IMHOTEP, VOL. 7, N^O1 (2007), 1-14

VERSION ALGÉBRIQUE DU FIBRÉ TANGENT

EUGÈNE OKASSA

ABSTRACT. On définit une algèbre qui joue le rôle de l'algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur le fibré tangent d'une variété lisse. On décrit algébriquement certaines propriétés du fibré tangent.

We define an algebra which plays the role of the algebra of the smooth functions on the tangent fibre bundle. Some algebraic properties of the tangent fibre bundle are described.

1. INTRODUCTION

Une algèbre locale W, au sens d'André Weil, est une algèbre réelle commutative unitaire de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ayant un idéal maximal unique $\mathfrak{m}$ de codimension 1 sur $\mathbb{R}$. On a

$$W = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{m}.$$

Comme W est de dimension finie, il s'ensuit que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est nilpotent. Le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{m}^{k+1} = (0)$ et $\mathfrak{m}^k \neq (0)$ est la hauteur de W.

Lorsque M est une variété lisse, $C^\infty(M)$ désigne l'algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M. Un point proche de $x_0 \in M$ d'espèce W est un homomorphisme d'algèbres

$$\xi : C^\infty(M) \longrightarrow W$$

tel que pour tout $f \in C^\infty(M)$,

$$[\xi(f) - f(x_0)] \in \mathfrak{m},$$

[1]Received by the editors: September 4, 2006.

Mathematics Subject Classification 2000: 13H99; 53C05; 53C15 .

Key words and phrases: algèbre locale, algèbre symétrique, différentielle de Kähler, fibré tangent, semi-spray.

c'est-à-dire que la partie scalaire de $\xi(f)$ est $f(x_0)$ [9]. Si M_x^W désigne l'ensemble des points proches de x d'espèce W, la réunion disjointe

$$M^W = \bigcup_{x \in M} M_x^W$$

est une variété lisse dont la dimension est $\dim M \cdot \dim W$ [9].

Lorsque

$$W = \mathbb{D} = \mathbb{R}[T]/(T^2)$$

est l'algèbre des nombres duaux, $M^{\mathbb{D}}$ s'identifie canoniquement au fibré tangent TM [9].

Pour $f \in C^\infty(M)$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f^W : & M^W & \longrightarrow & W \\ & \xi & \longmapsto & \xi(f) \end{array}$$

est de classe C^∞ et l'application

$$\begin{array}{rccr} \gamma_W : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M^W, W) = W \otimes C^\infty(M^W) \\ & f & \longmapsto & f^W \end{array}$$

est un homomorphisme d'algèbres. Le théorème de Weil indique que si W_1 et W_2 sont deux algèbres locales, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} (M^{W_1})^{W_2} & \longrightarrow & M^{W_1 \otimes W_2} \\ \eta & \longmapsto & (id_{W_1} \otimes \eta) \circ \gamma_{W_1} \end{array}$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ [9].

On note $\mathfrak{X}(M^W)$ le $C^\infty(M^W)$-module des champs de vecteurs sur M^W et $Der_{\gamma_W}\left[C^\infty(M), W \otimes C^\infty(M^W)\right]$ l'espace des γ_W-dérivations i.e. l'espace des applications linéaires

$$\varphi : C^\infty(M) \longrightarrow W \otimes C^\infty(M^W)$$

telles que pour toutes fonctions f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$\varphi(fg) = \varphi(f) \cdot \gamma_W(g) + \gamma_W(f) \cdot \varphi(g).$$

Compte tenu du théorème de Weil, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M^W) & \longrightarrow & Der_{\gamma_W}\left[C^\infty(M), W \otimes C^\infty(M^W)\right] \\ X & \longmapsto & (id_W \otimes X) \circ \gamma_W \end{array}$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^W)$-modules [7],[8]. Ainsi lorsque

$$W = \mathbb{D} = \mathbb{R}[T]/(T^2),$$

en identifiant $M^{\mathbb{D}}$ au fibré tangent TM, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(TM) & \longrightarrow & Der_{\gamma_{\mathbb{D}}}\left[C^\infty(M), \mathbb{D} \otimes C^\infty(TM)\right] \\ X & \longmapsto & (id_{\mathbb{D}} \otimes X) \circ \gamma_{\mathbb{D}} \end{array}$$

est un isomorphisme de $C^\infty(TM)$-modules avec

$$\begin{array}{llll} \gamma_{\mathbb{D}}: & C^\infty(M) & \longrightarrow & \mathbb{D}\otimes C^\infty(TM) \\ & f & \longmapsto & 1_{\mathbb{D}}\otimes(f\circ\pi_M)+\varepsilon\otimes df \end{array}$$

où

$$\pi_M : TM \longrightarrow M$$

est la projection qui à un vecteur tangent associe son origine,

$$\begin{array}{llll} df: & TM & \longrightarrow & M \\ & v & \longmapsto & v(f) \end{array}$$

la différentielle de $f\in C^\infty(M)$ et $(1_{\mathbb{D}},\varepsilon)$ une base de $\mathbb{D}$ avec $\varepsilon^2=0$.

On va, à partir de l'isomorphisme

$$\mathfrak{X}(TM) \longrightarrow Der_{\gamma_{\mathbb{D}}}\left[C^\infty(M),\mathbb{D}\otimes C^\infty(TM)\right], X\longmapsto (id_{\mathbb{D}}\otimes X)\circ\gamma_{\mathbb{D}},$$

construire une algèbre jouant le rôle de l'algèbre $C^\infty(TM)$. Les dérivations de cette algèbre vont jouer le rôle des champs de vecteurs sur TM. On construira ainsi les équivalents algébriques du champ de Liouville, des semi-sprays et des connexions non linéaires.

Dans tout ce qui suit, A désigne une algèbre commutative unitaire sur un corps commutatif K de caractéristique nulle, 1_A son élément-unité et $Der_K(A)$ le A-module des K-dérivations de A. On note $\Omega_K(A)$ le A-module des K-différentielles de Kähler de A, $d_{A/K}: A\longrightarrow\Omega_K(A)$ la dérivation canonique et $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$ la A-algèbre symétrique du A-module $\Omega_K(A)$ [1].

Soit $\mathbb{D}=K\left[T\right]/(T^2)$, $id_{\mathbb{D}}$ l'application identique de $\mathbb{D}$, $(1_{\mathbb{D}},\varepsilon)$ une base de $\mathbb{D}$ où ε est l'image de T par la surjection canonique

$$K\left[T\right]\longrightarrow\mathbb{D}=K\left[T\right]/(T^2)$$

et $(1^*_{\mathbb{D}},\varepsilon^*)$ la base duale de la base $(1_{\mathbb{D}},\varepsilon)$. On notera que $1^*_{\mathbb{D}}$ est l'augmentation de $\mathbb{D}$.

Les K-homomorphismes d'algèbres considérés sont unifères et les produits tensoriels sont sur K.

2. Dérivations de $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$.

La K-algèbre $\mathbb{D}\otimes_K S_A\left[\Omega_K(A)\right]$ est un $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$-module libre de rang 2: une base est

$$(1_{\mathbb{D}}\otimes 1_{S_A[\Omega_K(A)]},\varepsilon\otimes 1_{S_A[\Omega_K(A)]}).$$

On vérifie que l'application

$$\begin{array}{llll} \gamma_A: & A & \longrightarrow & \mathbb{D}\otimes_K S_A\left[\Omega_K(A)\right] \\ & a & \longmapsto & 1_{\mathbb{D}}\otimes a+\varepsilon\otimes d_{A/K}(a) \end{array}$$

est un homomorphisme de K-algèbres.

On note $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ le $S_A[\Omega_K(A)]$-module des K-dérivations de $S_A[\Omega_K(A)]$ et $Der_{\gamma_A}(A, \mathbb{D}\otimes_K S_A[\Omega_K(A)])$ le $S_A[\Omega_K(A)]$-module des γ_A-dérivations, i.e. l'espace des applications K-linéaires

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)]$$

telles que pour tous a et b appartenant à A,

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \gamma_A(b) + \gamma_A(a) \cdot \varphi(b).$$

On notera que le crochet de deux dérivations X et Y de $S_A[\Omega_K(A)]$ est la dérivation

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Théorème 1. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \sigma_A : & Der_K(S_A[\Omega_K(A)]) & \longrightarrow & Der_{\gamma_A}(A, \mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)]) \\ & X & \longmapsto & (id_{\mathbb{D}} \otimes X) \circ \gamma_A \end{array}$$

est un isomorphisme de $S_A[\Omega_K(A)]$-modules.

Démonstration: On vérifie que σ_A est $S_A[\Omega_K(A)]$-linéaire.

- L'application σ_A est injective: en effet, si $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est tel que $(id_{\mathbb{D}} \otimes X) \circ \gamma_A = 0$, alors on a $X(a) = 0$ et $X\left[d_{A/K}(a)\right] = 0$ pour tout $a \in A$. Comme A et $\Omega_K(A)$ engendrent la A-algèbre $S_A[\Omega_K(A)]$, on conclut que $X = 0$.

- L'application σ_A est surjective: en effet soit $Y : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)]$ une γ_A-dérivation. Pour tout $a \in A$, il existe deux applications K-linéaires $f_0 : A \longrightarrow S_A[\Omega_K(A)]$ et $f_1 : A \longrightarrow S_A[\Omega_K(A)]$ telles que

$$Y(a) = 1_{\mathbb{D}} \otimes f_0(a) + \varepsilon \otimes f_1(a).$$

L'application

$$\overline{\gamma_A} : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)], a \longmapsto 1_{\mathbb{D}} \otimes a + \varepsilon \otimes f_0(a),$$

est un homomorphisme de K-algèbres et on vérifie que l'application

$$\overline{Y} : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)], a \longmapsto 1_{\mathbb{D}} \otimes d_{A/K}(a) + \varepsilon \otimes f_1(a),$$

est une $\overline{\gamma_A}$-dérivation.

En munissant $\mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)]$ de la structure de A-module définie par l'homomorphisme d'algèbres $\overline{\gamma_A}$, alors il existe une application A-linéaire et une seule

$$\overline{Y_0} : \Omega_K(A) \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A[\Omega_K(A)]$$

telle que

$$\overline{Y_0} \circ d_{A/K} = \overline{Y}.$$

Comme la A-algèbre $\mathbb{D} \otimes_K S_A [\Omega_K(A)]$ est commutative, on déduit l'existence et l'unicité d'un homomorphisme de A-algèbres

$$\overline{Y_1} : S_A [\Omega_K(A)] \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A [\Omega_K(A)]$$

tel que pour tout $a \in A$, on a $\overline{Y_1}(a) = \overline{\gamma_A}(a)$ et $\overline{Y_1} \left[d_{A/K}(a) \right] = \overline{Y_0} \left[d_{A/K}(a) \right] = \overline{Y}(a)$.

L'application

$$X = (\varepsilon^* \otimes id_{S_A[\Omega_K(A)]}) \circ \overline{Y_1} : S_A [\Omega_K(A)] \longrightarrow S_A [\Omega_K(A)]$$

est une K-dérivation. Pour tout $a \in A$, on vérifie qu'on a $X(a) = f_0(a)$ et $X \left[d_{A/K}(a) \right] = f_1(a)$. Ceci donne

$$[(id_{\mathbb{D}} \otimes X) \circ \gamma_A] = Y.$$

D'où la surjectivité de σ_A. ■

Lorsque M est une variété lisse, la $C^\infty(M)$-algèbre symétrique

$$S_{C^\infty(M)} [\Omega_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))]$$

du $C^\infty(M)$-module $\Omega_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ va jouer le rôle de l'algèbre $C^\infty(TM)$ des fonctions numériques de classe C^∞sur TM.

Compte tenu du théorème précédent, en notant

$$i : A \longrightarrow S_A [\Omega_K(A)]$$

l'injection canonique, on dira que le triplet $(A, i, S_A [\Omega_K(A)])$ est la version algébrique du fibré tangent ou que $S_A [\Omega_K(A)]$ est la version algébrique du fibré tangent. Lorsque M est une variété lisse, ce triplet va jouer le rôle du triplet

$$(TM, \pi_M, M)$$

où

$$\pi_M : TM \longrightarrow M$$

est le fibré tangent.

2.1. Prolongements à $S_A [\Omega_K(A)]$ des dérivations de A.

Proposition 2. *Si*

$$\theta : A \longrightarrow A$$

est une dérivation de A, alors il existe une K-dérivation et une seule

$$\theta^A : S_A [\Omega_K(A)] \longrightarrow S_A [\Omega_K(A)]$$

telle que pour tout $a \in A$,

$$\theta^A(a) = \theta(a) \text{ et } \theta^A \left[d_{A/K}(a) \right] = d_{A/K} [\theta(a)] .$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} Der_K(A) & \longrightarrow & Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) \\ \theta & \longmapsto & \theta^A \end{array}$$

est un homomorphisme de K-algèbres de Lie.

Démonstration: On vérifie que l'application

$$\gamma_A \circ \theta : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

est une γ_A-dérivation. On déduit du théorème 1 l'existence et l'unicité d'une K-dérivation

$$\theta^A : S_A\left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

telle que

$$(id_{\mathbb{D}} \otimes \theta^A) \circ \gamma_A = \gamma_A \circ \theta.$$

Pour tout $a \in A$, on a $\theta^A(a) = \theta(a)$ et $\theta^A\left[d_{A/K}(a)\right] = d_{A/K}\left[\theta(a)\right]$.

On vérifie que l'application

$$\begin{array}{ccc} Der_K(A) & \longrightarrow & Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) \\ \theta & \longmapsto & \theta^A \end{array}$$

est un homomorphisme de K-algèbres de Lie. ∎

On dira que la dérivation θ^A est le prolongement à $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$ de la dérivation θ de A.

2.2. **Dérivation de Liouville.** L'application

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ x = \lambda \cdot 1_{\mathbb{D}} + \mu \cdot \varepsilon & \longmapsto & \mu \cdot \varepsilon \end{array}$$

est une K-dérivation. Ici, λ et μ sont des éléments de K.

Proposition 3. *Il existe une K-dérivation et une seule*

$$C : S_A\left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

telle que pour tout $a \in A$,

$$C(a) = 0 \text{ et } C\left[d_{A/K}(a)\right] = d_{A/K}(a).$$

Démonstration: On vérifie que l'application

$$(d \otimes id_{S_A[\Omega_K(A)]}) \circ \gamma_A : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

est une γ_A-dérivation. On déduit du théorème 1 l'unicité et l'existence d'une K-dérivation

$$C : S_A\left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

telle que

$$(id_{\mathbb{D}} \otimes C) \circ \gamma_A = (d \otimes id_{S_A[\Omega_K(A)]}) \circ \gamma_A.$$

Pour tout $a \in A$, il s'ensuit que $C(a) = 0$ et $C\left[d_{A/K}(a)\right] = d_{A/K}(a)$. ■

On dira que la dérivation C est la dérivation de Liouville ou dérivation canonique. Cette dérivation, en géométrie différentielle, joue le rôle du champ de vecteurs sur le fibré tangent à une variété lisse engendrant le groupe des homothéties sur les fibres.

Remarque 4. *Pour $p \in \mathbb{N}$, si $S_A^p\left[\Omega_K(A)\right]$ est la p-ième puissance symétrique du A-module $\Omega_K(A)$, alors pour tout $f \in S_A^p\left[\Omega_K(A)\right]$, on a*

$$C(f) = p \cdot f.$$

Ce qui signifie que pour tout $f \in S_A\left[\Omega_K(A)\right]$, on a

$$C(f) = 0$$

si et seulement si $f \in A$.

Proposition 5. *Si $\theta \in Der_K(A)$, alors le crochet*

$$\left[\theta^A, C\right]$$

est nul.

Démonstration: Pour tout $a \in A$, on vérifie que

$$\left[\theta^A, C\right](a) = 0$$

et

$$\left[\theta^A, C\right](d_{A/K}(a)) = 0.$$

Comme A et $\Omega_K(A)$ engendrent la A-algèbre $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$, on déduit que $\left[\theta^A, C\right] = 0$. ■

2.3. **Structure de $\mathbb{D}$-module sur** $Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$**.**

Proposition 6. *Si $X \in Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$, alors il existe une K-dérivation et une seule*

$$\varepsilon \cdot X : S_A\left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

telle que pour tout $a \in A$,

$$(\varepsilon \cdot X)(a) = 0 \text{ et } (\varepsilon \cdot X)\left[d_{A/K}(a)\right] = X(a).$$

Démonstration: Soit

$$\begin{array}{rcl} \mu_\varepsilon : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ \alpha \cdot 1_{\mathbb{D}} + \beta \cdot \varepsilon & \longmapsto & \alpha \cdot \varepsilon \end{array}$$

la multiplication par ε dans $\mathbb{D}$. Pour tout $X \in Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$, on vérifie que l'application

$$(\mu_\varepsilon \otimes X) \circ \gamma_A : A \longrightarrow \mathbb{D} \otimes_K S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

est une γ_A-dérivation. On déduit du théorème 1 l'existence et l'unicité d'une K-dérivation

$$\varepsilon \cdot X : S_A\left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow S_A\left[\Omega_K(A)\right]$$

telle que

$$(id_{\mathbb{D}} \otimes \varepsilon \cdot X) \circ \gamma_A = (\mu_\varepsilon \otimes X) \circ \gamma_A.$$

Pour tout $a \in A$, on a $(\varepsilon \cdot X)(a) = 0$ et $(\varepsilon \cdot X)\left[d_{A/K}(a)\right] = X(a)$. ■

L'application

$$\zeta : \mathbb{D} \times Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) \longrightarrow Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$$

qui à $(\alpha \cdot 1_{\mathbb{D}} + \beta \cdot \varepsilon, X)$ appartenant à $\mathbb{D} \times Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$ associe l'élément $\alpha X + \varepsilon \cdot (\beta X)$ de $Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$ définit une structure de $\mathbb{D}$-module sur $Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$.

L'application

$$\begin{array}{llcr} L_\varepsilon : & Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) & \longrightarrow & Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) \\ & X & \longmapsto & \varepsilon \cdot X \end{array}$$

est un morphisme de $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$-modules et est telle que

$$L_\varepsilon^2 = 0.$$

L'application L_ε joue le rôle de la structure presque tangente en géométrie différentielle. En effet, lorsque $\mathfrak{X}(TM)$ est le $C^\infty(TM)$-module des champs de vecteurs sur TM où M est une variété lisse de dimension n, il existe [3] un tenseur de type $(1,1)$

$$J : \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$$

de rang n tel que

$$J^2 = 0.$$

L'endomorphisme

$$L_\varepsilon : Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) \longrightarrow Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$$

est la version algébrique de la structure presque tangente J.

Proposition 7. *Si $\theta \in Der_K(A)$ et si $X \in Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$, alors*

$$\left[\theta^A, \varepsilon \cdot X\right] = \varepsilon \cdot \left[\theta^A, X\right].$$

Démonstration: Pour tout $a \in A$, on a $(\left[\theta^A, \varepsilon \cdot X\right] - \varepsilon \cdot \left[\theta^A, X\right])(a) = 0$ et $(\left[\theta^A, \varepsilon \cdot X\right] - \varepsilon \cdot \left[\theta^A, X\right])(d_{A/K}(a)) = 0$. Comme A et $\Omega_K(A)$ engendrent la A-algèbre $S_A\left[\Omega_K(A)\right]$, on conclut que $\left[\theta^A, \varepsilon \cdot X\right] = \varepsilon \cdot \left[\theta^A, X\right]$. ■

On a aussi:

Proposition 8. *Si X et Y appartiennent à $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, alors*

$$[\varepsilon \cdot X, \varepsilon \cdot Y] = \varepsilon \cdot [\varepsilon \cdot X, Y] + \varepsilon \cdot [X, \varepsilon \cdot Y].$$

Cette expression, en géométrie différentielle, signifie que la structure presque tangente J est intégrable.

2.4. **Dérivations spéciales.** Une dérivation X de $S_A[\Omega_K(A)]$ sera dite dérivation spéciale si pour tout $a \in A$,

$$X(a) = d_{A/K}(a).$$

Les dérivations spéciales jouent le rôle des champs de vecteurs semi-sprays en géométrie différentielle.

Proposition 9. *Une dérivation $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est une dérivation spéciale si et seulement si*

$$\varepsilon \cdot X = C,$$

où C est la dérivation de Liouville.

Démonstration: Si $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est une dérivation spéciale, pour tout $a \in A$, on vérifie que $(\varepsilon \cdot X - C)(a) = 0$ et $(\varepsilon \cdot X - C)\left[d_{A/K}(a)\right] = 0$.

Inversement, si $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est une dérivation telle que

$$\varepsilon \cdot X = C,$$

pour tout $a \in A$, on a

$$\begin{aligned}(\varepsilon \cdot X)\left[d_{A/K}(a)\right] &= C\left[d_{A/K}(a)\right]\\ X(a) &= d_{A/K}(a).\end{aligned}$$

On conclut que X est une dérivation spéciale. ■

L'existence des dérivations spéciales n'est pas toujours assurée.

Théorème 10. *Si le A-module $\Omega_K(A)$ est projectif, alors $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ admet des dérivations spéciales.*

Démonstration: L'application

$$\begin{array}{rccc} d_{A/K}: & A & \longrightarrow & S_A[\Omega_K(A)] \\ & a & \longmapsto & d_{A/K}(a) \end{array}$$

étant une K-dérivation, alors il existe une application A-linéaire et une seule

$$\overline{d_{A/K}} : \Omega_K(A) \longrightarrow S_A[\Omega_K(A)]$$

telle que pour tout $a \in A$,

$$\overline{d_{A/K}}\left[d_{A/K}(a)\right] = d_{A/K}(a).$$

En munissant $\mathbb{D}\otimes_K S_A[\Omega_K(A)]$ de la structure de A-module définie par γ_A, l'application

$$\begin{array}{rrcl} 1_{\mathbb{D}}^{*}\otimes id_{S_A[\Omega_K(A)]}: & \mathbb{D}\otimes_K S_A[\Omega_K(A)] & \longrightarrow & S_A[\Omega_K(A)] \\ & 1_{\mathbb{D}}\otimes f+\varepsilon\otimes g & \longmapsto & f \end{array}$$

est A-linéaire et surjective. Comme le A-module $\Omega_K(A)$ est projectif, il existe ainsi une application A-linéaire

$$Y:\Omega_K(A)\longrightarrow \mathbb{D}\otimes_K S_A[\Omega_K(A)]$$

telle que

$$(1_{\mathbb{D}}^{*}\otimes id_{S_A[\Omega_K(A)]})\circ Y=\overline{d_{A/K}}.$$

Pour $a\in A$, en écrivant

$$Y\left[d_{A/K}(a)\right]=1_{\mathbb{D}}\otimes f_0\left[d_{A/K}(a)\right]+\varepsilon\otimes f_1\left[d_{A/K}(a)\right],$$

où $f_0:\Omega_K(A)\longrightarrow S_A[\Omega_K(A)]$ et $f_1:\Omega_K(A)\longrightarrow S_A[\Omega_K(A)]$ sont deux applications K-linéaires, on a $f_0\left[d_{A/K}(a)\right]=d_{A/K}(a)$. On vérifie que l'application

$$\begin{array}{rrcl} Y\circ d_{A/K}: & A & \longrightarrow & \mathbb{D}\otimes_K S_A[\Omega_K(A)] \\ & a & \longmapsto & Y\left[d_{A/K}(a)\right] \end{array}$$

est une γ_A-dérivation. Soit

$$X:S_A[\Omega_K(A)]\longrightarrow S_A[\Omega_K(A)]$$

l'unique K-dérivation telle que

$$(id_{\mathbb{D}}\otimes X)\circ\gamma_A=Y\circ d_{A/K}.$$

Il s'ensuit que, pour tout $a\in A$, on a $X(a)=d_{A/K}(a)$ et $X\left[d_{A/K}(a)\right]=f_1\left[d_{A/K}(a)\right]$: ceci signifie que X est une dérivation spéciale. ■

Dans toute la suite, le A-module $\Omega_K(A)$ est supposé projectif et toute dérivation spéciale est notée S.

2.5. Caractérisation des prolongements à $S_A[\Omega_K(A)]$ des dérivations de A.

Proposition 11. *Une dérivation $X\in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est le prolongement à $S_A[\Omega_K(A)]$ d'une dérivation de A si et seulement si pour tout Y appartenant à $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, les deux propriétés suivantes sont satisfaites:*

1) $[X,\varepsilon\cdot Y]=\varepsilon\cdot[X,Y]$;
2) $[X,C]=0$.

Démonstration: La condition nécessaire découle des propositions 5 et 7.

Réciproquement, comme

$$[X, C] = 0,$$

pour tout $a \in A$, on a $C\,[X(a)] = 0$, et compte tenu de la remarque 4, on déduit que

$$X(a) \in A.$$

Ainsi, X admet une restriction θ à A i.e. $\theta = X/A$. Pour tout $a \in A$, on a donc: $X(a) = \theta(a) = \theta^A(a)$.

En prenant pour Y une dérivation spéciale S et compte tenu de l'hypothèse, on a $[X, \varepsilon \cdot S] = \varepsilon \cdot [X, S]$. Ceci signifie que $[X, C] = \varepsilon \cdot [X, S]$. Comme $[X, C] = 0$, on déduit que $\varepsilon \cdot [X, S] = 0$. D'où pour tout $a \in A$, on a $0 = (\varepsilon \cdot [X, S])(d_{A/K}(a)) = [X, S]\,(a)$. On obtient: $X\left[d_{A/K}(a)\right] = \theta^A\left[d_{A/K}(a)\right]$ pour tout $a \in A$. On déduit que

$$X = \theta^A.$$

D'où l'assertion. ■

3. Projecteurs verticaux

Dans cette partie, le fait que le A-module $\Omega_K(A)$ soit supposé projectif va nous permettre de construire des sous-modules supplémentaires du sous-module vertical de $Der_K(S_A\,[\Omega_K(A)])$.

3.1. Dérivations verticales.

Une K-dérivation $X \in Der_K(S_A\,[\Omega_K(A)])$ sera dite dérivation verticale si pour tout $a \in A$,

$$X(a) = 0.$$

La dérivation de Liouville C est une dérivation verticale et deux dérivations spéciales diffèrent d'une dérivation verticale. Lorsque X est une dérivation de $S_A\,[\Omega_K(A)]$, alors $\varepsilon \cdot X$ est une dérivation verticale. L'ensemble $\mathcal{V}_A$ des dérivations verticales de $S_A\,[\Omega_K(A)]$ est à la fois un $S_A\,[\Omega_K(A)]$-sous-module et un $\mathbb{D}$-sous-module de $Der_K(S_A\,[\Omega_K(A)])$: il est aussi une K-sous-algèbre de Lie de $Der_K(S_A\,[\Omega_K(A)])$.

Les dérivations verticales jouent le rôle des champs verticaux sur le fibré tangent en géométrie différentielle.

Proposition 12. *Si X est une dérivation verticale et si S est une dérivation spéciale, alors*

$$\varepsilon \cdot [X, S] = X.$$

En particulier pour toute dérivation quelconque Y de $S_A[\Omega_K(A)]$ et pour toute dérivation spéciale S, on a

$$\varepsilon \cdot [\varepsilon \cdot Y, S] = \varepsilon \cdot Y.$$

Démonstration: La démontration ne présente pas de difficultés. ■

Proposition 13. *Pour $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) *X est une dérivation verticale;*
2) *il existe une dérivation $Y \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ telle que $X = \varepsilon \cdot Y$;*
3) *$\varepsilon \cdot X = 0$.*

Démonstration: 1) $\Longrightarrow$ 2) Comme X est une dérivation verticale, pour toute dérivation spéciale S et compte tenu de la proposition précédente, on a

$$X = \varepsilon \cdot [X, S].$$

En posant $Y = [X, S]$, on a $X = \varepsilon \cdot Y$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Si $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est de la forme $X = \varepsilon \cdot Y$, on a immédiatement $\varepsilon \cdot X = 0$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Si $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est une dérivation telle que

$$\varepsilon \cdot X = 0,$$

alors pour tout $a \in A$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [\varepsilon \cdot X]\,(d_{A/K}(a)) \\ &= X(a). \end{aligned}$$

On conclut que la dérivation X est une dérivation verticale. ■

3.2. **Projecteurs verticaux.** Lorsque M est une variété lisse, une connexion non linéaire sur M est la donnée d'un supplémentaire du $C^\infty(TM)$-module des champs verticaux pour la fibration

$$\pi_M : TM \longrightarrow M$$

[4],[5].

Dans ce qui suit, on va associer, à une dérivation spéciale, un supplémentaire du $S_A[\Omega_K(A)]$-module des dérivations verticales dans $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$: ceci jouera le rôle de connexion non linéaire en géométrie différentielle.

On vérifie que pour tout $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, l'application

$$\begin{array}{rccc} [X, L_\varepsilon]: & Der_K(S_A[\Omega_K(A)]) & \longrightarrow & Der_K(S_A[\Omega_K(A)]) \\ & Y & \longmapsto & [X, \varepsilon \cdot Y] - \varepsilon \cdot [X, Y] \end{array}$$

est un endomorphisme de $S_A[\Omega_K(A)]$-modules.

Un projecteur vertical sur $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est un endomorphisme de $S_A[\Omega_K(A)]$-modules

$$v : Der_K(S_A[\Omega_K(A)]) \longrightarrow Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$$

vérifiant:

1) Pour tout $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, $v(X)$ est une dérivation verticale;

2) Pour toute dérivation verticale Y, on a $v(Y) = Y$.

Théorème 14. *Si S est une dérivation spéciale de $S_A[\Omega_K(A)]$, alors l'endomorphisme de $S_A[\Omega_K(A)]$-modules*

$$v : Der_K(S_A[\Omega_K(A)]) \longrightarrow Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$$

avec

$$v = \frac{1}{2}(id_{Der_K(S_A[\Omega_K(A)])} + [S, L_\varepsilon])$$

est un projecteur vertical sur $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$.

Démonstration: Pour tout $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, si S est une dérivation spéciale et compte tenu de la proposition 12, on a

$$\varepsilon \cdot (X + [S, L_\varepsilon](X)) = 0.$$

Ceci signifie que la dérivation $X + ([S, L_\varepsilon])(X)$ est une dérivation verticale, i.e. pour tout $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$, la dérivation $v(X)$ est une dérivation verticale.

Lorsque $X \in Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$ est une dérivation verticale, on a

$$\begin{aligned} X + ([S, L_\varepsilon])(X) &= X + [S, \varepsilon \cdot X] - \varepsilon \cdot [S, X] \\ &= X + [S, \varepsilon \cdot X] + \varepsilon \cdot [X, S]. \end{aligned}$$

Comme la dérivation X est verticale, on a $\varepsilon \cdot X = 0$ et $\varepsilon \cdot [X, S] = X$. Ainsi

$$X + ([S, L_\varepsilon])(X) = 2 \cdot X,$$

c'est-à-dire

$$2 \cdot v(X) = 2 \cdot X.$$

Comme le corps K est de caractéristique nulle, on déduit que

$$v(X) = X.$$

On conclut que

$$v = \frac{1}{2}(id_{Der_K(S_A[\Omega_K(A)])} + [S, L_\varepsilon])$$

est un projecteur vertical sur $Der_K(S_A[\Omega_K(A)])$. ∎

Dans ce cas, le projecteur horizontal est

$$h : Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right]) \longrightarrow Der_K(S_A\left[\Omega_K(A)\right])$$

avec

$$h = \frac{1}{2}(id_{Der_K(S_A[\Omega_K(A)])} - [S, L_\varepsilon]).$$

Le projecteur vertical joue le rôle de connexion non linéaire sur le fibré tangent en géométrie différentielle.

References

[1] BOURBAKI, N.: *"Algèbre"*: Chapitres 1 à 3, Hermann Paris (1970).

[2] FRÖLICHER, A., A. NIJENHUIS: "Theory of vector-valued differential forms", Part. I, Proc. Ned. Akad. A, 59 (1956), 338-359.

[3] GODBILLON, C.: *"Géométrie différentielle et Mécanique analytique"*, Hermann Paris (1969).

[4] GRIFONE, J.: "Structure presque tangente et connexions I", Ann. Inst. Fourier (Grenoble),22 (1) (1972), 287-334.

[5] GRIFONE, J.: "Structure presque tangente et connexions II", Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (3) (1972), 291-338.

[6] MORIMOTO, A.: "Prolongation of connexions to bundles of infinitely near points", J. Diff. Geom. 11 (1976), 479-498.

[7] OKASSA E.: "Prolongements des champs de vecteurs à des variétés de points proches", C. R. Acad. Sci. Paris, t.300, Série I, n°6 (1985), 173-176.

[8] OKASSA, E.: "Prolongements des champs de vecteurs à des variétés de points proches", Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol.VIII, n°3 (1986-1987), 349-366.

[9] WEIL, A.: "Théorie des points proches sur les variétés différentiables", Colloque Géom. Diff. Strasbourg (1953), 111-117.

Université Marien Ngouabi, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Brazzaville, Congo

E-mail address: eugeneokassa@yahoo.fr