Annexe): production de l'élève E11

La procédure utilisée par cet élève consiste à prouver la non colinéarité des vecteurs  $\vec{OD}$  et  $\vec{OD'}$ . Il maîtrise la proposition antécédente et la conclusion à détacher. Mais, cette démonstration n'est pas valide à cause de l'invalidité de certains pas de déduction quelle contient. Nous relevons d'abord une erreur de langage car au lieu des points colinéaires, cet élève devait parler des vecteurs colinéaires ou encore parler des points qui ne sont pas alignés. La difficulté à prouver qu'il n'existe pas un réel  $k$  tel que  $\vec{OD'} = k\vec{OD}$  pousse cet élève à raisonner par l'absurde en supposant que ces vecteurs sont égaux. En posant  $k = 1$ , il obtient une contradiction qui conduit à

l'égalité  $\overrightarrow{DD'} = \vec{0}$ . Ce qui n'est pas vraie. Ce raisonnement par l'absurde devrait être valide en prenant un réel  $k \neq 1$  puisqu'il est évident que ces deux vecteurs ne sont pas égaux. Le pas de déduction «  $DD' = 0$  alors  $O; D'; D$  ne sont pas alignés » n'est pas valide. Car cette distance nulle veut dire que les points  $D$  et  $D'$  sont confondus.

#### Encadré 10 : production de l'élève E<sub>8</sub>

Cet apprenant raisonne par l'absurde en cherchant à montrer qu'il n'existe pas une homothétie qui transforme l'un des rectangles en un autre. Ce qui lui conduit par exemple à vérifier si les mesures des côtés de ces rectangles sont proportionnelles. Il réussit à prouver que les côtés de ces deux rectangles ne sont pas proportionnels. Par conséquent les points considérés ne sont pas alignés.

#### 3.2.2. Synthèse

Concernant cette activité, en dehors des difficultés relatives au passage de la géométrie d'observation (G1) à la géométrie proto-axiomatique (G2), nous relevons un problème relatif à la distinction entre un dessin et une figure. Les élèves ont utilisé le dessin à la place de la figure engendrant ainsi des réponses erronées dans leurs productions. Le changement d'espace de travail géométrique a permis, avec les outils du logiciel CABRI II PLUS de distinguer un dessin d'une figure à travers la construction réussie et l'exploration des propriétés de la figure. Aussi, dans cet espace de travail géométrique, notre insistance sur la structure d'une démonstration valide en géométrie a engendré le passage par quelques élèves de la géométrie (G1) à la géométrie (G2).

#### CONCLUSION

Dans cette étude, nous nous sommes interrogés sur les conditions de viabilité de l'utilisation des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques au Congo. L'analyse des activités nous a permis de mettre en évidence des difficultés sur la structuration

d'une démonstration. L'activité complémentaire consistant à faire recours aux outils du logiciel CABRI II PLUS a permis de faire prendre conscience aux élèves quant au mode de validation de leurs productions qui ne devraient pas s'appuyer sur le dessin mais plutôt sur la figure géométrique.

Lors de la première activité de notre expérimentation, dans les deux environnements de travail, aucun élève n'a réussi à structurer une démonstration valide et des pas de raisonnement valide<sup>2</sup>. Les tâches d'exploration des propriétés de la figure ont été réussies par tous les binômes. Dans ces deux espaces, ils ont utilisé l'outil compas pour vérifier l'existence du cercle passant par ces quatre points donnés. Cependant, le passage d'une géométrie à l'autre a été entravé par le fait que les élèves n'ont pas été initiés à la conduite d'un raisonnement déductif. C'est ce qui semble expliquer leur attachement à la géométrie d'observation (G1). Aussi, l'oubli et la mauvaise assimilation des théorèmes à utiliser et des propriétés des figures prototypes ont entravé les démonstrations.

Lors de la deuxième activité de notre expérimentation, dans l'espace de travail CABRI II PLUS, en insistant sur le fait qu'en géométrie, lors de la résolution d'un problème de démonstration d'une propriété, il faut faire usage des théorèmes ou des propriétés des figures pour bâtir un raisonnement valide, nous avons incité les apprenants à passer de la géométrie d'observation à la géométrie hypothético-déductive. Après l'invalidation de la conjecture (en distinguant la figure et le dessin) par le logiciel CABRI II PLUS le passage de (G1) à (G2) se fait plus naturellement par la plupart des élèves qui ont compris qu'il faut nécessairement utiliser les propriétés des figures et les théorèmes usuels, pour prouver le non alignement de ces points. Il est donc capital d'apprendre la conduite d'une démonstration valide aux élèves et de les faire évoluer dans un espace de travail géométrique ayant pour artefact un logiciel de

<sup>2</sup> Selon Duval (1995), pour qu'un pas de raisonnement soit valide il faut et il suffit qu'il ne puisse produire qu'une proposition et une seule. Selon Aristote, un pas de raisonnement est valide

s'il « ne requiert aucun terme étranger en plus de prémisses » (anal1, 24b 21-22 cité par DUVAL, 1995, p 269).

géométrie dynamique dans la résolution des problèmes de géométrie

### BIBLIOGRAPHIE

- Duval R., 2005. *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*. Annales de didactique et de sciences cognitives ; 10 : 5-53.
- Houdement C., Kuzniak A., 1999. *Géométrie et paradigmes géométriques*. Petit x ; 51 : 5-21.
- Houdement C., Kuzniak A., 2000. *Formation des maîtres et paradigmes géométriques*. Recherche en Didactique des Mathématiques ; 20 (1), La pensée sauvage.
- Kuzniak A., 2004. Paradigme et espaces de travail géométrique. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. IREM-Paris, 63 p.
- Karsenti T., Gautier C., 2006. *Les TIC bouleversent-elles réellement le travail des enseignants ?* Formation et profession. Bulletin du CRIFPE, 12(3) : 2-4.
- Parzys B., 1988. *Voir et savoir – la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace*. Bulletin de l'APMEP ; 364 : 339-350.
- Parzys B., 2006. *La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation des professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ?* “ Quaderni di Ricerca in Didattica ” ; n°17 : 128-151.

#### **Manuel scolaire**

- Collection Terracher., 1986.  
*Mathématiques 2<sup>e</sup>*. Paris :  
HACHETTE classique, 576 p.

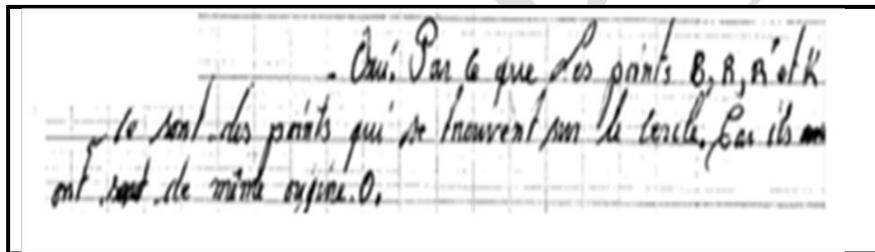
## Annexe

**Énoncé** (version 1)

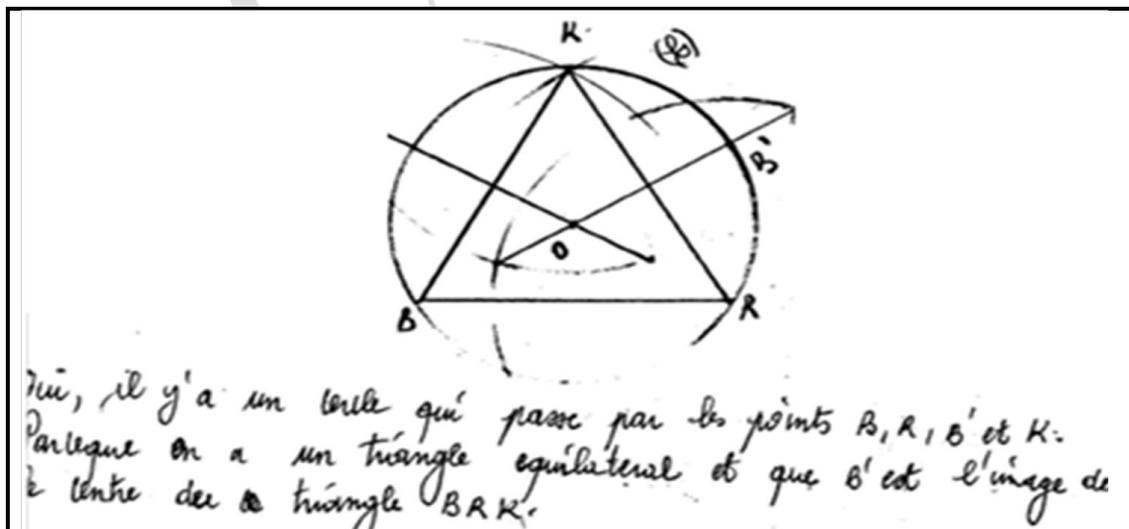
Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral  $BRK$  de centre  $O$ .  $H$  est le milieu de  $[RK]$ .  $B'$  est la symétrique de  $O$  par rapport à  $(RH)$ . Existe-t-il un cercle qui passe par les points  $B, R, B'$  et  $K$  ? Justifier votre réponse à l'aide d'une démonstration.

**Énoncé** (version 2)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral  $ABC$  de centre  $O$ .  $I$  est le milieu de  $[BC]$ .  $A'$  est la symétrique de  $O$  par rapport à  $(BI)$ . Existe-t-il un cercle qui passe par les points  $A, B, C$  et  $A'$  ? Justifier votre réponse à l'aide d'une démonstration.



Encadré 10 : production du binôme 4



Encadré 11 : production du binôme

## Encadré 12

Les points  $O, D'$  et  $D$  sont alignés s'il existe une homothétie  $h$  de centre  $O$  qui transforme  $D'$  en  $D$  ou encore le rectangle  $A'B'C'D'$  en le rectangle  $ABCD$ . Ce qui veut dire que les côtés des deux rectangles sont proportionnels.

$$\text{ma: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} ; \frac{BC}{B'C'} = \frac{9}{7}$$

Comme  $\frac{4}{3} \neq \frac{9}{7}$  alors ces rectangles ne sont pas homothétiques. Donc  $O, D'$  et  $D$  ne sont pas alignés.