UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Faculté des Sciences et Technique

(FA.S.T.)

THESE

présentée à la Faculté des Sciences et Techniques

pour obtenir le diplôme de Doctorat 3e Cycle .

Spécialité : Mathématiques Pures

(Option : ALGEBRE)

SUPERALGEBRES DE MALCEV

par :

Côme Jean Antoine BERE

Président :

M.A.KUKU	Professeur,	Université d'Ibandan

Membres :

M. A. MICALI	Professeur,	Université de Montpellier I
M. D. SANGARE	Professeur,	U.F.M. Lyon
M. A. KOULIBALY	Professeur,	Université de Ouagadougou
Mme NOUZHA EL YACOUBI	Professeur,	Université de Rabat
M. A. OUEDRAOGO	Professeur,	Université de Ouagadougou
M. M. OUATTARA	Maître de Conférence,	Université de Ouagadougou

A ma famille

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS

Les mots nous manquent pour exprimer notre reconnaissance à tous ceux qui d'une manière où d'une autre ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous tenons à remercier le Professeur A. KUKU pour avoir accepté de présider notre jury.

Nous remercions également les professeurs Nouzha El YACOUBI, A. MICALI, D. SANGARE, A. KOULIBALY, A. OUEDRAOGO et M.OUATTARA pour avoir accepté de siéger dans le jury.

Nous pensons surtout à tous nos professeurs qui n'ont ménagé aucun effort pour nous faire partager leur savoir, et particulièrement le professeur A. KOULIBALY qui a fait preuve d'une grande disponibilité dans la réalisation de ce travail.

Nous saisissons l'occasion pour exprimer notre reconnaissance aux professeurs B. BONZI et Madame, H. TOURE, L. et B. SOME, A. YOBI, T.TABSOBA pour les encouragements et conseils qu'ils ont su nous apporter.

Merci à Mme Rose ZIDA qui nous a fort utilement prêté son concours pour la mise en page de ce mémoire.

Nous avons enfin une pensée à l'endroit de tous nos amis, collègues pour le soutien qu'ils ont su nous apporter. Qu'ils trouvent ici l'expression de nos sentiments les plus fraternels.

RESUME

Dans ce mémoire nous étudions essentiellement les superalgèbres de Malcèv. Ainsi nous montrons qu'une superalgèbre alternative est super-Malcèv-admissible. Nous nous intéressons ensuite aux superalgèbres de Malcèv semi-simples au sens de G. Hochschild.
Une superalgèbre de Malcèv est résoluble si et seulement si sa composante homogène de degré zéro est résoluble. Ceci nous permet alors de donner une généralisation du théorème de Lie.
Dans la suite nous étudions les espace-poids d'un module de Malcèv d'une algèbre de Malcèv.
Enfin nous étendons aux superalgèbres de Malcèv la notion de sous-algèbre de Cartan graduée.

Mots-clés
Superalgèbre de Malcèv * M-module de Malcèv * Théorème de Lie * Espace-poids * sous-algèbre de Cartan (graduée).

INTRODUCTION

Soit A une superalgèbre associative, alors A^- qui est l'algèbre définie sur le K-espace vectoriel A et dont la multiplication est $[x,y] = xy-(-1)^{ij}yx$ (où xy est la multiplication dans A avec x dans A_i, y dans A_j i,j=0,1) est une superalgèbre de Lie. On dit que A est super-Lie-admissible. D'autre part nous savons qu'une algèbre alternative est Malcèv-admissible. Soit A une superalgèbre alternative. A^- est-elle une superalgèbre de Malcèv ?

Après quelques résultats généraux au chapitre I, nous donnerons au chapitre II d'abord une caractérisation d'une superalgèbre alternative et nous répondrons par l'affirmative à la question posée ci-haut. Par la suite nous donnons un exemple de superalgèbre alternative non associative.

Au chapitre III, conformément à la définition de G. Hochschild (8) nous étudierons la semi-simplicité des superalgèbres de Malcèv.

Ensuite au chapitre IV, nous nous intéressons à la résolubilité des superalgèbres de Malcèv dont la composante homogène de degré zéro est résoluble. Ceci nous permet de donner une généralisation aux algèbres de Malcèv du théorème de Lie.

Dans le chapitre suivant, nous donnons un résultat important sur les espaces-poids d'un module V d'une algèbre de Malcèv.

Enfin, au dernier chapitre nous étendons aux superalgèbres de Malcèv la notion de S-A-C-G introduite par T.MOONS (15) pour les superalgèbres de Lie. Ceci dans l'espoir que cette notion sera utile dans l'étude des espace-poids des superalgèbres de Malcèv par exemple.

CHAPITRE

I

CHAPITRE I

GENERALITES- DEFINITIONS

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de deux.

Définition I-1-1

Une K-algèbre M est appelée algèbre de Malcèv si sa multiplication (notée xy pour deux éléments x,y de M) vérifie les identités : $x^2 = 0$ pour $x \in M$ $(xz)(yt) = ((xy)z)t+((yz)t)x+((zt)x)y+((tx)y)z$ pour $x,y,z,t \in M$. Si M est une K-algèbre de Malcèv, on note le jacobien l'application K-trilinéaire J définit par $J(x,y,z)=(xy)z-x(yz)+y(xz)$ où x,y,z sont $\in M$.

Pour $x,y,z,t \in M$; nous avons alors les égalités :

$J(x,y,xz) = J(x,y,z)x.$

$J(x,y,tz) + J(t,y,xz) = J(x,y,z)t + J(t,y,z)x.$

$J(tx,y,z) = tJ(x,y,z) + J(t,y,z)x - 2J(t,x,yz).$

$2tJ(x,y,z) = J(t,x,yz) + J(t,y,zx) + J(t,z,xy).$

On note J(M) le sous-espace vectoriel de M engendré par les éléments de la forme J(x,y,z) où x,y,z sont dans M. On appelle J-noyau de M l'ensemble $N_M(M)=N(M)=\{x \in M, J(M,M,x) = 0\}$. J(M) et N(M) sont deux idéaux de M.

Définition I-1-2

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie, V est un M-module de Malcèv s'il existe une application K-linéaire

$\rho : M \longrightarrow End_K(V)$,qui à x associe $\rho(x) = \rho_x$ telle que pour tout x,y,z de M on ait une des égalités équivalentes suivantes :

$$\rho_{(xy)z}=\rho_x\rho_y\rho_z - \rho_z\rho_x\rho_y - \rho_{yz}\rho_x + \rho_y\rho_{zx}.$$

$$\rho_{(xy)z}=\rho_z\rho_y\rho_x - \rho_y\rho_x\rho_z - \rho_x\rho_{zy} + \rho_{xz}\rho_y.$$

Dans ce cas ρ est dite représentation de Malcèv de M dans V et ρ est la représentation associée au M-module V.

Notons $J(x,y,v)=\rho_{xy}(v)-\rho_x(\rho_y(v))+\rho_y(\rho_x(v))$ (où $x,y \in M$ et $v \in V$) et $N_M(V) = N(V) = \{v \in V, J(M,M,v) = 0\}$. N(V) est un M-sous-module de V. Si V = N(V) alors V est dit M-module de Lie et la représentation ρ est appelée représentation de Lie. Lorsque V = M, la représentation notée $\tilde{ad} : M \longrightarrow End_K(M)$ telle que $ad_x(y)=xy$ (x,y dans M) est appelée représentation adjointe. Si $V \approx M$, V est dit M-module régulier.

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre et $G = G_0 \oplus G_1$ l'algèbre grassmannienne. $G(A) = (A_0 \otimes G_0) \oplus (A_1 \otimes G_1)$ est l'enveloppe grassmannienne de A. G est une superalgèbre associative et unitaire telle que $gg'=(-1)^{ij}g'g$ pour $g \in G_i$ et $g' \in G_j$ (où i,j = 0,1). A est une superalgèbre de Malcèv si et seulement si G(A) est une algèbre de Malcèv. D'où il résulte la

Définition I-1-3

$A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre de Malcèv si et seulement si :

$xy = -(-1)^{ij} yx$ pour $x \in A_i$, $y \in A_j$ où $i,j = 0,1$

$$(-1)^{jk}(xz)(yt) = ((xy)z)t + (-1)^{i(j+k+l)}((yz)t)x$$

$$+ (-1)^{(i+j)(k+l)}((zt)x)y + (-1)^{l(i+j+k)}((tx)y)z$$

pour des éléments homogènes $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ et $t \in A_l$ où $i,j,k,l = 0,1$.

De même on définit le (super)-jacobien par :

$\tilde{J}(x,y,z) = (xy)z - x(yz) + (-1)^{ij} y(xz)$ où $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $z \in A_0 \cup A_1$.

$\tilde{J}(A)$ est la sous-algèbre de A (Z_2-graduée) engendrée par les éléments de la forme $\tilde{J}(x,y,z)$ où x,y,z sont $\in A_0 \cup A_1$.

Pour des éléments homogènes $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ et $t \in A_l$ où $i,j,k,l = 0,1$; nous avons alors les égalités :

$$\tilde{J}(x,y,xz) = (-1)^{ik} \tilde{J}(x,y,z)x.$$

$$\tilde{J}(x,y,tz) + (-1)^{l(i+j)+ij} \tilde{J}(t,y,xz) = (-1)^{lk} \tilde{J}(x,y,z)t + (-1)^{i(j+k+l)+lj} \tilde{J}(t,y,z)x.$$

$$\tilde{J}(tx,y,z) = t\tilde{J}(x,y,z) + (-1)^{i(j+k)} \tilde{J}(t,y,z)x - 2\tilde{J}(t,x,yz).$$

$$2t\tilde{J}\,J(x,y,z) = \tilde{J}(t,x,yz) + (-1)^{i(j+k)} \tilde{J}(t,y,zx) + (-1)^{k(i+j)} \tilde{J}(t,z,xy).$$

$\tilde{N}(A) = \{x \in M \,/\, \tilde{J}(A,A,x) = 0\}$ est le $\tilde{J}$-noyau de A. $\tilde{N}(A)$ et $\tilde{J}(A)$ sont deux idéaux homogènes de A.

Définition I-1-4

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ et $B = B_0 \oplus B_1$ deux K-espaces vectoriels Z_2-gradués. Une application f de A dans B est dite K-linéaire Z_2-graduée si f est K-linéaire et $f(A_i) \subseteq B_i$ pour $i = 0,1$.

Définition I-1-5

Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un K-espace vectoriel Z_2-gradué de dimension finie alors $End(V) = End(V)_0 \oplus End(V)_1$ où

$$End(V)_0 = \{f \in End(V) \ / \ f(V_i) \subseteq V_i \text{ pour } i = 0,1\}$$

$$End(V)_1 = \{f \in End(V) \ / \ f(V_i) \subseteq V_{i+1} \text{ pour } i = 0,1\}$$

End(V) est une algèbre associative Z_2-graduée et gl(V) est la superalgèbre de Malcèv obtenue en définissant la multiplication :

$[f,g] = fog -(-1)^{ij}gof$ pour $f \in End(V)_i$, $g \in End(V)_j$ $(i,j= 0,1)$.

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Malcèv. V est un A-module de Malcèv s'il existe une application K-linéaire Z_2-graduée

$\rho : A \longrightarrow End_K(V)$, qui à x associe $\rho(x) = \rho_x$ telle que l'on ait :

$\rho_{(xy)z} = \rho_x\rho_y\rho_z - (-1)^{k(i+j)} \rho_z\rho_x\rho_y - (-1)^{i(j+k)}\rho_{yz}\rho_x + (-1)^{i(j+k)}\rho_y\rho_{zx}$

où $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $z \in A_0 \cup A_1$.

Dans ce cas ρ est dite super-représentation de Malcèv de A dans V et ρ est la super-représentation associée au A-module V.

Notons $\tilde{J}((x,y,v) = \rho_{xy}(v) - \rho_x(\rho_y(v)) + (-1)^{ij}\rho_y(\rho_x(v))$

(où $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $v \in V$).

$\tilde{N}_A(V) = \tilde{N}(V) = \{v \in V, \ \tilde{J}(A,A,v)=0\}$ est un A-sous-module de V.

Si $V=\tilde{N}(V)$ alors V est dit A-module de Lie et la super-représentation ρ est appelée super-représentation de Lie. On appelle représentation régulière ou adjointe la super-représentation notée $ad : A \longrightarrow End_K(A)$ telle que $ad_x(y) = xy$ $(x,y \in A)$. Si $V \approx A$ alors V est un A-module régulier.

<u>Définition</u> I-1-6 : Soit M une algèbre de Malcèv.

On appelle dérivation de M une application linéaire D de M dans M telle que $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ quels que soient $x, y \in M$.

Pour tout $x, y \in M$, l'application $D(x,y) = ad_x ad_y - ad_y ad_x + ad_{xy}$ est une dérivation de M.

Soit $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des éléments de M tels que $D(x_i,y_i)$ soit nilpotent ($i = 1,\dots,n$). Alors l'application f de M dans M définie par $f(z) = \prod_{i=1}^{n} \exp(D(x_i,y_i))(z)$ est un automorphisme de M.

<u>Définition</u> I-1-7

Soit M une algèbre (ou superalgèbre) de Malcèv. On appelle série centrale descendante de M la suite décroissante $M^1, M^2, \dots$, d'idéaux de M définis par récurrence de la manière suivante :

1) $M^1 = M$

2) $M^{n+1} = MM^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

<u>Définition</u> I-1-8

Soit M une algèbre (ou superalgèbre) de Malcèv. On note M^{∞} l'intersection des termes de la série centrale descendante de M. C'est un idéal caractéristique de M et c'est le plus petit idéal A de M tel que M/A soit nilpotente.

CHAPITRE

II

CHAPITRE II

SUPERALGEBRES MALCEV-ADMISSIBLES

Dans ce chapitre, $M = M_0 \oplus M_1$ désignera une superalgèbre de dimension finie sur un corps commutatif K de caractéristique différente de deux. Le produit de deux éléments x et y sera noté xy. Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre. Considérons la K-superalgèbre M^- obtenue à partir de M, en définissant une multiplication sur le K-espace vectoriel Z_2-gradué $M_0 \oplus M_1$ par le commutateur de (ou super-commutateur de) deux éléments homogènes x de M_i et y de M_j par $[x,y] = xy - (-1)^{ij}yx$ où $i,j = 0,1$. Si $M = M_0 \oplus M_1$ est associative, M^- est une superalgèbre de Lie i.e. une superalgèbre dont la multiplication vérifie :

i) $xy = -(-1)^{ij}yx$ pour tout $x \in M_i$, $y \in M_j$ $(i,j = 0,1)$

ii) $\tilde{J}(x,y,z) = 0$ pour tout $x \in M_i$, $y \in M_j$, $z \in M_k$

où $\tilde{J}(x,y,z) = (xy)z - x(yz) - (-1)^{jk}(xz)y$ $(i,j,k = 0,1)$.

Soit A une algèbre. A est une K-algèbre alternative si $x(xy) = x^2y$ et $(xy)y = xy^2$ pour tout $x,y \in A$. Si A est alternative, alors A est une K-algèbre Malcèv-admissible.

Nous montrerons que si M est une superalgèbre alternative alors M est une superalgèbre Malcèv-admissible.

II-1 CARACTERISATION D'UNE SUPERALGEBRE ALTERNATIVE

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre et $G = G_0 \oplus G_1$ l'algèbre grassmannienne. $G(A) = (A_0 \otimes G_0) \oplus (A_1 \otimes G_1)$ est l'enveloppe grassmannienne de A. G est une superalgèbre associative et unitaire telle que $gg'=(-1)^{ij}g'g$ pour $g \in G_i$ et $g' \in G_j$ (où $i,j = 0,1$).

Soit A une superalgèbre alternative alors G(A) est une algèbre alternative. Soient $X = x \otimes g$, $Y = y \otimes g'$, $Z = z \otimes g''$ 3 éléments homogènes de G(A) où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $g \in G_i$, $g' \in G_j$ et $g'' \in G_k$ $(i,j,k = 0,1)$. Nous avons :

*) $(X + Y, X + Y, Z) = 0$

**) $(Z, X + Y, X + Y) = 0$

où $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ pour a,b,c 3 éléments d'une algèbre A ((a,b,c) est l'associateur de a,b,c).

*) donne $(X, X, Z) + (X, Y, Z) + (Y, X, Z) + (Y, Y, Z) = 0$ soit

$(X, Y, Z) = -(Y, X, Z)$.

$$(X, Y, Z) = (XY)Z - X(YZ)$$

$$= ((-1)^{ij}xy \otimes gg')(z \otimes g'') - (x \otimes g)((-1)^{jk}yz \otimes g'g'')$$

$$= (-1)^{ij+(i+j)k}(xy)z \otimes gg'g'' - (-1)^{jk+(j+k)i}x(yz) \otimes gg'g''$$

$$= (-1)^{ij+(i+j)k}[(xy)z - x(yz)] \otimes gg'g''$$

$(Y, X, Z) = (YX)Z - Y(XZ)$

$= (-1)^{jk+(j+k)i}[(yx)z - y(xz)] \otimes g'gg''$

Comme $g'gg'' = (-1)^{ij}gg'g''$ il vient de $*$) que :

$(-1)^{ij+(i+j)k}[(xy)z - x(yz)] \otimes gg'g'' = -(-1)^{ij}((-1)^{jk+(j+k)i}[(yx)z - y(xz)])$

Posons par définition que l'associateur de x,y,z de trois éléments homogènes de A noté (x,y,z) est $(x,y,z) = (-1)^{ij+(i+j)k}[(xy)z - x(yz)]$. Ainsi $*$) est équivalent à $(x,y,z) = -(-1)^{ij}(y,x,z)$

De même en développant $**$) on obtient $(x,y,z) = -(-1)^{jk}(x,z,y)$ d'où

Définition II-1-1

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre. A est une superalgèbre alternative si pour tout $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ on a les relations suivantes :

$(x,y,z) = -(-1)^{ij}(y,x,z)$

$(x,y,z) = -(-1)^{jk}(x,z,y)$

G(A) étant une algèbre alternative nous avons (égalités de Moufang, cf.19) pour $X = x \otimes g$, $Y = y \otimes g'$, $Z = z \otimes g''$, $T = t \otimes h$ des éléments homogène de G(A) où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$, $g \in G_i$, $g' \in G_j$, $g'' \in G_k$ et $h \in G_l$ $(i,j,k,l = 0,1)$.

1°) $[(X + T)Z][Y(X + T)] = (X + T)[(ZY)(X + T)]$

2°) $[((X + T)Z][Y(X + T)] = [(X + T)(ZY)](X + T)$

3°) $[((X + T)Z)(X + T)]Y = (X + T)[Z((X + T)Y)]$

4°) $Y[(X + T)(Z(X + T))] = [(Y(X + T))Z](X + T)$

1°) après développement et simplification nous donne :

$$(XZ)(YT) + (TZ)(YX) = X((ZY)T) + T((ZY)X)$$

Calculons chaque expression :

$$(XZ)(YT) = [(-1)^{jk}xz \otimes g\,g''][(-1)^{jl}yt \otimes g'h\,]$$

$$= (-1)^{jk+jl+(i+k)(j+l)}(xz)(yt) \otimes gg''g'h$$

$$(TZ)(YX) = (-1)^{lk+ij+(l+k)(i+j)}(tz)(yx) \otimes hg''g'g$$

$$X((ZY)T) = (-1)^{jk+(j+k)l+i(j+k+l)}x((zy)t) \otimes gg''g'h$$

$$T((ZY)X) = (-1)^{jk+i(j+k)+l(i+j+k)}t((zy)x) \otimes hg''g'g$$

Comme $hg''g'g = (-1)^{i(j+k+l)+l(j+k)}gg''g'h$ 1°) est équivalent à

$$(xz)(yt) + (-1)^{i(j+k+l)+l(j+k)}(tz)(yx) = x((zy)t) + (-1)^{i(j+k+l)+l(j+k)}t((zy)x).$$

Par suite

$$(-1)^{i(j+k)}(xz)(yt) + (-1)^{l(i+j+k)}(tz)(yx)$$

$$= (-1)^{i(j+k)}x((zy)t) + (-1)^{l(i+j+k)}t((zy)x).$$

De même 2°) donne :

$$(XZ)(YT) + (TZ)(YX) = (X(ZY))T + (T(ZY))X \quad \text{et}$$

$$(X(ZY))T = (-1)^{jk+(j+k)l+i(j+k+l)}(x(zy))t \otimes gg''g'h$$

$$(T(ZY))X = (-1)^{jk+i(j+k)+l(i+j+k)}(t(zy))x \otimes hg''g'g$$

et $hg''g'g = (-1)^{i(j+k+l)+l(j+k)}gg''g'h$ entraîne que 2°) est équivalent à

$$(xz)(yt) + (-1)^{i(j+k+l)+l(j+k)}(tz)(yx) = (x(zy))t + (-1)^{i(j+k+l)+l(j+k)}(t(zy))x.$$

D'où

$$(-1)^{i(j+k)}(xz)(yt) + (-1)^{l(i+j+k)}(tz)(yx)$$

$$= (-1)^{i(j+k)}(x(zy))t + (-1)^{l(i+j+k)}(t(zy))x.$$

Le 3°) est équivalent à :

$((XZ)T)Y + ((TZ)X)Y = X(Z(TY)) + T(Z(XY))$ et

$((XZ)T)Y = (-1)^{ik+l(i+k)+j(i+k+l)}((xz)t)y \otimes gg''hg'$

$((TZ)X)Y = (-1)^{kl+i(k+l)+j(i+k+l)}((tz)x)y \otimes hg''gg'$

$X(Z(TY)) = (-1)^{jl+k(j+l)+i(j+k+l)}x(z(ty)) \otimes gg''hg'$

$T(Z(XY)) = (-1)^{ij+k(i+j)+l(i+j+k)}t(z(xy)) \otimes hg''gg'$ et comme

$hg''gg' = (-1)^{ik+l(i+k)}gg''hg'$ il vient que :

$(-1)^{ik}((xz)t)y + (-1)^{l(i+k)}((tz)x)y = (-1)^{ik}x(z(ty)) + (-1)^{l(i+k)}t(z(xy))$

Enfin le 4°) est équivalent à :

$Y(X(ZT)) + Y(X(ZT)) = ((YX)Z)T + ((YT)Z)X$ et

$Y(X(ZT)) = (-1)^{kl+i(k+l)+j(i+k+l)}y(x(zt)) \otimes g'gg''h$

$Y(X(ZT)) = (-1)^{kl+i(k+l)+j(i+k+l)}y(t(zx)) \otimes g'hg''g$

$((YX)Z)T = (-1)^{ij+k(i+j)+l(i+j+k)}((yx)z)t \otimes g'gg''h$

$((YT)Z)X = (-1)^{jl+k(j+l)+i(j+k+l)}((yt)z)x \otimes g'hg''g$

et puisque $g'hg''g = (-1)^{kl+i(k+l)}g'gg''h$ il viendra que :

$(-1)^{kl}y(x(zt)) + (-1)^{i(k+l)}y(t(zx)) = (-1)^{kl}((yx)z)t + (-1)^{i(k+l)}((yt)z)x.$

Ceci nous permet d'énoncer la

<u>Proposition</u> II-1-2

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre alternative. Soient x,y,z,t des éléments de A où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$ $(i,j,k,l = 0,1)$ alors :

1°) $(-1)^{i(j+k)}(xz)(yt) + (-1)^{l(i+j+k)}(tz)(yx) =$

$$= (-1)^{i(j+k)}x((zy)t) + (-1)^{l(i+j+k)}t((zy)x) =$$

$$= (-1)^{i(j+k)}(x(zy))t + (-1)^{l(i+j+k)}(t(zy))x.$$

2°) $(-1)^{ik}((xz)t)y + (-1)^{l(i+k)}((tz)x)y = (-1)^{ik}x(z(ty)) + (-1)^{l(i+k)}t(z(xy)).$

3°) $(-1)^{kl}y(x(zt)) + (-1)^{i(k+l)}y(t(zx)) = (-1)^{kl}((yx)z)t + (-1)^{i(k+l)}((yt)z)x.$

II-2 SUPERALGEBRES MALCEV-ADMISSIBLES

Théorème II-2-1

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre. Si pour $x \in A_i$, $y \in A_j$ (où $i,j = 0,1$) $xy = -(-1)^{ij}yx$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1°) $A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre de Malcèv

2°) $(-1)^{l(i+j)}\tilde{J}(x,y,tz) + (-1)^{ij}\tilde{J}(t,y,xz)$

$$= (-1)^{l(i+j+k)}\tilde{J}(x,y,z)t + (-1)^{i(j+k)}\tilde{J}(t,y,z)x.$$

3°) $\tilde{J}(xz,t,y) + (-1)^{kl+i(k+l)}\tilde{J}(tz,x,y)$

$$=(-1)^{jl+ik}\tilde{J}(z,x,y)t + (-1)^{i(j+k+l)}\tilde{J}(z,t,y)x$$

(où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$ $(i,j,k,l = 0,1)$).

(cf.2).

Lemme II-2-2

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre telle que pour $x \in A_i$, $y \in A_j$ (où $i,j,k = 0,1$) $xy = -(-1)^{ij}yx$, alors

$$\tilde{J}(x,y,z) = -(-1)^{ij}\tilde{J}(y,x,z)$$

$$\tilde{J}(x,y,z) = -(-1)^{jk}\tilde{J}(x,z,y).$$

En effet

$$\tilde{J}(x,y,z) = (xy)z - x(yz) - (-1)^{jk}(xz)y$$

$$= -(-1)^{ij}[-(-1)^{ij}(xy)z + (-1)^{ij}x(yz) + (-1)^{ij+jk}(xz)y]$$

$$= -(-1)^{ij}[(yx)z - (-1)^{ij+i(j+k)}(yz)x - (-1)^{ij+jk+j(i+k)}y(xz)]$$

$$= -(-1)^{ij}[(yx)z - (-1)^{ik}x(yz) - y(xz)]$$

$$= -(-1)^{ij}[(yx)z - y(xz) - (-1)^{ik}x(yz)] = -(-1)^{ij}\tilde{J}(y,x,z).$$

De même on montre que $\tilde{J}(x,y,z) = -(-1)^{jk}\tilde{J}(x,z,y)$ ●

Lemme II-2-3

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre alternative. Soient x,y,z des éléments de A où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $(i,j,k = 0,1)$ alors :

$(xy)z + (-1)^{i(j+k)+jk}(zy)x = x(yz) + (-1)^{i(j+k)+jk}z(yx).$

En effet, A étant une superalgèbre alternative on a

$(x,y,z) = -(-1)^{i(j+k)+jk}(z,y,x)$ soit

$(-1)^{ij+(i+j)k}[(xy)z - x(yz)] = -(-1)^{ij+(i+j)k}[(-1)^{i(j+k)+jk}[(zy)x - z(yx)]]$

$(xy)z - x(yz) = -(-1)^{i(j+k)+jk}(zy)x + (-1)^{i(j+k)+jk}z(yx)$ d'où

$(xy)z + (-1)^{i(j+k)+jk}(zy)x = x(yz) + (-1)^{i(j+k)+jk}z(yx)$ ●

Lemme II-2-4

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre alternative. Soient x,y,z,t des éléments de A où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$ $(i,j,k,l = 0,1)$ alors :
$(-1)^{\alpha}(xz,t,y) + (-1)^{\alpha+il}(tz,x,y) = (-1)^{\alpha+l(i+k)}(z,x,y)t + (-1)^{\alpha+ik}(z,t,y)x$
où $\alpha = (i+k)(j+l) + jl$.

En effet, $(-1)^{\alpha}(xz,t,y) + (-1)^{\alpha+il}(tz,x,y) =$

$= -(-1)^{\alpha+jl}(xz,y,t) - (-1)^{\alpha+il+ij}(tz,y,x)$

$= -(-1)^{\alpha+jl+(i+k)(j+l)+jl}[((xz)y)t - (xz)(yt)]$

$\qquad - (-1)^{\alpha+il+(k+l)(i+j)+ij}[((tz)y)x - (tz)(yx)]$

$= -(-1)^{jl}[((xz)y)t - (xz)(yt)] - (-1)^{kl+i(j+k+l)}[((tz)y)x - (tz)(yx)]$

$= [(-1)^{jl}(xz)(yt) + (-1)^{i(j+k+l)+kl}(tz)(yx)]$

$\qquad - [(-1)^{jl}((xz)y)t + (-1)^{i(j+k+l)+kl}((tz)y)x]$

$= (-1)^{i(j+k)+jl}[(-1)^{i(j+k)}(xz)(yt) + (-1)^{l(i+j+k)}(tz)(yx)]$

$\qquad - [(-1)^{jl}((xz)y)t + (-1)^{i(j+k+l)+kl}((tz)y)x]$

(1°) proposition II-1-2)

$= (-1)^{i(j+k)+jl}[(-1)^{i(j+k)}(x(zy))t + (-1)^{l(i+j+k)}(t(zy))x]$

$\qquad - [(-1)^{jl}((xz)y)t + (-1)^{i(j+k+l)+kl}((tz)y)x]$

$= -(-1)^{jl}[(xz)y - x(zy)]t - (-1)^{i(j+k+l)+kl}[(tz)y - t(zy)]x$

$= -(-1)^{i(j+k)+j(k+l)}(x,z,y)t - (-1)^{i(j+k+l)+j(k+l)}(t,z,y)x$

$=(-1)^{ij+j(k+l)}(z,x,y)t + (-1)^{i(j+k+l)+j(k+l)+kl}(z,t,y)x$

$= (-1)^{\alpha+l(i+k)}(z,x,y)t + (-1)^{\alpha+ik}(z,t,y)x$ ●

Lemme II-2-5

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre alternative. Soient x,y,z,t des éléments de A où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$ $(i,j,k,l = 0,1)$ alors :

$$(-1)^{\alpha+ik}(zx,t,y) + (-1)^{\alpha+l(i+k)}(zt,x,y)$$

$$= (-1)^{\alpha+jl}t(z,x,y) + (-1)^{\alpha+i(j+l)}x(z,t,y)$$

où $\alpha = (i + k)(j+l) + jl$.

En effet, $(-1)^{\alpha+ik}(zx,t,y) + (-1)^{\alpha+l(i+k)}(zt,x,y) =$

$= -(-1)^{\alpha+ik+l(i+k)}(t,zx,y) - (-1)^{\alpha+k(i+l)}(x,zt,y)$

$= -(-1)^{ik+l(i+k)}[(t(zx))y - t((zx)y)] - [(x(zt))y - x((zt)y)]$

$= -(-1)^{ik+l(i+k)}[t(zx) + (-1)^{ik+l(i+k)}x(zt)]y$

$+ [(-1)^{ik+l(i+k)}t((zx)y) + x((zt)y)]$

$= -(-1)^{ik+l(i+k)}[(tz)x + (-1)^{ik+l(i+k)}(xz)t]y$

$+ [(-1)^{ik+l(i+k)}t((zx)y) + x((zt)y)]$

$= -(-1)^{ik}[(-1)^{l(i+k)}((tz)x))y + (-1)^{ik}((xz)t)y]$

$+ [(-1)^{ik+l(i+k)}t((zx)y) + x((zt)y)]$

(2°) proposition II-1-2)

$= -(-1)^{ik}[(-1)^{l(i+k)}t(z(xy)) + (-1)^{ik}x(z(ty))]$

$+ [(-1)^{ik+l(i+k)}t((zx)y) + x((zt)y)]$

$= (-1)^{ik+l(i+k)}t[(zx)y - z(xy)] + x[z(ty) - (zt)y]$

$= (-1)^{ik+l(i+k)+ij+k(i+j)}t(z,x,y) + (-1)^{jl+k(j+l)}x(z,t,y)$

$= (-1)^{(j+l)(i+k)}t(z,x,y) + (-1)^{jl+k(j+l)}x(z,t,y)$

$= (-1)^{\alpha+jl}t(z,x,y) + (-1)^{\alpha+i(j+l)}x(z,t,y)$

D'où le lemme •

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre alternative. Soit x,y,z des éléments de A où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ (i,j,k, = 0,1) et soit $\sigma = ij+k(i+j)$ alors :

$(x,y,z) = -(-1)^{jk}(x,z,y) = (-1)^{ij+jk}(z,x,y)$. D'où

$$3(x,y,z) = (x,y,z) - (-1)^{jk}(x,z,y) + (-1)^{ij+jk}(z,x,y)$$

$$= (-1)^{(i+j)k+ij}\big([(xy)z - x(yz)] - (-1)^{jk}[(xz)y - x(zy)]$$
$$+ (-1)^{ij+jk}[(zx)y - z(xy)]\big)$$

$$= (-1)^{\sigma}\big((xy)z - x(yz) - (-1)^{jk}(xz)y + (-1)^{jk}x(zy)$$
$$+ (-1)^{ij+jk}(zx)y - (-1)^{ij+jk}z(xy)\big)$$

$$= (-1)^{\sigma}\big(((xy)z - (-1)^{(i+k)j}z(xy)) - x(yz - (-1)^{jk}zy)$$
$$- (-1)^{jk}(xz - (-1)^{ij+jk}(zx))y\big)$$

$$= (-1)^{\sigma}\big([xy,z] - x[y,z] - (-1)^{jk}[x,z]y\big).$$

De même

$$3(x,y,z) = -(-1)^{ij}(3(y,x,z))$$
$$= -(-1)^{\sigma+ij}\big([yx,z] - y[x,z] - (-1)^{ik}[y,z]x\big)$$
$$= -(-1)^{(i+j)k}\big([yx,z] - y[x,z] - (-1)^{ik}[y,z]x\big).$$

$$6(x,y,z) = 3(x,y,z) + (-(-1)^{ij})(3(y,x,z))$$
$$= (-1)^{\sigma}\big([xy,z] - (-1)^{jk}[x,z]y - x[y,z]$$
$$- (-1)^{ij}[yx,z] + (-1)^{ij}y[x,z] + (-1)^{i(j+k)}[y,z]x\big)$$
$$= (-1)^{\sigma}\big([xy - (-1)^{ij}yx,z] - (-1)^{jk}([x,z]y - (-1)^{j(i+k)}y[x,z])$$
$$- (x[y,z] - (-1)^{i(j+k)}[y,z]x)\big)$$
$$= (-1)^{\sigma}\big([[x,y],z] - [x,[y,z]] - (-1)^{jk}[[x,z],y]\big).$$

On pose pour $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $z \in A_k$ (où $i,j,k = 0,1$).

$\tilde{J}_-(x,y,z) = [[x,y],z] - [x,[y,z]] - (-1)^{jk}[[x,z],y]$ on a

$(-1)^{\sigma}\tilde{J}_-(x,y,z) = 6(x,y,z)$ où $\sigma = i(j+k)+jk$.

Remarque :

Si $A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre associative ou K est un corps commutatif K de caractéristique 3, il vient que

$\tilde{J}_-(x,y,z) = 6((-1)^{\sigma})(z,y,x) = 0$ et A^- est une superalgèbre de Lie.

Soit x,y,z,t des éléments de A où $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$ ($i,j,k,l = 0,1$) et où $\alpha = (i+k)(j+l) + jl$

$$\frac{1}{6}\left[\tilde{J}_-([x,z],t,y) + (-1)^{i(k+l)+kl}\tilde{J}_-([t,z],x,y)\right] =$$

$$= \left[(-1)^{\alpha}([x,z],t,y) + (-1)^{ij+kl+j(k+l)}([t,z],x,y)\right] =$$

$$= (-1)^{\alpha}\left[((xz - (-1)^{ik}zx),t,y) + (-1)^{il+\alpha}((tz - (-1)^{kl}zt),x,y)\right] =$$

$$= \left[(-1)^{\alpha}(xz,t,y) + (-1)^{\alpha+il}(tz,x,y)\right]$$

$$- \left[(-1)^{\alpha+ik}(zx,t,y) + (-1)^{\alpha+l(i+k)}(zt,x,y)\right].$$

Des lemmes II-2-4 et II-2-5 il vient que

$$\frac{1}{6}\left[\tilde{J}_-([x,z],t,y) + (-1)^{i(k+l)+kl}\tilde{J}_-([t,z],x,y)\right] =$$

$$= \left[(-1)^{\alpha+l(i+k)}(z,x,y)t + (-1)^{\alpha+ik}(z,t,y)x\right]$$

$$- \left[(-1)^{\alpha+jl}t(z,x,y) + (-1)^{\alpha+i(j+l)}x(z,t,y)\right]$$

$$= \left[(-1)^{\alpha+l(i+k)}(z,x,y)t - (-1)^{\alpha+jl}t(z,x,y)\ \right]$$

$$+ \left[(-1)^{\alpha+ik}(z,t,y)x - (-1)^{\alpha+i(j+l)}x(z,t,y)\right]$$

$$= (-1)^{\alpha+l(i+k)}\left[(z,x,y)t - (-1)^{l(i+j+k)}t(z,x,y)\ \right]$$

$$+ (-1)^{\alpha+ik}\left[(z,t,y)x - (-1)^{i(j+k+l)}x(z,t,y)\right]$$

$$= (-1)^{\alpha+l(i+k)}\left[(z,x,y),t\right] + (-1)^{\alpha+ik}\left[(z,t,y),x\right]$$

$$= (-1)^{\alpha+l(i+k)+(i+j)k+ij}\frac{1}{6}\left[\tilde{J}_{-}(z,x,y),t\right] + (-1)^{\alpha+ik+k(j+l)+jl}\frac{1}{6}\left[\tilde{J}_{-}(z,t,y),x\right]$$

$$= (-1)^{il+ik}\frac{1}{6}\left[\tilde{J}_{-}(z,x,y),t\right] + (-1)^{i(j+l)+ik}\frac{1}{6}\left[\tilde{J}_{-}(z,t,y),x\right].$$

Par suite :

$$\tilde{J}_{-}([x,z],t,y) + (-1)^{i(k+l)+kl}\tilde{J}_{-}([t,z],x,y) =$$

$$= (-1)^{il+ik}\left[\tilde{J}_{-}(z,x,y),t\right] + (-1)^{i(j+l)+ik}\left[\tilde{J}_{-}(z,t,y),x\right].$$

D'où A^- est une superalgèbre de Malcèv.

Ainsi nous avons démontré le :

Théorème II-2-6

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre alternative alors A est une superalgèbre Malcèv-admissible.

II 3 Construction d'une superalgèbre alternative non associative

Soit K est un corps commutatif K de caractéristique nulle. Toute algèbre ou superalgèbre sera de dimension finie sur K et à élément unité 1.

Définition II-3-1 :

Une involution de la K-algèbre A est une application K-linéaire $s : A \longrightarrow A$; satisfaisant : $s(xy) = s(y)s(x)$ et $s(s(x)) = x$ pour tout $x,y \in A$.

Définition II-3-2 :

Une involution de la K-algèbre A est dite scalaire si : $x + s(x) \in K1$ et $xs(x) \in K1$.

Définition II-3-3 :

Une application K-linéaire Z_2-graduée d'une superalgèbre $A = A_0 \oplus A_1$ $s: A \longrightarrow A$ est dite (super-)involution si : $s(s(x)) = x$ et $s(xy) = (-1)^{ij}s(y)s(x)$ pour tout $x \in A_i$, $y \in A_j$ (où $i,j = 0,1$).

Remarque : On notera aussi $s(x)$ par $\bar{x}$ pour tout $x \in A$.

Exemple 1

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre associative. On suppose que la composante de degré zéro est munie d'une involution telle que $xw = w\bar{x}$ et $wv = -\overline{vw}$ pour $x \in A_0$, $v,w \in A_1$. On définit alors sur A une involution par $\tilde{x} = \bar{x}$ si $x \in A_0$ et $\tilde{v} = -v$ si $v \in A_1$.

Dans ce cas en posant $Tr(x) = x + \tilde{x}$;on définit une trace sur A. Comme $tr(A_1) = 0$, nous avons $Tr(x) \in K1$ pour tout $x \in A$.

Exemple 2

Soit $A = K1 \oplus Kv$ une superalgèbre associative telle que $v^2 = 0$. L' application K-linéaire s définie par : $s(1) = 1$ et $s(v) = -v$ est une involution de la superalgèbre associative A.

Soit A une superalgèbre associative à élément unité munie d'une involution telle que : $tr(x) = x + \bar{x} \in K1$ pour tout $x \in A$. Soit U le K-espace vectoriel sous-jacent $A \times A$. On définit sur U une multiplication par : $(x,y)(z,t) = (xz+(-1)^{jl}\mu t\bar{y}, \bar{x}t+ (-1)^{jk}zy)$ pour tout $x \in A_i$, $y \in A_j$,

$z \in A_k$ $t \in A_l$ ($i,j,k,l = 0,1$ et μ un scalaire fixé).

Nous avons alors :

$(1,0)(x,y) = (x,y)$ et $(x,y)(1,0) = (x,y)$, il vient donc que $(1,0)$ est l'élément neutre pour la multiplication de U noté 1_U.

Soit $v =(0,1)$ nous avons $v^2= (0,1)(0,1) = (\mu,0) = \mu(1,0)$ et $v^2= \mu 1_U$
$v.(z,0) = (0,1)(z,0) = (0,z)$.

Posons $B = \{(x,0),\ x \in A\}$ et $B'= \{(0,x),\ x \in A\}$. Alors $U = B \oplus B'$. A est isomorphe (isomorphisme d'algèbres) à B.

$B'= \{(0,x),\ x \in A\} \approx v\{(x,0),\ x \in A\} \approx vB \approx vA$. D'où $U = A \oplus vA$.

Si $X = (x,x')$ U,alors $X = (x,0) + (0,x') = (x,0) + v(x',0)$. Nous poserons $X = x + vx'$.

Soit $X = x + vy$ et $T = z + vt$ deux éléments de U. On suppose que

$x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $t \in A_l$ ($i,j,k,l = 0,1$)

$XT = (x,y)(z,t) = (xz+(-1)^{jl}\mu t\bar{y}, \bar{x}t+ (-1)^{jk}zy) =$

$= xz+(-1)^{jl}\mu t\bar{y} + v(\bar{x}t+ (-1)^{jk}zy)$ et d'autre part

$XT = (x +vy)(z + vt) = xz + x(vt) + (vy)z + (vy)(vt)$.

Par identification il vient que :

<u>Proposition</u> II-3-4: Pour $x \in A_i$ et $y \in A_j$:

$$x(vy) = v(\bar{x}y).$$

$$(vx)y = (-1)^{ij}v(yx).$$

$$(vx)(vy) = (-1)^{ij}\mu y\bar{x}.$$

Nous avons alors $U = A \oplus vA = = (A_0 \oplus A_1) \oplus v(A_0 \oplus A_1)$. On pose $U_0 = A_0 \oplus vA_0$ et $U_1 = A_1 \oplus vA_1$. Pour $i,j = 0,1$ on a :

$U_i U_j = (A_i \oplus vA_i)(A_j \oplus vA_j)$

$\subseteq A_iA_j + A_i(vA_j) + (vA_i)A_j + (vA_i)(vA_j)$

$\subseteq A_{i+j} + v(\overline{A_i}\, A_j) + v(A_jA_i) + \mu A_j \overline{A_i}$

$\subseteq A_{i+j} + v(A_iA_j) + v(A_jA_i) + A_iA_j$

$\subseteq A_{i+j} + v(A_{i+j})$

$\subseteq U_{i+j}$ (i+j est calculé modulo 2).

U est donc une superalgèbre unitaire $U = U_0 \oplus U_1$. Soit $X = x + vx'$ un élément homogène de U (i.e. $x,x' \in A_i$). Posons

$\overline{X} = \bar{x} - vx'$ (" $\bar{\ }$ "est linéaire et $\overline{\overline{X}} = X$). Soit $Y = y + vy' \in U_j$ nous avons :

$XY = xy + (-1)^{ij}\mu y'\overline{x'} + v(\bar{x}y' + (-1)^{ij}yx')$ et

$\overline{XY} = \overline{xy} + (-1)^{ij}\mu\, \overline{y'\overline{x'}} - v(\bar{x}y' + (-1)^{ij}yx')$. D'autre part

$\overline{Y}\,\overline{X} = (\bar{y} - vy')(\bar{x} - vx') =$

$= \bar{y}\,\bar{x} + (vy')(vx') - \bar{y}(vx') - (vy')\bar{x} =$

$= \bar{y}\,\bar{x} + (-1)^{ij}\mu x'\overline{y'} - v(yx') - (-1)^{ij}v(\bar{x}y')$

$= (-1)^{ij}\overline{xy} + \mu\, \overline{\overline{y'\, x'}} - v(yx' + (-1)^{ij}\bar{x}y')$

$= (-1)^{ij}(\overline{xy} + (-1)^{ij}\mu\, \overline{y'\,\overline{x'}} - v(\bar{x}y' + (-1)^{ij}yx') = (-1)^{ij}(\overline{XY}).$

Soit $X = x + vx' \in U_i$ nous avons :

$tr(X) = X + \bar{X} = (x + \bar{x}) + (vx' - vx') = x + \bar{x} = tr(x) \in K1$. U est ainsi munie d'une involution scalaire sur U.

<u>Proposition</u> II-3-5 : Pour $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $z \in A_k$, nous avons les égalités suivantes :

$$(x,vz,\bar{y}) = (-1)^{jk}(x,y,vz).$$

$$(x,vz,y) = (-1)^{ik}(vz,\bar{x},y).$$

En effet, on a

$(-1)^{jk}(x,y,vz) = (-1)^{jk}(xy)(vz) - (-1)^{jk}x(y(vz)) = (-1)^{jk}v[(\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y})z]$ et

$(x,vz,\bar{y}) = (x(vz))\bar{y} - x((vz)\bar{y})$

$= (v(\bar{x}z))\bar{y} - x((-1)^{jk}(v(\bar{y}z))$

$= (-1)^{j(i+k)}v(\bar{y}(\bar{x}z)) - (-1)^{jk}v(\bar{x}(\bar{y}z))$

$= (-1)^{jk}[(-1)^{ij}v(\bar{y}\,\bar{x}z) - v(\bar{x}\,\bar{y}z)]$

$= (-1)^{jk}[v(\overline{xy}z) - v(\bar{x}\,\bar{y}z)]$

$= (-1)^{jk}[v((\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y})z] = (-1)^{jk}(x,y,vz)$

$(-1)^{ik}(vz,\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{ik}((vz)\bar{x})\bar{y} - (-1)^{ik}(vz)(\bar{x}\,\bar{y})$

$= (-1)^{j(i+k)}v(\bar{y}(\bar{x}z)) - (-1)^{jk}v((\bar{x}\,\bar{y})z)$

$= (-1)^{jk}v[(-1)^{ij}\bar{y}\,\bar{x}z - \bar{x}\,\bar{y})z]$

$= (-1)^{jk}v[\overline{xy}z - \bar{x}\,\bar{y}z] = (-1)^{jk}(x,y,vz) = (x,vz,\bar{y})$ ●

Proposition II-3-6: Pour $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $z \in A_k$, nous avons les égalités suivantes :

$$((vy)(vz))x = (-1)^{i(j+k)}(v(\bar{x}y))(vz).$$

$$x((vy)(vz)) = (-1)^{ij}(vy)(v(xz)).$$

En effet, on a

$$(-1)^{i(j+k)}(v(\bar{x}y))(vz) = (-1)^{i(j+k)}(-1)^{k(i+j)}\mu z\overline{\bar{x}y} = (-1)^{jk}\mu z\bar{y}x =$$

$$= [(-1)^{jk}\mu z\bar{y}]x = ((vy)(vz))x \quad \text{et}$$

$$(-1)^{ij}(vy)(v(xz)) = (-1)^{ij}(-1)^{j(i+k)}\mu xz\bar{y} = x(\mu(-1)^{jk}z\bar{y}) =$$

$$= x((vy)(vz)) \bullet$$

Proposition II-3-7 : Pour $x \in A_i$ $y \in A_j$ et $z \in A_k$, nous avons les égalités suivantes:

$$(x,vy,vz) = (-1)^{ij}(vy,\bar{x},vz).$$

$$(vy,x,vz) = (-1)^{ik}(vy,vz,\bar{x}).$$

En effet, on a

$$(x,vy,vz) - (-1)^{ij}(vy,\bar{x},vz)$$

$$= (x(vy))(vz) - x((vy)(vz)) - (-1)^{ij}((vy)\bar{x})(vz) + (-1)^{ij}(vy)((\bar{x}vz))$$

$$= [(v(\bar{x}y))(vz) - (-1)^{ij}(vy)(v(xz))] - [(v(\bar{x}y)(vz) - (-1)^{ij}(vy)((v(xz))]$$

$$= 0 .$$

$$(vy,x,vz) - (-1)^{ik}(vy,vz,\bar{x}) =$$

$$((vy)x)(vz) - (vy)(x(vz)) + (-1)^{ik}(vy)((vz)\bar{x}) - (-1)^{ik}((vy)(vz))\bar{x}$$

$$= [(-1)^{ij}(v(xy))(vz) - (vy)(v(\bar{x}z)] + [(vy)((v(\bar{x}z)) - (-1)^{ij}(v(xy))(vz)]$$

$$= 0 \bullet$$

<u>Proposition</u> II-3-8 : Pour $x \in A_i$ et $y \in A_j$, nous avons les égalités suivantes :

$$(vx)(vy) + (-1)^{ij}(vy)(vx) = \mu Tr(x\bar{y}).$$

$$Tr(x\bar{y})1 - Tr(\bar{x}y)1 = 0.$$

En effet, on a,

$$(vx)(vy) + (-1)^{ij}(vy)(vx) = (-1)^{ij}\mu y\bar{x} + \mu x\bar{y} = \mu(x\bar{y} + \overline{x\bar{y}}) = \mu Tr(x\bar{y}).$$

$$Tr(x\bar{y})1 - Tr(\bar{x}y)1 = Tr(x(Tr(y)1 - y))1 - Tr((Tr(x)1 - x)y)1$$

$$= [Tr(y)Tr(x) - Tr(xy) - Tr(x)Try) + Tr(xy)]1 = 0 \bullet$$

<u>Lemme</u> II-3-9 : Si $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ $(i,j,k = 0,1)$ alors,

$$(x,y,vz) = -(-1)^{ij}(y,x,vz).$$

$$(x,vy,z) = -(-1)^{ij}(vy,x,z).$$

En effet,

$$(x,y,vz) = (xy)(vz) - x(y(vz))$$

$$= v(\overline{xy}z) - v(\bar{x}\bar{y}z) = (-1)^{ij}v(\bar{y}\bar{x}z) - (-1)^{ij}v(\overline{yx}z)$$

$$= -(-1)^{ij}[v(\overline{yx}z) - v(\bar{y}\bar{x}z)] = -(-1)^{ij}[(yx)(vz) - y(x(vz))]$$

$$= -(-1)^{ij}(y,x,vz).$$

D'après la proposition II-3-5 on a $(x,vy,z) = (-1)^{ij}(vy,\bar{x},z)$.

Remarquons que $Tr(x)1 = x + \bar{x} \in K1$ et $\bar{x} = Tr(x)1 - x$, il vient que

$$(x,vy,z) = (-1)^{ij}(vy,\bar{x},z)$$

$$= (-1)^{ij}(vy,Tr(x)1,z) - (-1)^{ij}(vy,x,z) = -(-1)^{ij}(vy,x,z).$$

$$(vx,y,z) = (-1)^{ij}(\bar{y},vx,z) \qquad \text{(proposition II-3-5)}$$

$$= (-1)^{ij}(Tr(y)1,vx,z) - (-1)^{ij}(y,vx,z) = -(-1)^{ij}(y,vx,z) \bullet$$

<u>Lemme</u> II-3-10 : Si $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ $(i,j,k = 0,1)$ alors,

$$(x,vz,y) = -(-1)^{jk}(x,y,vz).$$

$$(vz,x,,y) = -(-1)^{ij}(vz,y,x).$$

En effet,

$(x,vz,y) = (-1)^{jk}(x,\bar{y},vz)$ (proposition II-3-5)

$= (-1)^{jk}(x,Tr(y)1,vz) - (-1)^{jk}(vy,x,z) = -(-1)^{jk}(x,y,vz).$

$(vz,x,y) = (-1)^{ik}(\bar{x},vz,y)$ (proposition II-3-5)

$=(-1)^{ik+jk}(\bar{x},\bar{y},vz)$ (proposition II-3-5)

$= -(-1)^{ik+jk+ij}(\bar{y},\bar{x},vz)$ (lemme II-3-9)

$= -(-1)^{jk+ij}(\bar{y},vz,x)$ (proposition II-3-5)

$= -(-1)^{ij}(vz,y,x)$ (proposition II-3-5)

$= -(-1)^{ij}(vz,y,x)$ ●

<u>Lemme</u> II-3-11 : Si $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ $(i,j,k = 0,1)$ alors

$$(x,vy,vz) = -(-1)^{ij}(vy,x,vz).$$

$$(vy,x,vz) = -(-1)^{ik}(vy,vz,x).$$

$$(vx,vy,z) = -(-1)^{ij}(vy,vx,z).$$

$$(x,vy,vz) = -(-1)^{jk}(x,vz,vy).$$

En effet,

$(x,vy,vz) = (-1)^{ij}(vy,\bar{x},vz)$ (proposition II-3-7)

$= (-1)^{ij}(vy,Tr(x)1 - x,vz)$
$= -(-1)^{ij}(vy, x,vz).(vy,x,vz)$
$= (-1)^{ik}(vy,vz,\bar{x})$ (proposition II-3-7)
$= -(-1)^{ik}(vy,vz,x).$

Soit $S = (vx,vy,z) + (-1)^{ij}(vy,vx,z)$:

$S = ((vx)(vy))z - (vx)((vy)z) + (-1)^{ij}((vy)(vx))z - (-1)^{ij}(vy)((vx)z)$

$= [(vx)(vy) + (-1)^{ij}(vy)(vx)]z - [(-1)^{jk}(vx)(v(zy)) + (-1)^{ij+ik}(vy)(v(zx))]$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))z - [(-1)^{jk+i(j+k)}\mu zy\bar{x} + (-1)^{ij+ik+j(i+k)}\mu zx\bar{y}]$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))z - (-1)^{k(i+j)}\mu z(x\bar{y} + (-1)^{ij}y\bar{x})$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))z - (-1)^{k(i+j)}\mu z(x\bar{y} + \overline{x\bar{y}})$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))z - (-1)^{k(i+j)}\mu z(Tr(x\bar{y})1)$

$S = (\mu Tr(x\bar{y}))z\,(1 - (-1)^{k(i+j)})$.

Si $i + j = 0$ $S = 0$; si $i + j = 1$ on a $Tr(x\bar{y}) = 0$ car $x\bar{y} \in A_1$ et $S = 0$. D'où $(vx,vy,z) = -(-1)^{ij}(vy,vx,z)$.

Aussi : $(x,vy,vz) = -(-1)^{ij}(vy,x,vz)$

$= (-1)^{ij+ik}(vy,vz,x)$

$= -(-1)^{ij+ik+jk}(vz,vy,x)$

$= (-1)^{ik+jk}(vz,x,vy)$

$= -(-1)^{jk}(x,vz,vy)$ ●

<u>Lemme</u> II-3-12 : Si $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ $(i,j,k = 0,1)$ alors,

$(vx,vy,vz) = -(-1)^{ij}(vy,vx,vz)$.

$(vz,vx,vy) = -(-1)^{ij}(vz,vy,vx)$.

En effet,

$A = (vx,vy,vz) + (-1)^{ij}(vy,vx,vz) =$

$=((vx)(vy))(vz) - (vx)((vy)(vz)) + (-1)^{ij}\big[((vy)(vx))(vz) - (vy)((vx)(vz))\big]$

$= [(vx)(vy) + (-1)^{ij}(vy)(vx)](vz) - (vx)((vy)(vz)) - (-1)^{ij}(vy)((vx)(vz))$

$=(\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - (-1)^{i(j+k)}v[((vy)(vz))x] - (-1)^{ij+j(i+k)}v[((vx)(vz))y]$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - v[(v(\bar{x}y)(vz)] - (-1)^{ij}v[((v(\bar{y}x))(vz))]$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - v[(v(\bar{x}y + (-1)^{ij}\bar{y}x))(vz)]$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - v[(v(\bar{x}y + \overline{\bar{x}y})(vz)] = (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - v[(v(Tr(\bar{x}y))(vz)]$

$= (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - (Tr(\bar{x}y))v[v(vz)] = (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) - (Tr(\bar{x}y))v[\mu z]$

$= \mu(Tr(x\bar{y}) - Tr(\bar{x}y))(vz) = 0$ (proposition II-3-8).

$B = (vz,vx,vy) + (-1)^{ij}(vz,vy,vx)$

$=((vz)(vx))(vy) - (vz)((vx)(vy)) + (-1)^{ij}\big[((vz)(vy))(vx) - (vz)((vy)(vx))\big]$

$= v[(\overline{(vz)(vx)})y] + (-1)^{ij}v[(\overline{(vz)(vy)})x] - (vz)[(vx)(vy) + (-1)^{ij}(vy)(vx)]$

$= v[(-1)^{ik}((vx)(vz))y] + (-1)^{ij}v[(-1)^{jk}((vy)(vz))x] - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz)$

$= (-1)^{k(i+j)}\big[v[(-1)^{ij}((v(\bar{y}x))(vz))] + v[((v(\bar{x}y))(vz))]\big] - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz)$

$= (-1)^{k(i+j)}\big[v[(v(\overline{\bar{x}y}))(vz))] + v[(v(\bar{x}y))(vz)]\big] - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz)$

$= (-1)^{k(i+j)}\big[v[(v(\overline{\bar{x}y} + \bar{x}y))(vz)]\big] - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz)$

$= (-1)^{k(i+j)}\big[v[(v(Tr(\bar{x}y)))(vz)]\big] - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz)$

$= (-1)^{k(i+j)}(Tr(\bar{x}y))\big[v(v(vz))\big] - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz)$

$= (-1)^{k(i+j)}(\mu Tr(\bar{x}y))(vz) - (\mu Tr(x\bar{y}))(vz) = ((-1)^{k(i+j)} - 1)\mu Tr(x\bar{y})(vz).$

Si $i + j = 0$ $B = 0$; si $i + j = 1$ on a $Tr(x\bar{y}) = 0$ car $x\bar{y} \in A_1$ et $B = 0$.

D'où$(vz,vx,vy) = -(-1)^{ij}(vz,vy,vx)$ •

Des lemmes II-3-9,10,11,12 on déduit que pour

$X= x + vx' \in U_i$, $Y= y + vy' \in U_j$, $Z= z + vz' \in U_k$ on a

$(X,Y,Z) = -(-1)^{ij}(Y,X,Z)$ et $(X,Y,Z)= -(-1)^{jk}(X,Z,Y)$

où U est obtenue à partir d'une superalgèbre associative. Nous tirons le

Théorème :

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre associative possédant une involution scalaire alors $U = A \oplus vA$ est une superalgèbre alternative.

Remarque :

Si A n'est pas supercommutative (i.e. $XY = (-1)^{ij}YX$ pour $X \in U_i$, $Y \in U_j$) l'algèbre U ainsi obtenue est une superalgèbre alternative non associative.

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre associative où $A_0 = K1$ et $A_1 = Ku$ telle que $u^2 = 0$. Posons $W = A \oplus wA$ où $w^2 = -1$. Comme A est supercommutative, W une superalgèbre associative de dimension 4 définie par $W_0 = K1 \oplus Ke_1$ et $W_1 = Kw_1 \oplus Kw_2$ dont la table est :

$\nearrow$	1	e	w_1	w_2
1	1	e	w_1	w_2
e	e	-1	w_2	$-w_1$
w_1	w_1	$-w_2$	0	0
w_2	w_2	w_1	0	0

Posons $U = W \oplus vW$ où $v^2 = -1$. U est une superalgèbre alternative non associative de dimension 8 définie par $U_0 = K1 \oplus Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3$ et $U_1 = Ku_1 \oplus Ku_2 \oplus Ku_3 \oplus Ku_4$ dont la table est :

$\nearrow$	1	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
1	1	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	e_1	-1	$-e_3$	e_2	u_2	$-u_1$	$-u_4$	u_3
e_2	e_2	e_3	-1	$-e_1$	u_3	u_4	$-u_1$	$-u_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1	-1	$-u_4$	u_3	$-u_2$	u_1
u_1	u_1	$-u_2$	$-u_3$	u_4	0	0	0	0
u_2	u_2	u_1	$-u_4$	$-u_3$	0	0	0	0
u_3	u_3	u_4	u_1	u_2	0	0	0	0
u_4	u_4	$-u_3$	u_2	$-u_1$	0	0	0	0

U n'est pas associative car

$(e_1,e_2,u_1) = (e_1e_2)u_1 - e_1(e_2u_1) = -e_3u_1 - e_1u_3 = u_4 + u_4 = 2u_4 \neq 0.$

La superalgèbre de Malcèv U^- obtenue de U a comme table :

$\nearrow$	1	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
e_1	0	0	$-2e_3$	$2e_2$	$2u_2$	$-2u_1$	$-2u_4$	$2u_3$
e_2	0	$2e_3$	0	$-2e_1$	$2u_3$	$2u_4$	$-2u_1$	$-2u_2$
e_3	0	$-2e_2$	$2e_1$	0	$-2u_4$	$2u_3$	$-2u_2$	$2u_1$
u_1	0	$-2u_2$	$-2u_3$	$2u_4$	0	0	0	0
u_2	0	$2u_1$	$-u_4$	$-2u_3$	0	0	0	0
u_3	0	$2u_4$	$2u_1$	$2u_2$	0	0	0	0
u_4	0	$-2u_3$	$2u_2$	$-2u_1$	0	0	0	0

On suppose que $i \in K$ telle que $i^2 = -1$. Posons :

$2h = ie_1$; $4e = e_2 - ie_3$; $4f = e_2 + ie_3$; $v_1 = u_1 + iu_2$ et $v_2 = u_3 + iu_4$.

Soit A_0 (resp.A_1) le K-espace vectoriel engendrée par (e,f,h) (resp.(v_1,v_2)).A_0 est l'algèbre de Lie simple de dimension trois et A_1 est le A_1-module simple non de Lie de dimension deux. $M = A_0 \oplus A_1$ (où $(A_1)^2 = 0$) est une superalgèbre de Malcèv (extension d'Elenberg) et $M \subseteq U^-$.

CHAPITRE

III

CHAPITRE III

SEMI-SIMPLICITE DES SUPERALGEBRES DE MALCEV

INTRODUCTION

Conformément à la définition de G. Hochschild, nous étudions la semi-simplicité des superalgèbres de Malcèv. Après avoir donné quelques définitions et théorèmes au paragraphe 1, nous établissons au paragraphe 2 un théorème sur les algèbres de Malcèv M telles que Rad(M) $\neq$ J(Rad(M),M,M). Ceci nous permet de démontrer le principal résultat de ce chapitre au paragraphe 3.

III-1 PRELIMINAIRES

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de deux.

Théorème III-1-1 (Théorème de Poincaré-Birkoff-Witt.)

Soit L une superalgèbre de Lie sur un corps K, U(L) son algèbre enveloppante et $\sigma : L \longrightarrow U(L)$ le morphisme canonique de L dans U(L)· Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de L telle que tous les éléments e_i soient homogènes. (où I est un ensemble totalement ordonné). Alors 1 et les produits de la forme $\sigma(e_{i_1})\sigma(e_{i_2})...\sigma(e_{i_r})$ avec $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r$ et $i_p < i_{p+1}$ lorsque e_{i_p} appartient à L_1 (pour p = 1,2,...,r) constituent une base de U(L) sur K.

(cf.17).

Soit $L = L_0 \oplus L_1$ une superalgèbre de Lie et $U(L)$ son algèbre enveloppante. Notons $U(L_0)$ la sous-algèbre de $U(L)$ engendrée par $K+L_0$, $U(L_0)$ est aussi l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie L_0. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
L_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "*"] & L \arrow[d] \\
U(L_0) \arrow[r] & U(L)
\end{tikzcd}$$

$U(L)$ peut être considéré comme un $U(L_0)$-module.

Soit $(e_j)_{j\in J}$ une base de L_1 où J est un ensemble totalement ordonné, alors 1 et les monômes $e_{j_1} \dots e_{j_q}$ (avec $q > 0$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_q$), constituent une $U(L_0)$-base de $U(L)$. $U(L)$ est donc de dimension finie sur $U(L_0)$ si L_1 est de dimension finie sur K. (si $q = 0$ on pose $e_{j_1} \dots e_{j_q} = 1$).

Soit V_0 le K-sous-espace de $U(L)$ engendré par 1 et les monômes cités ci-dessus pour lesquels q est pair et V_1 le K-sous-espace de $U(L)$ engendré par les monômes pour lesquels q est impair.

Posons $U(L)_0 = V_0 \otimes_K U(L_0)$ et $U(L)_1 = V_1 \otimes_K U(L_0)$; alors on a une Z_2-graduation sur $U(L)$: $U(L) = U(L)_0 \oplus U(L)_1$. Notons V_0^+ le K-sous-espace de V_0 engendré par les monômes cités ci-dessus pour lesquels q est pair et non nul. On a la décomposition suivante :

$$U(L) = U(L_0) \oplus (V_0^+ \otimes_K U(L_0)) \oplus (V_1 \otimes_K U(L_0)).$$

$$L.U(L) = L_0.U(L_0) \oplus (V_0^+ \otimes_K U(L_0)) \oplus (V_1 \otimes_K U(L_0)).$$

(cf. 8).

Définition III-1-2

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ un anneau Z_2-gradué. Soit M un A-module Z_2-gradué. M est un A-module non nul est dit simple si ses seuls A-sous-modules homogènes sont 0 et $M = M_0 \oplus M_1$. M est dit semi-simple si M est la somme directe de A-sous-modules simples.

Remarque III-1- 3

Un A-module Z_2-gradué $M = M_0 \oplus M_1$ est semi-simple si chaque A-sous-module homogène de M admet un supplémentaire dans M.

Définition III-1-4

Une K-superalgèbre de Malcèv M de dimension finie est semi-simple si chaque M-module Z_2-gradué de dimension finie est semi-simple. (cf. 8).

Remarque III-1-5 :

Comme l'a précisée G. Hochschild [8], cette définition est très restrictive, pour la suite nous parlerons de semi-simplicité pour la semi-simplicité au sens de G. Hochschild et de la semi-simplicité au sens ordinaire.

Lemme III-1-6

Soit M une superalgèbre de Malcèv semi-simple et soit I un idéal homogène de M, alors $M = I \oplus I'$ où I' est un idéal homogène de M.

En effet, M est un M-module Z_2-gradué de M dont la représentation associée est ad : M $\longrightarrow$ $End_K(M)$. Puisque $M.I \subseteq I$, I devient un M-sous-module homogène de M et M étant semi-simple, il vient que I possède un M-sous-module supplémentaire I' de M. Nous avons alors $M = I \oplus I'$ et comme $M.I' \subseteq I'$; I' est un idéal homogène de M ●

Une conséquence du lemme est que tout idéal homogène d'une superalgèbre de Malcèv semi-simple est semi-simple.

Lemme III-1-7

Soit M une algèbre de Malcèv et soit L une algèbre de Lie contenue dans M. Soit A un M-module de Lie, alors A est un L-module de Lie.

En effet soit $\sigma : M \longrightarrow End_K(A)$ la représentation associée au M-module de Lie. Notons $\sigma' : L \longrightarrow End_K(A)$ la restriction de σ à L. σ' est K-linéaire et pour $x,y \in L$: $\sigma'_{xy} = \sigma_{xy} = [\sigma_x,\sigma_y] = [\sigma'_x,\sigma'_y]$. D'où σ' est une représentation de Lie de l'algèbre de Lie L dans A ●

Lemme III-1-8

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv. Si M est semi-simple telle que $M^2 \neq M$, alors M est de $\tilde{J}$-noyau non nul.

En effet M^2 est un idéal homogène de M, par suite $M = M^2 \oplus M'$ (lemme III-1-6) où M' est un idéal homogène supplémentaire de M^2 dans M. $M.M' \subseteq M^2 \cap M' = 0$, ce qui entraîne que $\tilde{J}(M,M,M') = 0$ et $M' \subseteq \tilde{N}(M)$. $M' \neq 0$ car $M^2 \neq M$. D'où $\tilde{N}(M) \neq 0$●

<u>Lemme</u> III-1-9

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv semi-simple ; alors $M = \tilde{N}(M) \oplus M'$ où M' est une superalgèbre de Malcèv de $\tilde{J}$-noyau nul et $\tilde{J}(M,M,M) = \tilde{J}(M) = M'$.

En effet. $\tilde{N}(M)$ est un idéal homogène de M d'où $M = \tilde{N}(M) \oplus M'$ avec M' un idéal homogène et semi-simple de M. Montrons que M' est de $\tilde{J}$-noyau nul. Soit $L = \tilde{N}(M')$ le $\tilde{J}$-noyau de M'

$\tilde{N}(M).L \subseteq \tilde{N}(M).M' \subseteq M' \cap \tilde{N}(M) = 0$ et

$L.M = L.(M'+\tilde{N}(M)) \subseteq L$; il vient que L est un idéal de M et

$\tilde{J}(L,M,M) = \tilde{J}(L,M'+\tilde{N}(M),M'+\tilde{N}(M)) \subseteq \tilde{J}(L,M',M') = 0$. Par suite $L \subseteq \tilde{N}(M)$. D'où $L \subseteq \tilde{N}(M) \cap M' = 0$. $\tilde{J}(M')$ est aussi un idéal homogène de M'et M' étant semi-simple $M' = \tilde{J}(M') \oplus M''$ où M'' est un idéal homogène de M'. $M''.\tilde{N}(M) = 0$. D'où

$M''.M = M''.(\tilde{N}(M)+M') = M''M' \subseteq M'$ et

M'' est un idéal homogène de M.

$\tilde{J}(M'',M,M) = \tilde{J}(M'',\tilde{N}(M) \oplus M',\tilde{N}(M) \oplus M') = \tilde{J}(M'',M',M') \subseteq \tilde{J}(M')$

d'où $\tilde{J}(M'',M,M) \subseteq M'' \cap \tilde{J}(M') = 0$, il vient alors que $M'' \subseteq \tilde{N}(M)$ et

donc que $M'' \subseteq \tilde{N}(M) \cap M' = 0$ et $M' = \tilde{J}(M')$.

$$\tilde{J}(M) = \tilde{J}(\tilde{N}(M) \oplus M',\tilde{N}(M) \oplus M',\tilde{N}(M) \oplus M')$$
$$= \tilde{J}(M',M',M') = \tilde{J}(M') = M' \bullet$$

<u>Lemme</u> III-1-10 : $M^{(k+k')} = \left(M^{(k)}\right)^{(k')}$ pour $k,k' > 0$.

En effet, $M^{(k+1)} = M^{(k)}.M^{(k)} = \left(M^{(k)}\right)^{(1)}$. En particulier
$M^{(1+1)} = \left(M^{(1)}\right)^{(1)}$ et alors
$M^{(k+2)} = \left(M^{(k+1)}\right)^{(1)} = \left(\left(M^{(k)}\right)^{(1)}\right)^{(1)} = \left(M^{(k)}\right)^{(2)}$.
Par récurrence si $M^{(k+k')} = \left(M^{(k)}\right)^{(k')}$ alors :
$M^{(k+(k'+1))} = \left(M^{(k+k')}\right)^{(1)} = \left(\left(M^{(k)}\right)^{(k')}\right)^{(1)} = \left(M^{(k)}\right)^{(k'+1)}$.
D'où le lemme •

<u>Lemme</u> III-1-11

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv. Soient A une sous-algèbre de Malcèv de M et B un idéal homogène de M. Si A et B sont résolubles, alors A + B est une superalgèbre de Malcèv résoluble.

En effet, puisque B est un idéal, $AB \subseteq B$. Par suite
$(A + B)(A + B) \subseteq A + B$ et A + B est une sous-algèbre de M.
Pour tout entier k, $(A+B)^{(k)} \subseteq A^{(k)} + B$. Puisque A et B sont résolubles
il existe un entier $m \neq 0$ tel que $A^{(m)} = B^{(m)} = 0$. Alors
$(A+B)^{(m)} \subseteq A^{(m)} + B \subseteq B$ et
$(A+B)^{(2m)} \subseteq \left((A+B)^{(m)}\right)^{(m)} \subseteq B^{(m)} = 0$.
A+B est donc une sous-superalgèbre de Malcèv résoluble •

III-2 UN THEOREME SUR LES ALGEBRES DE MALCEV

Soit M une algèbre de Malcèv sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et 3.

Définition III-2-1

Soit V un M-module de Malcèv et soit W un sous-ensemble de V. On note l'annulateur de M dans W l'ensemble $W^M = \{v \in W \ / \ M.v = 0\}$. Soit I un idéal de l'algèbre de Malcèv M. On définit la suite $I^{(0)} = I$, $I^{(1)} = I^2, \ldots, I^{(k)} = I^{(k-1)}.I^{(k-1)}$ pour un entier $k \geq 1$.

Proposition III-2-2

Soit I un idéal d'une algèbre de Malcèv M alors J(I,M,M) est un idéal de M et $I^{(k)}.M \subseteq J(I,M,M) + I^{(k)}$.

En effet,

$M.J(I,M,M) \subseteq J(M,I,M^2) + J(M,M,MI) + J(M,M,IM) \subseteq J(I,M,M)$ et

J(I,M,M) est un idéal de M. Montrons par récurrence que

$I^{(k)}.M \subseteq J(I,M,M) + I^{(k)}$. Pour $k = 0$, $I^{(0)} = I$ est un idéal de M par

suite $I^{(0)}.M = I.M \subseteq I = J(I,M,M) + I^{(0)}$ (car $J(I,M,M) \subseteq I$).

Pour $k = 1$, $I^{(1)} = I^2$ et $I^{(1)}.M = (I.I)M \subseteq J(I,I,M) + (I.M)I + (M.I)I$

d'où $I^{(1)}.M \subseteq J(I,I,M) + I.I \subseteq J(I,M,M) + I^{(1)}$.

Supposons que la relation est vraie jusqu'au rang k, alors

$$\begin{aligned}
I^{(k+1)}.M = (I^{(k)}.I^{(k)})M &\subseteq J(I^{(k)},I^{(k)},M) + (I^{(k)}.M)I^{(k)} + (M.I^{(k)})I^{(k)} \\
&\subseteq J(I^{(k)},I^{(k)},M) + [J(I,M,M) + I^{(k)}]I^{(k)} + I^{(k)}.I^{(k)} \\
&\subseteq J(I^{(k)},I^{(k)},M) + J(I,M,M) + I^{(k)}.I^{(k)} \\
&\subseteq J(I,M,M) + I^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration •

Nous avons alors $[I^{(k)} + J(I,M,M)]M = I^{(k)}.M + J(I,M,M).M$

$$\subseteq [I^{(k)} + J(I,M,M)] + J(I,M,M)$$

$$\subseteq I^{(k)} + J(I,M,M).$$

et $I^{(k)} + J(I,M,M)$ est un idéal de M. D'où :

<u>Proposition</u> III-2-3 $I^{(k)} + J(I,M,M)$ est un idéal de M.

Pour $k = 0,1,2,...$

Soit R le radical résoluble de M. Nous avons la suite

$R = R^{(0)} \supset R^{(1)} \supset ... \supset R^{(n)} = 0$ pour un certain n entier.

Notons $I_k = R^{(k)} + J(R,M,M)$ pour $k = 0,1,2,...$ où $R^{(k)} = 0$ pour $k \geq n$.

<u>Proposition</u> III-2-4

I_k est un idéal de M et $I_k^2 \subseteq I_{k+1} \subseteq I_k \quad (k = 0,1,2,...)$

En effet I_k est un idéal de M en vertu de la proposition III-2-3 et $I_k \supseteq I_{k+1}$ car $R^{(k)} \supset R^{(k+1)}$.

De plus $I_k^2 = (R^{(k)} + J(R,M,M))(R^{(k)} + J(R,M,M))$

$$\subseteq R^{(k+1)} + J(R,M,M) = I_{k+1}.$$

D'où la proposition ●

Nous avons une suite d'idéaux de M :

$R = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_{n-1} \supset I_n = J(R,M,M)$. On suppose désormais que

$R \supset J(R,M,M)$ alors $I_n \subset R$. Notons p le plus petit entier positif tel que

$I_p \subset R$. Alors nous avons pour $m < p$; $I_m = R$ et $R^2 = I_m^2 = I_{p-1}^2 \subset I_p$.

Nous noterons pour simplifier $I_p = I$. Soient $M = R \oplus S$ la décomposition de Lévi de M et i l'injection canonique de S dans M. R étant un idéal de M, R est un M-module de Malcèv.

Soit $\rho' : M \longrightarrow End_K(R)$ la représentation associée, qui à x de M associe, $\rho'(x) = \rho'_x$ où pour tout r de R ; $\rho'_x(r) = xr$.

Notons $\rho = \rho' \circ i$, ρ est une représentation de S dans R. R est donc un S-module de Malcèv. Soit le diagramme suivant :

$R \xrightarrow{\rho_s} R \xrightarrow{\pi} R/I$ où π est la surjection canonique de R dans R/I.

$(\pi o \rho_s)(I) = \pi(\rho_s(I)) = \pi(s.I) \subseteq \pi(I) = 0$. Il existe alors une unique application K-linéaire $\bar{\rho}_s : R/I \longrightarrow R/I$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\pi o \rho_s"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & R/I \\
R/I \arrow[ur, "\bar{\rho}_s"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour tout r dans R, $\bar{\rho}_s(r+I) = sr + I$ et $\bar{\rho}_s \circ \pi = \pi \circ \rho_s$.

$\bar{\rho}_s$ induit une application K-linéaire $\bar{\rho} : S \longrightarrow \mathrm{End}(R/I)$ tel que pour s_1,s_2,s_3 trois éléments de S ;

$$\bar{\rho}_{(s_1s_2)s_3} \circ \pi = \pi \circ \rho_{(s_1s_2)s_3}$$

$$= \pi \circ [\rho_{s_3}\circ\rho_{s_2}\circ\rho_{s_1} - \rho_{s_2}\circ\rho_{s_1}\circ\rho_{s_3} - \rho_{s_1}\circ\rho_{s_3s_2} + \rho_{s_1s_3}\circ\rho_{s_2}]$$

$$= [\bar{\rho}_{s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1} - \bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1}\circ\bar{\rho}_{s_3} - \bar{\rho}_{s_1}\circ\bar{\rho}_{s_3s_2} + \bar{\rho}_{s_1s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}] \circ \pi$$

Puisque π est surjectif, il vient que

$$\bar{\rho}_{(s_1s_2)s_3} = \bar{\rho}_{s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1} - \bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1}\circ\bar{\rho}_{s_3} - \bar{\rho}_{s_1}\circ\bar{\rho}_{s_3s_2} + \bar{\rho}_{s_1s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}$$

$\bar{\rho} : S \longrightarrow \mathrm{End}(R/I)$ est une représentation de Malcèv de S dans R/I.

Posons $T = \mathrm{Hom}_K(R/I, K) = (R/I)^*$ (dual de R/I). Soit σ_s une application de T dans T définit par $\sigma_s(\tau) = - \tau \circ \bar{\rho}_s$.

σ_s induit une application K-linéaire $\sigma : S \longrightarrow \mathrm{End}(T)$ telle que pour s_1,s_2,s_3 trois éléments de S on ait

$$\sigma_{(s_1s_2)s_3}(\tau) = - \tau \circ \bar{\rho}_{(s_1s_2)s_3}$$

$$= - \tau \circ \bar{\rho}_{s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1} + \tau \circ \bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1}\circ\bar{\rho}_{s_3}$$

$$+ \tau \circ \bar{\rho}_{s_1}\circ \bar{\rho}_{s_3s_2} - \tau \circ \bar{\rho}_{s_1s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}$$

$$= \sigma_{s_1}[\tau \circ \bar{\rho}_{s_3}\circ\bar{\rho}_{s_2}] - \sigma_{s_3}[\tau \circ \bar{\rho}_{s_2}\circ\bar{\rho}_{s_1}]$$

$$- \sigma_{s_3s_2}[\tau \circ \bar{\rho}_{s_1}] + \sigma_{s_2}[\tau \circ \bar{\rho}_{s_1s_3}]$$

$$= -(\sigma_{s_1} \circ \sigma_{s_2})[\tau \circ \bar{\rho}_{s_3}] + (\sigma_{s_3}\circ \sigma_{s_1})[\tau \circ \bar{\rho}_{s_2}]$$

$$+ (\sigma_{s_3s_2}\circ \sigma_{s_1})(\tau) - (\sigma_{s_2}\circ \sigma_{s_1s_3})(\tau)$$

$$= (\sigma_{s_1} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_3})(\tau) - (\sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_1} \circ \sigma_{s_2})(\tau)$$

$$- (\sigma_{s_2s_3}\circ \sigma_{s_1})(\tau) + (\sigma_{s_2}\circ \sigma_{s_3s_1})(\tau)$$

$$= (\sigma_{s_1} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_3} - \sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_1} \circ \sigma_{s_2} + \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_3 s_1} - \sigma_{s_2 s_3} \circ \sigma_{s_1})(\tau).$$

D'où $\sigma_{(s_1 s_2) s_3} = \sigma_{s_1} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_3} - \sigma_{s_3} \circ \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_1} - \sigma_{s_2 s_3} \circ \sigma_{s_1} + \sigma_{s_2} \circ \sigma_{s_3 s_1}$

est une représentation de Malcèv de S dans T.

T est un S-module de Malcèv.

<u>Proposition</u> III-2-5 :

Soient s_1, s_2, s_3 trois éléments de S et r_1, r_2, r_3 trois éléments de R nous avons :

$$(s_1 s_2) r_3 + (s_1 r_2) s_3 + (r_1 s_2) s_3 + I =$$

$$= (\bar{\rho}_{s_1} \circ \bar{\rho}_{s_2})(r_3 + I) - (\bar{\rho}_{s_3} \circ \bar{\rho}_{s_1})(r_2 + I)$$

$$+ \bar{\rho}_{s_3 s_2}(r_1 + I) - \bar{\rho}_{s_2}(r_1 s_3 + s_1 r_3 + I).$$

En effet,

$$(\bar{\rho}_{s_1} \circ \bar{\rho}_{s_2})(r_3 + I) - (\bar{\rho}_{s_3} \circ \bar{\rho}_{s_1})(r_2 + I)$$

$$+ \bar{\rho}_{s_3 s_2}(r_1 + I) - \bar{\rho}_{s_2}(r_1 s_3 + s_1 r_3 + I) =$$

$$= [s_1(s_2 r_3) + I] - [s_3(s_1 r_2) + I] + [(s_3 s_2) r_1 + I] - [s_2(r_1 s_3) + s_2(s_1 r_3) + I]$$

$$= s_1(s_2 r_3) - s_3(s_1 r_2) + (s_3 s_2) r_1 - s_2(r_1 s_3) - s_2(s_1 r_3) + I$$

$$= s_1(s_2 r_3) - s_3(s_1 r_2) + (s_3 s_2) r_1 - s_2(r_1 s_3)$$

$$- s_2(s_1 r_3) + J(r_1, s_2, s_3) + J(s_1, s_2, r_3) + I$$

$$= s_1(s_2 r_3) - s_3(s_1 r_2) + (s_3 s_2) r_1 - s_2(r_1 s_3) - s_2(s_1 r_3) +$$

$$+ [(s_1 s_2) r_3 - s_1(s_2 r_3) + s_2(s_1 r_3)] + [(r_1 s_2) s_3 - r_1(s_2 s_3) + s_2(r_1 s_3)] + I.$$

$$= (s_1 s_2) r_3 + (s_1 r_2) s_3 + (r_1 s_2) s_3 +$$

$$+ [s_1(s_2 r_3) + (s_3 s_2) r_1 - s_2(r_1 s_3) - s_2(s_1 r_3)]$$

$$+ [-s_1(s_2 r_3) - r_1(s_2 s_3) + s_2(r_1 s_3) + s_2(s_1 r_3)] + I$$

$= (s_1s_2)r_3 + (s_1r_2)s_3 + (r_1s_2)s_3 + I.$

(On rappelle que $J(R,S,S) \subseteq I$) •

Soit $A = T \oplus K$ (somme directe de K-espaces vectoriels).

Munissons A d'une structure de M-module en posant :

$\sigma' : M \longrightarrow End(A)$ la représentation associée. $M.K = \sigma'(M)(K) = 0$.

et pour $\tau \in T$, $r \in R$ et $s \in S$; $\sigma'_{r+s}(\tau) = \sigma_s(\tau) + \tau(r + I)$

Soient $X = r_1 + s_1$, $Y = r_2 + s_2$, $Z = r_3 + s_3$ des éléments de $M = R \oplus S$.

Montrons que

$$\sigma'_Z o\, \sigma'_Y o\, \sigma'_X - \sigma'_Y o\, \sigma'_X o\, \sigma'_Z - \sigma'_X o\, \sigma'_{ZY} + \sigma'_{XZ} o\, \sigma'_Y = \sigma'_{(XY)Z}$$

Soit $\tau \in T$.

$$(\sigma'_Z o\, \sigma'_Y o\, \sigma'_X - \sigma'_Y o\, \sigma'_X o\, \sigma'_Z - \sigma'_X o\, \sigma'_{ZY} + \sigma'_{XZ} o\, \sigma'_Y)(\tau) =$$

$$= (\sigma_{s_3} o\, \sigma_{s_2} o\, \sigma_{s_1})(\tau) + [\tau\ o\ \bar{\rho}_{s_1} o\, \bar{\rho}_{s_2}](r_3+I)$$

$$- (\sigma_{s_2} o\, \sigma_{s_1} o\, \sigma_{s_3})(\tau) - [\tau\ o\ \bar{\rho}_{s_3} o\, \bar{\rho}_{s_1}](r_2+I)$$

$$- (\sigma_{s_1} o\, \sigma_{s_3s_2})(\tau) + [\tau\ o\ \bar{\rho}_{s_3s_2}](r_1+I)$$

$$+ (\sigma_{s_1s_3} o\, \sigma_{s_2})(\tau) - [\tau\ o\ \bar{\rho}_{s_2}]\ (r_1s_3+s_1r_3+I)$$

$$= (\sigma_{s_3} o\, \sigma_{s_2} o\, \sigma_{s_1} - \sigma_{s_2} o\, \sigma_{s_1} o\, \sigma_{s_3} - \sigma_{s_1} o\, \sigma_{s_3s_2} + \sigma_{s_1s_3} o\, \sigma_{s_2})(\tau)$$

$$+ \tau\ o\ [(\bar{\rho}_{s_1} o\, \bar{\rho}_{s_2})(r_3+I) - (\bar{\rho}_{s_3} o\, \bar{\rho}_{s_1})(r_2+I)\ ]$$

$$+ \tau\ o\ [\bar{\rho}_{s_3s_2}(r_1+I) - \bar{\rho}_{s_2}(r_1s_3+s_1r_3+I)]$$

$$= \sigma_{(s_1s_2)s_3}(\tau) + \tau((s_1s_2)r_3 + (s_1r_2)s_3 + (r_1s_2)s_3 + I\ )$$

$= \sigma_{(s_1s_2)s_3}(\tau)$

$+ \tau[(s_1s_2)r_3 + (s_1r_2)s_3 + (s_1r_2)r_3 + (r_1s_2)s_3 + (r_1s_2)r_3 + I\,]$

$+ \tau[(r_1r_2)s_3 + (r_1r_2)r_3 + I\,]$. (puisque $R^2 \subseteq I$)

$= (\sigma'_{(s_1s_2)s_3} + [(s_1s_2)r_3 + (s_1r_2 + r_1s_2 + r_1r_2)(r_3 + s_3)])(\tau)$

$= \sigma'_{(XY)Z}(\tau)$.

Il vient alors que

$$\sigma'_{(XY)Z} = \sigma'_Z \circ \sigma'_Y \circ \sigma'_X - \sigma'_Y \circ \sigma'_X \circ \sigma'_Z - \sigma'_X \circ \sigma'_{ZY} + \sigma'_{XZ} \circ \sigma'_Y$$

pour des éléments X, Y, Z $\in$ M. A est un M-module de Malcèv.

<u>Remarques</u> III-2-6

1°) $\bar{\rho}_s : R/I \longrightarrow R/I$ tel que $\bar{\rho}_s\ (r+I) = sr + I$ pour tout r dans R vérifie

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_{s_1s_2}(r+I) &= (s_1s_2)r + I \\
&= J(s_1,s_2,r) + s_1(s_2r) - s_2(s_1r) + I \\
&= s_1(s_2r) - s_2(s_1r) + I \\
&= [s_1(s_2r) + I] - [s_2(s_1r) + I] \\
&= \bar{\rho}_{s_1}(s_2r + I) - \bar{\rho}_{s_2}(s_1r + I) \\
&= (\bar{\rho}_{s_1} \circ \bar{\rho}_{s_2})(r+I) - (\bar{\rho}_{s_2} \circ \bar{\rho}_{s_1})(r+I) \\
&= (\bar{\rho}_{s_1} \circ \bar{\rho}_{s_2} - \bar{\rho}_{s_2} \circ \bar{\rho}_{s_1})(r+I) \\
&= [\bar{\rho}_{s_1}, \bar{\rho}_{s_2}](r+I).
\end{aligned}$$

Ainsi R/I est un M-module de Lie.

2°) De même on montre que $\sigma_{s_1 s_2} = [\sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}]$ et

$\sigma'_{(s_1+r_1)(s_2+r_2)} = [\sigma'_{s_1+r_1}, \sigma'_{s_2+r_2}]$. D'où T est un S-module de Lie et

A est un M-module de Lie.

Nous avons $T \neq 0$ car $I \neq R$ et tout élément non nul de T est surjectif. Pour tout r de R et pour un élément non nul τ de T.

$r.\tau = \sigma'_r(\tau) = \tau(r+I) = (\tau \circ \pi)(r)$. Comme $\tau \circ \pi$ est surjectif, il vient que $(\tau \circ \pi)(R) = K$ et par suite $K = R.T \subseteq R.A \subseteq M.A$.

$M.K = 0$; d'où $K \subseteq (M.A)^M$. Il résulte le

Théorème III-2-7

Soit M une algèbre de Malcèv et R son radical résoluble. Si $J(R,M,M) \neq R$, alors il existe un M-module (de Lie) A de dimension finie tel que $(M.A)^M \neq 0$.

III-3 SEMI-SIMPLICITE

Proposition III-3-1

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre de Malcèv semi-simple de $\tilde{J}$-noyau non nul. Soit R le radical résoluble de M_0, alors

$R = \tilde{J}(R,M_0,M_0) = J(R,M_0,M_0)$.

En effet M étant de $\tilde{J}$-noyau non nul, posons $L = L_0 \oplus L_1$ le $\tilde{J}$-noyau de M. L est un idéal homogène non nul de M, comme M semi-simple $M = L \oplus M'$ où M' est aussi un idéal homogène de M (lemme III-1-6). Tout élément x de M s'écrit de manière unique en $x = x_1+x_2$ (où $x_1 \in L$ et $x_2 \in M'$). Soit $p : M \longrightarrow L$ où $p(x) = x_1$ la projection de M sur L ; p est un morphisme de superalgèbres de Malcèv. Soit $\sigma : L \longrightarrow U(L)$ l'injection canonique de L dans son algèbre enveloppante U(L). $\rho = \sigma \circ p$ est une représentation de Lie de M dans U(L). U(L) est alors un M-module. Soit $U(M_0)$ l'algèbre enveloppante de M_0. Nous avons le diagramme : $M_0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\sigma \circ p} U(L)$.

$$(\sigma \circ p \circ i)(xy) = \sigma(p(xy)) = \sigma(p(x)p(y))$$
$$=[\sigma(p(x)),\sigma(p(y))] = [(\sigma \circ p \circ i)(x),(\sigma \circ p \circ i)(y)]$$

pour deux éléments x et y de M_0. Il vient que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r] \arrow[d] & U(L) \\
U(M_0) \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "*" near end, shift left=6ex] &
\end{tikzcd}$$

U(L) est donc un $U(M_0)$-module.

Soit le K-espace vectoriel $B = U(L) \oplus M'$. B est une K-superalgèbre où $B_i = U(L)_i \oplus M'_i$ $(i = 0,1)$ et la multiplication est définie par :

$x.y = y.x = 0$ si $x \in U(L)$ et $y \in M'$; $x.y = xy$ si $x,y \in U(L)$ ou si

$x,y \in M'$. On munit B d'une structure de $U(M_0)$-module en posant :

Pour tout $b = u+m'$ de B (où $u \in U(L)$, $m' \in M'$) et $w \in U(M_0)$

$w*b = wb = kb$ si $w = k \in K$ et $w*b = w*(u+m') = w.u$ si $w \notin K$

(w.u est définie par l'action de $U(M_0)$ sur U(L)).

Supposons que $R \supset J(R, M_0, M_0)$ alors d'après le théorème III-2-7, il existe un M_0-module (de Lie) A de dimension finie tel que $(M_0.A)^{M_0} \neq 0$. Notons $\otimes_0$ le produit tensoriel relatif à $U(M_0)$. Soit $T = B \otimes_0 A$. On définit l'action de M sur T par : $x.(b \otimes a) = (x*b) \otimes a$ pour tout $x \in M$ et tout $b \otimes a \in T$. T devient alors un M-module et puisque L est de dimension finie, U(L) est de dimension finie sur $U(L_0)$ (cf. préliminaires). Soient $\{1, u_1, ..., u_p\}$ une $U(L_0)$-base de U(L) et $\{m_1,...,m_q\}$ une K-base de M'. Posons $b_0 = 1$, $b_i = u_i$ pour $1 \leq i \leq p$ et $b_{p+i} = m_i$ pour $1 \leq i \leq q$. Alors $\{b_0,..., b_{p+q}\}$ engendre B relativement à l'anneau $U(L_0)$. Soit $\{a_1,..., a_m\}$ une K-base de A ; alors $\{b_j \otimes a_i\}_{1 \leq i \leq m; 0 \leq j \leq p+q}$ constitue une K-base de T. Il vient alors que $T = B \otimes_0 A$ est un M-module de dimension finie sur K.

En posant $T_0 = B_0 \otimes_0 A$ et $T_1 = B_1 \otimes_0 A$; T devient un M-module Z_2-gradué fini. Soit b un élément non nul de $(M_0.A)^{M_0}$. Pour tout y de M_0, nous avons $y.(Kb) = K(y.b) = 0$, il vient que Kb est un M_0-sous-module de A. Soit W le M-sous-module homogène de T défini par $W = B \otimes_0 Kb$. M étant semi-simple nous pouvons écrire que $T = W \oplus W'$ où W' est un M-sous-module homogène de T supplémentaire de W.

D'autre part $b = \sum_k x_k a_k$ (somme finie) pour $x_k \in M_0$, $a_k \in A$.

Comme $1 \otimes a_k \in T_0$ on a $1 \otimes a_k = h_k + h'_k$ où $h_k \in W_0$, $h'_k \in W'_0$

(où $W_0 = T_0 \cap W$; $W'_0 = T_0 \cap W'$). Alors,

$$1 \otimes b = 1 \otimes \sum_k x_k a_k = \sum_k x_k.(1 \otimes a_k) = \sum_k x_k h_k + \sum_k x_k h'_k = h + h'.$$

avec $h = \sum_k x_k h_k \in M_0.(W_0) \subseteq W_0$, $h' = \sum_k x_k h'_k \in M_0.(W'_0) \subseteq W'_0$.

Or $1 \otimes b \in W_0$ d'où

$h' \in W_0 \cap W'_0 = 0$ et par suite $1 \otimes b = h \in M_0.(W_0)$.

a) Si $L_1 \neq 0$, nous avons

$$W_0 = B_0 \otimes_0 Kb = (U(L)_0 \otimes_0 Kb) \oplus (M'_0 \otimes_0 Kb)$$

$$= (V_0 \otimes_K U(L_0)) \otimes_0 Kb$$

$$= V_0 \otimes_K (U(L_0) \otimes_0 Kb).$$

D'où $W_0 \subseteq V_0 \otimes_K (U(M_0) \otimes_0 Kb) = V_0 \otimes_K Kb$

et $M_0.W_0 \subseteq M_0.V_0 \otimes_K Kb \subseteq V_0^+ \otimes_K Kb$ (c.f. Préliminaires). Alors

$1 \otimes b \in M_0.W_0 \subseteq V_0^+ \otimes_K Kb$, il vient que $1 \in V_0^+$. Ceci est absurde de par la définition de V_0^+.

b) Si $L_1 = 0$, nous avons $T = U(L_0) \otimes_0 A$ et $T_0 = T$, $T_1 = 0$.

$$W_0 = B_0 \otimes_0 Kb = (U(L)_0 \otimes_0 Kb) = U(L_0) \otimes_0 Kb \approx Kb.$$

D'où $1 \otimes b \in M_0.W_0 = 0$. $1 \otimes b = 0$ est absurde.

Ainsi nous ne pouvons avoir $R \neq \tilde{J}(R, M_0, M_0)$.

D'où $R = \tilde{J}(R, M_0, M_0) = J(R, M_0, M_0)$ •

<u>Proposition</u> III-3-2

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre de Malcèv semi-simple de $\tilde{J}$-noyau nul. Alors M_0 est semi-simple au sens ordinaire et $M_1^2 = 0$.

En effet, M étant de $\tilde{J}$-noyau nul, l'idéal $M_1^2 + M_1^2M_0 \oplus M_1$ engendré par M_1 est résoluble (cf. 2). Il vient que $M_1^2 + M_1^2M_0$ est un idéal résoluble de M_0 et ainsi $M_1^2 + M_1^2M_0 \subseteq R$. Alors $M_1^2 \subseteq R$. $N = R \oplus M_1$ est un idéal homogène résoluble de M (lemme III-1-11). N est semi-simple en tant qu'idéal homogène de $M = M_0 \oplus M_1$ et $N^2 \subset N$. D'après le lemme III-1-8 ; N est de $\tilde{J}$-noyau non nul. Appliquons à N la proposition III-3-1, il vient que $Rad(N_0) = J(Rad(N_0),N_0,N_0)$ où $N_0 = M_0 \cap N = R$. Alors $R = J(R,R,R) = R^2$. Puisque R est résoluble on a $R = 0$. D'où M_0 est semi-simple et $M_1^2 \subseteq R = 0$ •

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre de Malcèv semi-simple. $M = \tilde{N}(M) \oplus M'$ où M' est une superalgèbre de Malcèv de $\tilde{J}$-noyau nul (lemme III-1-9). Par suite d'après la proposition III-3-2, la composante homogène de degré 0 de M' notée M'_0 est semi-simple au sens ordinaire ($Rad(M'_0) = 0$).

Si $\tilde{N}(M) = 0$, alors $M_0 = M'_0$ est semi-simple au sens ordinaire.

Si $\tilde{N}(M) \neq 0$, alors $R = J(R,M_0,M_0)$ (proposition III-3-1). D'où $R = J(R,M_0,M_0) \subseteq J(M_0,M_0,M_0) \subseteq \tilde{J}(M,M,M) = M'$ (lemme III-1-9). R étant un idéal de M_0, c'est aussi un idéal de $M'_0 = M_0 \cap M'$ et comme il est résoluble ; il résulte que $R \subseteq Rad(M'_0) = 0$ et M_0 est semi-simple au sens ordinaire.

M étant considéré comme un M-module ; nous avons M^M qui est un M-sous-module homogène. Alors, M^M admet un supplémentaire homogène P dans M i-e $M = M^M \oplus P$.

$M^2 = M.P \subseteq P$ (car P est un idéal) et $M (M.P) \subseteq M.P$, M.P est un M-sous-module homogène du M-module P.

Alors $P = M.P \oplus Q$ où Q est le supplémentaire homogène de $M.P$ dans P $M.Q \subseteq Q \cap M.P = 0$, d'où $Q \subseteq M^M$ et donc $Q \subseteq M^M \cap P = 0$. Il vient que $M.P = P$ et $M = M^M \oplus P = M^M \oplus M.P = M^M \oplus M^2$. M^M est une zéro-algébre (c'est donc une superalgèbre de Lie) et il est semi-simple en tant qu'idéal homogène de M. D'après [8], $M^M = (M^M)^2 = 0$ et par suite $M = M^2$.

$$
\begin{aligned}
M = M_0 \oplus M_1 &= (M_0 \oplus M_1)^2 \\
&= (M_0^2 + M_1^2) \oplus M_0 M_1 \\
&= M_0 \oplus M_1 .
\end{aligned}
$$

D'où $M_0 M_1 = M_1$ et comme $M_0^2 = M_0$ car M_0 semi-simple au sens ordinaire il vient que $M_0.M = M$. Il en résulte le

<u>Théorème</u> III-3-3

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre de Malcèv. Si M est semi-simple, alors M_0 est une algèbre de Malcèv semi-simple au sens ordinaire et $M_0.M = M$.

<u>Corollaire</u> III-3-4

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre de Malcèv semi-simple.

Alors $M = L_0 \oplus S \oplus M'$ où

L_0 est une algèbre de Lie semi-simple au sens ordinaire.

$S = S_1^2 \oplus S_1$ est une K-superalgèbre de Lie semi-simple au sens de G. Hochschild.

M' est une K-algèbre de Malcèv semi-simple au sens ordinaire de $\tilde{J}$-noyau nul.

En effet,

d'après le lemme III-1-9, $M = \tilde{N}(M) \oplus M'$. $\tilde{N}(M)$ étant une

superalgèbre de Lie, il vient que $\tilde{N}(M) = L_0 \oplus S$ où $S = S_1^2 \oplus S_1$ est une

K-superalgèbre de Lie semi-simple et L_0 une algèbre de Lie semi-simple

au sens ordinaire (cf. 8).

$M' = M'_0 \oplus M'_1$ étant une K-superalgèbre de Malcèv semi-simple de

$\tilde{J}$-noyau nul, alors $(M'_1)^2 = 0$ (proposition III-3-2). Par suite M'_1 est

un idéal homogène de M' ; il admet donc un supplémentaire homogène

dans M'. Ce supplémentaire coïncide avec M'_0 qui devient aussi un idéal

de M'. Alors $M'_0 . M'_1 \subseteq M'_0 \cap M'_1 = 0$. Comme $M'_0 . M' = M'$.

(théorème III-3-3) il vient que

$M'_0 . M'_1 = M'_0 .(M'_0 \oplus M'_1) = (M'_0)^2 = M'_0 \oplus M'_1$.

D'où $M'_1 = 0$. Nous avons donc $M' = M'_0$ et M' est une algèbre de

Malcèv semi-simple au sens ordinaire de $\tilde{J}$-noyau nul.

$M = \tilde{N}(M) \oplus M' = L_0 \oplus (M_1^2 \oplus S_1) \oplus A \quad (A = M')$.

D'où le corollaire •

Remarque III-3-5 :

Le corollaire nous permet d'affirmer qu'une superalgèbre de Malcèv semi-simple au sens de G. Hochschild se décomposent en somme directe d'une superalgèbre de Lie semi-simple au sens de G. Hochschild et d'une algèbre de Malcèv semi-simple au sens ordinaire de $\tilde{J}$-noyau nul.

CHAPITRE

IV

CHAPITRE IV

RESOLUBILITE DES SUPERALGEBRES DE MALCEV

INTRODUCTION

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv sur K un corps commutatif de caractéristique nulle. Dans ce chapitre nous montrons que M est résoluble si et seulement si sa composante homogène de degré zéro est une algèbre de Malcèv résoluble. Enfin nous généralisons le théorème de Lie aux algèbres de Malcèv résolubles. Dans [22] Stitzinger a montré que pour toute algèbre de Malcèv résoluble M il existe une suite croissante d'idéaux de M : $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_m = M$ telle que M_i est de dimension i pour i = 1,...m = dim(M) (corollaire du théorème de Lie). Ici nous trouvons qu'il est intéressant de montrer que tout M-module de Malcèv V possède un drapeau stable par M.

IV-1 PRELIMINAIRES

Soit M une K-superalgèbre de Malcèv.

On construit les deux suites de sous-algèbres de M suivantes :

$M^1 = M$; $M^2 = M.M,...,M^k = M.M^{k-1}$ pour k = 0,1,... et

$M^{(1)} = M^2$; $M^{(3)} = M^{(2)}.M^{(2)},...,M^{(k)} = M^{(k-1)}.M^{(k-1)}$ pour k = 0,1,...

Définition IV-1-1

M est dit nilpotent s'il existe un entier naturel p tel que $\underline{M^{(p)} = 0}$.

M est dit résoluble s'il existe un entier naturel p tel que $M^{(p)} = 0$.

Remarques IV-1-2

Pour tout k = 0,1,... ; M^k est un idéal de M mais ce n'est pas toujours pas le cas de $M^{(k)}$.

Une algèbre de Malcèv nilpotente est résoluble. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Lemme IV-1-3

Si dim(M) ≤ 2, alors M est une superalgèbre de Lie.

Lemme IV-1-4

Si dim(M) = 3 et M est non de Lie, alors M est isomorphe à l'une des superalgèbres de Malcèv suivantes :

M(1,2) définie par au = v ; u^2 = a.

M(1,2,μ) au = v ; uv = μa. (μ≠ 0)

M(2,1) ab = b ; au = -u ; u^2 = b.

(a,b (resp. u,v) sont homogène de degré 0 (resp. 1)).

(Pour la démonstration cf. 1).

IV-2 RESOLUBILITE

Théorème IV-2-1 (Théorème de Lie)

Soit K un corps commutatif algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit L une algèbre de Lie résoluble de gl(V) où V est un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors L laisse invariant un drapeau de V. (cf. 9)

Soit K un corps commutatif algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit L une algèbre de Lie résoluble

et $\rho : L \longrightarrow End_K(V)$ une représentation finie de L. $\rho(L)$ est une algèbre de Lie résoluble de gl(V) et V possède un drapeau (invariant par $\rho(L)$) : $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m = V$ où $\dim(V_i) = i$ pour $i = 1,2,\ldots, m$ et $L.V_i = \rho(L)(V_i) \subseteq V_i$.

Mieux si $\{v_1,\ldots,v_i\}$ est une K-base de V_i $(1 \leq i \leq m)$ alors pour tout x de L ; $x.v_i = \rho_x(v_i) = \lambda^i(x)v_i + w'$ (avec $w' \in V_{i-1}$) où λ^i est un caractère de M. (i.e. λ^i est une application K-linéaire de M dans K et $\lambda^i(M^2) = 0$). Il vient que $L^2.V_i \subseteq V_{i-1}$ pour $i = 1,\ldots,m$.

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Lie de dimension finie telle que A_0 soit résoluble. Soit $\rho : A_0 \longrightarrow End_K(A_1)$ telle que pour $x \in A_0$; ρ_x est l'endomorphisme de A_1 définie par $\rho_x(y) = xy$ où $y \in A_1$. ρ est une représentation finie de A_0 dans A_1. Il existe donc un drapeau de $A_1 = V$ tel que : $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_m = A_1$ où $\{v_1,... v_i\}$ est une K-base de V_i ($1 \leq i \leq m$). De plus $A_0. V_i = \rho(A_0)(V_i) \subseteq V_i$ et $A_0^2.V_i \subseteq V_{i-1}$.

Puisque $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Lie ; nous avons :

$\tilde{J}(v_i,v_j,v_k) = (v_iv_j)v_k - v_i(v_jv_k) - v_j(v_iv_k) = 0$ pour $1 \leq i,j,k \leq m$.

Soit $k = 1,2..., m$ et $i,j < k$; alors

$\tilde{J}(v_i,v_j,v_k) = \lambda^k(v_iv_j)v_k + (w - v_i(v_jv_k) + (v_iv_k)v_j) = 0$ où $w \in V_{k-1}$.

Alors $w - v_i(v_jv_k) + (v_iv_k)v_j \in V_{k-1}$ et ainsi nous avons $\lambda^k(v_iv_j)v_k = 0$;

D'autre part $\tilde{J}(v_k,v_k,v_i) = (v_k)^2v_i + 2(v_iv_k)v_k = 0$. Soit $((v_k)^2v_i + w') + 2\lambda^k(v_iv_k)v_k = 0$ ($w' \in V_{k-1}$). Ainsi $\lambda^k(v_iv_k)v_k=0$.

Enfin, $0 = \tilde{J}(v_k,v_k,v_k) = 3(v_k)^2v_k$ soit $\lambda^k((v_k)^2)v_k = 0$.

Il vient donc que $V_k^2.V_k \subseteq \lambda^k(V_k^2).V_k + V_{k-1} = V_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq m$.

Lemme IV-2-2 :

Soit K un corps commutatif algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Lie telle que A_0 est résoluble. Alors :

i) il existe un drapeau de A_1 : $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m = A_1$

(où $\dim(V_i) = i$) stable par A_0.

ii) $A^{(2p)} \subseteq (A_0^2 + V_{m-p+1}^2) \oplus V_{m-p+1}$ et

$A^{(2p+1)} \subseteq (A_0^2 + V_{m-p+1}^2) \oplus V_{m-p}$ où $p \geq 1$.

En effet, i) résulte du théorème de Lie car A_1 est un A_0-module de Lie. Soit alors $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m = A_1$ ce drapeau. Soit $(v_1,\ldots,v_i)$ une K-base de V_i ($1 \leq i \leq m$). Nous avons

$$A = A_0 \oplus A_1 = A_0 \oplus V_m$$

$$A^{(2)} \subseteq (A_0^2 + V_m^2) \oplus [A_0]V_m \subseteq (A_0^2 + V_m^2) \oplus V_m$$

$$A^{(3)} \subseteq (A_0^2 + V_m^2) \oplus [A_0^2 + V_m^2]V_m \subseteq (A_0^2 + V_m^2) \oplus V_{m-1}$$

(Puisque $[A_0^2 + V_m^2]V_m \subseteq A_0^2.V_m + V_m^2.V_m \subseteq V_{m-1}$)

Ainsi ii) est vérifiée pour $p = 1$; supposons la vraie pour tout entier strictement inférieur à $p+1$.

$$\begin{aligned} A^{(2(p+1))} &= A^{(2p+2)} \\ &= A^{(2p+1)}.A^{(2p+1)} \\ &\subseteq [(A_0^2 + V_{m-p+1}^2) \oplus V_{m-p}].[(A_0^2 + V_{m-p+1}^2) \oplus V_{m-p}] \\ &\subseteq (A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus [A_0^2 + V_{m-p+1}^2].V_{m-p} \\ &\subseteq (A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus V_{m-p}. \end{aligned}$$

D'où $A^{(2(p+1))} \subseteq (A_0^2 + V_{m-(p+1)+1}^2) \oplus V_{m-(p+1)+1}$ et

$$A^{(2(p+1)+1)} = A^{(2(p+1))} . A^{(2(p+1))}$$

$$\subseteq [(A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus V_{m-p}].[(A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus V_{m-p}]$$

$$\subseteq (A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus [A_0^2 + V_{m-p}^2].V_{m-p}$$

$$\subseteq (A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus V_{m-p-1}.$$

Par suite $A^{(2(p+1)+1)} \subseteq (A_0^2 + V_{m-p}^2) \oplus V_{m-p-1}$. D'où le lemme •

<u>Lemme</u> IV-2-3 :

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Lie sur K un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. A_0 est résoluble si et seulement si A est résoluble.

En effet, si A_0 est résoluble alors $A_0^{(n)} = 0$ pour un entier naturel non nul n. Du lemme IV-2-2, il vient que $A_1 = V_m \supset V_{m-1} \supset \ldots \supset V_0 = 0$.

Par suite, d'après le même lemme

$A^{(2m+1)} \subseteq A_0^2 + V_1^2 \subseteq A_0$ et

$A^{(2m+n+1)} \subseteq [A^{(2m+1)}]^{(n)} \subseteq [A_0]^{(n)} = A_0^{(n)} = 0$ (lemme III-1-10).

D'où A est résoluble. La réciproque est triviale •

Lemme IV-2-4 :

Soit $A = A_0 \oplus A_1$ une superalgèbre de Malcèv de $\tilde{J}$-noyau nul sur K un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. A_0 est résoluble si et seulement si A est résoluble.

En effet, A étant de $\tilde{J}$-noyau nul, l'idéal $I = (A_1^2 + A_1^2.A_0) \oplus A_1$ engendré par A_1 est résoluble (cf. 2, Théorème 5-4).Si A_0 est résoluble, alors $A = A_0 + I$ est résoluble d'après le lemme III-1-11. La réciproque est triviale ●

Théorème IV-2-4 :

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv sur K un corps de caractéristique nulle. M_0 est résoluble si et seulement si M est résoluble.

En effet,
soit K' une clôture algébrique de K. Nous avons $M' = M \otimes_K K'$ est résoluble si et seulement si M est résoluble car $(M')^{(n)} = M^{(n)} \otimes_K K'$. On supposera alors que K est algébriquement clos. Si M est de dimension $p \leq 2$, alors M est une superalgèbre de Lie (lemme IV-1-3) et le lemme IV-2-3 nous donne le théorème.

Si M est de dimension trois non de Lie, alors M est isomorphe à $M(1,2)$; $M(1,2,\mu)$; ou $M(2,1)$ (lemme IV-1-4) ($\mu \neq 0$). Ces superalgèbres de Malcèv sont toutes résolubles et donc vérifient le théorème. Supposons par récurrence que le théorème est vrai pour toute superalgèbre de Malcèv de dimension strictement inférieure à m (un entier non nul).

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv de dimension m telle que M_0 est résoluble. Soit $L = \tilde{N}(M) = L_0 \oplus L_1$ le $\tilde{J}$-noyau de M.

Si $L = 0$; alors le lemme IV-2-4 nous donne le théorème.

Par contre si $L \neq 0$; alors $L_0 \subseteq M_0$ et L_0 est résoluble. Par suite L est résoluble (lemme IV-2-3). M/L est une superalgèbre de Malcèv de dimension $n < m$. $\left(M/L\right)_0 \approx M_0/L_0$ est résoluble puisque M_0 est résoluble. Grâce à l'hypothèse de récurrence, il vient que M/L est résoluble. L et M/L étant résolubles, M est résoluble. Réciproquement si M est résoluble. M_0 est résoluble en tant que sous- algèbre de M •

Remarque :

La nilpotence de M_0 n'entraîne pas celle de M. Par exemple, considérer la superalgèbre de Malcèv $M(1,2,\mu)$ avec $\mu \neq 0$.

IV-3 GENERALISATION DU THEOREME DE LIE

Lemme IV-3-1 :

Si $A = A_0 \oplus A_1$ est une superalgèbre de Malcèv résoluble (resp.nilpotente) alors G(A) est résoluble (resp.nilpotente) où G(A) est l'enveloppe grassmanniènne de A.

En effet, il suffit de remarquer que $(G(A))^n \subseteq A^n \otimes G$ et $(G(A))^{(n)} \subseteq A^{(n)} \otimes G$ •

Lemme IV-3-2 :

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv telle que M_0 est résoluble ; $M_1 = Kv \neq 0$ et $v^2 = 0$.

Alors $[M_0^2]v = 0$ et M_1 est un M_0-module de Lie.

En effet, $M_1 = Kv$ est un M_0-module de Malcèv, il existe donc une application K-linéaire α de M_0 dans K telle que pour tout x dans M_0 ; $x.v = \alpha(x)v$. Si pour tout x de M_0, $\alpha(x) = 0$ alors $[M_0^2]v \subseteq \alpha(M_0)v = 0$ et $M_0.M_1 = 0$, soit M_1 est un M_0-module de Lie. Supposons qu'il existe un élément x de M_0 tel que $\alpha(x) \neq 0$; alors $v = \dfrac{x}{\alpha(x)}v \in M_0.M_1 = M_1$.

Soit z un élément quelconque de M_0^2, alors $Kz \oplus Kv$ est une super-sous-algèbre de M et $Kz \oplus Kv \subseteq M^2 = M_0^2 \oplus M_1$. D'autre part puisque M_0 est résoluble ; M est résoluble (théorème IV-2-4) par suite G(M) est une algèbre de Malcèv résoluble (lemme précédent).

Du corollaire 1.4.8 de [14,p. 8] il vient que

$(G(A))^2 = (M_0^2 \otimes G_0) \oplus (M_1 \otimes G_1)$ est nilpotente (G l'algèbre grassmanniènne est unitaire).

$U = (Kz \otimes G_0) \oplus (Kv \otimes G_1) \subseteq (G(A))^2$ d'où U est une superalgèbre nilpotente. Nous avons ; $U^m = (\alpha(z))^{m-1}Kv \otimes G_1$ pour tout $m > 1$. U est nilpotente d'où $U^m = 0$ pour un certain entier $m > 1$. Soit $(\alpha(z))^{m-1}Kv = 0$ entraînant que $(\alpha(z))^{m-1} = 0$. Le corps de base étant de caractéristique nulle, il vient que $\alpha(z) = 0$.

D'où pour tout $z \in M_0^2$ $\alpha(z) = 0$ et ainsi $[M_0^2]v = 0$.

Montrons que $M_1 = Kv$ est un M_0-module de Lie. Soit $x,y \in M_0$;

$J(x,y,v) = (xy)v - x(yv) + y(xv) = \alpha(xy)v - \alpha(y)\alpha(x)v + \alpha(x)\alpha(y)v = 0$

car $xy \in M_0^2$; d'où M_1 est un M_0-module de Lie •

Ceci étant nous sommes en mesure de démontrer le

<u>Théorème</u> IV-3-3 :

Soit M une algèbre de Malcèv résoluble sur K un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit V un M-module de Malcèv de dimension finie m. Alors, il existe un drapeau de V :

$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_m = V$ invariant par M où $\dim(V_i) = i$ pour $i = 1,2,\ldots m$.

De plus nous avons $M^2.V_i \subset V_{i-1}$ pour $i = 1,2,\ldots m$.

En effet, montrons le théorème par récurrence. Si V est de dimension un ; V est un M-module de Lie (proposition IV-3-2) et le théorème est vraie.

Supposons que le théorème est vérifié pour tout M-module de dimension $p < m$ (où $m > 1$). Soit V un M-module de dimension m. Le théorème 1.4.9 de [14, p 8] nous dit que V n'est pas un M-module simple.

Soit W un M-sous-module propre de V. Le K-espace vectoriel quotient $U = V/W$ est un M-module (de Malcèv) de dimension $r < m$. Appliquant l'hypothèse de récurrence à U, il vient qu'il existe un drapeau de $U : 0 = U_0 \subseteq U_1 \subseteq ... \subseteq U_r = U$ invariant par M où $\dim(U_i) = i$ pour $i = 1,2,... r$. De plus nous avons $M^2.U_i \subset U_{i-1}$ pour $i = 1,2,... r$.

Soit $(u_1,...,u_i)$ une base de U_i.

Notons v_i un représentant de u_i pour $1 \leq i \leq r$.

W étant un M-module de dimension $p = m - r < m$, il existe un drapeau de W stable par M. Soit $0 = W_0 \subseteq W_1 \subseteq ... \subseteq W_p = W$ ce drapeau où $(w_1,...,w_j)$ est une base du M-sous-module W_j et de plus nous avons $M^2.W_j \subset W_{j-1} (1 \leq j \leq p)$. Alors

$$(1) \qquad x.w_j = \lambda^j(x)w_j + w'_j$$

(où $w'_j \in W_{j-1}$) (λ^j est un caractère de M dépendant de w_j).

Puisque $M.U_i \subseteq U_i$ et $M^2.U_i \subset U_{i-1} (1 \leq i \leq r)$ nous avons

$$x.u_i = \lambda^{i+p}(x)u_i + u'_i$$

(où $u'_i \in U_{i-1}$) (λ^{i+p} est un caractère de M dépendant de u_i)

d'où $x.(v_i + W) = \lambda^{i+p}(x)(v_i + W) + (u'_i + W)$. Soit

$$(2) \qquad x.v_i = \lambda^{i+p}(x)v_i + u''_i + W$$

tel que $u''_i \in U_{i-1}$ (pour $1 \leq i \leq r$)

Soit $F = (w_1,\ldots,w_p,v_1,\ldots,v_r)$. Montrons que F est une base de V.

Soit $0 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j w_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i \qquad (*)$

(où α_j, β_i sont des scalaires). Il vient que

$\sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i = -\sum_{j=1}^{p} \alpha_j w_j \in W$ d'où $\sum_{i=1}^{r} \beta_i (v_i + W) = 0 + W$ et $\sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = 0$.

Comme $(u_1,\ldots,u_r)$ est une base de U, il vient que $\beta_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

$(*)$ devient $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j w_j = 0$; soit $\alpha_j = 0$ pour $1 \leq j \leq p$ (car $(w_1,\ldots,w_p)$ est une base de W). Il s'ensuit que F est une famille libre et puisque

$p + r = m = \dim V$; F est une base de V.

Posons pour $p+1 \leq i \leq m$; $w_i = v_{i-p}$. Soit V_i le K-espace vectoriel engendré par $(w_1,\ldots,w_i)$ pour $1 \leq i \leq m$.

L'égalité (**1**) reste inchangée :

$$x.w_i = \lambda^i(x)w_i + w'_i$$

avec $w'_i \in V_{i-1}$ (pour $1 \leq i \leq p$)

Soit ϖ''_i un représentant de u''_i. L'égalité (**2**) devient :

$$x.w_i = \lambda^i(x)w_i + w'_i$$

avec $w'_i = \varpi''_i + \omega''_i \in V_{i-1}$ où $\omega''_i \in W.= V_p \subseteq V_{i-1}$

(pour $p+1 \leq i \leq m$). Par suite $M.V_i \subseteq V_i$ et $M^2.V_i \subset V_{i-1}$.

Finalement $0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_m = V$ est un drapeau de V invariant par M ($\dim(V_i) = i$ pour $i = 1,2,... m$) et de plus nous avons

$M^2.V_i \subset V_{i-1}$ pour $i = 1,2,... m$.

D'où le théorème •

En posant V = M, par la représentation adjointe on obtient le corollaire démontré dans [22, Théorème 4].

CHAPITRE

V

CHAPITRE V

ESPACE-POIDS D'UNE ALGEBRE DE MALCEV

V-1 INTRODUCTION

Soit M une algèbre de Malcèv de dimension finie sur K un corps commutatif de caractéristique nulle. Soit V un M-module de Malcèv de dimension finie et ρ la représentation associée. Soit S un sous-ensemble de M et λ une fonction de S dans K, on définit l'espace propre $V_\lambda(S)$ et l'espace poids $V^\lambda(S)$ de V relativement à λ (et S) par :

$$V_\lambda(S) = \{v \in V \ / \ \forall \ x \in S, \rho(x) = \lambda(x) \ v\}$$

$$V^\lambda(S) = \{v \in V \ / \ \forall \ x \in S, \exists \ n \in N^* \text{ tel que } (\rho(x) - \lambda(x))^n \ v = 0\}$$

lorsque S = M, $V^\lambda(S)$ est notée V^λ. On notera $(\rho(x) - \lambda(x))^m$ v par

$(x - \lambda(x))^m$ v (où m est un entier). Dans ce chapitre nous montrons le le résultat suivant :

Théorème V-4-6:

Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit M une K-algèbre de Malcèv et V un M-module de Malcèv. Si $V^\lambda \neq 0$, alors

a) Pour toute sous-algèbre S semi-simple de M, on a $S.V^\lambda = 0$.

b) λ est un caractère.

c) V^λ est un M-sous-module de V si et seulement si

il existe une base $(v_1,...,v_n)$ de V^λ tel que

*) $\forall$ $x \in M$, $(x - \lambda(x))\, v_1 = 0$.

**) $\forall$ $x \in M$, $(x - \lambda(x))\, v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^i_{i-j}(x) v_{i-j}$ pour $i = 2,3... n$

les A^i_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

Dans ce cas $V_\lambda \neq 0$.

Dans [21], M. K. Smith à montrer que pour tout module de Lie d'une algèbre de Lie L, si $V^\lambda \neq 0$ alors V^λ est un M-sous-module de V où λ est un caractère et $V_\lambda \neq 0$.

Ensuite nous donnons un exemple nous assurant la justesse des conditions énoncées pour que V^λ soit un M-module.

<u>Définition</u> V-1-1

Soit λ une application de M dans K ; λ est un caractère de M si λ est K-linéaire et $\lambda(M^2) = 0$.

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie, V est un M-module de Malcèv et $\lambda : M \longrightarrow K$ un caractère de M tel que $V_\lambda \neq 0$.

Soit $v \in V_\lambda$ alors pour tout $x \in M$ nous avons $x.v = \lambda(x)v$ d'où $x.V_\lambda \subseteq V_\lambda$ et V_λ est un M-sous-module de V. De même $(x - \lambda(x))v = 0$; par suite $V_\lambda \subseteq V^\lambda$ D'où nous avons la

Proposition V-1-2 :

V_λ est un M-sous-module de V et $V_\lambda \subseteq V^\lambda$.

Définitions V-1-3

- On désigne par Sl(2,K) l'algèbre de Lie simple de dimension trois dont une base $\{e,f,h\}$ est telle que $eh = e$, $fh = -f$, et $ef = \frac{1}{2}h$.

- L'algèbre C^- est l'algèbre de Malcèv simple de dimension sept ayant une base $\{e_1,\dots,e_7\}$ dont la table de multiplication est la suivante

$e_1e_2 = -\alpha e_2$	$e_1e_3 = -\alpha e_3$	$e_1e_4 = -\alpha e_4$
$e_1e_5 = \alpha e_5$	$e_1e_6 = \alpha e_6$	$e_1e_7 = \alpha e_7$
$e_2e_3 = 2e_7$	$e_2e_4 = -2e_6$	$e_2e_5 = e_1$
$e_3e_4 = 2e_5$	$e_3e_6 = e_1$	$e_4e_7 = e_1$
$e_5e_6 = \alpha e_4$	$e_5e_7 = -\alpha e_3$	$e_6e_7 = \alpha e_2$

où $0 \neq \alpha \in K$; les autres produits e_ie_j (où $i < j$) étant nuls.

V-2 UN THEOREME SUR LES MODULES DE LIE

Dans ce paragraphe, nous supposerons que M est une K-algèbre de Malcèv et V un M-module de Lie. Pour la démonstration du théorème V-2-3 nous avons besoin de deux lemmes dont le premier est une extension du théorème de Lie bien connu (cf. 9).

Lemme V-2-1

Soit M une K-algèbre de Malcèv résoluble d'indice p sur K un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit V un M-module de Lie de dimension finie, alors il existe un drapeau de V invariant par M i.e. il existe des sous espaces V_i $(i=1,\ldots,n)$ tels que :

$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$ et $M.V_i \subseteq V_i$ $(\dim(V_i) = i)$.

En effet, V étant un M-module de Lie, soit ρ la représentation associée à V. $A = \{\rho_x \ / \ x \in M\}$ est l'enveloppe de Lie de M, $A^- \subseteq [\mathrm{End}(V)]^-$ et A^- est une K-algèbre de Lie résoluble car

$[A^-]^{(p)} \subseteq \rho(M^{(p)}) = 0$. V est trivialement un A^--module de Lie. D'où par application du théorème de Lie V possède un drapeau :

$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$ tel que $A^-.V_i \subseteq V_i$ $(i=0,\ldots,n)$ et $\dim(V_i) = i$.

Par suite $M.V_i = A^-.V_i \subseteq V_i$. D'où le lemme ●

Lemme V-2-2

Soit M une K-algèbre de Malcèv. Soit ρ une représentation de Lie de M dans V et soit $A = L(M) = \{\rho_x / x \in M\}$ une enveloppe de Lie de M. Soit $\lambda : M \longrightarrow K$ une fonction telle que $V^\lambda \neq 0$, alors $\lambda' : A \longrightarrow K$ définie par $\lambda'(y)=\lambda(x)$ (où $x \in M$ tel que $y = \rho(x)$) est une fonction de A et $V^\lambda(M) = V^{\lambda'}(A)$.

En effet ; montrons que λ' est bien définie. Soit $y \in A$ et soient $x, x' \in M$ tels que $y = \rho(x) = \rho(x')$. Soit v un vecteur non nul de V^λ ; alors pour un entier naturel non nul m

$(\rho(x)-\lambda(x))^m(v) = (\rho(x')-\lambda(x'))^m(v) = 0$. Comme $y = \rho(x) = \rho(x')$, il vient que $(y-\lambda(x))^m(v) = (y-\lambda(x'))^m(v) = 0$, par suite

$0 \neq v \in V^{\lambda(x)}(y) \cap V^{\lambda(x')}(y)$ et puisque pour tout endomorphisme y de V les espace-poids $V^\alpha(y)$ sont confondus ou d'intersection nulle (cf. 3) ; nous aurons $V^{\lambda(x)}(y) = V^{\lambda(x')}(y)$ et $\lambda(x) = \lambda(x')$.

D'où $\lambda'(y) = \lambda(x) = \lambda(x')$ est bien définie. $\lambda' : A \longrightarrow K$ est donc une fonction de A dans K. Soit $v \in V^\lambda$; soit $y \in A$, il existe $x \in M$ tel que $y = \rho(x)$ et pour m un naturel donné $(y-\lambda'(y))^m(v) = (\rho(x)-\lambda(x))^m(v)= 0$. Par conséquence pour tout y dans A, $(y-\lambda'(y))^m(v) = 0$ et $v \in V^{\lambda'}(A)$. Réciproquement si $v \in V^{\lambda'}(A)$ alors pour x dans M,

$(\rho(x)-\lambda(x))^m(v) = (y-\lambda'(y))^m(v) = 0$ (avec $y = \rho(x)$ et m un naturel donné) ; par suite $v \in V^\lambda(M)$. Ainsi $V^\lambda(M) = V^{\lambda'}(A)$. Dans la suite nous confondrons λ' et λ ●

Théorème V-2-3

Soit K un corps de caractéristique nulle et soit V un M-module de Lie. Si $V^{\lambda} \neq 0$, alors

i) Pour toute sous-algèbre M' semi-simple de M, on a $M'.V^{\lambda} = 0$.

ii) λ est un caractère.

iii) V^{λ} est un M-sous-module de V.

iv) $V_{\lambda} \neq 0$.

En effet, supposons que M' est une sous-algèbre semi-simple. Soit $\rho': M' \longrightarrow End(V)$ la représentation de M' dans V induite par celle de M; V devient un M'-module de Lie et $V^{\lambda'} \neq 0$ où λ' est la restriction de λ à M'. Soit A' = L(M') une enveloppe de Lie de M'. M' étant semi-simple, il en est de même pour A' (cf. 12, théorème15).Nous avons

$V^{\lambda} \subseteq V^{\lambda'}(M') = V^{\lambda'}(A')$ (lemme V-2-2). D'après [21]

$V^{\lambda'}(A') = V_{\lambda'}(A') = V_0(A')$ car A' semi-simple. Soit $x \in M'$, alors

$\rho(x) \in A'$ et $\rho(x)(V^{\lambda}) \subseteq \rho(x)(V_0(A')) = 0$. V^{λ} est invariant par M', V^{λ} est donc muni d'une structure de M'-module trivial, d'où $M'.V^{\lambda} = 0$.

Ce qui achève la démonstration de i).

Supposons maintenant que M est résoluble. Soit $\rho : M \longrightarrow End(V)$ la représentation associée et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Notons

$\overline{M} = M \otimes_K \overline{K}$ et $\overline{V} = V \otimes_K \overline{K}$.Alors $\overline{M}$ est une $\overline{K}$-algèbre de Malcèv résoluble de dimension finie et $\overline{V}$ un $\overline{M}$-module de Lie de dimension finie de représentation induite $\bar{\rho}$, il vient du lemme V-2-1 qu'il existe un drapeau de $\overline{V}$ stable par $\overline{M}$: $0 = W_0 \subseteq W_1 \subseteq ... \subseteq W_n = \overline{V}$ où

$\dim(W_i) = i$ et $\overline{M}.W_i \subseteq W_i$. Soit v un vecteur non nul de V^λ alors

$w = v \otimes 1 \neq 0$ et $w \in \overline{V}$. Il existe un entier i compris entre zéro et m tel que $w \in W_{i+1}$ et $w \notin W_i$. Soit $\overline{\overline{w}}$ image de w dans $\overline{\overline{W}} = W_{i+1}/W_i$, $\overline{\overline{w}}$ est un vecteur non nul du $\overline{M}$-module de Lie $\overline{\overline{W}}$ de représentation $\overline{\overline{\rho}}$ induite par ρ. Comme $\dim\overline{\overline{W}} = 1$; $\overline{\overline{W}} = \overline{\overline{W}}^\mu = \overline{\overline{W}}_\mu$ où μ est un caractère de $\overline{M}$. D'où :

$\overline{\overline{w}} \in \overline{\overline{W}}^\mu(M) \subseteq \overline{\overline{W}}^{\mu'}(M)$ avec μ' la restriction de μ à $M \approx M \otimes 1$.

D'autre part $v \in V^\lambda$ implique $w \in \overline{V}^\lambda(M)$ car

$(\overline{\overline{\rho}}(x)-\lambda(x))^m(w) = (\overline{\overline{\rho}}(x)-\lambda(x))^m(v \otimes 1) = (\rho(x)-\lambda(x))^m v \otimes 1 = 0$, il

vient donc que

$(\overline{\overline{\rho}}(x)-\lambda(x))^m(\overline{\overline{w}}) = (\overline{\overline{\rho}}(x)-\lambda(x))^m(w+W_i) = (\rho(x)-\lambda(x))^m w + W_i = 0 \equiv W_i$

et ainsi $\overline{\overline{w}} \in \overline{\overline{W}}^\lambda(M)$. $0 \neq \overline{\overline{w}} \in \overline{\overline{W}}^\lambda(M) \cap \overline{\overline{W}}^{\mu'}(M)$ entraîne que $\lambda = \mu'$ est un caractère.

Supposons que M est une algèbre de Malcèv quelconque et soit $M = R \oplus S$ une décomposition de Lévi de M (R est le radical résoluble et S une sous-algèbre semi-simple (au sens ordinaire)). De ce qui précède ; la restriction $\lambda_{/S}$ de λ à S est nulle et $\lambda_{/R}$ (restriction de λ à R) est un caractère. Soit $s \in S$; $H = Ks \oplus R$ est une K–algèbre de Malcèv résoluble et par suite $\lambda_{/H}$ restriction de λ à H est un caractère. Aussi,

$$\lambda(\alpha s+\beta r) = \alpha\lambda(s) + \beta\lambda(r) = \beta\lambda(r) \quad \forall\, r \in R\ ;\ \forall\, s \in S \text{ et } \alpha,\beta \in K.$$

Il s'en suit que λ est linéaire sur M et comme $\lambda_{/H}$ est un caractère,

$\lambda(sR) \subseteq \lambda(H^2) = 0 \quad \forall\, s \in S$. Comme $M^2 = S + SR + R^2$, nous avons

$\lambda(M^2) = 0$ et λ est un caractère démontrant ainsi ii).

iii) et iv) se démontrent de façon analogue au cas des algèbres de Lie (cf. 21) •

V-3 Cas de Sl(2, K) et de C⁻

Dans ce paragraphe nous déterminerons les espaces poids V^λ de M une algèbre de Malcèv simple et V un M-module fini non de Lie et simple. Le corps de base K est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

<u>Lemme</u> V-3-1 :

Soient $M \approx Sl(2,K)$ et V le M–module simple non de Lie de dimension deux. Soit λ une fonction de M dans K; alors $V^\lambda = 0$.

En effet, soit $V = Kv + Kw$.

Soit (e,f,h) une base de M telle que $eh = e$; $fh = -f$; $ef = \frac{1}{2}h$. Soit ρ la représentation associée à V nous avons $\rho(e)$, $\rho(f)$, $\rho(h)$ qui sont définis par les matrices respectives (relativement à la base (v,w))

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \rho(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \rho(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $u = \alpha_0 v + \beta_0 w$ un vecteur de V^λ ($\alpha_0, \beta_0 \in K$). Soit $x \in M$,

$x = ae + bf + ch$ ($a,b,c \in K$). Posons $X = \rho(x) - \lambda(x)$; on montre que

$X^m(u) = X(X^{m-1}(u)) = \alpha_m v + \beta_m w$, ($m \geq 1$) où

$$\begin{cases} \alpha_m = (c - \lambda(x))\alpha_{m-1} - b\beta_{m-1} \\ \beta_m = a\alpha_{m-1} - (c + \lambda(x))\beta_{m-1} \end{cases} \qquad (S)$$

$\det(S) = \lambda(x)^2 + ab - c^2$. $V^\lambda \neq 0$ si et seulement si $\det(S) = 0$, soit

$\lambda(x)^2 = c^2 - ab$ Dans ce cas $\alpha_m = \beta_m = 0$ si $(c - \lambda(x))\alpha_{m-1} - b\beta_{m-1} = 0$

ceci indépendamment de x (i.e. de a,b,c). Il vient que $\alpha_{m-1} = \beta_{m-1} = 0$
De proche en proche, nous obtenons $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. D'où $V^\lambda = 0$ •

Soit $(e_1,\dots, e_7)$ une base de $M \approx C^-$ et $(v_1,\dots,v_7)$ une base de V un M-module régulier. Soit $w = \sum_{i=1}^{7} \beta_0^i v_i$ un élément de V^λ et $x = \sum_{j=1}^{7} a_j e_j$ un élément de M (β_0^i, $a_j \in K$).

Posons $X = \sum_{j=1}^{7} a_j \rho(e_j) - \lambda(x)$.

$$X^m u = X(X^{m-1}u) = \sum_{i=1}^{7} \beta_m^i v_i = X(\sum_{i=1}^{7} \beta_{m-1}^i v_i).$$

$$= (\sum_{j=1}^{7} a_j \rho(e_j))(\sum_{i=1}^{7} \beta_{m-1}^i v_i) - \lambda(x) \sum_{i=1}^{7} \beta_{m-1}^i v_i$$

Comme $\rho(e_i)v_j = -\rho(e_j)v_i$ il vient que

$$X^m u = \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=j+1}^{7}(a_j\beta^i_{m-1} - a_i\beta^j_{m-1})\rho(e_j)v_i - \lambda(x)\sum_{i=1}^{7}\beta^i_{m-1}v_i =$$

$$-\alpha[(a_1\beta^2_{m-1} - a_2\beta^1_{m-1})v_2 + (a_1\beta^3_{m-1} - a_3\beta^1_{m-1})v_3 + (a_1\beta^4_{m-1} - a_4\beta^1_{m-1})v_4]$$
$$+\alpha[(a_1\beta^5_{m-1} - a_5\beta^1_{m-1})v_5 + (a_1\beta^6_{m-1} - a_6\beta^1_{m-1})v_6 + (a_1\beta^7_{m-1} - a_7\beta^1_{m-1})v_7]$$
$$+[2(a_2\beta^3_{m-1} - a_3\beta^2_{m-1})v_7 - 2(a_2\beta^4_{m-1} - a_4\beta^2_{m-1})v_6 + (a_2\beta^5_{m-1} - a_5\beta^2_{m-1})v_1]$$
$$+2(a_3\beta^4_{m-1} - a_4\beta^3_{m-1})v_5 + (a_3\beta^6_{m-1} - a_6\beta^3_{m-1})v_1 + (a_4\beta^7_{m-1} - a_7\beta^4_{m-1})v_1$$
$$+\alpha[(a_5\beta^6_{m-1} - a_6\beta^5_{m-1})v_4 - (a_5\beta^7_{m-1} - a_7\beta^5_{m-1})v_3 + (a_6\beta^7_{m-1} - a_7\beta^6_{m-1})v_2]$$
$$- \lambda(x)\sum_{i=1}^{7}\beta^i_{m-1}v_i.$$

Et comme $X^m u = \sum_{i=1}^{7}\beta^i_m v_i$, on déduit que

$$\beta^1_m = -\lambda(x)\beta^1_{m-1} - a_5\beta^2_{m-1} - a_6\beta^3_{m-1} - a_7\beta^4_{m-1} + a_2\beta^5_{m-1} + a_3\beta^6_{m-1} + a_4\beta^7_{m-1}$$

$$\beta^2_m = \alpha a_2\beta^1_{m-1} - (\lambda(x) + \alpha a_1)\beta^2_{m-1} - \alpha a_7\beta^6_{m-1} + \alpha a_6\beta^7_{m-1}$$

$$\beta^3_m = \alpha a_3\beta^1_{m-1} - (\lambda(x) + \alpha a_1)\beta^3_{m-1} + \alpha a_7\beta^5_{m-1} - \alpha a_5\beta^7_{m-1}$$

$$\beta^4_m = \alpha a_4\beta^1_{m-1} - (\lambda(x) + \alpha a_1)\beta^4_{m-1} - \alpha a_6\beta^5_{m-1} + \alpha a_5\beta^6_{m-1}$$

$$\beta^5_m = -\alpha a_5\beta^1_{m-1} - 2a_4\beta^3_{m-1} + 2a_3\beta^4_{m-1} - (\lambda(x) - \alpha a_1)\beta^5_{m-1}$$

$$\beta^6_m = -\alpha a_6\beta^1_{m-1} + 2a_4\beta^2_{m-1} - 2a_2\beta^4_{m-1} - (\lambda(x) - \alpha a_1)\beta^6_{m-1}$$

$$\beta^7_m = -\alpha a_7\beta^1_{m-1} - 2a_3\beta^2_{m-1} + 2a_2\beta^3_{m-1} - (\lambda(x) - \alpha a_1)\beta^7_{m-1}.$$

Posons $B_m = \begin{pmatrix} \beta_m^1 \\ \beta_m^2 \\ \beta_m^3 \\ \beta_m^4 \\ \beta_m^5 \\ \beta_m^6 \\ \beta_m^7 \end{pmatrix}$ et $B_{m-1} = \begin{pmatrix} \beta_{m-1}^1 \\ \beta_{m-1}^2 \\ \beta_{m-1}^3 \\ \beta_{m-1}^4 \\ \beta_{m-1}^5 \\ \beta_{m-1}^6 \\ \beta_{m-1}^7 \end{pmatrix}$

(coordonnées relatives à $\{v_1,...,v_7\}$).

Soit A la matrice définie par : (posons $\lambda(x) = \lambda$)

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \alpha a_2 & -\lambda-\alpha a_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha a_7 & \alpha a_6 \\ \alpha a_3 & 0 & -\lambda-\alpha a_1 & 0 & \alpha a_7 & 0 & -\alpha a_5 \\ \alpha a_4 & 0 & 0 & -\lambda-\alpha a_1 & -\alpha a_6 & \alpha a_5 & 0 \\ -\alpha a_5 & 0 & -2a_4 & 2a_3 & -\lambda+\alpha a_1 & 0 & 0 \\ -\alpha a_6 & 2a_4 & 0 & -2a_2 & 0 & -\lambda+\alpha a_1 & 0 \\ -\alpha a_7 & -2a_3 & 2a_2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda+\alpha a_1 \end{pmatrix}$$

$B_m = A.B_{m-1}$ et nous avons $\det A = -\lambda(x)(\lambda(x)-\alpha a_1)^3(\lambda(x)+\alpha a_1)^3$.

$V^\lambda \neq 0$ si et seulement si $\det(S) = 0$, soit $\lambda(x) = \alpha a_1$; $\lambda(x) = -\alpha a_1$ ou

$\lambda(x) = 0$.

<u>1°) cas</u> Si $\lambda(x) = \alpha a_1$ alors $V^\lambda = 0$.

En effet $\lambda(x) = \alpha a_1$ soit $\lambda(a_1x_1+ ... +a_7x_7) = \alpha a_1$

$V^{\lambda(x_1)}(x_1) = V^\alpha(x_1) = V_\alpha(x_1) = Kv_5 + Kv_6 + Kv_7$.

Soit $w = k_5v_5 + k_6v_6 + k_7v_7 \in V^{\lambda(x_1+x_6)}(x_1+x_6) = V^\alpha(x_1+x_6)$.

Posons $X = \rho(x_1+x_6) - \alpha id_V$ et $Y = \rho(x_1+x_5) - \alpha id_V$

$Xw = (\rho(x_1)+\rho(x_6) - \alpha id_V)w = \alpha(k_5v_4 + k_7v_2)$

$X^2w = X(Xw) = (-2\alpha)\alpha(k_5v_4 + k_7v_2)$.

Par récurrence, il vient que $X^mw = (-2\alpha)^{m-1}\alpha(k_5v_4 + k_7v_2)$.

Si de plus $w \in V^{\lambda(x_1+x_5)}(x_1+x_5) = V^\alpha(x_1+x_5)$ nous avons

$Yw = \alpha(k_5v_4 - k_6v_3)$ et

$Y^2w = (-2\alpha)\alpha(k_5v_4 - k_6v_3)$.

Par récurrence, il vient que $Y^{m'}w = (-2\alpha)^{m'-1}\alpha(k_5v_4 - k_6v_3)$.

Si $w \in V^\lambda$ alors $w \in V^\alpha(x_1) \cap V^\alpha(x_1+x_5) \cap V^\alpha(x_1+x_6)$. D'où

$X^mw = 0 = (-2\alpha)^{m-1}\alpha(k_5v_4 + k_7v_2) = 0$ entraîne que $k_5 = k_7 = 0$ et

$Y^{m'}w = 0 = (-2\alpha)^{m'-1}\alpha(k_5v_4 - k_6v_3) = 0$ entraîne que $k_5 = k_6 = 0$.

Nous déduisons que $k_5 = k_6 = k_7 = 0$ et par suite $w = 0$, soit $V^\lambda = 0$ ●

<u>2°) cas</u> Si $\lambda(x) = -\alpha a_1$ alors $V^\lambda = 0$.

En effet $\lambda(x) = -\alpha a_1$ soit $\lambda(a_1x_1+ ... +a_7x_7) = -\alpha a_1$

$V^{\lambda(x_1)}(x_1) = V^{-\alpha}(x_1) = V_{-\alpha}(x_1) = Kv_2 + Kv_3 + Kv_4$.

Soit $w = k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 \in V^{\lambda(x_1+x_3)}(x_1+x_3) = V^{-\alpha}(x_1+x_3)$.

Posons $X = \rho(x_1+x_3) + \alpha id_V$ et $Y = \rho(x_1+x_2) + \alpha id_V$.

$Xw = (\rho(x_1)+\rho(x_3) + \alpha id_V)w = 2(k_4v_5 - k_2v_7)$ et

$X^2w = X(Xw) = 2(2\alpha)(k_4v_5 - k_2v_7)$.

Par récurrence, il vient que $X^mw = 2(2\alpha)^{m-1}(k_4v_5 - k_2v_7)$.

Si de plus $w \in V^{\lambda(x_1+x_2)}(x_1+x_2) = V^{-\alpha}(x_1+x_2)$ nous avons

$Yw = 2(k_3v_7 - k_4v_6)$ et

$Y^2w = 2(2\alpha)(k_3v_7 - k_4v_6)$.

Par récurrence, il vient que $Y^{m'}w = 2(2\alpha)^{m'-1}(k_3v_7 - k_4v_6)$.

Si $w \in V^\lambda$ alors $w \in V^{-\alpha}(x_1) \cap V^{-\alpha}(x_1+x_3) \cap V^{-\alpha}(x_1+x_2)$. D'où

$X^mw = 0 = 2(-2\alpha)^{m-1}(k_4v_5 - k_2v_7) =0$ entraîne que $k_2 = k_4 = 0$ et

$Y^{m'}w = 0 = 2(-2\alpha)^{m'-1}(k_3v_7 - k_4v_6) = 0$ entraîne que $k_3 = k_4 = 0$.

Nous déduisons que $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ et par suite $w = 0$, soit $V^\lambda = 0$ •

<u>3°) cas</u> Si $\lambda(x) = 0$ alors $V^\lambda = 0$.

En effet $\lambda(x) = 0$ quelque soit x dans M et soit $w \in V^\lambda = V^0$ alors $V^0 \subseteq V^0(x_1) \cap V^0(x_4+x_7)$ et $V^0(x_1) = Kv_1$; montrons que $v_1 \notin V^0(x_4+x_7)$.

Posons $Z = \rho(x_4+x_7)$ alors $Zv_1 = (\rho(x_4)+\rho(x_7))v_1 = \alpha(v_4 - v_7)$

$Z^2v_1 = Z(Zv_1) = (-2\alpha)v_1$ $\qquad Z^3v_1 = (-2\alpha)\alpha(v_4 - v_7)$

$Z^4v_1 = (-2\alpha)^2v_1$.

Par récurrence, il vient que $Z^{2m}v_1 = (-2\alpha)^m v_1$

$$Z^{2m+1}v_1 = (-2\alpha)^m \alpha(v_4 - v_7)$$

pour tout entier naturel m.

Comme $\alpha \neq 0$, $Z^p v_1 \neq 0$ pour tout entier naturel p.

Par suite $v_1 \notin V^0(x_4+x_7)$ et $V^0 \subset V^0(x_1) \cap V^0(x_4+x_7) = 0$ •

Les trois cas traités ci-haut permettent d'énoncer le

<u>Lemme</u> V-3-2 :

Si $M \approx C^-$ et V est un M-module régulier et λ une fonction de M dans K; alors $V^\lambda = 0$.

<u>Théorème</u> V-3-3

Soit M une algèbre de Malcèv semi-simple et V un M-module de Malcèv sur un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle. Si $V^\lambda \neq 0$ alors $V^\lambda \subseteq N(V)$.

En effet, d'après [6] nous avons $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ et $V = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j$ (M_i est une algèbre de Malcèv simple pour i = 1,...,n et V_j un sous-module simple pour j = 2,...,m) tels que

1°) V_1 est le plus grand sous-module de Lie de V

2°) Pour $2 \leq j \leq m$, il existe un entier $k = k(j)$, $1 \leq k \leq n$ tel que

$M_i.V_j = 0$ pour tout $i \neq k$.

De plus soit $\dim V_j = 2$ et alors : $M_k \approx Sl(2,K)$ et V_j est le M_k–module simple non de Lie de dimension deux ou soit $\dim V_j = 7$ et alors : $M_k \approx C^-$ et V_j est un M_k-module régulier.

Dans ces deux cas nous avons montrer (lemme V-2-1 et lemme V-2-2) que $V_j^{\lambda}(M_k) = 0$. D'où $V_j^{\lambda} \subseteq V_j^{\lambda}(M_k) = 0$ pour $j = 2,\ldots,m$.

Alors $V^{\lambda} = \bigoplus_{j=1}^{m} V_j^{\lambda} = V_1^{\lambda} \subseteq N(V)$ car $V_1 = N(V)$ •

V-4 -ESPACE-POIDS D'UN M-MODULE DE MALCEV

Lemme V-4-1

Soit M une algèbre de Malcèv résoluble sur un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit V un M-module non nul de Malcèv de dimension finie. Il existe un caractère α de M dans K et un vecteur non nul v_1 de V tels que $\rho(x)v_1 = \alpha(x)v_1$ où ρ est la représentation associée à V.

En effet, V (étant un M-module non nul) contient un M-sous-module simple W. D'après [14, Théorème 1.4.9] W est un M-module de dimension un. Soit $W = Kv_1$. Appliquant le lemme IV-3-2 à la superalgèbre de Malcèv $M \oplus W$ (extension d'Elenberg ; $W^2 = 0$), il vient que $\rho(x)v_1 = \alpha(x)v_1$ où α est un caractère de M •

Lemme V-4-2

Soit M une algèbre de Malcèv résoluble sur un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit V un M-module de Malcèv de dimension deux. Si λ est une fonction de M dans K telle que $V^{\lambda} \neq 0$, alors λ est un caractère de M et V^{λ} est un M-sous-module de V.

En effet, du lemme précédent, il existe α un caractère de M et $0 \neq v_1 \in V_\alpha$. Supposons que V^λ est de dimension un, alors si de plus $V^\lambda = V_\alpha$ alors $\lambda = \alpha$. D'où λ est un caractère de M et $V^\lambda = V_\lambda$ est un M-sous-module de V.

Si $V_\alpha \neq V^\lambda$ alors $\lambda \neq \alpha$, alors il existe x_0 de M tel que

$\alpha(x_0) \neq \lambda(x_0)$. Soit $0 \neq v_2 \in V^\lambda$. (v_1,v_2) constitue une base du M-module V. $W = {}^{V}\!/_{K\, v_1}$ est un M-module de dimension un et $W = W^\lambda = W_\lambda$ et d'après ci-haut λ est un caractère.

Nous aurons $\rho(x)(v_2) = \lambda(x)v_2 + A(x)v_1$ (où A est une fonction de M dans K).Puisque $v_2 \in V^\lambda$, montrons que $A(y) = 0$ pour tout y dans M. Notons $X = \rho(x)-\lambda(x)id_V$ pour x dans M ;

$$Xv_2 = (\rho(x)-\lambda(x)id_V)(v_2) = A(x)v_1$$

$$X^2 v_2 = X(A(x)v_1) = [A(x)(\alpha(x)-\lambda(x))]v_1$$

$$\vdots$$

$$X^n v_2 = [A(x)(\alpha(x)-\lambda(x))^{n-1}]v_1.$$

Comme $X^n v_2 = 0$, il vient que $A(x)(\alpha(x)-\lambda(x))^{n-1} = 0$. Le corps K étant de caractéristique nulle, on a $A(x)(\alpha(x)-\lambda(x)) = 0$. Soit $X^2 v_2 = 0$.

Soit $y \in M$ et $Y = \rho(y)-\lambda(y)id_V$ nous avons :

$(\rho(x+y)-\lambda(x+y)id_V\ )^2(v_2) = 0 =(X+Y)^2v_2$

Soit $X(Yv_2) = -Y(Xv_2)$ d'où $A(y)(\alpha(x)-\lambda(x)) = -A(x)(\alpha(y)-\lambda(y))$

Pour $x = y = x_0$, nous avons $A(x_0)(\alpha(x_0)-\lambda(x_0)) = -A(x_0)(\alpha(x_0)-\lambda(x_0))$

soit $A(x_0) = 0$ car $\rho(x_0)-\lambda(x_0) \neq 0$.

De plus $A(y)(\alpha(x_0)-\lambda(x_0)) = -A(x_0)(\alpha(y)-\lambda(y)) = 0$ pour tout y dans M. D'où $A(y) = 0$ pour $y \in M$. Il vient donc que pour tout $x \in M$ $\rho(x)(v_2) = \lambda(x)v_2$ et donc $V^\lambda = V_\lambda = Kv_2$ est un M-module.

Si la dimension de V^λ est deux alors $V^\lambda = V$; d'où V^λ est un M-module et $0 \neq V_\alpha \subseteq V^\lambda$ entraîne que $\lambda = \alpha$ est un caractère.

D'où le lemme •

REMARQUE :

Lorsque $0 \neq V^\lambda \subseteq N_M(V)$ où $N_M(V)$ est le J-noyau de V ; alors V^λ est un M-sous-module (de Lie) (cf. théorème V-2-3). Par contre si V est de dimension supérieure à deux et que $V^\lambda \not\subset N_M(V)$ alors V^λ n'est pas nécessairement un M-module de Malcèv. Nous allons en donner un exemple :

Soit $L = Kx+Ky+Kz$ la K-algèbre de Lie résoluble définie par : $xy = z$; $xz = y$ et $yz = 0$. Soit $V = Kv_1+Kv_2+Kv_3$ le L-module de Malcèv de représentation ρ telle que :

$$x.v_1 = -\frac{1}{2}v_1 \; ; \qquad y.v_1 = 0 \; ; \qquad z.v_1 = 0 \; ;$$
$$x.v_2 = \frac{1}{2}v_2 \; ; \qquad y.v_2 = v_1 \; ; \qquad z.v_2 = -v_1 \; ;$$
$$x.v_3 = \frac{1}{2}v_3 + v_2 \; ; \qquad y.v_3 = v_1 \; ; \qquad z.v_3 = -v_1.$$

Soit λ le caractère de L définie par $\lambda(x) = \frac{1}{2}$.

Soient (a,b,c) et (α,β,γ) des éléments de K^3 et soit $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ un vecteur de V^λ. Alors pour $f = a(\rho(x)-\frac{1}{2}id) + b\rho(y) + c\rho(z)$, nous avons :

$$f u = (\gamma a)v_2 + [-\alpha a + \beta(b-c) + \gamma(b-c)]v_1$$
$$f^2 u = (\gamma a)(b-c)v_1 - a[-\alpha a + \beta(b-c) + \gamma(b-c]v_1$$

$= [\gamma a(b-c) + \alpha a^2 - \beta a(b-c) - \gamma a(b-c)]v_1$

$= [\alpha a^2 - \beta a(b-c)\,]v_1$

$f^{p+2}u = (-a)^p[\alpha a^2 - \beta a(b-c)\,]v_1$ pour p entier.

$f^{p+2}u = 0$ entraîne que $(-a)^p[\alpha a^2 - \beta a(b-c)] = 0$; soit $\alpha a^2 - \beta a(b-c) = 0$.

On a alors $f^2\,u = 0$ quelque soit (a,b,c) ; il vient donc que $\alpha = \beta = 0$ et $u = \gamma v_3$. D'où $V^\lambda = Kv_3$.

$V^\lambda = Kv_3$ n'est pas un M-sous-module car $y.v_3 = v_1 \notin Kv_3$.
De plus $V_\lambda = 0$.

<u>Lemme</u> V-4-3 :

Soient M une K-algèbre de Malcèv et V un M-module de Malcèv. Soit $0 \neq v \in V_\lambda \subseteq V^\lambda$. $V/_{Kv}$ est un M-module et $(V/_{Kv})^\lambda = V^\lambda/_{Kv}$.

En effet, $v \in V_\lambda$, il vient que $x.v = \lambda(x)v$ pour tout x de M. Kv est donc un M-sous-module de V. $V/_{Kv}$ est alors un M-module-quotient de V. Soit $0 \neq u \in V^\lambda$, pour tout x de M, $(x - \lambda(x))^m u = 0$ (pour m un entier naturel) d'où $(x - \lambda(x))^m(u+Kv) = 0 + Kv$ entraînant que $u + Kv \in (V/_{Kv})^\lambda$; Nous avons alors $V^\lambda/_{Kv} \subseteq (V/_{Kv})^\lambda$. Soit $w + Kv$ un élément de $(V/_{Kv})^\lambda$ alors pour tout x de M

$(x - \lambda(x))^p(w+Kv) = 0 + Kv$ (pour p un entier naturel).

D'où $(x - \lambda(x))^p w = A(x)v$.

Par suite $(x - \lambda(x))^{p+1}(w) = (x - \lambda(x))[(A(x)v)] = A(x)[(x - \lambda(x))v] = 0$.

Il en résulte que $(V/_{Kv})^\lambda \subseteq V^\lambda/_{Kv}$. On conclue donc que

$(V/_{Kv})^\lambda = V^\lambda/_{Kv}$ •

Théorème V-4-4 :

Soient M une algèbre de Malcèv résoluble sur un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle et V un M-module fini . Soit λ une fonction de M dans K. Si $V^\lambda \neq 0$; alors
a) λ est un caractère de M
b) V^λ est un M-sous-module si et seulement s'il existe une base $\{v_1,...,v_n\}$ de V^λ tel que

$$*) \quad \forall \ x \in M, (x - \lambda(x))\, v_1 = 0.$$

$$**) \quad \forall \ x \in M, (x - \lambda(x))\, v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^i_{i-j}(x) v_{i-j} \quad \text{pour } i = 2,3... n$$

les A^i_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

Dans ce cas $V_\lambda \neq 0$.

En effet, le lemme V-4-1 nous dit que $V_\alpha \neq 0$ où α est un caractère de M. Si V est un M-module de dimension un ; alors $V = V^\lambda = V_\alpha$. Alors $\lambda = \alpha$ est un caractère de M. On suppose par récurrence que si V est un M-module de dimension $p < n$ tel que $V^\lambda \neq 0$ alors λ est un caractère de M. Soit donc V un M-module de dimension n.

Soit $0 \neq u \in V_\alpha$ et $0 \neq v \in V^\lambda$. Si v est colinéaire à u alors $\lambda = \alpha$ est un caractère de M sinon $V' = V/_{Ku}$ est un M-module de dimension n-1 et $v + Ku \in (V')^\lambda \neq 0$. Par suite (hypothèse) λ est un caractère de M. D'où a).

Nous allons démontrer par récurrence sur la dimension n de V^λ que si V^λ est un M-sous-module de V alors il existe une base $\{v_1,...,v_n\}$ de V^λ tel que

$$*) \quad \forall \ x \in M, (x - \lambda(x))\, v_1 = 0.$$

$$**) \quad \forall \ x \in M, (x - \lambda(x))\, v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^i_{i-j}(x) v_{i-j} \quad \text{pour } i = 2,3... n$$

les A^i_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

Si n = 1 alors V^λ étant un M-module (lemme V-4-1) il existe α un caractère de M et un vecteur non nul v_1 de V_α appartenant à V^λ. Alors $\lambda = \alpha$ et ainsi pour tout x de M $(x - \lambda(x))\, v_1 = 0$.

Par suite si $V^\lambda = Kv$ est un M-module ; $*)$ est vérifié.

Supposons que si V^λ est un M-sous-module de V un M-module de dimension $p < n$ alors il existe une base $\{v_1,...,v_p\}$ de V^λ tel que

$$*)\quad \forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_1 = 0.$$

$$**)\ \forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^i_{i-j}(x)v_{i-j} \text{ pour } i = 2,3... p$$

les A^i_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

Soit V^λ est un M-sous-module de V de dimension n. D'après le lemme V-4-1 il existe α un caractère de M et un vecteur non nul v_1 de V_α appartenant à V^λ. D'où $0 \neq v_1 \in V^\alpha \cap V^\lambda$. Alors $\alpha = \lambda$ et pour tout $x \in M$; $(x - \lambda(x))\ v_1 = 0$. Par suite $*)$ est vérifié.
Kv_1 est un M-sous-module de V. Considérons le M-module quotient $W = V^\lambda / Kv_1 = (V / Kv_1)^\lambda = W^\lambda$ qui est de dimension n-1. L'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe une base $\{w_1,...,w_{n-1}\}$ de W tel que :

$$i)\quad \forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ w_1 = 0.$$

$$ii)\ \forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ w_i = \sum_{j=1}^{i-1} B^i_{i-j}(x)w_{i-j} \text{ pour } i = 2,3... n-1$$

les B^i_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

Soient v_{i+1} un représentant de w_i (i-e $w_i = v_{i+1} + Kv_1$).

Montrons que $\{v_1,...,v_n\}$ est une base de V^λ. Soit $0 = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$;

alors $\sum_{j=2}^{n} a_j w_{j-1} = 0$ soit $a_j = 0$ pour $j = 2,...n$ car $\{w_1,...,w_{n-1}\}$ est une base de W. Il s'en suit que $a_1 = 0$. D'où $\{v_1,...,v_n\}$ est une base de V^λ qui est de dimension n.

i) est équivalent à $\forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_2 = A^2_1(x)v_1$ (la linéarité de $A^2_1(x)$ est due à celle de l'application $(x - \lambda(x))$)

ii) implique que $\forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_{i+1} = \sum_{j=1}^{i-1} B^i_{i-j}(x)v_{i-j+1} + A^{i+1}_1(x)v_1$

pour $i = 2,3...$ n-1 (Là encore la linéarité de l'application $(x - \lambda(x))$ et la linéarité des $B^i_{i-j}(x)$ induisent celle de $A^{i+1}_1(x)$).

Pour $3 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq i-1$, posons $A^i_{i-j} = B^{i-1}_{i-j-1}$.

Alors pour $i = 3,...,n$:

$$\forall \;\; x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_i = \sum_{j=1}^{i-1} B^{i-1}_{i-j-1}(x)v_{i-j} + A^{i}_{1}(x)v_1$$
$$= \sum_{j=1}^{i-1} A^{i}_{i-j}(x)v_{i-j}.$$

D'autre part on a $\forall \;\; x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_2 = A^{2}_{1}(x)v_1$ et $(x - \lambda(x))\ v_1 = 0$.

Il résulte que $\{v_1,...,v_n\}$ est une base de V^{λ} telle que :

$*)\quad \forall \;\; x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_1 = 0.$

$**)\ \forall \;\; x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^{i}_{i-1}(x)v_{i-j}$ pour $i = 2,3...n$

les A^{i}_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

La réciproque est évidente ●

Soit M une K-algèbre de Malcèv et V un K-module de Malcèv. $\overline{M} = M \otimes_K K'$ la K'-algèbre de Malcèv obtenue par extension du corps K et $\overline{V} = V \otimes_K K'$ le K'-module de Malcèv obtenu par extension de K Soit ρ la représentation associée à V . Il existe donc une représentation ρ' de $\overline{M}$ dans $\overline{V}$ qui est définie par :

$\rho'_{x\otimes k}(v\otimes k') = \rho_x(v) \otimes kk'$où $x \otimes k' \in \overline{M}$ et $v \otimes k' \in \overline{V}$, soit $\rho'_{x\otimes k} = \rho_x \otimes k1_{K'}$. ($1_{K'}$ est l'application identité de K' dans K').

λ' est la K'-extension linéaire de λ à $\overline{M}$ qui est définie par : $\lambda'(x \otimes k') = \lambda(x) \otimes k' = \lambda(x)k'$ où $x \otimes k' \in \overline{M}$.

<u>Proposition</u> V-4-5 :

$$V^{\lambda}(M) \otimes_K K' = (\overline{V})^{\lambda'}(\overline{M})$$
$$V_{\lambda}(M) \otimes_K K' = (\overline{V})_{\lambda'}(\overline{M}).$$

En effet; posons 1_V l'application identité de V ; soit $v' = v \otimes k'$ un générateur de $V^{\lambda}(M) \otimes_K K'$, avec $v \in V^{\lambda}(M)$ ($(\rho_x - \lambda(x)1_V)^m v = 0$ pour m entier) et $k' \in K'$ .On a pour $x \otimes k \in \overline{M}$:

$$(\rho'_{x\otimes k} - \lambda'(x\otimes k)1_V \otimes 1_{K'})^m v' = [\rho'_{x\otimes k} - \lambda(x)k(1_V \otimes 1_{K'})]^m v' =$$
$$= [\rho'_{x\otimes k} - \lambda(x)1_V \otimes k1_{K'}]^m v' = [\rho_x \otimes k1_{K'} - \lambda(x)1_V \otimes k1_{K'}]^m v' =$$
$$= [(\rho_x - \lambda(x)1_V) \otimes k1_{K'}]^m (v \otimes k') =$$

$= [(\rho_x - \lambda(x)1_V)^m \otimes k^m 1_{K'}](v \otimes k') =$
$= ((\rho_x - \lambda(x)1_V)^m v \otimes k^m k' = 0 \otimes k^m k' = 0.$, d'où
$V^\lambda(M) \otimes_K K' \subset (\overline{V})^{\lambda'}(\overline{M})$.

Soit $v' = v\otimes k'$ un élément de $(\overline{V})^{\lambda'}(\overline{M})$ ($k' \neq 0$), alors
$(\rho'_{x\otimes 1} - \lambda'(x\otimes 1)1_{V\otimes 1_{K'}})^m v' = 0$ d'où
$(\rho'_{x\otimes 1} - \lambda(x\otimes 1)1_{V\otimes 1_{K'}})^m (v\otimes k') =$
$(\rho_x\otimes 1_{K'} - \lambda(x)1_V\otimes 1_{K'})^m (v\otimes k') = (\rho_x - \lambda(x)1_V)^m v \otimes k' = 0.$
Par suite $(\rho_x - \lambda(x)1_V)^m v=0$ et v appartient à $V^\lambda(M)$
Ainsi ; $v \otimes k$ appartient à $V^\lambda(M) \otimes_K K'$. On a donc
$(\overline{V})^{\lambda'}(\overline{M}) = V^\lambda(M) \otimes_K K'$.
On obtient $V_\lambda(M) \otimes_K K' = (\overline{V})_{\lambda'}(\overline{M})$. en prenant m = 1 •

<u>Théorème</u> V-4-6:

Soit K un corps de caractéristique nulle. Soit V un M-module de Malcèv. Si $V^\lambda \neq 0$, alors :

i) Pour toute sous-algèbre M' semi-simple de M, on a $M'.V^\lambda = 0$.

ii) λ est un caractère.

iii) V^λ est un M-sous-module si et seulement si

il existe une base $\{v_1,\dots,v_n\}$ de V^λ telle que :

*) $\forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_1 = 0.$

**) $\forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\ v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^i_{i-j}(x) v_{i-j}$ pour i = 2,3... n

les A^i_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

Dans ce cas $V_\lambda \neq 0$.

En effet,

1°) Nous supposons que K est algébriquement clos.

Soit M' est une sous-algèbre semi-simple. V est un M'-module et nous avons $V^{\lambda} \subseteq V^{\lambda'}(M')$ où λ'est la restriction de λ à M'. Du théorème V-3-3 il vient que $V^{\lambda'}(M') \subseteq N_{M'}(V)$ et par conséquent $M'.V^{\lambda'}(M') = 0$ (i) du théorème V-2-3) et donc $M'.V^{\lambda} \subseteq M'.V^{\lambda'}(M') = 0$.

D'où i).

Soit R le radical résoluble de M et $M = R \oplus S$ une décomposition de Lévi de M. S est une sous-algèbre semi-simple d'où pour tout $s \in S$, $\rho(s)(v) = s.v = 0$. Soit $H(s) = Ks \oplus R$ où s est un élément de S. H(s) est une algèbre de Malcèv résoluble et $V^{\lambda} \subseteq V^{\lambda}(H(s)) \neq 0$, il vient que λ est un caractère de H(s) (théorème V-4-4). D'où λ est linéaire sur H(s) et $\lambda(H(s).H(s)) = 0$. Alors pour tout $s \in S$ et $r_1, r_2, r \in H(s)$ et $a,b \in K$; $\lambda(as+br) = a\lambda(s) + b\lambda(r) = b\lambda(r)$ et $\lambda(ar_1+br_2) = a\lambda(r_1) + b\lambda(r_2)$. Ainsi λ est linéaire sur $M = R \oplus S$ car $\lambda(S) = 0$.

D'autre part $\lambda(H(s).H(s)) = 0$ implique que $\lambda(sR) = \lambda(R^2) = 0$ pour tout $s \in S$. Comme $\lambda(M^2) = \lambda(R^2+RS+S) = \lambda(R^2) + \lambda(RS) + \lambda(S) = 0$; λ est un caractère de M. Nous avons donc ii).

Montrons que V^{λ} est un M-sous-module si et seulement s'il existe une base $\{v_1,...,v_n\}$ de V^{λ} telle que :

$$*)\quad \forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\, v_1 = 0$$

$$**)\quad \forall\ x \in M,\ (x - \lambda(x))\, v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A^{i}_{i-j}(x) v_{i-j} \quad \text{pour } i = 2,3,\ldots,n$$

et les A^{i}_{i-j} étant des applications K-linéaires de M dans K.

V^{λ} est un M-module alors $(V^{\lambda})^{\lambda}(R) = V^{\lambda}$ est un R-module et d'après le théorème V-4-3 ; il existe une base $\{v_1,...,v_n\}$ de V^{λ} tel que

*) $\forall \ x \in R, (x - \lambda(x))\ v_1 = 0$

**) $\forall \ x \in R, (x - \lambda(x))\ v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i-j}^{i}(x)v_{i-j}$ pour i = 2,3... n

et les A_{i-j}^{i} étant des applications K-linéaires de R dans K.

Nous savons que pour tout couple (s,v) de $S \times V^\lambda$; $s.v = \lambda(s) = 0$. On pose $A_{i-j}^{i}(s) = 0$ pour i = 2,3... n et $1 \leq j \leq i-1$. Il vient que

1) $\forall \ x \in R \oplus S = M, (x - \lambda(x))\ v_1 = 0$.

2) $\forall \ x \in R \oplus S = M, (x - \lambda(x))\ v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i-j}^{i}(x)v_{i-j}$

pour i = 2,3... n et où les A_{i-j}^{i} sont des applications

K-linéaires de $M = R \oplus S$ dans K.

Alors $v_1 \in V_\lambda$ entraîne que $V_\lambda \neq 0$.

2°) Si K n'est pas algébriquement clos, désignons par K' sa clôture algébrique. $\overline{M}$, $\overline{V}$, ρ'et λ' sont comme dans la propositition V-4-5 $\overline{V}^{\lambda'} = \overline{V}^{\lambda'}(\overline{M}) \neq 0$ car $V^\lambda \neq 0$. D'après ce qui précède :

Si M' est une sous algèbre semi-simple de M alors $M' \otimes_K K'$ est une sous algèbre semi-simple de $\overline{M}$ et par suite :
$0 = (M' \otimes_K K').\overline{V}^{\lambda'} = (M' \otimes_K K').(V^\lambda \otimes_K K') = M'.V^\lambda \otimes_K K'$.
D'où $M'.V^\lambda = 0$. D'où i).

De même puisque λ' est un caractère nous avons $\lambda'(x \otimes k) = 0$ pour tout $x \otimes k \in \overline{M}^2 = M^2 \otimes_K K'$. En particulier pour tout $x \in M^2$; $\lambda(x) = \lambda'(x \otimes 1) = 0$. De plus pour $x,y \in M$ et $\beta \in K$:

$$\begin{aligned}\lambda(x+\beta y) = \lambda'((x+\beta y) \otimes 1) &= \lambda'(x \otimes 1+\beta(y \otimes 1))\\ &= \lambda'(x \otimes 1)+\beta\lambda'(y \otimes 1)\\ &= \lambda(x)+\beta\lambda(y).\end{aligned}$$

Par suite λ est un caractère de M. On a donc ii).

Enfin si V^λ est un M-module non nul de dimension n, alors $\overline{V}^{\lambda'} \neq 0$ et $\overline{V}^{\lambda'}$ est un $\overline{M}$-module ; d'où $(\overline{V})_{\lambda'}(\overline{M}) \neq 0$ et ainsi $V_\lambda \neq 0$. Il existe donc $0 \neq v_1 \in V_\lambda$.

Notons aussi que $W_1 = V^\lambda / Kv_1 = (W_1)^\lambda$ est aussi un M-module.

Si $W_1 \neq 0$, alors $(\overline{W}_1)^{\lambda'} \neq 0$ et $(\overline{W}_1)^{\lambda'}$ est un $\overline{M}$-module.

D'où $(\overline{W}_1)_{\lambda'} \neq 0$ et $0 \neq (W_1)_\lambda$. Alors il existe $0 \neq v_2 + Kv_1 \in (W_1)_\lambda$; soit $(x - \lambda(x))v_2 = A_1^2(x)v_1$ où $A_1^2(x) \in K$.

De proche en proche on définit les M-modules $W_i = V^\lambda / (Kv_1 + \ldots + Kv_i)$ (pour $i = 1 \ldots n$). Il est immédiat par construction que $\{v_1, \ldots, v_i\}$ est une famille libre de V^λ. Si $W_i = (W_i)^\lambda$ est non nul ; alors il existe $0 \neq v_{i+1} + (Kv_1 + \ldots + Kv_i) \in (W_i)_\lambda$;

soit $(x - \lambda(x))v_{i+1} = \sum_{j=1}^{i} A_{i-j+1}^{i+1}(x)v_{i-j+1}$ où $A_{i-j+1}^{i+1}(x) \in K$ pour $j = 1 \ldots i$.

Comme V^λ est de dimension n, il vient que V^λ possède une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V^λ telle que :

$$*) \quad \forall \; x \in M, \; (x - \lambda(x))\, v_1 = 0$$

$$**) \quad \forall \; x \in M, \; (x - \lambda(x))\, v_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_{i-j}^{i}(x)v_{i-j} \text{ pour } i = 2,3 \ldots n$$

et les A_{i-j}^{i} étant des applications K-linéaires de M dans K.

La réciproque de iii) est évidente ●

CHAPITRE

VI

CHAPITRE VI

SOUS-ALGEBRE DE CARTAN GRADUEE

INTRODUCTION

Dans un article de T. MOONS (cf. 15), il a été introduit la notion de sous-algèbre de Cartan graduée (sacg) pour une superalgèbre de Lie, nous poursuivons ici en étendant celle-ci aux superalgèbres de Malcèv. Nous démontrerons quelques théorèmes de structure pour les superalgèbres de Malcèv mais aussi les propriétés d'une sacg.

Le problème de conjugaison des sacg d'une superalgèbre de Malcèv résoluble est abordé.

VI-1 PRELIMINAIRES

Toute algèbre, espace vectoriel sera de dimension finie (sauf indication contraire) sur K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et 3.

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre, M est une superalgèbre de Malcèv.

$ad_M : M \longrightarrow End_K(M)$ est une super-représentation de M dans M où $ad_M(x)$ est défini par $ad_M(x)(y) = xy$. Si aucune ambiguïté n'est possible on notera $ad_M(x)$ par ad_x et ad_M par ad. ad (ou ad_M) est appelée (super-) représentation adjointe de M.

Soit V un M-module de Malcèv et ρ la représentation associée à V. Un sous-espace vectoriel W de V est stable ou invariant par ρ si pour tout élément $x \in M$; $\rho(x)(W) \subseteq W$ (On dit alors que W est introverti).

Dans ce cas, l'application $\rho' : M \longrightarrow End_K(W)$ est une super-représentation de M dans W, dite sous-représentation de ρ.

Soit $\sigma(x)$ l'endomorphisme du K-espace vectoriel quotient V/W déduit de $\rho(x)$ par passage au quotient, l'application qui à x associe $\sigma(x)$ est une super-représentation de M dans V/W dite représentation quotient de ρ.

Le M-module W (resp. V/W) est dit M-sous-module de V(resp. M-module-quotient de V).

Définition VI-1-1

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv. Soit H une sous-algèbre nilpotente de l'algèbre de Malcèv M_0. On pose :

$$M^1(H) = M^1 = \sum_{h \in H} \Big[\bigcap_{i \geq 1} (adh)^i(M)\Big] = \bigoplus_{h \in H} M^1(h)$$

$$M^0(H) = M^0 = \bigcap_{h \in H} \Big[\bigcup_{i \geq 1} \ker((adh)^i)\Big] = \bigcap_{h \in H} M^0(h)$$

où $ad : M \longrightarrow End_K(M)$ est super-représentation adjointe de M. M^1 (resp. M^0) est appelée la 1-composante (resp. la 0-composante) de Fitting de M relativement à H. $M = M^0 \oplus M^1$ est appelée la décomposition de Fitting de M relativement à H (ou à adH).

Soit m un entier naturel et $p_1 < p_2 < ... < p_{m+1}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Soit $y_{p_1}, y_{p_2}, ..., y_{p_{m+1}}$ des éléments homogènes de M. On pose degré de $y_{p_i} = \overline{y}_{p_i}$.

$S = S(p_1, p_2, ..., p_{m+1})$ l'ensemble des permutations du (m+1)-uplet $(p_1, p_2, ..., p_{m+1})$. Soit $\sigma \in S$; notons

$$d(\sigma) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} Val(r,s,\sigma)\, \overline{y}_{\sigma(p_r)}\, \overline{y}_{\sigma(p_s)}$$

où $Val(r,s,\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma(p_r) > \sigma(p_s) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Soit $A = (p_1, p_2, \ldots, p_{m+1})$ et $S(A)$ l'ensemble des permutations de A et soit

$$A_i = (p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{m+1}) = (p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, \hat{p}_i, p_{i+1}, \ldots, p_{m+1})$$

et $F_i = S(A_i)$ l'ensemble des permutations de A_i.

Posons $E_i = \{\sigma \in S(A) \,/\, \sigma(p_1) = p_i\}$.

<u>Proposition</u> VI-1-2 Il existe une bijection entre E_i et F_i.

En effet, soit $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ tel que $f_i(\sigma)$ est défini par

$$[f_i(\sigma)](p_j) = \begin{cases} \sigma(p_{j+1}) \text{ si } 1 \leq j \leq i-1 \\ \sigma(p_j) \text{ si } i+1 \leq j \leq m+1 \end{cases}$$

et soit $g_i : F_i \longrightarrow E_i$ tel que $g_i(\sigma)$ est défini par

$$[g_i(\sigma)](p_j) = \begin{cases} p_i \text{ si } j = 1 \\ \sigma(p_{j-1}) \text{ si } 2 \leq j \leq i \\ \sigma(p_j) \text{ si } i+1 \leq j \leq m+1 \end{cases}$$

Pour $j = 1,\ldots,m+1$;

$[g_i(f_i(\sigma))](p_j) = \sigma(p_j)$ d'où $g_i o f_i = id(E_i)$ ($id(E_i)$ = identité de E_i dans E_i).

Pour $j = 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m+1$;

$[f_i(g_i(\sigma))](p_j) = \sigma(p_j)$ d'où $f_i o g_i = id(F_i)$ ($id(F_i)$ = identité de F_i dans F_i).

Il vient que f_i est une bijection ●

Proposition VI-1-3 Soit $\sigma \in E_i$ alors

1°) $d(\sigma) = d(f_1(\sigma))$

2°) $d(\sigma) = \bar{y}_{p_i}(\bar{y}_{p_{i-1}} + \ . \ . \ . \ + \bar{y}_{p_1}) + d(f_i(\sigma))$ si $i = 2,...,m+1$.

En effet,
si $i = 1$ alors $E_1 = \{\sigma \in S(A) \,/\, \sigma(p_1) = p_1\}$ et $F_1 = S(p_2,p_3,...,p_{m+1})$.

$$d(\sigma) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} Val(r,s,\sigma)\bar{y}_{\sigma(p_r)}\bar{y}_{\sigma(p_s)}$$
$$= \sum_{s=2}^{m+1} Val(1,s,\sigma)\bar{y}_{p_1}\bar{y}_{\sigma(p_s)} + \sum_{r=2}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} Val(r,s,\sigma)\bar{y}_{s(p_r)}\bar{y}_{s(p_s)}$$

Or $Val(1,s,\sigma) = 0$ car $\sigma(p_1) = p_1 < \sigma(p_s)$ pour $s \geq 2$ et
$[f_1(\sigma)](p_j) = \sigma(p_j)$ si $j \geq 2$. D'où
$$d(\sigma) = \sum_{r=2}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} Val(r,s,\sigma)\bar{y}_{s(p_r)}\bar{y}_{s(p_s)}$$
$$= \sum_{r=2}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} Val(r,s,f_1(\sigma))\bar{y}_{[f_1(\sigma)](p_r)}\bar{y}_{[f_1(\sigma)](p_s)}$$
$$= d(f_1(\sigma)).$$

Pour une simplification de l'écriture posons pour $r,s = 1,...,m+1$
$H(r,s,\sigma) = Val(r,s,\sigma)\bar{y}_{\sigma(p_r)}\bar{y}_{\sigma(p_s)}$.

Si $i \neq 1$ alors :

On pose $\delta = \sum_{s=2}^{m+1} H(1,s,\sigma) = \bar{y}_{p_i}(\bar{y}_{p_{i-1}} + \ . \ . \ . \ + \bar{y}_{p_1})$.
$$d(\sigma) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} Val(r,s,\sigma)\bar{y}_{\sigma(p_r)}\bar{y}_{\sigma(p_s)} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\sigma)$$
$$= \sum_{s=2}^{m+1} H(1,s,\sigma) + \sum_{r=2}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\sigma)$$

$$= \delta + \sum_{r=2}^{i-1} \sum_{s=r+1}^{i} H(r,s,\sigma) + \sum_{r=2}^{i} \sum_{s=i+1}^{m+1} H(r,s,\sigma) + \sum_{r=i+1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\sigma)$$

$$= \delta + \sum_{r'=1}^{i-2} \sum_{s'=r'+1}^{i-1} H(r'+1,s'+1,\sigma) + \sum_{r'=1}^{i-1} \sum_{s'=i+1}^{m+1} H(r'+1,s',\sigma) + \sum_{r=i+1}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\sigma)$$

Or pour $r,s \geq i+1$; $\sigma(p_r) = [f_i(\sigma)](p_r)$ et $\sigma(p_s) = [f_i(\sigma)](p_s)$. D'où : $H(r,s,\sigma) = H(r,s,f_i(\sigma))$.

Pour $1 \leq r', s' \leq i-1$; $\sigma(p_{r'+1}) = [f_i(\sigma)](p_{r'})$ et $\sigma(p_{s'+1}) = [f_i(\sigma)](p_{s'})$. Il vient que : $H(r'+1,s'+1,\sigma) = H(r',s',f_i(\sigma))$.

De même $H(r'+1,s',\sigma) = H(r',s',f_i(\sigma))$ pour $1 \leq r' \leq i-1$ et $i+1 \leq s' \leq m+1$.

. Par conséquence ; (posons $\sigma' = f_i(\sigma)$)

$d(\sigma) =$

$$= \delta + \sum_{r'=1}^{i-2} \sum_{s'=r'+1}^{i-1} H(r',s',\sigma') + \sum_{r'=1}^{i-1} \sum_{s'=i+1}^{m+1} H(r',s',\sigma') + \sum_{r'=i+1}^{m} \sum_{s'=r'+1}^{m+1} H(r',s',\sigma')$$

$$= \delta + \sum_{r'=1}^{i-1} \sum_{\substack{s'=r'+1 \\ s' \neq i}}^{m+1} H(r',s',\sigma') + \sum_{r'=i+1}^{m} \sum_{s'=r'+1}^{m+1} H(r',s',\sigma')$$

$$= \delta + \sum_{\substack{r'=1 \\ r' \neq i}}^{i-1} \sum_{\substack{s'=r'+1 \\ s' \neq i}}^{m+1} H(r',s',\sigma')$$

$$= \bar{y}_{p_i}(\bar{y}_{p_{i-1}} + \ . \ . \ . \ + \bar{y}_{p_1}) + \sum_{\substack{r'=1 \\ r' \neq i}}^{m} \sum_{\substack{s'=r'+1 \\ s' \neq i}}^{m+1} H(r',s',\sigma')$$

$$d(\sigma) = \bar{y}_{p_i}(\bar{y}_{p_{i-1}} + \ . \ . \ . \ + \bar{y}_{p_1}) + \sum_{\substack{r'=1 \\ r' \neq i}}^{m} \sum_{\substack{s'=r'+1 \\ s' \neq i}}^{m+1} H(r',s',f_i(\sigma))$$

$d(\sigma) = \bar{y}_{p_i}(\bar{y}_{p_{i-1}} + \ . \ . \ . \ + \bar{y}_{p_1}) + d(f_i(\sigma))$. D'où la proposition •

Soit $S^+ = \{\sigma \in S / \sigma(p_3)<\sigma(p_4)<...<\sigma(p_{m+1})\}$. A toute permutation σ de S associons l'unique σ^+ de S^+ telle que $\sigma^+(p_1) = \sigma(p_1)$ et $\sigma^+(p_2) = \sigma(p_2)$.

Soit $\tau \in S(\sigma^+(p_3),\sigma^+(p_4),...,\sigma^+(p_{m+1}))$ définie par $\tau(\sigma^+(p_i)) = \sigma(p_i)$ pour $3\leq i\leq m+1$. Pour $\sigma \in S$ nous avons :

$$d(\sigma^+) = \sum_{s=2}^{m+1} H(1,s,\sigma) + \sum_{s=3}^{m+1} H(2,s,\sigma) \text{ et } d(\tau) = \sum_{r=3}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\tau)$$

Si $\tau(\sigma^+(p_r))>\tau(\sigma^+(p_s))$ alors ;

$H(r,s,\tau) = \bar{y}_{\tau(\sigma^+(p_r))}\bar{y}_{\tau(\sigma^+(p_s))} = \bar{y}_{\sigma(p_r)}\bar{y}_{\sigma(p_s)} = H(r,s,\sigma)$ et

$H(r,s,\tau) = H(r,s,\sigma) = 0$ sinon.

Par suite :

$$\begin{aligned} d(\sigma) &= \sum_{s=2}^{m+1} H(1,s,\sigma) + \sum_{s=3}^{m+1} H(2,s,\sigma) + \sum_{r=3}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\sigma) \\ &= \sum_{s=2}^{m+1} H(1,s,\sigma) + \sum_{s=3}^{m+1} H(2,s,\sigma) + \sum_{r=3}^{m} \sum_{s=r+1}^{m+1} H(r,s,\tau) = \\ &= d(\sigma^+) + d(\tau). \end{aligned}$$

Remarquons enfin que $\{E_i, 1\leq i\leq m+1\}$ est une partition de $S = S(A)$. On désigne l'application ρ_x par x et $[\rho_x,\rho_y] = \rho_x\rho_y - (-1)^{ij}\rho_y\rho_x = [x,y]$ où x,y et ρ_x seront définis par la suite.

Lemme VI-1-4

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv et soit une représentation de Malcèv $\rho : M \longrightarrow End_K(V)$ de M dans un K-espace vectoriel V de dimension fini. Alors pour toute suite $x, y_1, \ldots, y_{m+1}$ d'éléments homogènes de M (m entier naturel non nul), nous avons :

$$f(m) \sum_{\sigma \in S} (-1)^{d(\sigma)}[((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m)}, y_{\sigma(m+1)}] =$$
$$= (-1)^m \sum_{\sigma \in S} (-1)^{d(\sigma)}[[[\ldots[[x, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(2)}], \ldots], y_{\sigma(m)}], y_{\sigma(m+1)}]$$
$$+ g(m) \sum_{\sigma \in S} (-1)^{d(\sigma)}((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m)})y_{\sigma(m+1)}$$

où $f((1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ si $n \geq 2$ ($n \in N$)

$g((1) = g(2) = 2$ et $g(n+1) = g(n) + 2g(n-1)$ si $n \geq 2$ ($n \in N$).

En effet, établissons ce lemme par récurrence sur m.

Si $m = 1$; ρ étant une super-représentation de Malcèv, nous avons pour tout $x, y, z \in M_0 \cup M_1$

$$\rho_{(xy)z} = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}+\bar{z})+\bar{y}\bar{z}} \rho_z\rho_y\rho_x - (-1)^{\bar{x}\bar{y}} \rho_y\rho_x\rho_z - (-1)^{\bar{y}\bar{z}}(\rho_x\rho_{zy} - \rho_{xz}\rho_y)$$

D'où

$$\rho_{(xy_1)y_2} = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)+\bar{y}_1\bar{y}_2} \rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x - (-1)^{\bar{x}\bar{y}_1} \rho_{y_1}\rho_x\rho_{y_2}$$
$$-(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}(\rho_x\rho_{y_2y_1} - \rho_{xy_2}\rho_{y_1}).$$

$$(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1} = (-1)^{\bar{x}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)}\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x - (-1)^{\bar{y}_2(\bar{x}+\bar{y}_1)} \rho_{y_2}\rho_x\rho_{y_1}$$
$$-(\rho_x\rho_{y_1y_2} - \rho_{xy_1}\rho_{y_2}).$$

Par suite :

$$(i)\ (-1)^{\overline{x}\overline{y}_1}\rho_{y_1}\rho_x\rho_{y_2} + (-1)^{\overline{y}_2(\overline{x}+\overline{y}_1)}\rho_{y_2}\rho_x\rho_{y_1} =$$
$$= (-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)+\overline{y}_1\overline{y}_2}(\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x)$$
$$-(\rho_{(xy_1)y_2} + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1}) + (\rho_{xy_1}\rho_{y_2} + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1}).$$

De même

$$\rho_{(y_1y_2)x} = (-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)+\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_x\rho_{y_2}\rho_{y_1} - (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x$$
$$-(-1)^{\overline{x}\overline{y}_2}(\rho_{y_1}\rho_{xy_2} - \rho_{y_1x}\rho_{y_2}) \text{ et}$$
$$(-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{(y_2y_1)x} = (-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)}\rho_x\rho_{y_1}\rho_{y_2} - \rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x$$
$$-(-1)^{\overline{y}_1(\overline{x}+\overline{y}_2)}(\rho_{y_2}\rho_{xy_1} - \rho_{y_2x}\rho_{y_1}).$$

Par suite :

$$\rho_x\rho_{y_1}\rho_{y_2} + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_x\rho_{y_2}\rho_y =$$
$$= (-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)}(\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x)$$
$$+(-1)^{\overline{y}_2(\overline{x}+\overline{y}_1)}(\rho_{y_2}\rho_{xy_1} - \rho_{y_2x}\rho_{y_1}) + (-1)^{\overline{x}\overline{y}_1}(\rho_{y_1}\rho_{xy_2} - \rho_{y_1x}\rho_{y_2})$$

et

$$(ii):\ \rho_x\rho_{y_1}\rho_{y_2} + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_x\rho_{y_2}\rho_{y_1} + (-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)}(\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x)$$
$$= 2(-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)}(\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x)$$
$$+(-1)^{\overline{y}_2(\overline{x}+\overline{y}_1)}(\rho_{y_2}\rho_{xy_1} - \rho_{y_2x}\rho_{y_1}) + (-1)^{\overline{x}\overline{y}_1}(\rho_{y_1}\rho_{xy_2} - \rho_{y_1x}\rho_{y_2}).$$

Nous avons alors (grâce à (i) et (ii))

$$[[\rho_x,\rho_{y_1}],\rho_{y_2}] + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}[[\rho_x,\rho_{y_2}],\rho_{y_1}] =$$
$$[[\rho_x,\rho_{y_1}],\rho_{y_2}] + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}[[\rho_x,\rho_{y_2}],\rho_{y_1}] =$$
$$= \rho_x\rho_{y_1}\rho_{y_2} + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_x\rho_{y_2}\rho_{y_1} + (-1)^{\overline{x}(\overline{y}_1+\overline{y}_2)}(\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x + (-1)^{\overline{y}_1\overline{y}_2}\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x)$$
$$-2((-1)^{\overline{x}\overline{y}_1}\rho_{y_1}\rho_x\rho_{y_2} + (-1)^{\overline{y}_2(\overline{x}+\overline{y}_1)}\rho_{y_2}\rho_x\rho_{y_1}) =$$

$$= 2(-1)^{\bar{x}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)}(\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x)$$
$$+(-1)^{\bar{y}_2(\bar{x}+\bar{y}_1)}(\rho_{y_2}\rho_{xy_1} - \rho_{y_2x}\rho_{y_1}) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}_1}(\rho_{y_1}\rho_{xy_2} - \rho_{y_1x}\rho_{y_2})$$
$$- 2(-1)^{\bar{x}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)+\bar{y}_1\bar{y}_2}(\rho_{y_2}\rho_{y_1}\rho_x + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{y_1}\rho_{y_2}\rho_x)$$
$$+ 2(\rho_{(xy_1)y_2} + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1}) - 2(\rho_{xy_1}\rho_{y_2} + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1})$$

$$=(-1)^{\bar{y}_2(\bar{x}+\bar{y}_1)}(\rho_{y_2}\rho_{xy_1} + (-1)^{\bar{x}\bar{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1}) + (-1)^{\bar{x}\bar{y}_1}\rho_{y_1}\rho_{xy_2} + \rho_{xy_1}\rho_{y_2} +$$
$$+ 2\rho_{(xy_1)y_2} + 2(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1} - 2\rho_{xy_1}\rho_{y_2} - 2(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1}$$

$$= (-1)^{\bar{y}_2(\bar{x}+\bar{y}_1)}\rho_{y_2}\rho_{xy_1} + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1} + (-1)^{\bar{x}\bar{y}_1}\rho_{y_1}\rho_{xy_2} + \rho_{xy_1}\rho_{y_2} +$$
$$+ 2\rho_{(xy_1)y_2} + 2(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1} - 2\rho_{xy_1}\rho_{y_2} - 2(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1}$$

$$= (-1)^{\bar{y}_2(\bar{x}+\bar{y}_1)}\rho_{y_2}\rho_{xy_1} - (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{xy_2}\rho_{y_1} + (-1)^{\bar{x}\bar{y}_1}\rho_{y_1}\rho_{xy_2} - \rho_{xy_1}\rho_{y_2} +$$
$$+ 2\rho_{(xy_1)y_2} + 2(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1}$$

$$= -(\rho_{xy_1}\rho_{y_2} - (-1)^{\bar{y}_2(\bar{x}+\bar{y}_1)}\rho_{y_2}\rho_{xy_1}) + 2\rho_{(xy_1)y_2} +$$
$$-(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}(\rho_{xy_2}\rho_{y_1} - (-1)^{\bar{y}_1(\bar{x}+\bar{y}_2)}\rho_{y_1}\rho_{xy_2}) + 2(-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1}$$

$$= (-[\rho_{xy_1},\rho_{y_2}] + 2\rho_{(xy_1)y_2}) + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}(-[\rho_{xy_2},\rho_{y_1}] + 2\rho_{(xy_2)y_1})$$
$$= -([\rho_{xy_1},\rho_{y_2}] + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}[\rho_{xy_2},\rho_{y_1}]) + 2(\rho_{(xy_1)y_2} + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}\rho_{(xy_2)y_1}).$$

Ainsi le lemme est vérifié pour $m = 1$ car $A = (1,2)$ et $S(A) = \{id,\sigma\}$ où

$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $d(id) = 0$ et $d(\sigma) = \bar{y}_1\bar{y}_2$. Il vient que

$$[xy_1,y_2] + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}[xy_2,y_1] =$$
$$= -\{[[x,y_1],y_2] + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}[[x,y_2],y_1]\} + 2\{(xy_1)y_2 + (-1)^{\bar{y}_1\bar{y}_2}(xy_2)y_1\}.$$

Supposons le lemme vrai pour tout entier $p \leq m$ et montrons le pour $m+1$.

Nous avons pour $A' = (1,2,\ldots,m+2)$.

Soit E'_i et F'_i sont définis comme plus haut pour $i = 1,\ldots,m+2$ (où $p_i = i$).

$$B = f(m) \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)}[((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)}, y_{\sigma(m+2)}] =$$

$$= f(m) \sum_{\sigma \in E'_1} (-1)^{d(\sigma)}[((\ldots((xy_1)y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)}, y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ f(m) \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\sigma \in E'_i} (-1)^{d(\sigma)}[((\ldots((xy_i)y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)}, y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ f(m) \sum_{\sigma \in E'_{m+2}} (-1)^{d(\sigma)}[((\ldots((xy_{m+2})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)}, y_{\sigma(m+2)}].$$

On pose $\sigma' = f_i(\sigma)$ où $f_i : E'_i \longrightarrow F'_i$; $\alpha(i) = (-1)^{\bar{y}_i(\bar{y}_{i-1}+\ldots+\bar{y}_1)}$ et $\sigma = g_i(\sigma')$ où $g_i : F'_i \longrightarrow E'_i$ alors

$$B = f(m) \sum_{\sigma' \in F'_1} (-1)^{d(\sigma')}[((\ldots((xy_1)y_{\sigma'(2)})\ldots)y_{\sigma'(m+1)}, y_{\sigma'(m+2)}] +$$

$$+ f(m) \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\sigma' \in F'_i} (-1)^{d(\sigma')}\alpha(i)[((\ldots((xy_i)y_{\sigma'(2)})\ldots)\hat{y}_{\sigma'(i)})\ldots)y_{\sigma'(m+1)}, y_{\sigma'(m+2)}]$$

$$+ \alpha(m+2)f(m) \sum_{\sigma' \in F'_{m+2}} (-1)^{d(\sigma')}[((\ldots((xy_{m+2})y_{\sigma'(2)})\ldots)y_{\sigma'(m)}, y_{\sigma'(m+1)}]$$

(le symbole ^ signifie que l'élément correspondant est omis).

Par hypothèse de récurrence sur $F_i^{'}$ pour i = 1,2,...,m+2

$$B == \sum_{\sigma' \in F_1^{'}} (-1)^{d(\sigma')+m}[[[...[[xy_1,y_{\sigma'(2)}],y_{\sigma'(3)}],...],y_{\sigma'(m+1)}],y_{\sigma'(m+2)}] +$$

$$+ g(m) \sum_{\sigma' \in F_1^{'}} (-1)^{d(\sigma')}((...((xy_1)y_{\sigma'(2)})...)y_{\sigma'(m+1)})y_{\sigma'(m+2)} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\sigma' \in F_i^{'}} (-1)^{d(\sigma')+m}\alpha(i)[[[...[[[xy_i,y_{\sigma'(2)}],...],\hat{y}_{\sigma'(i)}],...],y_{\sigma'(m)}],y_{\sigma'(m+1)}] +$$

$$+ g(m) \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\sigma' \in F_i^{'}} (-1)^{d(\sigma')}\alpha(i)((...(((xy_i)y_{\sigma'(2)})...)\hat{y}_{\sigma'(i)})...)y_{\sigma'(m)})y_{\sigma'(m+1)} +$$

$$+$$

$$\alpha(m+2) \sum_{\sigma' \in F_{m+2}^{'}} (-1)^{d(\sigma')+m}[[[...[[xy_{m+2},y_{\sigma'(2)}],y_{\sigma'(3)}],...],y_{\sigma'(m)}],y_{\sigma'(m+1)}]+$$

$$+ \alpha(m+2)g(m) \sum_{\sigma' \in F_{m+2}^{'}} (-1)^{d(\sigma')} ((...((xy_{m+2})y_{\sigma'(2)})...)y_{\sigma'(m)})y_{\sigma'(m+1)}.$$

De la proposition VI-1-3 il vient que

$$B = \sum_{\sigma \in E_1^{'}} (-1)^{d(\sigma)+m}[[[...[xy_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)}],...],y_{\sigma(m+1)}],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ g(m) \sum_{\sigma \in E_1^{'}} (-1)^{d(\sigma)}((...((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})...)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\sigma \in E_i^{'}} (-1)^{d(\sigma)+m}[[[...[xy_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)}],...],y_{\sigma(m+1)}],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ g(m) \sum_{i=2}^{m+1} \sum_{\sigma \in E_i^{'}} (-1)^{d(\sigma)}((...((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})...)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in E_{m+2}^{'}} (-1)^{d(\sigma)+m}[[[...[xy_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)}],...],y_{\sigma(m+1)}],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ g(m) \sum_{\sigma \in E_{m+2}^{'}} (-1)^{d(\sigma)}((...((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})...)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)}.$$

D'où

$$B = \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)+m} [[[\ldots[xy_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}], \ldots], y_{\sigma(m+1)}], y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ g(m) \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)} ((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)} \cdot$$

D'autre part, on pose $\sum = \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)+m}$, alors on a

$$C = 2\sum[[[\ldots[[xy_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+1)}], y_{\sigma(m+2)}] =$$

$$= \sum[[[\ldots[[xy_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+1)}], y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+\sum(-1)^{\bar{y}_{\sigma(1)} \bar{y}_{\sigma(2)}}[[[\ldots[[xy_{\sigma(2)}, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+1)}], y_{\sigma(m+2)}] =$$

$$= \sum[[\ldots[\{[xy_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}]+(-1)^{\bar{y}_{\sigma(1)} \bar{y}_{\sigma(2)}}[xy_{\sigma(2)}, y_{\sigma(1)}]\}, y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}] =$$

$$-\sum[[\ldots[\{[[x, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(2)}]+(-1)^{\bar{y}_{\sigma(1)} \bar{y}_{\sigma(2)}}[[x, y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(1)}]\}, y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}]$$

$$+ 2\sum[[\ldots[\{(xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)}+(-1)^{\bar{y}_{\sigma(1)} \bar{y}_{\sigma(2)}}(xy_{\sigma(2)})y_{\sigma(1)}\}, y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}]$$

$$= -2\sum[[\ldots[[[x, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}]$$

$$+ 4\sum[[\ldots[(xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}]$$

$$= -2\sum[[\ldots[[[x, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ 4\sum_1 \sum_{\tau \in S(I)} (-1)^{d(\tau)}[[\ldots[((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)}), y_{\tau(\sigma^+(3))}], \ldots], y_{\tau(\sigma^+(m+2))}]$$

où σ se décompose en σ^+ et en $\tau \in S(I) = S(\sigma^+(3), \ldots, \sigma^+(m+2))$ (cf. ci-dessus) et $\sum_1 = \sum_{\sigma^+ \in S^+} (-1)^{d(\sigma^+)+m}$. Ainsi

$$C = -2\sum[[\ldots[[[x, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ 4\sum_1 (-1)^{m-1} f(m-1) \sum_{\tau \in S(I)} (-1)^{d(\tau)}[(..((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})..)y_{\tau(\sigma^+(m+1))}, y_{\tau(\sigma^+(m+2))}]$$

$$C = -2\sum[[\ldots[[[x,y_{\sigma(1)}],y_{\sigma(2)}],y_{\sigma(3)}],\ldots],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ 4(-1)^{m-1}f(m-1)\sum[(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+1)},y_{\sigma(m+2)}]$$

$$- 4(-1)^{m-1}g(m-1)\sum(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+2)}$$

$$C = -2 \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)+m}[[\ldots[[[x,y_{\sigma(1)}],y_{\sigma(2)}],y_{\sigma(3)}],\ldots],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$- 4f(m-1) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}[(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+1)},y_{\sigma(m+2)}]$$

$$+ 4g(m-1) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+2)}.$$

Comme $B = \frac{1}{2}C + g(m) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)}$

il vient que

$$B = f(m) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}[((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)},y_{\sigma(m+2)}] =$$

$$= - \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)+m}[[\ldots[[[x,y_{\sigma(1)}],y_{\sigma(2)}],y_{\sigma(3)}],\ldots],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$- 2f(m-1) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}[(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)},y_{\sigma(m+2)}]$$

$$+ 2g(m-1) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+2)}$$

$$+ g(m) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)}.$$

D'où

$$(f(m) + 2f(m-1)) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}[(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+1)},y_{\sigma(m+2)}]=$$

$$= -(-1)^{m} \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}[[\ldots[[[x,y_{\sigma(1)}],y_{\sigma(2)}],y_{\sigma(3)}],\ldots],y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+(g(m) + 2g(m-1)) \sum_{\sigma \in S(A')}(-1)^{d(\sigma)}((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)}.$$

Par suite ;

$$f(m+1) \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)} [(\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})y_{\sigma(3)})\ldots)y_{\sigma(m+1)}, y_{\sigma(m+2)}] =$$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)} [[\ldots[[[x, y_{\sigma(1)}], y_{\sigma(2)}], y_{\sigma(3)}], \ldots], y_{\sigma(m+2)}] +$$

$$+ g(m+1) \sum_{\sigma \in S(A')} (-1)^{d(\sigma)} ((\ldots((xy_{\sigma(1)})y_{\sigma(2)})\ldots)y_{\sigma(m+1)})y_{\sigma(m+2)}$$

Ainsi le lemme est vérifié pour m+1 ●

Posons $xy^1 = xy$; $xy^m = (xy^{m-1})y$ et $[f,g^1] = [f,g]$ (le (super)-commutateur) et $[f,g^m] = [[f,g^{m-1}],g]$ pour tout entier naturel $m \geq 1$ (où f et g sont des endomorphismes).

Du lemme précédent il résulte le

<u>Lemme</u> VI-1-5

Soit $y \in M_0$; $x \in M_0 \cup M_1$ et m un entier non nul alors ;
$f(m)[\rho_{xy^m}, \rho_y] = (-1)^m [\rho_x, (\rho_y)^{m+1}] + g(m)\rho_{xy^{m+1}}$.

En effet, le lemme VI-1-5 se déduit du lemme VI-1-4 en remarquant que si $y_1 = \ldots = y_{m+1} = y \in M_0$ alors pour tout $\sigma \in S$; $d(\sigma) = 0$ ●

<u>Lemme</u> VI-1-6

Soit $x \in M_0$ et $M = M^0(x) \oplus M^1(x)$ la décomposition de Fitting de M relativement à ad_x. Alors :
$M^0(x).M^0(x) \subseteq M^0(x)$ et $M^0(x).M^1(x) \subseteq M^1(x)$.

En effet soit $a \in M^0(x)$, alors $ax^m = 0$ pour un certain entier m.
Du lemme VI-1-5 (où $\rho = ad$) il vient que
$[[\ldots[ad_a, ad_x], \ldots], ad_x] = [ad_a, (ad_x)^{m+1}] = 0$.
Finalement le lemme est obtenu par application du lemme 1 de [3,p.38] ●

lemme VI-1-7

Soit H_0 une sous-algèbre nilpotente de M_0 et soit $M = M^0 \oplus M^1$ la décomposition de Fitting de M relativement à $ad(H_0)$. Alors :

M^0 est une sous-algèbre Z_2-graduée de $M = M_0 \oplus M_1$ et $M^0.M^1 \subseteq M^1$.

En effet, puisque $M^0 = \bigcap_{h \in H_0} M^0(h)$ et $M^1 = \bigoplus_{h \in H_0} M^1(h)$ il vient du lemme précédent que $M^0.M^0 \subseteq M^0$ et $M^0.M^1 \subseteq M^1$. D'autre part la Z_2-graduation de M induit sur M^0 une Z_2-graduation :

$(M^0)_0 = M_0 \cap M^0$ et $(M^0)_1 = M_1 \cap M^0$ telle que

$(M^0)_0.(M^0)_0 \subseteq M_0 \cap M^0 = (M^0)_0$

$(M^0)_0.(M^0)_1 \subseteq M_1 \cap M^0 = (M^0)_1$

$(M^0)_1.(M^0)_1 \subseteq M_0 \cap M^0 = (M^0)_0$

d'où M^0 est une sous-algèbre Z_2-graduée de $M = M_0 \oplus M_1$ •

Lemme VI-1-8

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv et soit ρ une super-représentation de Malcèv de M dans un K-espace vectoriel V. Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que pour tout x de M ; $\rho(x)(W) \subseteq W$ et soit ρ' la représentation-quotient de M dans $V/W = V'$. Si pour tout x de M, $\rho(x)$ est nilpotent alors $\rho'(x)$ est nilpotent.

En effet, il suffit de remarquer que pour $v' \in V'$ où $v' = v + W$ on a $(\rho')^n(x)(v') = \rho^n(x)(v) + W$ (pour n un entier non nul) •

Lemme VI-1-9

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv et I un idéal homogène de M. Alors $Q = {}^{M}\!/_{I}$ est une superalgèbre de Malcèv et si pour tout $x \in M$, $ad_M(x)$ est nilpotent, alors $ad_Q(x')$ est aussi nilpotent où

$x' = x + I \in Q$.

En effet, il est clair que Q est une superalgèbre de Malcèv. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "ad_M(x)"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & M \arrow[d, "s"] \\ Q \arrow[r, "ad_Q(x')"] & Q \end{tikzcd}$$

Par suite $(ad_Q(x'))^m \circ s = s \circ (ad_M(x))^m$. Si $(ad_M(x))^n = 0$ alors

$(ad_Q(x'))^n \circ s = s \circ (ad_M(x))^n = 0$. D'où $(ad_Q(x'))^n = 0$ (s est la surjection canonique de M sur Q) •

Lemme VI-1-10

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une K-superalgèbre de Malcèv de $\tilde{J}$-noyau nul. Si pour tout $x \in M$, $ad_M(x) = ad_x$ est une application nilpotente alors M est résoluble.

En effet, $M' = {}^{M}\!/_{R}$ est une algèbre de Malcèv semi-simple (R désigne le radical résoluble de M) (cf. 2, théorème 5.4).
Pour $x' = x + R \in M'$; $ad_{x'}$ est nilpotent car ad_x est une application nilpotente (lemme VI-1-8). Il vient alors que M' est une algèbre de Malcèv nilpotente (cf.14, p.20 théorème 2.2.7). Par suite M' nilpotent et semi-simple entraîne que M'= 0. Alors M = R est résoluble •

VI-2 <u>SOUS-ALGEBRE DE CARTAN GRADUEE</u>

<u>Définition</u> VI-2-1

Un sous-espace Z_2-gradué $H = H_0 \oplus H_1$ d'une superalgèbre de Malcèv sur un corps de caractéristique nulle $M = M_0 \oplus M_1$ est une sous-algèbre de Cartan graduée (sacg) si :

1°) H_0 est une sous-algèbre de Cartan de M_0 (cf. 14))

2°) $H_1 = (M_1)^0(H_0)$ où M_1 est considéré comme un M_0-module de représentation $\rho : M_0 \longrightarrow End_K(M_1)$ où $\rho(x)$ est un endomorphisme de M_1 telle que $(\rho(x))(y) = xy$.

3°) Pour tout $v \in H_1$ l'application f_v de H dans H définie par : $f_v(x) = ad_H(v)(x) = vx$ est nilpotente.

<u>Remarque</u>

Lorsque $M = M_0 \oplus M_1$ est une superalgèbre de Malcèv telle que $H_1 \subseteq \{y \in M / \tilde{J}(M,M,y) = 0\}$ ($\tilde{J}$-noyau de M) la troisième condition est trivialement vérifiée (cf. démonstration du corollaire 2.2. de [15] page 286). Dans ces cas à partir d'une sous-algèbre de Cartan de M_0 on construit une sous-algèbre de Cartan graduée de M.

La sous-algèbre de Cartan graduée n'existe pas toujours :

En effet, soit A la superalgèbre de Malcèv définie par $A_0 = Kx$ et $A_1 = Ku + Kv$ où $xu = v$; $xv = 0$; $uv = x$; $u^2 = v^2 = 0$.
A_0 est nilpotent, d'où A_0 est l'unique sous-algèbre de Cartan de A_0. Nous avons $H = (A)^0(A_0) = A$. De plus $(f_u)^{2m}x = (-1)^m x$ et
$(f_u)^{2m+1}x = (-1)^{m+1}v$; par suite f_u n'est pas nilpotent.La troisième condition n'est donc pas satisfaite ; par suite H n'est pas sous-algèbre de Cartan graduée.

A ne possède pas de sous-algèbre de Cartan graduée telle que définie plus haut.

<u>Proposition</u> VI-2-2

Soient $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv sur un corps K algébriquement clos et $V = V_0 \oplus V_1$ un M-module (Z_2-gradué) de M. Soit I un idéal homogène de M. Soit W un M-sous-module homogène minimal de V. Alors $IW = W$ ou $IW = 0$.

En effet supposons que $0 \neq IW \neq W$. $IW + M(IW)$ est un M-sous-module non nul de V ; par suite $W = IW + M(IW)$ car W est minimal. Soit $W' = (I^2 + I^2M)W + M((I^2 + I^2M)W)$. W' est un M-sous-module de V. Deux cas seulement sont possibles ; soit $W' = W$ ou $W' = 0$.

Si $W' = W$. Alors :

$$\begin{aligned}(WI^2)M + ((WI)I)M &\subseteq (MI)(IW) + ((IW)M)I + ((WM)I)I + ((MI)I)W \\ &\quad + (MI)(IW) + (I^2M)W + ((IM)W)I + ((MW)I)I \\ &\subseteq (WI)I + WI + WI^2 \\ &\subseteq WI = W'I\end{aligned}$$

$$\subseteq [\, WI^2 + (I^2M)W + M(I^2W) + M((I^2M)W)]I$$
$$\subseteq (I^2W)I + ((I^2M)W)I + ((I^2W)M)I + (((I^2M)W)M)I$$
$$\subseteq (WI)I + ((I^2W)M)I + (((I^2M)W)M)I$$
$$\subseteq (WI)I + [(MI)(IW) + ((IW)M)I + ((WM)I)I + ((MI)I)W]I$$
$$+ [(M^2)(I^2W) + ((MW)M)I^2 + ((WM)I^2)M + ((MI^2)M)W]I$$
$$\subseteq (WI)I + ((I^2W)M)I$$
$$\subseteq (WI)I + [(MI)(IW) + ((IW)M)I + ((WM)I)I + ((MI)I)W]I$$
$$\subseteq (WI)I = (WI)I + WI^2$$

D'où $(WI)I + WI^2$ est un M-sous-module de V si $W' = W$.

Si $W' = 0$, il résulte immédiatement que $WI^2 = (I^2M)W = 0$ et ainsi

$$((WI)I)M \subseteq (MI)(IW) + (I^2M)W + ((IM)W)I + ((MW)I)I$$
$$\subseteq (WI)I$$

$(WI)I$ est un M-sous-module de V si $W' = 0$.

Pour $W' = 0$ ou $W' = W$, $(WI)I + WI^2$ est un M-sous-module de V et $(WI)I + WI^2 \subseteq WI \neq W$. Par suite $(WI)I + WI^2 = 0$, soit $(WI)I = WI^2 = 0$.

Alors $IW = (IW + M(IW))I$

$$\subseteq (WI)I + ((WI)M)I$$
$$\subseteq ((WI)M)I = ((IW)M)I$$
$$\subseteq (WI)(IM) + ((WM)I)I + ((MI)I)W + (I^2W)M$$
$$\subseteq I^2W + (WI)I + (I^2W)M = 0.$$

Nous avons une contradiction avec l'hypothèse. Par suite nous ne pouvons avoir $0 \neq IW \neq W$.

D'où $IW = W$ ou $IW = 0$ •

<u>Proposition</u> VI-2-3

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv résoluble sur un corps K algébriquement clos. Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un M-module Z_2-gradué de M non nul. Si $MV = V$ alors il existe un scalaire non nul k et un couple $(x,w) \in (M_0 \cup M_1) \times V$ tels que $xw = kw$ et $w \neq 0$.

En effet raisonnons par récurrence sur m+p où m = dimM est la dimension de M et p = dimV la dimension de V.

Si m = 1, alors $M = M_0 = Kx$ et $MV = xV = V$ (x est alors un endomorphisme surjectif de V, donc bijectif). Si $\{v_1,...,v_p\}$ est une base de V telle que $xv_i = \alpha_{1i}v_1 + \alpha_{2i}v_2 + ... + \alpha_{pi}v_p$ pour $i = 1,...,p$.

Alors ;

$$\det(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & & & \alpha_{2p} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \alpha_{p1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

Les valeurs propres de x sont les scalaires k tels que

$$\det(x\text{-}k.id) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - k & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - k & & & & \alpha_{2p} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \alpha_{p1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{pp} - k \end{vmatrix} = 0$$

$\det(x\text{-}k.id) = (-k)^p + a_{p-1}k^{p-1} + ... + a_1k + a_0 = 0$ (id = identité de V ; a_i sont des scalaires dépendant des coéfficients α_{ij} pour $i,j = 1...p$). Comme $a_0 = \det(x) \neq 0$, x possède au moins une valeur propre non nulle k. D'où il existe un vecteur non nul w de V tel que $xw = kw \neq 0$.

Si m = 2 et p = 1 ; nous avons alors $M = Kx + Ky$ (On choisit x,y des éléments homogènes) et $V = Kv$. Puisque $MV = V$ alors le couple $(xv,yv) = (av,bv) \neq (0,0)$. On supposera $a \neq 0$; il vient que $xv = av \neq 0$.

Par suite la proposition est vérifiée si $m + p = 2$ ou 3 et $p \neq 0$.

Supposons par récurrence que la proposition est vraie pour tout couple (M,V) où M est une superalgèbre de Malcèv de dimension m et V

un M-module Z_2-gradué non nul de dimension p tel que $m + p < n$.
Soit M une superalgèbre de Malcèv de dimension m et V un M-module Z_2-gradué non nul de dimension p tels que $MV = V$ et $m + p = n>3$.

Si $m = 1$, nous avons le résultat ; on suppose alors $m>1$. M étant résoluble, M possède un idéal homogène propre que l'on notera I. Soit W un M-sous-module homogène minimal de V. Alors $IW = W$ ou $IW = 0$ (cf. Proposition VI-2-2).

i) Si $IW = W$; alors I est une superalgèbre de Malcèv résoluble et nous avons $\dim I + \dim W < m + p = n$. Il vient, d'après l'hypothèse de récurrence, qu'il existe un scalaire non nul k et un couple $(x, w) \in (I_0 \cup I_1) \times W \subseteq (M_0 \cup M_1) \times V$ tels que $xw = kw \neq 0$. Par suite nous avons la proposition.

ii) Si $W \neq V$. Nous avons $0 \neq W \subset V$.
$V/_W$ est un M-module non nul de dimension strictement inférieure à p, d'où $\dim M + \dim V/_W < n$ et $M(V/_W) = MV/_W = V/_W$
[où $x(v + W) = xv + W$]. Par suite d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un scalaire non nul k et un couple$(x, v + W) \in (M_0 \cup M_1) \times V/_W$ tels que $x(v + W) = k(v + W)$ et $v + W \neq W$. Ainsi $xv-kv \in W$.

Considérons le K-espace vectoriel $U = Kv + W$. x opère sur U comme un endomorphisme de U dont la matrice C est de la forme (dans la base $\{v,w_1,\dots,w_q\}$ où $\{w_1,\dots,w_q\}$ est une base de W) :

$$C = \begin{pmatrix} k & 0 & . & . & . & 0 \\ a_1 & \alpha_{11} & & & & \alpha_{1q} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_q & \alpha_{q1} & . & . & . & \alpha_{qq} \end{pmatrix}$$

le déterminant de $C - k.id$ est $\det(C - k.id) = 0$. Par suite k est une valeur propre de x . Il existe donc un vecteur non nul $w \in Kv + W \subseteq V$ tel que $xw = kw$. D'où $(x, w) \in (M_0 \cup M_1) \times V$ tels que $xw = kw$ et $w \neq 0$.

iii) Si $IW = 0$ et $W = V$. Nous avons $IV = 0$:

Considérons alors la superalgèbre de Malcèv $M' = M/_I$. M' est résoluble de dimension strictement inférieure à m et V est un M'-module de Malcèv non nul (où $(x + I)w = xw$ pour $x \in M_0 \oplus M_1$).
Comme $M'.V = V$ et $\dim M' + \dim V < n$, il vient qu'il existe un scalaire non nul k et un couple $(x + I, w) \in (M'_0 \cup M'_1) \times V$ tels que

$xw = (x + 1)w = kw \neq 0$. Il existe alors un scalaire non nul k et un couple $(x,w) \in (M_0 \cup M_1) \times V$ tels que $xw = kw \neq 0$.

D'où la proposition •

Théorème VI-2-4

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv sur un corps de caractéristique nulle. Pour que M soit nilpotente il faut et il suffit que pour tout élément $x \in M_0 \cup M_1$ $ad_x = ad_M(x) : M \longrightarrow M$ soit nilpotente.

En effet, soit K' une clôture algébrique de K. Nous avons $M' = M \otimes_K K'$ est nilpotente si et seulement si M est nilpotente car $(M')^n = M^n \otimes_K K'$. On supposera alors que K est algébriquement clos. Si M est nilpotente, il existe un entier non nul n tel que $M^n = 0$. Comme

$$(ad_x)^n(y) = \underbrace{x(x(\ldots(xy))\ldots)}_{n \text{ facteurs}}$$

$(ad_x)^n(y) \in M^n = 0$. $(ad_x)^n(y) = 0$ pour tout $x,y \in M$.
En particulier ad_x est nilpotente pour $x \in M_0 \cup M_1$.

Réciproquement, supposons que ad_z est nilpotent pour $z \in M_0 \cup M_1$. Alors pour $x \in M_0$, $ad_{M_0}(x) : M_0 \longrightarrow M_0$ soit nilpotente et par suite M_0 est nilpotente (cf. Théorème 2.2.7. de [14], p. 21). Alors d'après le Théorème IV-2-4 M est résoluble.

Soit la suite $M \supseteq M^2 \supseteq \ldots \supseteq M^p \supseteq \ldots$ où $M^{k+1} = MM^k$ pour tout entier $k \geq 1$. Soit p un entier tel que $M^p \neq 0$ et $M^{p+1} = MM^p = M^p$.
M^p est M-module Z_2-gradué. Alors d'après la proposition précédente, il existe un scalaire non nul k et un couple $(z, w) \in (M_0 \cup M_1) \times M^p$ tels que $zw = kw$ et $w \neq 0$.

D'après l'hypothèse ad_z est nilpotent , par suite il existe un entier m tel que $(ad_z)^m = 0$. Comme $zw = ad_z(w)$, il vient que $(ad_z)^m(w) = k^m w \neq 0$. Ceci est absurde.

Alors pour tout entier p nous avons $M^p = 0$ ou $M^{p+1} \subset M^p$.

Si $M^p = 0$ c'est fini; sinon nous avons alors la suite décroissante stricte $M \supset M^2 \supset \ldots \supset M^p \supset \ldots$

M étant de dimension finie il vient qu'il existe un entier $k > p$ tel que $M^k = 0$

D'où M est nilpotente •

Nous considérerons désormais que le corps K est de caractéristique nulle

Proposition VI-2-5

Soit $H = H_0 \oplus H_1$ une sous-algèbre de Cartan graduée (saeg) d'une superalgèbre de Malcèv $M = M_0 \oplus M_1$. Alors H est une sous-algèbre Z_2-graduée maximale et nilpotente de M. De plus H est égale à son propre mormalisateur.

En effet, nous avons $H_0 = (M_0)^0(H_0)$ car H_0 est une sous-algèbre de Cartan de M_0 et $H = H_0 \oplus H_1 = (M_0)^0(H_0) \oplus (M_0)^1(H_0) = (M)^0(H_0)$, il vient du lemme VI-1-7 que H une sous-algèbre Z_2-graduée de M.

Pour $x \in H_0$, $ad_H(x) : H \longrightarrow H$ est nilpotent puisque $H = (M)^0(H_0) \subseteq (M)^0(x)$. De plus pour tout y H_1, $ad_H(y) : H \longrightarrow H$ est nilpotent (par hypothèse). Du théorème précédent, on déduit que H est une sous-algèbre Z_2-graduée nilpotente.

Soit $H' = H'_0 \oplus H'_1$ une sous-algèbre Z_2-graduée nilpotente de M contenant H. Pour $x \in H_0 \subseteq H'_0 \subseteq H'$, $ad_{H'}(x) : H' \longrightarrow H'$ est nilpotent (théorème précédent) et ainsi $H' \subseteq (M)^0(H_0) = H$. D'où H est maximale.

Enfin soit y appartenant au normalisateur de H dans M. Pour $x \in H_0$, $xy \in H$. Soit $M = M^0 \oplus M^1$ la décomposition de Fitting de M relativement à H_0 ; il existe un unique couple (y',y") de $M^0 \times M^1$ tel que $y = y' + y''$. Alors $xy' + xy'' = xy \in H = M^0$ où : $xy' \in M^0 = H$ et $xy'' \in M^1$. D'où $xy'' \in M^0 \cap M^1 = 0$ pour tout $x \in H_0$. Ceci entraîne que $y'' \in M^0$. Il vient alors que $y'' \in M^0 \cap M^1 = 0$ et que $y = y' \in H$. Par suite H est son propre mormalisateur •

Proposition VI-2-6

Soient $H = H_0 \oplus H_1$ un K-sous-espace vectoriel Z_2-gradué d'une superalgèbre de Malcèv $M = M_0 \oplus M_1$ et K' une extension algébrique de K. H est une sous-algèbre de Cartan graduée de M si et seulement si $H' = H \otimes_K K'$ est une sous-algèbre de Cartan graduée de $M' = M \otimes_K K'$.

En effet,
montrons d'abord que H_0 est une sous-algèbre de Cartan de M_0 si et seulement si $H_0 \otimes_K K'$ est une sous-algèbre de Cartan de $M_0 \otimes_K K'$. Supposons que H_0 est une sous-algèbre de Cartan de M_0. Alors $H_0 \otimes_K K'$ est nilpotent car H_0 est nilpotent. Soit $N(H_0 \otimes_K K')$ (resp. $N(H_0)$) le normalisateur de $H_0 \otimes_K K'$ (resp. H_0).

Soit $y \otimes k' \in N(H_0 \otimes_K K')$. Pour tout $x \otimes k \in H_0 \otimes_K K'$; $(x \otimes k)(y \otimes k') = xy \otimes kk' \in H_0 \otimes_K K'$. Il vient que pour tout $x \in H_0$ $xy \in H_0$; d'où $y \in N(H_0) = H_0$. Par suite $y \otimes k' \in H_0 \otimes_K K'$ et $N(H_0 \otimes_K K') = H_0 \otimes_K K'$. Du théorème 2.2.10 [14, p. 24] il vient que $H_0 \otimes_K K'$ est une sous-algèbre de Cartan de $M_0 \otimes_K K'$.

Réciproquement si $H_0 \otimes_K K'$ est une sous-algèbre de Cartan de $M_0 \otimes_K K'$. Il vient que H_0 est nilpotent. De plus soit $y \in N(H_0)$. Pour tout $x \in H_0$; $xy \in H_0$. On déduit que pour tout $x \otimes k \in H_0 \otimes_K K'$ et pour $y \otimes k' \in N(H_0) \otimes_K K'$; $(x \otimes k)(y \otimes k') = xy \otimes kk' \in H_0 \otimes_K K'$. D'où $y \otimes k' \in N(H_0 \otimes_K K') = H_0 \otimes_K K'$. Par suite $y \in H_0$ et $N(H_0) = H_0$. Il vient que H_0 est une sous-algèbre de Cartan de M_0 (théorème 2.2.10 [14, p. 24]).

Soit $H_1 = M_1^0(H_0)$ où M_1 est un M_0-module de représentation $ad : M_0 \longrightarrow End_K(M_1)$ telle que $ad_x(y) = xy$. De plus on suppose que pour tout $v \in H_1$ f_v est nilpotent (où $f_v(x) = vx$ pour $x \in H$).

Soit $H_1 \otimes_K K' = (M_1 \otimes_K K')^0(H_0 \otimes_K K')$ où $M_1 \otimes_K K'$ est un $M_0 \otimes_K K'$-module de représentation

$ad : M_0 \otimes_K K' \longrightarrow End_K(M_1 \otimes_K K')$ telle que

$ad_{x\otimes k}(y \otimes k') = xy \otimes kk'$. De plus on suppose que pour tout $v \otimes k' \in H_1 \otimes_K K'$ $f_{v \otimes_K k'}$ est nilpotent (où $f_{v\otimes_K k'}(x \otimes k) = vx \otimes k'k$ pour $x \in H$).

Comme $[ad_{x\otimes k}]^i(y \otimes k') = (ad_x)^i(y) \otimes k^i k'$ pour i entier non nul ; il vient que $H_1 = M_1^0(H_0)$ si et seulement si

$H_1 \otimes_K K' = (M_1 \otimes_K K')^0(H_0 \otimes_K K')$.

De même f_v est nilpotent pour tout $v \in H_1$ si et seulement si $f_{v \otimes_K k'}$ est nilpotent pour tout $v \otimes k' \in H_1 \otimes_K K'$

Si H est une sous-algèbre de Cartan graduée de M ; alors $H = H_0 \oplus H_1 = H_0 \oplus M_1^0(H_0)$; d'où

$H' = H \otimes_K K' = (H_0 \otimes_K K') \oplus (M_1 \otimes_K K')^0(H_0 \otimes_K K')$ est une sous-algèbre de Cartan graduée de $M' = M \otimes_K K'$.

Ainsi que réciproquement ●

Théorème VI-2-7

Soit $M = M_0 \oplus M_1$ une superalgèbre de Malcèv résoluble sur un corps de caractéristique nulle et soient $H = H_0 \oplus H_1$ et $H' = H'_0 \oplus H'_1$ deux sous-algèbres de Cartan graduées de M. Il existe des éléments $x_1,\dots,x_n$ de H et des éléments $y_1,\dots,y_n$ de M_0^∞ tels que $H' = f(H)$ où

$$f(z) = \prod_{i=1}^{n} \exp(D(x_i, y_i))(z)$$ est un automorphisme de M et

$n \leq \dim(M_0^\infty)$ (dimension de M_0^∞).

En effet, $H = H_0 \oplus H_1$ et $H' = H'_0 \oplus H'_1$ étant deux sous-algèbres de Cartan graduée de M ; il vient que H_0 et H'_0 sont deux sous-algèbres de Cartan de M_0. Puisque M est résoluble, M_0 est une algèbre de Malcèv résoluble. Par suite il existe des éléments $x_1,\dots,x_n$ de H_0 et des éléments $y_1,\dots,y_n$ de M_0^{∞} tels que : $H'_0 = \prod_{i=1}^{n} \exp(D(x_i, y_i))(H_0) = f(H_0)$.

(cf.14,théorème 2.4.13, p.35) (où $f(z) = \prod_{i=1}^{n} \exp(D(x_i, y_i))(z)$ est un automorphisme de M).

$H'_1 = (M_1)^0(H'_0) = (M_1)^0[f(H_0)] = f[(M_1)^0(H_0)] = f(H_1)$ et par suite

$H' = H'_0 \oplus H'_1 = f(H_0) \oplus f(H_1) = f(H_0 \oplus H_1) = f(H)$●

BIBLIO GRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

1 H. M. M. ALBUQUERQUE, Contribuições para a teoria das superalgebras de Malcèv, Universidade de Coimbra, Departemento de Matemática 1993.

2 H. M. M. ALBUQUERQUE and A. ELDUQUE, "Malcev superalgebras with trivial nucleus". Math Subjects Classification 17A70, 17D10 (1991).

3 N. BOURBAKI "Groupes et algèbres de Lie" Chap. 7 et 8, Publications Scientifiques et Industrielles 1364, Hermann Paris1974.

4 J. DIXMIER "Algèbres enveloppantes" Gauthier-Villars ; Paris1974.

5 D. Z. DJOKOVIC and G HOCHSCHILD "Semisimplicity of 2-graded Lie algebras II" Illinois J-Math, **20** n° 1(1976) 134-143.

6 A. ELDUQUE "On Malcev-modules" Communications in Algebra **18** (5) (1990) 1551-1561.

7 A. N. GRISHKOV "Analogue of Levi's theorem for Mal'tsev algebras" Algebra and Logic **16** (1977) 389-396.

8 G. HOCHSCHILD "Semisimplicity of 2-graded Lie algebras" Illinois J-Math, **20** (1976) 107-123.

9 J. HUMPHREYS "Introduction to Lie algebra and representation theory" Springer, New-York (1972).

10 N. JACOBSON "Lie algebras" Interscience, New-York (1962).

11 V. G. KAC "Lie superalgebras" Advances in Math **26** (1977) 8-96.

12 E. N. KUZMIN "Mal'tsev algebras and their representations" Algebra and Logic **16**(1977) 233-244.

13 A. KOULIBALY "Contribution à la théorie des algèbres de Malcèv" Cahier Mathématique, **33**, USTL, Montpellier 1985.

14 A. A. MALECK "Algèbres de Malcèv" Thèse de doctorat d'état. USTL, Montpellier.

15 T. MOONS "On the weight spaces of Lie superalgebra-modules" J-Algebra **147** (1992) 283-323.

16 T. MOONS, E. NAUWELAERTS and A.I. OOMS "On the weight spaces of Lie superalgebra-modules and their Jordan Kernels" J-Algebra **107**(1987) 28-42.

17 L. E. ROSS "Representations of graded Lie algebra" Trans-Amer-Math-Soc **120**(1965) 17-23.

18 A. A. SAGLE "Malcev algebras" Trans-Amer-Math-Soc **101**(1961) 426-458.

19 R. SCHAFER "An introduction to Nonassociative Algebras" New York-London : Academic Press 1966.

20 O. N. SMIRNOV "Solvability of alternative Z_2-graded algebras and alternative superalgebras" Sib. Mat. Zh., **32** No 6, 158-163.

21 M. K. SMITH "Weight spaces of Lie algebras" Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985) 524-526.

22 E. L. STITZINGER "Supersolvable Malcev Algebras" J-Algebra **103**(1986) 69-79.

23 C.J. BERE et A. KOULIBALY "Semi-simplicité au sens d'Hochschild des superalgèbres de Malcèv" soumis à publication.

24 C.J. BERE et A. KOULIBALY "Espace-poids d'une algèbre de Malcèv" soumis à publication.

25 C.J. BERE "Superalgèbres Malcèv admissibles" soumis à publication.

RESUME

Dans ce mémoire nous étudions essentiellement les superalgèbres de Malcèv. Ainsi nous montrons qu'une superalgèbre alternative est super-Malcèv-admissible. Nous nous intéressons ensuite aux superalgèbres de Malcèv semi-simples au sens de G. Hochschild.
Une superalgèbre de Malcèv est résoluble si et seulement si sa composante homogène de degré zéro est résoluble. Ceci nous permet alors de donner une généralisation du théorème de Lie.
Dans la suite nous étudions les espace-poids d'un module de Malcèv d'une algèbre de Malcèv.
Enfin nous étendons aux superalgèbres de Malcèv la notion de sous-algèbre de Cartan graduée.

Mots-clés
Superalgèbre de Malcèv * M-module de Malcèv * Théorème de Lie * Espace-poids * sous-algèbre de Cartan (graduée).