République de Côte d'Ivoire
Union Discipline Travail

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Année Universitaire
1992-1993

THESE

Présentée à
La Faculté des Sciences et Techniques
de l'Université d'Abidjan
pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème Cycle
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES PURES

Par

Youssouf Mahamadou DIAGANA

FILTRATIONS, INDEPENDANCE ANALYTIQUE GENERALISEE, LARGEUR ANALYTIQUE

Soutenue publiquement le 10 Février 1994 devant la Commission d'examen :

Président :	Monsieur	Saliou TOURE	Professeur
Examinateurs :	Messieurs	SEYDI Hamet	Professeur
		Akry KOULIBALY	Professeur
		Daouda SANGARE	Professeur
		Abdallah BADRA	Maître de Conférences
		Moriké KAMARA	Maître de Conférences

REMERCIEMENTS

Nous remercions très sincèrement tous ceux qui nous ont apporté leurs concours pour la réalisation de ce travail:

- Monsieur Saliou TOURE qui a été pour nous une source de motivation dans nos études et qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse malgré ses hautes responsabilités. C'est pour nous la marque de l'intérêt qu'il accorde à notre modeste travail.

- Messieurs SEYDI Hamet, Professeur à l'Université de Dakar, et Akry KOULIBALY, Professeur à l'Université de Ouagadougou qui nous ont apporté leurs encouragements lors de leurs passages à Abidjan et qui ont bien voulu se déplacer pour participer à l'examen de notre thèse.

- Messieurs Abdallah BADRA et Moriké KAMARA qui nous ont constamment apporté leurs conseils et encouragements et qui ont bien voulu participer au jury.

- Monsieur Daouda SANGARE qui est de ceux qui nous ont donné le goût de l'algèbre dès notre premier cycle universitaire et qui nous a patiemment guidé dans nos recherches sans jamais nous en retirer les responsabilités.

- Les Professeurs du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences et Techniques dont Messieurs Boubacar BA, Mamadou GUISSE et Koua KONIN pour leurs suggestions et encouragements qui ont été pour nous un apport inestimable.

- Nos ainés du Séminaire d'Algèbre : Messieurs Philippe AYEGNON, Henri DICHI, Mamadou SOUMARE et François TANOE dont les conseils et suggetions nous ont été d'une aide précieuse.

Notre profonde gratitude à tous nos parents ainsi qu'à nos amis, nos frères, nos camarades et à tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

Nos remerciements sincères à Monsieur N'Cho ADOU qui a bien voulu prêter son concours inestimable à la rédaction de cette thèse avec le Macintosh de l'IRMA (Institut de Recherche Mathématiques).

S O M M A I R E

Pages

INTRODUCTION

L'étude de la largeur analytique d'un idéal a fait l'objet de plusieurs travaux dans des directions apparemment indépendantes, parmi lesquelles le nombre maximum d'éléments analytiquement indépendants dans un idéal.

Le premier objecif de cette thèse est la généralisation de la notion d'"éléments analytiquement indépendants dans un idéal" en vue d'une généralisation de la largeur analytique aux filtrations.

NORTHCOTT et REES ont défini deux notions d'éléments analytiquement indépendants : $(A, \mathfrak{M})$ étant un anneau nœthérien local (dont le corps résiduel est infini), $a_1, ..., a_r$ des éléments de A,

1°) On dit que $a_1, ..., a_r$ sont analytiquement indépendants si : pour tout polynôme homogène $F(X_1, ..., X_r)$ à coefficients dans A, $F(a_1, ..., a_r) = 0$ implique que F a tous ses coefficients dans $\mathfrak{M}$.

2°) Si I contient $(a_1, ..., a_r)$, l'idéal engendré par les a_i, $i \in [1, r]$, on dit que $a_1, ..., a_r$ sont analytiquement indépendants dans I si : pour tout polynôme homogène F de degré s, appartenant à $A[X_1, ..., X_r]$,

$F(a_1, ..., a_r) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M} I^s} \Rightarrow F$ a tous ses coefficients dans $\mathfrak{M}$.

Une généralisation a été introduite par Valla en 1970 et elle concerne la première notion : A étant un anneau nœthérien quelconque et J un idéal de A, des éléments $a_1, .., a_r$ de A sont dits J-indépendants si : pour tout polynôme homogène F appartenant à $A[X_1, .., X_r]$, $F(a_1, ..., a_r) = 0 \Rightarrow F$ a tous ses coefficients dans J. Nous nous proposons de donner des généralisations de la deuxième notion :

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires et un idéal d'un anneau A est supposé différent de A, sauf mention explicite du contraire.

Une filtration d'un anneau A est une famille décroissante d'idéaux $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $I_0 = A$, $I_p I_q \subseteq I_{p+q}$ $\forall p, q \in \mathbb{Z}$. On étendra éventuellement l'ensemble d'indices à $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et dans ce cas on conviendra que $I_\infty = (0)$.

Une filtration $f = (I_n)_n$ est dite I-adique si $\forall n$ $I_n = I^n$. Une filtration $f = (I_n)_n$ est dite fortement approximable par des puissances d'idéaux, ou fortement A.P, s'il existe $m \geq 1$ tel que $I_{mn} = I_m^n$ pour tout n. Une filtration f est nœthérienne si $R(A, f)$ est nœthérien où $R(A, f) = \sum_{n \geq 0} I_n X^n$ est l'anneau de Rees de f. Pour toute filtration f, on a les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
f \text{ est I adique} \arrow[r, Rightarrow] & f \text{ est I-bonne} \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Si A est nœthérien}"'] \arrow[rr, Rightarrow] & & f \text{ est fortement A.P.} \\
& & f \text{ est nœthérienne} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

1) Soit A un anneau. Soit J un idéal de A et $f = (I_n)_n$ une filtration de A. Des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de I_1 sont dits J-<u>indépendants relativement à la filtration f</u> si : pour tout polynôme homogène de degré s $F(X_1, \ldots, X_r) \in A[X_1, \ldots, X_r]$: $F(a_1, \ldots, a_r) \equiv 0 \pmod{J I_s} \Rightarrow F$ a tous ses coefficients dans J. On remarque que des éléments d'un anneau nœthérien local

A sont analytiquement indépendants dans un idéal I si et seulement si ils sont $\mathfrak{M}$-indépendants relativement à la filtration I-adique $f_I = (I^n)_n$ où $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de A et que des éléments d'un anneau nœthérien sont J-indépendants (au sens de Valla) si et seulement si ils sont J-indépendants relativement à f_I où I est l'idéal que ces éléments engendrent.

Nous posons :

$$\ell_J(f) = \sup \{r : \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J,\ \text{J-indépendants relativement à } f\}$$

Si $f = f_I$ on note $\ell_J(I)$ et si l'anneau est nœthérien local le nombre $\ell_{\mathfrak{M}}(I)$, où $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal, est noté $\ell(I)$.

Northcott et Rees ont défini la largeur analytique d'un idéal comme suit : $(A, \mathfrak{M})$ étant un anneau nœthérien local (dont le corps résiduel est infini), on pose $\varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)$, l'application : $n \longmapsto \varphi_{\mathfrak{M}}(n, I) = \dim_k \dfrac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ où k est le corps $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ et on montre que $\varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)$ est polynômiale. On pose $\partial^\circ \varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)$ le degré du polynôme auquel $\varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)$ s'identifie lorsqu'elle s'applique à des quantités assez grandes et $\boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{(I)} = 1 + \partial^\circ \varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)$ est appelé <u>largeur analytique</u> de I. Ils montrent que si $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ est infini alors $\lambda(I) = \ell_{\mathfrak{M}}(I)$.

D'autre part D. Sangaré a montré ([11], 5.3.4. p.59) que

$\lambda(I) = \dim \sum_{n \geq 0} \dfrac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ (dim. de Krull) et nous montrons que si $f = (I_n)_n$ est une filtration de A, alors pour tout idéal J de A,

(i) $$\frac{\mathcal{R}(A, f)}{(u, J)\ \mathcal{R}(A, f)} \simeq \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{JI_n + I_{n+1}}$$

(ii) $$\frac{R(A, f)}{JR(A, f)} \simeq \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{JI_n}$$ (voir 2.2.1 et 2.2.2 au chapitre 2)

où $\mathcal{R}(A, f)$ est l'anneau de Rees généralisé associé à f : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n$ et $u = \frac{1}{X}$

Okon a défini la largeur analytique d'une filtration nœthérienne f par

$\sup_{\mathfrak{M}\in \mathrm{Max}A} \dim \frac{\mathcal{R}(A, f)}{(u, \mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A, f)}$ et nous noterons $\ell_{\mathfrak{M}}(f, 1)$ le nombre

$\dim \frac{\mathcal{R}(A, f)}{(u, \mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A, f)}$ et $\ell(f, 1)$ le nombre $\sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{f}} \ell_{\mathfrak{M}}(f, 1)$.

Dans le but de définir une notion de J-indépendance qui puisse engendrer une notion de largeur analytique comparable à celle de Okon pour les filtrations nœthériennes, nous définissons la notion d'éléments J-indépendants d'ordre 1, puis d'ordre k, $k \in \mathbb{N}^*$, relativement à une filtration $f = (I_n)_n$ et nous remarquons que la première notion est obtenue en posant $k = +\infty$ et en faisant la convention $I_\infty = (0)$.

Nous donnons la définition générale suivante :

2) Soient A un anneau, $f = (I_n)_n$ une filtration de A et k un entier naturel non nul, éventuellement égal à $+\infty$; pour $k = +\infty$ on conviendra que $I_\infty=(0)$. Soit J un idéal de A tel que $J + I_k \neq A$. Soient $a_1, \dots, a_r$ des éléments de I_1.

On dit que les éléments $a_1, \dots, a_r$ sont <u>J-indépendants d'ordre k relativement à f</u> si pour tout polynôme homogène F de degré s appartenant à $A[X_1, \dots, X_r]$, $F(a_1, \dots, a_r) \equiv 0 \pmod{JI_s + I_{s+k}} \Rightarrow F$ a tous ses coefficients dans $J + I_k$ (l'implication inverse est toujours triviale).

Nous posons $\ell_J(f, k) = \sup\{r : \exists a_1, ..., a_r \in J$, J-indépendants d'ordre k relativement à f $\}$ et $\ell(f, k) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{f}} \ell_{\mathfrak{M}}(f, k)$. Des éléments sont J-indépendants d'ordre $+\infty$ relativement à f si et seulement si ils sont J-indépendants relativement à f.

Nous montrerons au chapitre 2 que la notion de J-indépendance d'ordre k relativement à une filtration $f = (I_n)_n$ est liée à l'existence d'un isomorphisme entre un anneau de polynômes sur $\frac{A}{J+I_k}$ et un quotient d'anneau de Rees de f. Le théorème 2.5 est une généralisation de la proposition 2 de Barshay dans [2].

Le deuxième objectif de cette thèse est de présenter quelques généralisations de la largeur analytique aux filtrations nœthériennes et de les comparer à celle de Okon.

Nous posons : $\boldsymbol{\gamma_J(f, k)} = \dim \frac{R(A, f)}{R(A, f) \cap (u^k, J)\, \mathcal{R}(A, f)}$ où f est une filtration de l'anneau A, $k \in \overline{\mathbb{N}}^* = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $u^\infty = 0$ lorsque $k = +\infty$,

$\boldsymbol{\gamma(f, k)} = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{f}} \gamma_{\mathfrak{M}}(f, k)$. Lorsque $(A, \mathfrak{M})$ est nœthérien local et f une filtration nœthérienne de A, $\gamma(f, 1) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f, 1)$ est la largeur analytique de f au sens de Okon

Question .

$\gamma(f, 1)$ est-il égal à $\ell(f, 1)$ ou à $\ell(f)$? La réponse est négative, en général car nous construirons dans un anneau nœthérien local particulier

dont le corps résiduel est infini une filtration nœthérienne g telle que dont le corps résiduel est infini une filtration nœthérienne g telle que

$\ell(g, k) = 0$ pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$ et $\ell(g, 1) \neq 0$ (voir Exemples 3.7.1 et 3.7.2)

Ce type de contre exemple a donné l'idée d'affaiblir la notion de J-indépendance :

Nous définissons la notion d'éléments faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à une filtration f :

Des éléments $a_1, \dots, a_r$ sont dits faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à $f = (I_n)_n$ s'il existe $(k'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille d'entiers telle que

$\forall\, p, q \in \mathbb{N}^*$, $k'_p + k'_q \geq k'_{p+q} > k'_p > k'_0 = 0 \geq k'_{-p}$ et telle que $a_1, \dots, a_r$ soient J-indépendants d'ordre k relativement à la filtration $(I_{k'_n})_{n \in \mathbb{Z}}$. (Lorsque $k = +\infty$ l'ensemble d'indices est étendu à $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$).

Définitions : On appelle J-largeur analytique d'ordre k de f le nombre

$\boldsymbol{\ell}^*_J(\mathbf{f}, \mathbf{k}) = \sup\{r : \exists\, a_1, \dots, a_r$ faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à f $\}$.

$\ell^*_J(f, +\infty)$ sera noté $\boldsymbol{\ell}^*_J(\mathbf{f})$. Nous posons $\boldsymbol{\ell}^*(\mathbf{f}, \mathbf{k}) = \sup\limits_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{f}} \ell^*_{\mathfrak{M}}(f, k)$

$\boldsymbol{\ell}^*(\mathbf{f}, \mathbf{k})$ est appelé largeur analytique d'ordre k de f.

On aboutira au théorème 5.1 qui donne une caractérisation de la J-largeur analytique d'ordre k d'une filtration fortement A.P. $g = (J_n)_n$ par des $\ell_J(J_n)$ dans un anneau nœthérien A.

Nous généraliserons au 5.4 $\lambda(I)$ en $\lambda_{\mathfrak{M}}(f)$ où f est une filtration fortement A.P. et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal sur $\sqrt{f}$ dans un anneau nœthérien A

Soit $\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,,f)\ :\ n \longmapsto \varphi_{\mathfrak{M}}(n\,,f) = \dim A/\mathfrak{M}\ \frac{I_n}{\mathfrak{M} I_n}$. Nous montrerons que $\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,,f)$ n'est pas toujours polynômiale même lorsque f est nœthérienne ; par contre, sa restriction à l'ensemble $\{n!\ .\ n \in \mathbb{N}\}$ s'identifie à un polynôme unique, lorsqu'elle s'applique à des quantités assez grandes, dont le degré est noté $\partial^{o}\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,,f)$. On pose : $\boldsymbol{\lambda_{\mathfrak{M}}(f)} = 1 + \partial^{o}\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,,f)$. On remarquera que si $f = f_I$, $\lambda_{\mathfrak{M}}(f_I) = \lambda_{\mathfrak{M}}(I)$ où $\lambda_{\mathfrak{M}}(I)$ est tel que défini plus haut, pour un idéal I d'un anneau nœthérien quelconque (voir 4.1.1.). On pose :

$$\boldsymbol{\lambda(f)} = \sup_{\mathfrak{M}\ \text{maximal sur}\ \sqrt{I}} \lambda_{\mathfrak{M}}(f)$$

Nous montrerons au chapitre 5 (théorème 5.8.7) que si A est nœthérien, g une filtration fortement A.P. , $\forall\, p \in \overline{\mathbb{N}}^{*}$, $\forall\, k \in \overline{\mathbb{N}}^{*}$, $\ell^{*}_{\mathfrak{M}}(g,p) \leq \ell_{\mathfrak{M}}(g,k) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$ et qu'en outre si $A/\mathfrak{M}$ est infini alors $\ell^{*}_{\mathfrak{M}}(g,p) = \ell_{\mathfrak{M}}(g,k) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$.

Voici nos principaux résultats :

2.5. <u>Théorème</u>

Avec les hypothèses et notations de 2.2 et 2.3, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $a_1,\ldots,a_r$ **sont J-indépendants d'ordre k relativement à g.**

(ii) φ_k **est un isomorphisme**

(iii) θ_k **est un isomorphisme de** $\frac{A}{J+J_k}[X_1,\ldots,X_r]$ **sur**

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\,\mathcal{R}(A,g)}$$

(iv) La famille $\{t_1, \ldots, t_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J+J_k}$.

(v) La famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J+J_k}$.

Ce théorème a pour conséquence le corollaire suivant :

Corollaire :

Sous les hypothèses et notations de 2.6, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants relativement à la filtration g.

(ii) φ_∞ est un isomorphisme de $\frac{A}{J}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $G_g(J, \infty)$

(iii) $\theta = \psi_\infty \circ \varphi_\infty$ est un isomorphisme de $\frac{A}{J}[X_1, \ldots, X_r]$ sur

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap JR(A,g)}$$

(iv) La famille $\{t_1, \ldots, t_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J}$.

(v) La famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J}$.

Dans ce corollaire si on suppose que $g = f_I$ ou $I = (a_1, \ldots, a_r)$, l'équivalence entre (i) et (iii) donne le corollaire 2.7 qui est similaire à la proposition 2 de Barshay dans [2],

5.1. Théorème

Soit A un anneau nœthérien. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit g une filtration de A fortement A.P. Soit $m \geq 1$ tel que $\forall n \; J_{mn} = J_m^n$. Soit J un idéal de A contenant J_1. Alors on a :

(i) $\ell_J^*(g, k) \geq \ell_J(J_{mn}, k) = \ell_J(J_{mn}) \quad \forall n \geq 1$

(ii) $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}^*$, multiple de m tel que $\ell_J^*(g, k)$

$= \ell_J(J_{nk_1}, k) = \ell_J(J_{nk_1})$ pour tout $n \geq 1$.

(iii) $\ell_J^*(g, k) = \sup\{\ell_J(J_{mn}, k) : n \in \mathbb{N}^*\} = \ell_J^*(J_m^n, k)$

$= \ell_J^*(g) = \sup\{\ell_J(J_{mn}) : n \in \mathbb{N}^*\} = \ell_J^*(J_m^n) \quad \forall n \geq 1$

(iv) La suite $n \longmapsto \ell_J(J_{m(n!)})$ est croissante, stationnaire et converge vers $\ell_J^*(g)$; de même que la suite $n \longmapsto \ell_J(J_{n!})$, à partir d'un certain rang

5.8.7. <u>Théorème</u> :

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration de A fortement A.P. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal contenant $\sqrt{g}$. Alors on a :

$$\forall p \in \overline{\mathbb{N}^*}, \quad \forall k \in \overline{\mathbb{N}^*}, \quad \ell_{\mathfrak{M}}^*(g, p) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g).$$

<u>Si de plus</u> $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est <u>infini</u> alors $\forall p \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $\forall k \in \overline{\mathbb{N}^*}$,

$$\ell_{\mathfrak{M}}^*(g, p) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g).$$

5.8.8. <u>Corollaire</u> :

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local. Si $A/\mathfrak{M}$ est infini alors la largeur analytique d'ordre p d'une filtration g fortement A.P. est égale à $\lambda(g)$ et à $\gamma(g, k)$ pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$.

CHAPITRE I

INDEPENDANCE ANALYTIQUE GENERALISEE RELATIVEMENT A UNE FILTRATION

1.1. Définitions

Soit A un anneau. Soit J un idéal de A. Soit k un entier naturel non nul, éventuellement infini. Soit $f = (I_n)_n$ une filtration de A telle que $J + I_k \neq A$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de I_1. Pour $k = +\infty$ on pose $I_{n+k} = (0)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble d'indices est ainsi étendu à $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Soit I un idéal contenant $(a_1, \ldots, a_r)$.

1.1.1. On dit que les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à f si : Pour tout polynôme homogène de degré s appartenant à $A[X_1, \ldots, X_r]$, $F(a_1, \ldots, a_r) \equiv 0$ (mod. $J\, I_s + I_{s+k}$) implique que F a tous ses coefficients dans $J + I_k$.

1.1.2. Si les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre $+\infty$ relativement à f on dit qu'ils sont J-indépendants relativement à f.

1.1.3. Si les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à la filtration I-adique on dit qu'ils sont J-indépendants d'ordre k dans I.

1.1.4. Si les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k dans l'idéal qu'ils engendrent on dit qu'ils sont J-indépendants d'ordre k.

1.1.5. Si $(A, \mathfrak{M})$ est nœthérien local et si les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $\mathfrak{M}$-indépendants (respectivement $\mathfrak{M}$-indépendants dans I) on dit qu'ils sont <u>analytiquement indépendants</u> (resp. <u>analytiquement indépendants dans I</u>) (conformément aux définitions utilisées par Northcott et Rees dans [7]).

1.2. Conséquences des définitions.

Soient A un anneau, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Soit J un idéal de A.

Soit $f = (I_n)_n$ une filtration de A telle que $J + I_k \neq A$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments J-indépendants d'ordre k relativement à f.

Alors on a :

1.2.1. $\forall \{b_1, \ldots, b_s\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_r\}$, les éléments $b_1, \ldots, b_s$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à f.

1.2.2. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A inférieure à f et telle que $(a_1, \ldots, a_r) \subseteq J_1$. Si $I_k \subseteq J + J_k$ alors les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à g. (En particulier si J contient I_k alors $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à g).

1.2.3. Si J contient I_k alors $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k + 1 et d'ordre $+\infty$ relativement à f.

1.2.4. S'il existe a_i appartenant à $J + I_k$ alors $I_1 \subseteq J + I_k$

1.2.5. Si $r \geqslant 2$ alors $I = (a_1, \ldots, a_r) \subseteq I_1 \subseteq J + I_k$

Preuve

1.2.1. Les a_i sont deux à deux distincts. En effet si $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ alors pour $F(X_1, \ldots, X_r) = 1\,X_i - X_j$ on a : $F(a_1, \ldots, a_r) = 0$ or $1 \notin J + I_k$ d'où $a_1, \ldots, a_r$ ne sont pas J-indépendants d'ordre k relativement à f.

Soit $F(X_1,\dots,X_s) \in A[X_1,\dots,X_s]$, homogène de degré n, s'écrivant

$\sum_{j_1+\cdots+j_s=n} \beta_{j_1\cdots j_s} X_1^{j_1}\dots X_s^{j_s}$; $F(b_1,\dots,b_s) \in J I_n + I_{n+k} \Rightarrow \sum \beta_{j_1\cdots j_s} b_1^{j_1}\cdots b_s^{j_s} \in$

$J I_n + I_{n+k}$. Réordonnons $b_1,\dots,b_s$ suivant $a_1,\dots,a_r$. On a :

$\beta_{j_1\cdots j_s} b_1^{j_1}\dots b_s^{j_s} = \beta_{j_1\cdots j_s} a_1^{i_1}\dots a_r^{i_r}$ de telle sorte que si $b_k = a_p$, $j_k = i_p$

et telle que $i_p = 0$ si a_p ne figure pas parmi les $b_1,\dots,b_s$. $\beta_{j_1\cdots j_s}$ s'écrit

$\alpha_{i_1\cdots i_r}$. En complétant éventuellement par des coefficients nuls on a :

$$\sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1\cdots i_r} a_1^{i_1}\dots a_r^{i_r} = \sum_{j_1+\cdots+j_s=n} \beta_{j_1\cdots j_s} b_1^{j_1}\dots b_s^{j_s} \equiv 0 \ (\text{mod. } J I_n + I_{n+k})$$

d'où tous les $\alpha_{i_1\cdots i_r}$ sont dans $J + I_k$. Les $\beta_{j_1\cdots j_s}$ étant parmi les $\alpha_{i_1\cdots i_r}$, ils sont tous dans $J + I_k$.

1.2.2. Soit $F(X_1,\dots,X_r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1}\dots X_r^{i_r}$ où $\alpha_{i_1\cdots i_r} \in A$.

$F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0 \ (\text{mod. } J J_n + J_{n+k}) \Rightarrow F(a_1,\dots,a_r) \in J I_n + I_{n+k}$ d'où F a tous ses coefficients dans $J + I_k \subseteq J + J_k$ si $I_k \subseteq J + J_k$. D'où $a_1,\dots,a_r$ J-indépendants d'ordre k relativement à g.

1.2.3. $F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0 \ (\text{mod. } J I_n) \Rightarrow F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0 \ (\text{mod. } J I_n + I_{n+k+1})$ $\Rightarrow F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0 \ (\text{mod. } J I_n + I_{n+k})$. Donc si on a : $[F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0 \ (\text{mod. } J I_n + I_{n+k}) \Rightarrow$ F a tous ses coefficients dans $J + I_k]$ et si J contient I_k alors $[F(a_1,\dots,a_r) \in J I_n$ ou $F(a_1,\dots,a_r) \in J I_n + I_{n+k+1}] \Rightarrow$ F a tous ses coefficients dans $J = J + I_{k+1}$; d'où $a_1,\dots,a_r$ sont J-indépendants d'ordre k+1 et d'ordre $+\infty$ relativement à f.

1.2.4. Soit $a_i \in J + I_k$. $\forall x \in I_1$ $a_i x \in J I_1 + I_{1+k}$ d'où en posant

$F(X_1, ..., X_r) = x X_i$ on a $F(a_1, ..., a_r) = x a_i \in J I_1 + I_{1+k}$ d'où

$x \in J + I_k$. On a donc $I_1 \subseteq J + I_k$.

1.2.5. Si $r \geq 2$. Soient $i \neq j \in [1, r]$ et $F(X_1, ..., X_r) = a_i X_j - a_j X_i$.

$F(a_1, ..., a_r) = 0$ d'où $a_i \in J + I_k$ et $I_1 \subseteq J + I_k$ d'où $I = (a_1, ..., a_r) \subseteq I_1 \subseteq J + I_k$

Dans ce qui suit nous disons d'une suite infinie $a_1, a_2, a_3, ...$ qu'elle est

J-indépendante d'ordre k relativement à f si $\forall r \geq 1$ $a_1, ..., a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à f.

1.3. <u>Proposition</u>.

Soit A un anneau. Soit J un idéal de A. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f = (I_n)_n$ une filtration de A telle que $J + I_k \neq A$. Soient $a_1, ..., a_r, ...$ des éléments de I_1. Si $a_1, ..., a_r, ...$ est J-indépendante d'ordre k relativement à f alors la suite d'idéaux $K_1 = (a_1)$, $K_2 = (a_1, a_2)$, $K_3 = (a_1, a_2, a_3)$,... est strictement croissante. Si A est nœthéi[en] tout système d'éléments J-indépendants d'ordre k relativement à f peut être complété en un système maximal d'éléments J-indépendants d'ordre k relativement à f.

<u>**Preuve**</u> : $K_i = (a_1, ..., a_i)$. On suppose $a_1, a_2, ...$ J-indépendants d'ordre k relativement à f. $a_{i+1} \in K_i \Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_i$ tels que $a_{i+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i$.

Soit $F(X_1, ..., X_i, X_{i+1}, ...) = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_i X_i - X_{i+1}$. $F(a_1, a_2, ...) = 0$ d'où

$1 \in J + I_k$, ce qui est contraire au fait que $J + I_k \neq A$. $a_{i+1} \notin K_i$ donc

$K_i \subsetneq K_{i+1}$ Si A est nœthérien toute suite croissante d'idéaux est stationnaire; donc la suite des K_i, qui est strictement croissante est forcément finie.

1.4 Exemples :

1.4.1. Soit $A = k[X_1,..., X_r]$ où k est un corps. Soit $I = (X_1,..., X_r)$. Alors $X_1,..., X_r$ est une suite A-régulière d'où $X_1,..., X_r$ sont I-indépendants dans I et $\forall s < r$ $X_1,..., X_s$ sont $\mathfrak{M}$-indépendants (dans $(X_1,..., X_s)$).

1.4.2. Soit $A = k[X_1, X_2, X_3,...]$ où k est un corps Soit $K_1 = (X_1)$, $K_2 = (X_1, X_2)$,... Les éléments $X_1, X_2, ..., X_r$ sont $\mathfrak{M}$-indépendants $\forall r \geq 1$ avec $\mathfrak{M} = (X_1, X_2, X_3,...)$. La suite $X_1, X_2,...$ est $\mathfrak{M}$-indépendante et infinie (et A n'est pas nœthérien).

1.4.3. Soit $A = \mathbb{Z}[X, Y]$, X et Y sont I-indépendants avec $I = (X, Y)$ car X, Y est une suite A-régulière. Soit $a_1 = XY$ et $a_2 = Y^2$; a_1 et $a_2 \in I^2$.

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i (XY)^i Y^{2(n-i)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i Y^{2n-i} = 0 \; ; \; i + (2n-i) = 2n. \text{ Alors}$$

$\alpha_i \in I$ donc a_1 et a_2 sont I-indépendants dans $I_2 = (XY, Y^2)$. Par contre a_1, a_2 n'est pas une suite A-régulière. En effet : $Y^2 (X) \in (XY) = (a_1)$ donc $Xa_2 \in (a_1)$ mais $X \notin (a_1)$.

1.5 Proposition

Soient A un anneau. Soit $f = (I_n)_n$ une filtration de A Soient $a_1,..., a_r$ des éléments de I_1. Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. Soit J un idéal de A tel que $J + I_k \neq A$. Si les éléments $a_1,..., a_r$ sont J-indépendants

d'ordre k relativemennt à f et si $p \geq 1$ est tel que $I_k \subseteq J + I_p^k$ (en particulier si J contient I_k) alors on a :

1) $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à $f_{I_p} = (I_p^n)_n$

2) $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à $f^{(p)} = (I_{pn})_n$

3) Si J contient I_k alors $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à $f^p = (I_n^p)_n$.

Preuve : Soit $F(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1 \cdots i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$

$F(a_1^p, \ldots, a_r^p) \equiv 0 \text{ (mod. } J I_p^n + I_p^{n+k}) \Rightarrow F(a_1^p, \ldots, a_r^p) \equiv 0 \text{ (mod } J I_{pn} + I_{p(n+k)})$

$F(a_1^p, \ldots, a_r^p) \equiv 0 \text{ (mod. } J I_{pn} + I_{p(n+k)}) \Rightarrow \sum_{i_1+\cdots+i_1=n} \alpha_{i_1 \cdots i_r} a_1^{pi_1} \cdots a_r^{pi_r}$

$\equiv 0 \text{ (mod. } J I_{pn} + I_{pn+k})$ d'où $\alpha_{i_1 \ldots i_r} \in J + I_k \subseteq J + I_p^k \subseteq J + I_{pk}$; on a donc 1) et 2). $F(a_1^p, \ldots, a_r^p) \equiv 0 \text{ (mod. } J I_n^p + I_{n+k}^p) \Rightarrow F(a_1^p, \ldots, a_r^p)$

$\equiv 0 \text{ (mod. } J I_{pn} + I_{pn+k})$ d'où F a tous ses coefficients dans $J+I_k$. Si J contient I_k alors $J+I_k = J+I_k^p$.

1.6 **Proposition** :

Soit A un anneau. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de A et $I = (a_1, \ldots, a_r)$. Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. Soit J un idéal de A tel que $J + I^k \neq A$.

Alors les éléments $a_1,\dots,a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à f_I, c'est-à-dire J-indépendants d'ordre k, si et seulement si pour tout polynôme homogène F à coefficients dans A, à r indéterminées, $F(a_1,\dots,a_r) = 0$ implique que F a tous ses coefficients dans $J + I^k$.

Preuve : ($\Rightarrow$) : triviale

($\Leftarrow$) : Soit $F(X_1,\dots,X_r) = \sum_{i_1+\dots+i_r=s} \alpha_{i_1\dots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$ où $\alpha_{i_1\dots i_r} \in A$

$F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0\ (J\, I^s + I^{s+k}) \Rightarrow \exists\ (\beta_{i_1\dots i_r})_{i_1\dots i_r} \in J + I^k$ tels que

$F(a_1,\dots,a_r) = \sum_{i_1+\dots+i_r=s} \beta_{i_1\dots i_r} a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r}$ d'où en posant $F'(X_1,\dots,X_r)$

$= \sum_{i_1+\dots+i_r=s} (\alpha_{i_1\dots i_r}-\beta_{i_1\dots i_r}) X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$. On a $F'(a_1,\dots,a_r) = 0$; cela implique

que F' a tous ses coefficients dans $J + I^k$. Ces coefficients sont

$\alpha_{i_1\dots i_r} - \beta_{i_1\dots i_r}$ comme $\beta_{i_1\dots i_r} \in J + I^k$ on a $\alpha_{i_1\dots i_r} \in J + I^k$ donc F a

tous ses coefficients dans $J + I^k$. Les elements $a_1,\dots,a_r$ sont donc

J-indépendants d'ordre k (relativement à f_I).

Remarque :

La proposition précédente signifie que les éléments $a_1,\dots,a_r$ sont J-indépendants d'ordre k si et seulement si ils sont $(J + I^k)$-indépendants (d'ordre $+\infty$) où $I = (a_1,\dots,a_r)$.

1.7. Définition

Soit A un anneau. Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. Soit $f = (I_n)_n$ une filtration de A. Soit J un idéal tel que $J + I_k \neq A$. On pose :

$\ell_J(f, k)$ = sup{r : ∃ $a_1, \dots, a_r \in J$, J-indépendants d'ordre k relativement à f}.

$\ell_J(f)$ = $\ell_J(f, +\infty)$

sup J = sup {r : ∃ $a_1, \dots, a_r \in J$, J-indépendants}.

S'il n'existe pas d'éléments J-indépendants d'ordre k relativement à f, on pose $\ell_J(f, k) = 0$.

1.8 Conséquences :

Si A est nœthérien et $f = (I_n)_n$, on a :

1.8.1. $\ell_J(f, k) \leq \sup(J + I_k) \leq ht(J + I_k) \leq \dim A_P < \infty$ pour tout idéal premier P contenant $J + I_k$.

1.8.2. Si J contient I_k alors pour tout idéal P premier sur J, on a : $\ell_J(f, k) \leq \ell_J(f, k+1) \leq \ell_J(f) \leq \sup J \leq ht\, J \leq \dim A_P < \infty$.

1.8.3. Si J contient I_k alors on a $\forall p \geq 1$,

(i) $\forall n \geq 1$, $\ell_J(f, k) \leq \ell_J(I_p, k) \leq \ell_J(I_p^n, k)$

(ii) $\forall n \geq 1$, $\ell_J(f, k) \leq \ell_J(I_p^{n!}, k) \leq \ell_J(I_p^{(n+1)!}, k)$

(iii) La suite $n \mapsto \ell_J(I_p^{n!}, k)$ est croissante et stationnaire

(iv) $\forall n \geq 1$, $\ell_J(f, k) \leq \ell_J(f^{(p)}, k) \leq \ell_J(I_{pn}, k)$.

Preuve :

1.8.1. $\ell_J(f, k) \leq \sup(J + I_k)$ car si des éléments $a_1, \dots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à f alors pour tout polynôme homogène F à degré s appartenant à $A[X_1, \ldots, X_r]$, $F(a_1, \ldots, a_r) = 0 \Rightarrow F$ a tous ses coefficients dans $J+I_K$; donc les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $(J+I_K)$-indépendants. D'autre part,

$$\sup(J+I_K) \leq ht(J+I_K) \quad ([4], \text{ proposition } 1)$$

Si P contient $J+I_K$ $ht(J+I_K) \leq ht\, P = \dim A_P$ et A_P étant nœthérien local, $\dim A_P$ est finie

1.8.2. On applique la conséquence 1.2.3 et 1.8.1

1.8.3. (i) On applique la proposition 1.5.1.

(ii) On applique 1.8.3.i .

(iii) $n \longmapsto \ell_J(I_P^{n!}, K)$ est croissante d'après (ii), et majorée d'après 1.8.1 donc elle converge et comme elle ne prend que des valeurs entières, elle est stationnaire

(iv) On applique la proposition 1.5. et 1.8.3. (i)

CHAPITRE 2

J-INDEPENDANCE ET ANNEAUX DE REES

Dans ce chapitre A désigne un anneau.

2.1. Soit Δ un monoïde commutatif et Soient $(J_n)_{n\in\Delta}$ et $(K_n)_{n\in\Delta}$ deux familles de sous-groupes de A telles que $K_n \subseteq J_n$, $J_n J_m \subseteq J_{n+m}$ et $K_n J_m \subseteq K_{n+m}$ $\forall\, n, m \in \Delta$. Alors le groupe commutatif $\underset{n\in\Delta}{\oplus} \frac{J_n}{K_n}$ muni de la multiplication suivante est un anneau gradué

$$\forall\, n, m \in \Delta,\ \forall\ a_n \in J_n,\ b_m \in J_m \quad (a_n + K_n)(b_m + K_m) = a_n b_m + K_{n+m}.$$

Dans cette section tous les anneaux gradués de la forme précédente seront supposés munis de la multiplication définie ci-dessus.

En particulier pour tout anneau gradué $B = \underset{n}{\oplus} B_n$ du type $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N}$) et pour tout idéal gradué $L = \underset{n}{\oplus} L \cap B_n$ de B, l'anneau quotient $\frac{B}{L}$ est gradué par $\frac{B_n}{L\cap B_n} \simeq \frac{B_n + L}{L}$. Appliquons ces remarques aux cas particuliers suivants.

2.2. Soient $g = (J_n)_n$ une filtration de A, J un idéal de A, k un entier ≥ 1, éventuellement infini, B l'anneau de Rees généralisé $\mathcal{R}(A, g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n X^n$, L l'idéal $(u^k, J)\,\mathcal{R}(A, g)$ où $u = X^{-1}$. On conviendra que lorsque $k = +\infty$, $u^k = 0$ et $J_k = (0)$. $L = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (J_{k+n} + JJ_n)X^n$ est un idéal gradué

$L \cap J_n X^n = (J_{k+n} + JJ_n) X^n$. Par conséquent on a les isomorphismes d'anneaux suivants :

2.2.1. $$\frac{\mathcal{R}(A,g)}{(u^k, J)\ \mathcal{R}(A,g)} \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n X^n}{(J_{k+n} + JJ_n)\ X^n} \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{(J_{k+n} + JJ_n)} \approx \sum_{n \geq -k} \frac{J_n}{J_{k+n} + JJ_n}$$

De même en considérant l'anneau de Rees $B = R(A, g) = \sum_{n\geq 0} J_n X^n$ et l'idéal gradué $L = \sum_{n\geq 0} (JJ_n + J_{n+k}) X^n = R(A, g) \cap (u^k, J)\mathcal{R}(A, g)$, on obtient les isomorphismes d'anneaux :

2.2.2. $$\frac{R(A, g)}{R(A, g) \cap (u^k, J)\ \mathcal{R}(A, g)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{J_n X^n}{(J_{n+k} + JJ_n) X^n} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{J_n}{J_{n+k} + JJ_n}$$

En particulier en prenant $k = +\infty$, $\dfrac{R(A, g)}{JR(A, g)} \approx \sum_{n\geq 0} \dfrac{J_n X^n}{JJ_n X^n} \approx \sum_{n\geq 0} \dfrac{J_n}{JJ_n}$.

Enfin si I est un idéal de A tel que $I \subseteq J_1$ alors $L = R(A, I) \cap (u^k, J)\ \mathcal{R}(A, g)$ $= \sum_{n\geq 0} I^n \cap (J J_n + J_{n+k}) X^n$ est un idéal gradué de $R(A, I)$. Par conséquent comme ci-dessus on a :

2.2.3 $$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J)\ \mathcal{R}(A,g)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^n \cap (J J_n + J_{n+k})}$$

En particulier :

- Pour $k = +\infty$, $L = R(A, I) \cap JR(A, g) = R(A, I) \cap J\,\mathcal{R}(A, g) = \sum_{n\geq 0} I^n \cap (J J_n) X^n$ est un idéal gradué de $R(A, I)$ et on a :

2.2.3.1. $$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap JR(A,g)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^n \cap J J_n}$$

- Pour $k = 1$, $L = R(A, I) \cap (u, J)\,\mathcal{R}(A, g) \approx \sum_{n \geq 0} I^n \cap (J\,J_n + J_{n+1})$ est un idéal gradué de $R(A, I)$. Si de plus I est un idéal contenu dans J, en posant $g = f_I$ on a :

$$2.2.3.2.\quad \frac{\mathcal{R}(A,I)}{(u,J)\ \mathcal{R}(A,\ I)} \approx \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{JI^n + I^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{JI^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{I^n \cap JI^n} \approx \frac{R(A,I)}{JR(A,I)}$$

On retrouve ainsi un résultat établi par M. Soumare ([12], Lemme 1.4.2)

2.3. Désormais dans le reste de cette section, $g = (J_n)$ désigne une filtration donnée de A, $k \geq 1$ un entier éventuellement infini, J un idéal de A tel que $J + J_k \neq A$, $a_1, \dots, a_r$ des éléments de J_1 et $I = (a_1, \dots, a_r)$. On posera $K_n = I^n \cap (J\,J_n + J_{n+k})$ $\forall\, n \geq 0$. Dans le cas où $k = +\infty$ on posera $J_\infty = (0)$.

On désignera $G_g(J, k)$ l'anneau gradué $\sum_{n \geq 0} I^n/K_n$. Soit $t_i = a_i + K_1$ $\forall\, i = 1, 2, \dots, r$. Alors $G_g(J, k) = \frac{A}{J+J_k}[t_1, \dots, t_r]$. Soit $\varphi_g(J, k)$ l'unique épimorphisme de $\frac{A}{J+J_k}[X_1, \dots, X_r]$ sur $G_g(J, k)$ tel que $\varphi_g(J, k)(X_i) = t_i$ $\forall\, i$ et $\varphi_g(J, k)(\alpha) = \alpha$, $\forall\, \alpha \in \frac{A}{J+J_k}$; $\operatorname{Ker} \varphi_g(J, k)$ est l'idéal des polynômes de $\frac{A}{J+J_k}[X_1, \dots, X_r]$ qui s'annulent en $(t_1, \dots, t_r)$.

Désormais on posera $\varphi_k = \varphi_g(J, k)$. D'autre part, d'après (2.2.3), l'anneau gradué quotient $\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J)\mathcal{R}(A,g)}$ est isomorphe à l'anneau $G_g(J, k)$. Pour être plus précis, il existe un isomorphisme gradué $\psi_g(J, k)$ noté ψ_k de $G_g(J, k)$ sur $\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J)\mathcal{R}(A,g)}$ dont la restriction à $\frac{A}{J+J_k}$ est l'identité

Si l'on pose $\psi_k(t_i) = u_i \quad \forall i = 1, 2, ..., r$

alors : $$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J) \mathcal{R}(A,g)} = \frac{A}{J+J_k}[u_1,...,u_r] \text{ et}$$

on a :
$$\begin{tikzcd}
\frac{A}{J+J_k}[X_1,...,X_r] \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[dr, "\theta_k"'] & G_g(J,k) = \frac{A}{J+J_k}[t_1,...,t_r] = \sum_{n \geq 0} \frac{J^n}{J^n \cap (JJ_n + J_{n+k})} \arrow[d, "\psi_k"] \\
 & \frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J) \mathcal{R}(A,g)} = \frac{A}{J+J_k}[u_1,...,u_r]
\end{tikzcd}$$

$\varphi_k(X_i) = t_i = a_i + K_1$

$\psi_k(t_i) = u_i = a_i X + D \quad$ où $\quad D = R(A,I) \cap (u^k, J) \mathcal{R}(A,g)$

2.3.1. Soit $G(X_1,...,X_r) = \sum_{i_1,...,i_r} (\alpha_{i_1 ... i_r} + J + J_k) X_1^{i_1} ... X_r^{i_r}$.

$$\varphi_k(G) = \sum(\alpha_{i_1 ... i_r} + J + J_k) t_1^{i_1} ... t_r^{i_r} = G(t_1,...,t_r)$$

2.3.2. Soit $\theta_k = \psi_k \circ \varphi_k$. Pour $G = \sum(\alpha_{i_1 ... i_r} + J + J_k) X_1^{i_1} ... X_r^{i_r}$

$$\theta_k(G) = \psi_k(G(t_1,...,t_r)) = \sum (\alpha_{i_1 ... i_r} + K_0) u_1^{i_1} ... u_r^{i_r} = G(u_1,...,u_r)$$

2.3.3. Si F est un polynôme homogène de degré s appartenant à

$A[X_1,...,X_r]$, F s'écrit : $F(X_1,...,X_r) = \sum_{i_1+ \cdots +i_r = s} \alpha_{i_1 \cdots i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$.

On pose $\overline{F}(X_1,...,X_r) = \sum_{i_1+ \cdots +i_r = s} (\alpha_{i_1 \cdots i_r} + K_0) X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$

$$\varphi_k(\overline{F}) = \overline{F}(t_1,...,t_r) = \sum_{i_1+ \cdots +i_r = s} \alpha_{i_1 \cdots i_r} a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r} + K_s = F(a_1,...,a_r) + K_s.$$

2.4. **Lemme**

Soit B un anneau. Soient $v_1, \dots, v_r$ des éléments de degré 1 d'un anneau gradué qui est une B-algèbre. Soit Π l'unique épimorphisme de $B[X_1, \dots, X_r]$ sur $B[v_1, \dots, v_r]$ tel que

$\Pi(X_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, r$ et $\Pi(\alpha) = \alpha \ \forall \alpha \in B$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Π est un isomorphisme

(ii) $\{v_1, \dots, v_r\}$ est algébriquement libre sur B.

Preuve :

Soit $G(X_1, \dots, X_r) = \Sigma \lambda_{i_1 \dots i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}$ où $\lambda_{i_1 \dots i_r} \in B$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) :

$G(v_1, \dots, v_r) = 0 \Rightarrow \Pi^{-1}(\Sigma \lambda_{i_1 \dots i_r} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r}) = 0 \Rightarrow \Sigma \lambda_{i_1 \dots i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r} = 0$

d'où $G = 0$; $\{v_1, \dots, v_r\}$ est donc algébriquement libre sur B.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Π est un épimorphisme ; $\Pi(G) = 0 \Rightarrow \Sigma \lambda_{i_1 \dots i_r} v_1^{i_1} \dots v_r^{i_r} = 0$

où $G = \Sigma \lambda_{i_1 \dots i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}$ d'où $G(v_1, \dots, v_r) = 0$, (ii) $\Rightarrow$ $G = 0$, Π est donc un monomorphisme par conséquent Π est un isomorphisme.

2.5. **Théorème**

Avec les hypothèses et notations de 2.2 et 2.3, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $a_1, \dots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à g.

(ii) φ_k est un isomorphisme

(iii) θ_k est un isomorphisme de $\frac{A}{J+J_k}[X_1,\dots,X_r]$ sur

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)\mathcal{R}(A,g)}$$

(iv) La famille $\{t_1,\dots,t_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J+J_k}$

(v) La famille $\{u_1,\dots,u_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J+J_k}$

<u>Preuve</u> :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) : φ_k est un épimorphisme gradué. Pour

$F = \sum_{i_1+\dots+i_r=s} \lambda_{i_1\dots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$ où $\lambda_{i_1\dots i_r}\in A$ posons $\bar{F}(X_1,\dots,X_r)$

$= \sum(\lambda_{i_1\dots i_r}+K_0)X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$ $a_1,\dots,a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à g si et seulement si

$\left[\forall F = \sum_{i_1+\dots+i_r=s} \lambda_{i_1\dots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r},\ F(a_1,\dots,a_r)\equiv 0 \pmod{J J_s + J_{s+k}} \Rightarrow F\in\right.$

$\left.(J+J_k)[X_1,\dots,X_r]\right]$ si et seulement si $\left[\forall F = \sum_{i_1+\dots+i_r=s} \lambda_{i_1\dots i_r} X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}, F(a_1,\dots,a_r)\right.$

$\left.\in I^s\cap(J J_s + J_{s+k}) = K_s \Rightarrow F\in K_0[X_1,\dots,X_r]\right]$ si et seulement si $[\forall F$ homogène de degré s, $\varphi_k(\bar{F}) = 0 \Rightarrow \bar{F} = 0]$ si et seulement si φ_k est un isomorphisme

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) car ψ_k est un isomorphisme et $\theta_k = \psi_k \circ \varphi_k$.

Le lemme 2.4 $\Rightarrow$ [(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) et (iii) $\Leftrightarrow$ (v)]

2.6. Considérons maintenant le cas particulier $k = +\infty$. Alors avec les notations et conventions de 2.2 et 2.3, $G_g(I,\infty) = \sum_{n} \frac{I^n}{I^{n+1}} = \frac{A}{I}[t_1,\dots,t_r]$

où $t_i = a_i + K_1$ avec $K_1 = I \cap JJ_1$. Alors $\varphi_\infty = \varphi_g(J, \infty)$ est un épimorphisme gradué de $\frac{A}{J}[X_1, ..., X_r]$ sur $G_g(J, \infty)$ d'après 2.3. D'autre part il existe un isomorphisme d'anneaux gradués $\psi_\infty = \psi_g(J, \infty)$ de $G_g(J, \infty)$ sur $\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap JR(A,g)}$ dont la restriction à $\frac{A}{J}$ est l'identité. Posons $\psi_\infty(t_i) = u_i \ \forall\ i = 1, 2, ..., r$ et $\theta = \psi_\infty \circ \varphi_\infty$; on a le corollaire suivant :

Corollaire :

Sous les hypothèses et notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $a_1, ..., a_r$ sont J-indépendants relativement à la filtration g.

(ii) φ_∞ est un isomorphisme de $\frac{A}{J}[X_1, ..., X_r]$ sur $G_g(J, \infty)$

(iii) $\theta = \psi_\infty \circ \varphi_\infty$ est un isomorphisme de $\frac{A}{J}[X_1, ..., X_r]$ sur

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap JR(A,g)}$$

(iv) La famille $\{t_1, ..., t_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J}$.

(v) La famille $\{u_1, ..., u_r\}$ est algébriquement libre sur $\frac{A}{J}$.

Dans ce corollaire si l'on prend $g = f_I$ la filtration I-adique on obtient le corollaire suivant qui est similaire à la proposition 2 de Barshay [2]:

2.7 Corollaire

Soient $J \neq A$ un idéal de A, $a_1, ..., a_r$ des éléments de A, $I = (a_1, ..., a_r)$. Alors $a_1, a_2, ..., a_r$ sont J-indépendants si et

seulement si l'épimorphisme $\theta : \frac{A}{J}\ [X_1, \dots, X_r] \longrightarrow \frac{R(A,I)}{JR(A,I)}$ est un isomorphisme.

2.8. Dans cette partie, nous nous intéresserons au cas particulier $k = 1$.

Considérons pour tout entier $k \geq 1$ éventuellement infini l'idéal gradué de $\mathcal{R}(A,I)$, $L = \mathcal{R}(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (I^n \cap (J J_n + J_{n+k}))X^n$ alors :

$$\frac{\mathcal{R}(A,I)}{L} \approx \sum_{n > -k} \frac{I^n}{K_n} \quad \text{où} \quad K_n = I^n \cap (J J_n + J_{n+k}).$$

En particulier pour $k = 1$, avec les notations de 2.3, il existe un isomorphisme gradué ψ_1 de $G_g(J,1) = \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{K_n}$ sur $\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u,J)\mathcal{R}(A,g)} \approx \frac{\mathcal{R}(A,I)}{\mathcal{R}(A,I) \cap (u,J)\mathcal{R}(A,g)}$ dont la restriction à $\frac{A}{J+J_1}$ est l'identité et un épimorphisme $\varphi_1 : \frac{A}{J+J_1}[X_1, \dots, X_r]$ sur $G_g(J, 1)$ dont la restriction à $\frac{A}{J+J_1}$ est l'identité. Si l'on pose $t_i = a_i + K_1 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, r$ et $u_i = \psi_1(t_i)$ on obtient :

2.9 <u>Corollaire</u>

Sous les hypothèses et notations précédentes les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $a_1, \dots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre 1 relativement à la filtration g.

(ii) φ_1 est un isomorphisme de $A/J+J_1\ [X_1, \dots, X_r]$ sur $G_g(J, 1)$

(iii) $\theta_1 = \psi_1 \circ \varphi_1 : \dfrac{A}{J+J_1}[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow \dfrac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u,J)\mathcal{R}(A,g)} \approx$

$\dfrac{\mathcal{R}(A,I)}{\mathcal{R}(A,I) \cap (u,J)\mathcal{R}(A,g)}$ est un isomorphisme .

(iv) La famille $\{t_1, \ldots, t_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{A}{J+J_1}$.

(v) La famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{A}{J+J_1}$.

2.10 Proposition

Avec les notations et conventions de 2.2 et 2.3. Soit $\pi_g(J, k)$ l'épimorphisme de :

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,I)} \text{ sur } \frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,g)}$$

tel que $\pi_g(J, k)\,(a_iX + R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,I)) = a_iX + R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,g)$ et $\forall \alpha \in A$, $\pi_g(J, k)\ (\alpha + R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,I)) = \alpha + R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,g)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

2.10.1 $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à g.

2.10.2 $\begin{cases} \text{(i)} & a_1, \ldots, a_r \text{ sont J-indépendants d'ordre } k \\ \text{(ii)} & \forall\, n \geq o \quad I^n \cap (JJ_n + J_{n+k}) = JI^n + I^{n+k} \end{cases}$

2.10.3 $\begin{cases} \text{(i)} & \theta_I\ (J,\ k) \text{ est un isomorphisme} \\ \text{(ii)} & \pi_g(J,\ k) \text{ est un isomorphisme} \end{cases}$

2.10.4 θ_k est un isomorphisme de $\dfrac{A}{J+J_k}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,g)}$

Preuve : $\theta_I(J,k) = \psi_I(J,k) \circ \varphi_I(J,k)$.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{A}{J+J_k}[X_1,\dots,X_r] & \xrightarrow{\theta_I(J,k)} & \dfrac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,I)} \approx \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{(JI^n + I^{n+k})} \\ & \searrow^{\theta_k} & \Big\downarrow \Pi_g(J,k) \\ & & \dfrac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,g)} \approx \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{I^n \cap (JJ_n + J_{n+k})} \end{array}$$

$\Pi_g(J,k)$ et $\theta_I(J,k)$ sont des épimorphismes et $\theta_k = \Pi_g(J,k) \circ \theta_I(J,k)$

2.10.1 $\Leftrightarrow$ **2.10.4.** d'après le théorème 2.5

2.10.4. $\Rightarrow$ **2.10.3** :

2.10.4 $\Rightarrow$ $\theta_I(J,k)$ est injectif ; d'où $\theta_I(J,k)$ est un isomorphisme et

$\Pi_g(J,k) = \theta_k \circ (\theta_I(J,k))^{-1}$ est un isomorphisme d'où 2.10.3.

2.10.3 $\Rightarrow$ **2.10.4** car si $\theta_I(J,k)$ et $\Pi_g(J,k)$ sont des isomorphismes alors θ_k est un isomorphisme d'où 2.10.4.

2.10.2 (i) $\Leftrightarrow$ **2.10.3 (i)** : on remplace g par f_I. $\Pi_g(J,k)$ devient l'application identique. Daprès le théorème 2.5 $a_1,\dots,a_r$ sont J-indépendants d'ordre k (dans I) si et seulement si $\theta_k = \theta_I(J,k)$ est un isomorphisme

2.10.2 (ii) $\Leftrightarrow$ **2.10.3 (ii)** :

2.10.2 (ii) $\Leftrightarrow$ $R(A,I) \cap (u^k, J)\,\mathcal{R}(A,g) = \sum\limits_{n\geq 0} (I^n \cap (JJ_n + J_{n+k}))X^n$

$= \sum\limits_{n\geq 0} (JI^n + I^{n+k})X^n = R(A,I) \cap (u^k, J)\,\mathcal{R}(A,I) \Leftrightarrow \Pi_g(J,k)$ est l'identité

Si $\Pi_g(J,k)$ est un isomorphisme alors il est injectif et on a

$R(A,I) \cap (u^k, J)\,\mathcal{R}(A,g) \subseteq R(A,I) \cap (u^k, J)\,\mathcal{R}(A,I)$, d'où l'égalité ; on a donc

$\Pi_g(J,k) =$ identité dans $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k,J)\mathcal{R}(A,I)}$ ce qui équivaut à 2.10.2 (ii)

CHAPITRE 3

J-INDEPENDANCE FAIBLE, LARGEUR ANALYTIQUE D'UNE FILTRATION

3.1 Définition

Soit A un anneau. Soit J un idéal de A. Soit k un entier naturel non nul, eventuellement infini. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A telle que $J + J_k \neq A$. Soient $a_1, \dots, a_r$ des éléments de J_1.

3.1.1 On dit que les éléments $a_1, \dots, a_r$ sont faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à g s'il existe une famille $(k'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'entiers telle que

$$k'_p + k'_q \geq k'_{p+q} > k'_p > k'_0 = 0 \geq k'_{-p}$$

$\forall\, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $a_1, \dots, a_r$ J-indépendants d'ordre k relativement à la filtration $(J_{k'_n})_{n \in \mathbb{Z}}$.

3.1.2 On pose : $\ell^*_J(g, k) = \sup\{r \mid \exists\, a_1, \dots, a_r$ faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à $g\}$. Si $k = +\infty$ on note $\ell^*_J(g)$ le nombre $\ell^*_J(g, +\infty)$.

3.2. Remarque

Des éléments J-indépendants d'ordre k relativement à g sont faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à g, d'où on a $\ell_J(g, k) \leq \ell^*_J(g, k)$.

3.3. Théorème

Soit A un anneau. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A. Soient $a_1, \dots, a_r$ des éléments de J_1. Soit P un idéal premier sur $\sqrt{g}$. Soit k un entier naturel, éventuellement égal à $+\infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes quels que soient $t_1, \dots, t_r \in A - P$.

(i) $a_1, \dots, a_r$ sont P-indépendants (respectivement faiblement P-indépendants) d'ordre k relativement à g.

(ii) $\dfrac{a_1}{t_1}, \dots, \dfrac{a_r}{t_r}$ sont PA_P-indépendants (respectivement faiblement PA_P-indépendants) d'ordre k relativement à $gA_P = (J_n A_P)_n$.

(iii) $t_1 a_1, \dots, t_r a_r$ sont P-indépendants (respectivement faiblement P-indépendants) d'ordre k relativement à g.

Preuve

Elle sera faite uniquement pour la notion de P-indépendance d'ordre k, la notion affaiblie se montrant de la même manière :

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $F(X_1, \dots, X_r) \in A_P[X_1, \dots, X_r]$, polynôme homogène de degré n

$F(X_1, \dots, X_r)$ s'écrit : $\displaystyle\sum_{i_1+\dots+i_r=n} \overline{\alpha_{i_1 \dots i_r}} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}$ où $\overline{\alpha_{i_1 \dots i_r}} = \dfrac{\alpha_{i_1 \dots i_r}}{s_{i_1 \dots i_r}}$

avec $s_{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{S} = A - P$

$F\left(\dfrac{a_1}{t_1}, \dots, \dfrac{a_r}{t_r}\right) \equiv 0 \pmod{(PA_P \cdot J_n A_P + J_{n+k} A_P)} \Rightarrow \displaystyle\sum \dfrac{\alpha_{i_1 \dots i_r}}{s_{i_1 \dots i_r}} \cdot \dfrac{a_1^{i_1}}{t_1^{i_1}} \cdots \dfrac{a_r^{i_r}}{t_r^{i_r}} \equiv 0$

$\pmod{(PJ_n A_P + J_{n+k} A_P)} \Rightarrow \exists \ (t_{i_1 \dots i_r})_{i_1 \dots i_r}, t \in \mathcal{S}$ tels que

$$\frac{\sum t_{i_1\ldots i_r}\,\alpha_{i_1\ldots i_r} a_1^{i_1}\ldots a_r^{i_r}}{t} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ (PJ_n\,A_P + J_{n+k}\,A_P)) \text{ d'où } \exists\ (t_{i_1\ldots i_r}) \in \mathcal{S},$$

$\exists\ t' \in \mathcal{S}$ tels que : $t' \sum\limits_{i_1+\cdots+i_r=n} t_{i_1\ldots i_r}\,\alpha_{i_1\ldots i_r}\, a_1^{i_1}\ldots a_r^{i_r} \in PJ_n + J_{n+k}$.

Si $a_1,\ldots,a_r$ sont P-indépendants d'ordre k relativement à g, on a alors

$t'\, t_{i_1\ldots i_r}\,\alpha_{i_1\ldots i_r} \in P + J_k = P$; comme t' et $t_{i_1\ldots i_r}$ n'appartiennent pas à

l'idéal premier P, on a $\alpha_{i_1\ldots i_r} \in P$ d'où : $\dfrac{\alpha_{i_1\ldots i_r}}{s_{i_1\ldots i_r}} = \overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r} \in PA_P =$

$PA_P + J_kA_P$; d'où (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $F(X_1,\ldots,X_r)$ un polynôme homogène de degré n à coefficients

dans A ; $F(X_1,\ldots,X_r)$ s'écrit : $\sum\limits_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1\ldots i_r} X_1^{i_1}\ldots X_r^{i_r}$;

$F(a_1,\ldots,a_r) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (PJ_n + J_{n+k})) \Rightarrow$

$\sum\limits_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1\ldots i_r}\, a_1^{i_1}\ldots a_r^{i_r} \equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ (PJ_n + J_{n+k}))$ d'où

$$\sum \frac{\alpha_{i_1\ldots i_r}}{1}\, t_1^{i_1}\ldots t_r^{i_r} \left(\frac{a_1}{t_1}\right)^{i_1}\ldots\left(\frac{a_r}{t_r}\right)^{i_r} = \frac{\sum \alpha_{i_1\ldots i_r}\, a_1^{i_1}\ldots a_r^{i_r}}{1} \equiv 0$$

$(\mathrm{mod.}\ (PJ_n\,A_P + J_{n+k}\,A_P))$

Si $\dfrac{a_1}{t_1},\ldots,\dfrac{a_r}{t_r}$ sont PA_P-indépendants d'ordre k relativement à gA_P alors

on a $\dfrac{\alpha_{i_1\ldots i_r}\, t_1^{i_1}\ldots t_r^{i_r}}{1} \in PA_P + J_kA_P = PA_P$, d'où il existe $t_{i_1\ldots i_r} \in \mathcal{S}$

avec $t_{i_1\ldots i_r}\,\alpha_{i_1\ldots i_r} \in P$; d'où $\alpha_{i_1\ldots i_r} \in P$ et on a $\alpha_{i_1\ldots i_r} \in P + J_k$ d'où (i).

CONCLUSION : (i) ⇔ (ii)

(iii) ⇔ (ii) : comme (i) ⇔ (ii) $\forall\ t_1, \dots, t_r$ on a : $t_1 a_1, \dots, t_r a_r$ sont P-indépendants d'ordre k relativement à g si et seulement si $\dfrac{t_1 a_1}{t_1^2}, \dots, \dfrac{t_r a_r}{t_r^2}$, qui sont $\dfrac{a_1}{t_1}, \dots, \dfrac{a_r}{t_r}$, sont PA_P -indépendants d'ordre k relativement à gA_P. D'où (iii) équivaut à (ii).

3.4. Corollaire

Soit A un anneau. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A. Soit P un idéal premier contenant J_1. Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. Alors on a :

$$\ell_P(g, k) = \ell_{PA_P}(gA_P, k) \leq \ell^*_P(g, k) = \ell^*_{PA_P}(gA_P, k)$$

3.5. Définitions : **g désigne une filtration.**

3.5.1. On appelle J-largeur analytique d'ordre k de g le nombre :

$$\ell^*_J(g, k) = \sup\{r : \exists\, a_1, \dots, a_r \text{ faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à } g\}.$$

3.5.2. On appelle largeur analytique d'ordre k de g le nombre

$$\ell^*(g, k) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \ell^*_{\mathfrak{M}}(g, k)$$

la largeur analytique d'ordre ∞ de g est appelée largeur analytique de g.

3.6. Conséquences :

On suppose que J contient J_1 et $g = (J_n)_n$ une filtration de A.

3.6.1. Si des éléments $a_1, \dots, a_r$ sont faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à la filtration g alors ils sont J-indépen-

dants d'ordre k_1 pour tout $k_1 \in \overline{\mathbb{N}}^*$.

3.6.2. $\ell_J(g, k) \leq \ell^*_J(g,k) \leq \sup J \leq \operatorname{ht} J$

3.6.3. Si P est premier sur J et si A est nœthérien alors

$$\ell^*_J(g,k) \leq \operatorname{ht} J \leq \dim A_P < \infty$$

3.6.4. Si A est semi-local nœthérien la largeur analytique d'ordre k de la filtration g est finie.

<u>**Preuve de**</u> 3.6.

3.6.1. : Soit $F(X_1, \ldots, X_r)$ un polynôme homogène de degré n à coefficients

dans A. $F(X_1, \ldots, X_r)$ s'écrit : $\displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1 \ldots i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$;

$F(a_1, \ldots, a_r) = 0 \Rightarrow F(a_1, \ldots, a_r) \equiv 0 \pmod{JJ_{k'_n} + J_{k'_{(n+k)}}}$

Si $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à $(J_{k'_n})_n$ alors

tous les coefficients de F sont dans $J + J_{k'_k} = J + J_{k_1}$; $a_1, \ldots, a_r$ faiblement

J-indépendants d'ordre k relativement à g implique que $a_1, \ldots, a_r$ sont

J-indépendants d'ordre k_1.

3.6.2. : La remarque 3.2 $\Rightarrow$ $\ell_J(g, k) \leq \ell^*_J(g, k)$

3.6.1 $\Rightarrow$ $\ell^*_J(g, k) \leq \sup J = \sup\{ r : \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J, \text{J-indépendants}\}$.

D'après Valla $\sup J \leq \operatorname{ht} J$.

3.6.3 On a $\operatorname{ht} J \leq \operatorname{ht} P = \dim A_P$. Si A est nœthérien A_P est local nœthérien donc de dimension finie

3.6.4 $\ell^*(g) = \sup\limits_{\mathfrak{m} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \ell^*_{\mathfrak{m}}(g, k)$; or chaque $\ell^*_{\mathfrak{m}}(g, k)$ est finie

d'après 3.6.3. Le nombre d'idéaux maximaux d'un anneau semi-local étant fini, on a $\ell^*(g) < \infty$.

3.7. Exemples

3.7.1. Construction dans un anneau nœthérien local $(A, \mathfrak{M})$ à corps résiduel infini d'une filtration nœthérienne g telle que

$$\forall\, k \in \overline{\mathbb{N}^*},\ \ell_{\mathfrak{M}}(g, k) = 0 \ \text{ et } \ \ell^*_{\mathfrak{M}}(g) \geq \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u, \mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A, g)} > 0 \text{ où}$$

$$\textbf{pour}\ \ g = (J_n)_n \quad \mathcal{R}(A, g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n X^n \ \text{ et } u = \frac{1}{X}.$$

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local dont le corps résiduel est infini et contenant un idéal I tel que $\ell_{\mathfrak{M}}(I) \geq 2$ (on montrera dans l'exemple 3.7.2 qu'un tel anneau existe). Soit g la filtration $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, r \in [1, m]$ $J_{mn+r} = I^{n+1}$ avec $m \geq 2$. On vérifie que g est une filtration nœthérienne. Soit $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. $\ell_{\mathfrak{M}}(g, k) = 0$. En effet $\forall\, a \in J_1$,

$$1 . a^{(mn+2)} = a . a^{mn+1} \in \mathfrak{M}\, I^{n+1} = \mathfrak{M} J_{mn+2} \subseteq \mathfrak{M}\, J_{mn+2} + J_{(mn+2)+k}$$

Or $1 \neq \mathfrak{M} + J_k = \mathfrak{M}$ d'où a n'appartient à aucun système d'éléments $\mathfrak{M}$-indépendants d'ordre k relativement à g, d'où $\ell_{\mathfrak{M}}(g, k) = 0$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ $\mathfrak{M}$-indépendants d'ordre k relativement à $f_I = (I^n)_n$. Soit $k'_n = m\,n$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Soit $F(X_1, \ldots, X_r)$ un polynôme homogène de degré n à coefficients dans A, $F(X_1, \ldots, X_r)$ s'écrivant $\sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}$.

$$F(a_1, \ldots, a_r) \equiv 0 \ (\mathfrak{M}\ J_{k'_n} + J_{k'_{(n+k)}}) \Rightarrow \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r}$$

$$\equiv 0 \ \ (\text{mod } \mathfrak{M}\ J_{mn} + J_{m(n+k)}) \ \Rightarrow \sum \alpha_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \equiv 0 \ \ (\text{mod. } \mathfrak{M}\, I^n + I^{n+k})$$

d'où F a tous ses coefficients dans $\mathfrak{M} + I^k = \mathfrak{M} = \mathfrak{M} + J_{k'_k}$. En conclusion on a $\ell^*_{\mathfrak{M}}(g) \geq r$ car $a_1, \ldots, a_r$ sont $\mathfrak{M}$-indépendants d'ordre k relativement à $(J_{k'_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(k'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie :

$$k'_p + k'_q \geq k'_{p+q} > k'_p > k'_0 = 0 \geq k'_{-p} \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N}^*.$$

g étant une filtration nœthérienne telle que $J_{mn} = J_m^n \quad \forall n$, d'après Okon ([8]Lemma 2.6). $\dim \dfrac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A,g)} = \dim \dfrac{\mathcal{R}(A,\ J_m)}{(u,\mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A,\ J_m)}$

$= \dim \dfrac{\mathcal{R}(A,\ I)}{(u,\mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A,I)} = \lambda(I)$: largeur analytique de l'idéal I au sens de Northcott et Rees et comme $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ est infini on a $\lambda(I) = \ell_{\mathfrak{M}}(I)$ et d'après ce qui précède $\ell^*_{\mathfrak{M}}(g) \geq \ell_{\mathfrak{M}}(I)$ d'où la conclusion :

$$\ell^*_{\mathfrak{M}}(g) \geq \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A,g)} = \ell_{\mathfrak{M}}(I) \geq 2$$

Dans le chapitre 5 on montrera que $\ell^*_{\mathfrak{M}}(g) = \dim \dfrac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A,g)}$ pour une telle filtration g.

3.7.2 Soit A un anneau et soit P un idéal premier de A. Si $\dfrac{A}{P}$ est infini alors $\dfrac{A_P}{PA_P} \approx \mathrm{Frac}(A/P)$ est infini

Supposons que A soit égal à $k[X_1, X_2, X_3]$ où k est un corps infini

Soit $\mathfrak{M} = (X_1, X_2, X_3)$. $\mathfrak{M}$ est maximal et $\dfrac{A}{\mathfrak{M}} \approx k$ est infini d'où $\dfrac{A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}$ est infini et c'est un anneau nœthérien local.

Soit $I = \mathfrak{m}$; X_1, X_2, X_3 est une suite régulière d'où X_1, X_2 et X_3 sont $\mathfrak{m}$-indépendants c'est-à-dire $\mathfrak{m}$-indépendants dans I d'où d'après le théorème 3.3 $\dfrac{X_1}{1}$, $\dfrac{X_2}{1}$ et $\dfrac{X_3}{1}$ sont $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$-indépendants dans $IA_{\mathfrak{m}}$. On a alors $3 \leq \ell_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}})$ et comme $\dfrac{A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}$ est infini $\ell_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}})$ est la largeur analytique $\lambda(IA_{\mathfrak{m}})$ au sens de Northcott et Rees, $\lambda(IA_{\mathfrak{m}}) \leq 3$ car I est engendré par 3 éléments. En conclusion on a $\ell_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) = 3$.

$$\ell^{*}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) \geq \ell_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) = \dim \frac{\mathcal{R}(A_{\mathfrak{m}}, IA_{\mathfrak{m}})}{(u, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})\,\mathcal{R}(A_{\mathfrak{m}}, IA_{\mathfrak{m}})} =$$

$\dim \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{I^n A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{m} I^n A_{\mathfrak{m}}} = 3$ (on montrera dans le chapitre 4 que $\ell^{*}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) = \ell_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}})$ lorsque $\dfrac{A}{\mathfrak{m}}$ est infini et A un anneau nœthérien). D'autre part $\ell^{*}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) \leq ht(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}) = ht\,\mathfrak{m} \leq 3$ donc

$$\ell^{*}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) = \ell_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(IA_{\mathfrak{m}}) = ht\,\mathfrak{m} = 3.$$

3.7.3 Soit A un anneau. Soit J un idéal de A. Soit I un idéal de A tel que $J + I \neq A$. On suppose qu'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de I, J-indépendants d'ordre k dans I. Soit $p \geq 1$. Alors d'après la proposition 1.5.2 $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_r^p$ sont J-indépendants d'ordre k dans I^p, on a $\forall p \geq 1$

$a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont faiblement J-indépendants d'ordre k dans I. En effet soit

$k'_n = pn$ pour tout n. $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont J-indépendants d'ordre k relative-

ment à la filtration $(I^{k'_n})_n$ et $\forall p', q \in \mathbb{N}^*$, $k'_{p'} + k'_q - k'_{p'+q} - k'_{p'} \ldots k'_q -$

$0 \geq k'_{p'}$. Par contre $a_1^{k+1}, \ldots, a_r^{k+1}$ ne sont pas J-indépendants d'ordre k

dans I pour $k \in \mathbb{N}^*$. En effet :

$$1.\, a_1^{k+1} \in J\, I^1 + I^{k+1} \quad \text{or} \quad 1 \notin J + I^k \quad \text{donc} \quad a_1^{k+1}, \ldots, a_r^{k+1}$$

ne sont pas J-indépendants d'ordre k dans I, bien qu'étant faiblement J-indépendants d'ordre k dans I.

CHAPITRE 4

LARGEUR ANALYTIQUE D'UN IDÉAL

4.0 Introduction

L'objectif du chapitre 5 est de comparer les quantités $\ell^*_{\mathfrak{M}}(g)$, $\lambda_{\mathfrak{M}}(g)$,

$\dim \dfrac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\mathfrak{M})\mathcal{R}(A,g)}$ et $\dim \sum_{n\geq 0} \dfrac{J_n}{\mathfrak{M}J_n}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal d'un anneau

nœthérien quelconque A, g une filtration $(J_n)_n$ fortement A.P.,

$J_1 \subseteq \mathfrak{M}$ et $\mathcal{R}(A,\ g)$ l'anneau de Rees généralisé associé à la filtration g

c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n X^n$ avec X une indéterminée et $u = \dfrac{1}{X}$.

On montrera d'une part que ces quantités sont respectivement égales à celles obtenues en remplaçant g par J_m où $m \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\forall n\ \ J_{mn} = J_m^n$ et d'autre part qu'elles restent inchangées par une certaine localisation. Ce qui montrera que tout revient à comparer

$$\ell^*_{\mathfrak{M}}(I)\,,\ \lambda_{\mathfrak{M}}(I)\,,\ \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ I)}{(u,\mathfrak{M})\ \ \mathcal{R}(A,I)} \quad \text{et} \quad \dim \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}$$

avec $(A,\ \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local et I un idéal propre de A. On aboutira aux résultats :

$$\ell_{\mathfrak{M}}(I) \leq \ell^*_{\mathfrak{M}}(I) \leq \lambda_{\mathfrak{M}}(I) = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ I)}{(u,\mathfrak{M})\ \ \mathcal{R}(A,I)} = \dim \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}$$

qui nous donneront :

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g) \leq \ell^*_{\mathfrak{M}}(g) \leq \lambda_{\mathfrak{M}}(g) = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\mathfrak{M})\ \ \mathcal{R}(A,g)} = \dim \sum_{n\geq 0} \frac{J_n}{\mathfrak{M}J_n}$$

pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ et pour toute filtration g fortement A.P. telle que $\sqrt{g} \subseteq \mathfrak{M}$. Nous montrerons que $\ell^*_{\mathfrak{M}}(g) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$ lorsque $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est infini. $\lambda_{\mathfrak{M}}(g)$ sera défini au 5.4..

Nous consacrons ce chapitre aux filtrations adiques.

4.1 Définitions

4.1.1 Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local dont le corps résiduel est infini. Soit I un idéal de A. Soit $\Psi(\cdot, I)$ l'application : $n \longmapsto \Psi(n, I) = \dim_k \frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ avec $k = \frac{A}{\mathfrak{M}}$ on montre que $\Psi(\cdot, I)$ est polynômiale et on pose $\partial^0 \Psi(\cdot, I)$ le degré du polynôme auquel elle s'identifie lorsqu'elle s'applique à des quantités assez grandes. On appelle <u>largeur analytique de I au sens de Northcott et Rees</u> le nombre $\lambda(I) = 1 + \partial^0 \Psi(\cdot, I)$.

4.1.2. Cas d'un idéal d'un anneau nœthérien quelconque

Soit A un anneau nœthérien et soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A. Soit I un idéal de A non nul contenu dans $\mathfrak{M}$. Alors on a :

* $k = A/\mathfrak{M}$ est artinien car c'est un corps.

* Soit $E_n = \frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ et soit $E = \sum_{n \geq 0} E_n$. E est un anneau gradué et un E_0-module où $E_0 = A/\mathfrak{M} = k$. E est un k-espace vectoriel (de dimension, pour $I \neq 0$, infinie) et chaque E_n est un k-espace vectoriel de dimension finie (car A étant nœthérien, I est de type fini)

Alors d'après le théorème de Hilbert-Serre $n \xrightarrow{\Psi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)} \dim_k E_n$ est polynômiale. Notons $\partial^0 \varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I)$ le degré du polynôme associé. On pose :

$$\lambda_{\mathfrak{M}}(I) = 1 + \partial^0 \varphi_{\mathfrak{M}}(\cdot, I) \text{ et } \lambda(I) = \sup_{\substack{\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}A \\ I \subseteq \mathfrak{M}}} \lambda_{\mathfrak{M}}(I)$$

4.2. Lemme. **Soit A un anneau nœthérien. Soit I un idéal de A et soit P un idéal maximal sur I. Soit $k = \frac{A}{P}$ et $\mathfrak{M} = PA_P$. Alors on a :** $\dim_{A_P/\mathfrak{M}} \frac{I^n A_P}{P I^n A_P} = \dim_k \frac{I^n}{P I^n} \quad \forall n > 0.$

Preuve : Soit $\{a_1 + PI^n, \ldots, a_r + PI^n\}$ une base de $\frac{I^n}{PI^n}$ avec $a_i \in I^n$ et $n > 0$. Soient $\alpha_i \in A$, $s_i \in \mathcal{S} = A - P$ où $i \in [1, r]$. Posons $\overline{\left(\frac{\alpha_i}{s_i}\right)} = \frac{\alpha_i}{s_i} + PA_P$.

$\frac{I^n A_P}{P I^n A_P}$ est un $\frac{A_P}{\mathfrak{M}}$-espace vectoriel. $\sum_{i=1}^{r} \overline{\left(\frac{\alpha_i}{s_i}\right)} \cdot \left(\frac{a_i}{1} + \mathfrak{M} I^n A_P\right) = 0 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i}{s_i} + PA_P\right) \cdot \left(\frac{a_i}{1} + \mathfrak{M} I^n A_P\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\alpha_i a_i}{s_i} + \mathfrak{M} I^n A_P\right) = 0$ d'où

$\exists (\mu_i)_{i \in [1,r]} \in \mathcal{S}$ telle que $\sum_{i=1}^{r} \mu_i \alpha_i a_i \in P I^n$ (car $\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i a_i}{s_i} \in \mathfrak{M} I^n A_P$ et,

en réduisant au même dénominateur on a $\frac{\sum \alpha_i s'_i a_i}{s} \in \mathfrak{M} I^n A_P$

où $s'_i \in \mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$ d'où $\exists \mu \in \mathcal{S}$ tq $\mu \sum_{i=1}^{r} s'_i \alpha_i a_i \in P I^n$. En posant

$\mu_i = \mu s'_i$, on a $\sum_{i=1}^{r} \mu_i \alpha_i a_i \in P I^n$) d'où $\sum_{i=1}^{r} (\mu_i \alpha_i a_i + P I^n) = 0$ d'où

$\sum_{i=1}^{r} (\mu_i \alpha_i + P)(a_i + PI^n) = 0$ d'où $\mu_i \alpha_i + P = 0$ d'où $\mu_i \alpha_i \in P$ comme

$\alpha_i \notin P$ on a $\alpha_i \in P$ et $\overline{\left(\frac{\alpha_i}{s_i}\right)} = 0$. Les éléments $\frac{a_i}{1} + \mathfrak{M}\, I^n A_P$ constituent

donc un système libre de $\frac{I^n A_P}{P I^n A_P}$ d'où $\dim_{\frac{A_P}{\mathfrak{M}}} \frac{I^n A_P}{P I^n A_P} \geq \dim_k \frac{I^n}{P I^n}$

Réciproquemennt : soit $\{ \frac{a_1}{t_1} + P I^n A_P, \dots, \frac{a_r}{t_r} + P I^n A_P \}$ une base de $\frac{I^n A_P}{P I^n A_P}$

avec $a_i \in I^n$ et $t_i \in \mathcal{S}$. $\frac{I^n}{P I^n}$ est un k-espace vectoriel.

$$\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + P)(a_i + P I^n) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i + P I^n = 0 \Rightarrow \frac{\Sigma\, \alpha_i\, a_i}{1} \in P\, I^n A_P$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \frac{t_i \alpha_i}{1} \frac{a_i}{t_i} + P\, I^n A_P = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{t_i \alpha_i}{1} + P A_P\right)\left(\frac{a_i}{t_i} + P\, I^n A_P\right) = 0 \text{ d'où}$$

$\frac{t_i \alpha_i}{1} \in P A_P$ d'où $\exists\, \mu_i \in \mathcal{S}$ tq $\mu_i t_i \alpha_i \in P$. Comme $\mu_i t_i \notin P$. On a $\alpha_i \in P$

$\forall\, i \in [1, r]$ d'où $\alpha_i + P = 0$. $\{ a_i + P I^n ;\ i \in [1, r] \}$ est donc libre dans

$\frac{I^n}{P I^n}$ d'où $\dim_k \frac{I^n}{P I^n} \geq \dim A_P/\mathfrak{M}\, \frac{I^n A_P}{P I^n A_P}$.

$\boxed{\textbf{CONCLUSION}}$: $\dim A_P/\mathfrak{M}\, \frac{I^n A_P}{P I^n A_P} = \dim_k \frac{I^n}{P I^n}$ $\forall\, n > 0$

4.3 <u>Corollaire</u>

Soit A un ann•eau nœthérien. Soit I un idéal de A et soit P un idéal maximal sur I. Soit $\mathfrak{M} = P A_P$. Alors on a $\lambda_P(I) = \lambda_{\mathfrak{M}}(I A_P)$

Preuve

$\Psi_{P A_P}(\cdot, I A_P) = \Psi_P(\cdot, I)$ d'après le lemme précédent d'où

$\partial^\circ\, \Psi_{P A_P}(\cdot, I A_P) = \partial^\circ\, \Psi_P(\cdot, I)$ et $\lambda_{P A_P}(I A_P) = \lambda_P(I)$

4.4. Proposition

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local. Soit I un idéal et I' une réduction de I. $\forall$ $n \geq 1$, on a :

$$\ell(I) \leq \ell^*(I) \leq \lambda(I) = \lambda(I^n) = \dim \frac{\mathcal{R}(A, I)}{(u, \mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A, I)} = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$$

$\leq \lambda(I') \leq \mu(I')$ où $\mathcal{R}(A, I) = \sum_{n \geq 0} I^n X^n$, $u = \frac{1}{X}$ et $\mu(I')$ désigne le nombre d'éléments d'un système générateur minimal de I'. En particulier $\lambda(I) \leq \mu(I)$.

Preuve

Le corollaire 3.4 $\Rightarrow$ $\ell(I) = \ell_{\mathfrak{M}}(I) \leq \ell^*_{\mathfrak{M}}(I) = \ell^*(I)$

3.6.3 $\Rightarrow$ $\ell^*(I)$ est finie. Soit $r = \ell^*(I)$ $\exists$ $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\exists$ $a_1, \ldots, a_r$ tels que $k_1 \geq 1$, $(I^{k_n})_n$, soit une filtration et $a_1, \ldots, a_r$ $\mathfrak{M}$-indépendants relativement à $(I^{k_n})_n$. Alors $a_1, \ldots, a_r$ sont $\mathfrak{M}$-indépendants dans I^{k_1} (Il suffit de remarquer que $(I^{k_1})^n \subseteq I^{k_n}$) d'où $\ell^*(I) \leq \ell(I^{k_1})$.

A présent montrons que pour tout idéal I, $\ell(I) \leq \lambda(I) = \lambda(I^{n_0})$ $\forall$ $n_0 \geq 1$.

Si $a_1, \ldots, a_r$ sont $\mathfrak{M}$-indépendants dans I alors $\forall$ $n \geq 1$

$\{a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} + \mathfrak{M} I^n \cdot i_1 + \cdots + i_r = n\}$ est un système libre dans le k-espace vectoriel $\frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ avec $k = \frac{A}{\mathfrak{M}}$. On a alors :

$\dim_k \frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n} \geq \binom{n+r-1}{r-1}$ d'où $\partial^0 \Psi(\cdot, I) \geq r-1$ avec $\Psi(\cdot, I) : n \longmapsto \dim_k \frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$

On a donc $\lambda(I) = 1 + \partial^0 \Psi(\cdot, I) \geq r$.

CONCLUSION : $\lambda(I) \geq \ell(I)$ et

$$\lambda(I^{n_0}) \geq \ell(I^{n_0})$$

D'autre part , $\varphi(p, I^{n_0}) = \varphi(pn_0, I) \quad \forall\, n_0 > 0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}$ d'où

$$\partial^0 \varphi(\cdot, I^{n_0}) = \partial^0 \varphi(\cdot, I) \text{ et } \lambda(I^{n_0}) = \lambda(I)$$

on a donc : $\ell^*(I) \leq \ell(I^{k_1}) \leq \lambda(I^{k_1}) = \lambda(I)$

et d'aprés D. Sangaré [11] (5.3.4)) on a :

$$\lambda(I) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{M} I^n} = \dim \frac{\mathcal{R}(A, I)}{(u, \mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A, I)}$$

Montrons que $\lambda(I) \leq \lambda(I') \leq \mu(I')$.

I' est une réduction de $I \Rightarrow \exists\, q \geq 1$ tel que $\forall\, s \geq 0 \quad I'^s I^q = I^{q+s}$.

Supposons que p éléments engendrent I^q. Le nombre d'éléments d'un

système générateur minimal de I'^s est $r = \dim_k \frac{I'^s}{\mathfrak{M} I'^s}$ où $k = \frac{A}{\mathfrak{M}}$ et $s \geq 1$.

I^{q+s} peut être engendré par $p \times r$ éléments, de même que $\frac{I^{q+s}}{\mathfrak{M} I^{q+s}}$

$\dim_k \frac{I^{q+s}}{\mathfrak{M} I^{q+s}} \leq p \times \dim_k \frac{I'^s}{\mathfrak{M} I'^s}$ d'où $\partial^0 \varphi(\cdot, I) \leq \partial^0 \varphi(\cdot, I')$

d'où $\lambda(I) \leq \lambda(I')$.

D'autre part , $\mu(I') = \dim_k \frac{I'}{\mathfrak{M} I'} \geq \lambda(I')$ car $\forall\, s \geq 1$, $\varphi(s, I') = \dim_k \frac{I'^s}{\mathfrak{M} I'^s}$

$\leq \binom{s+r'-1}{r'-1}$ où $r' = \mu(I')$ d'où $\partial^0 \varphi(\cdot, I') \leq r'-1$ et $\lambda(I') \leq r'$

CONCLUSION $\lambda(I) \leq \lambda(I') \leq \mu(I')$. Pour la dernière partie, il suffit de remplacer I' par I.

4.5 Corollaire

Soit A un anneau nœthérien quelconque. Soit I un idéal de A et soit P un idéal maximal sur I. Alors on a :

$$\ell_P(I) \leq \overset{*}{\ell}_P(I) \leq \lambda_P(I) = \lambda_{PA_P}(IA_P) = \dim_{\frac{\mathcal{R}(A_P\ ,\ IA_P)}{(u,\ PA_P)\ \mathcal{R}(A_P, IA_P)}} =$$

$\lambda_P(I^n)\ \forall\ \ n \geq 1$

Preuve

Le corollaire 3.4 implique que :

$$\ell_P(I) = \ell_{PA_P}(IA_P) \leq \overset{*}{\ell}_P(I) = \overset{*}{\ell}_{PA_P}(IA_P)$$

D'après la proposition 4.4 ,

$$\overset{*}{\ell}_{PA_P}(IA_P) \leq \lambda_{PA_P}(IA_P) = \dim_{\frac{\mathcal{R}(A_P\ ,\ IA_P)}{(u,\ PA_P)\ \mathcal{R}(A_P, IA_P)}} = \lambda_{PA_P}(I^nA_P)$$

Le corollaire 4.3 implique que $\lambda_{PA_P}(IA_P) = \lambda_P(I)$ et $\lambda_{PA_P}(I^nA_P) = \lambda_P(I^n)$

4.6 Proposition :

Soit A un anneau. Soit I un idéal de A. Soit J un idéal contenant I. Alors des éléments sont J-indépendants (respectivement faiblement J-indépendants) d'ordre k dans I si et seulement si ils sont J-indépendants dans I (respectivement faiblemennt J-indépendants dans I).

Preuve :

Il suffit de remarquer que

$F(a_1, ..., a_r) \equiv 0\ \ (JI^n + I^{n+k}) \iff F(a_1, ..., a_r) \equiv 0\ (JI^n)$ et que

$\alpha \in J + I^k \iff \alpha \in J.$

4.7. **Corollaire** :

Soit A un anneau nœthérien. Soit I un idéal de A et soit J un idéal contenant I. Alors on a $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$

$$\ell_J(I, k) = \ell_J(I) \leq \ell^*_J(I, k) = \ell^*_J(I)$$

Par conséquent la largeur analytique d'ordre k d'un idéal est égale à sa largeur analytique (d'ordre $+\infty$).

4.8. **Proposition** :

Soit A un anneau nœthérien. Soit I un idéal de A et soit P un idéal maximal sur I. On suppose que $\frac{A}{P}$ est infini. Alors $\forall\ k \in \overline{\mathbb{N}}^*$,

$$\ell_P(I) = \ell_P(I, k) = \ell^*_P(I, k) = \lambda_P(I) = \lambda_{PA_P}(IA_P) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n A_P}{PI^n A_P}$$

$$= \dim \frac{\mathcal{R}(A_P\ ,\ IA_P)}{(u,\ PA_P)\ \mathcal{R}(A_P, IA_P)} = \ell_P(I^n)\ \forall\ n \geq 1.$$

Preuve :

Northcott et Rees ont montré que si $(A, \mathfrak{M})$ est nœthérien local avec $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ infini alors $\lambda_{\mathfrak{M}}(I) = \ell_{\mathfrak{M}}(I)$ pour tout idéal I.

Si $\frac{A}{P}$ est infini alors $\frac{A_P}{PA_P}$ est infini d'où $\ell_{PA_P}(IA_P) = \lambda_{PA_P}(IA_P)$ d'où d'après 4.4., 4.5 et 3.4 on a :

$$\ell_P(I) = \ell^*_P(I, k) = \lambda_P(I) = \lambda_{PA_P}(IA_P) = \dim \frac{\mathcal{R}(A_P\ ,\ IA_P)}{(u,\ \mathfrak{M})\ \mathcal{R}(A_P, IA_P)} =$$

$$\dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n A_P}{PI^n A_P} \quad \text{avec } \mathfrak{M} = PA_P\ ;\ 4.7 \Rightarrow \begin{cases} \ell_P(I,\ k) = \ell_P(I) \\ \ell^*_P(I,\ k) = \ell^*_P(I) \end{cases}$$

$\lambda_p(I^n) = \lambda_p(I)$ et en remplaçant I par I^n on a $\ell_p(I^n) = \lambda_p(I^n)$ d'où

$$\ell_p(I^n) = \lambda_p(I) \quad \text{d'où} \quad \ell_p(I^n) = \lambda_p(I) = \overset{*}{\ell}_p(I) = \ell_p(I) = \ell_p(I, k)$$

4.9. **Corollaire**

Soit A un anneau nœthérien. Soit I un idéal de A et soit P un idéal premier sur I. On suppose que $\frac{A}{P}$ est infini. Alors $\forall\ k \in \overline{\mathbb{N}}^*$,

$$\ell_p(I) = \ell_p(I, k) = \overset{*}{\ell}_p(I, k) = \lambda_{pAp}(IAp) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n Ap}{PI^n Ap}$$

$$= \dim \frac{\mathcal{R}(Ap,\ IAp)}{(u,\ PAp)\ \mathcal{R}(Ap, IAp)} = \ell_{pAp}(I^n Ap) = \ell_p(I^n) \quad \forall \quad n \geq 1.$$

Preuve :

La première égalité est due au corollaire 4.7 ; d'après la proposition 4.8. on a : si $\frac{Ap}{PAp}$ est infini, $\ell_{pAp}(IAp) = \ell_{pAp}(IAp, k) = \overset{*}{\ell}_{pAp}(IAp, k)$

$$= \lambda_{pAp}(IAp) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n Ap}{PI^n Ap} = \dim \frac{\mathcal{R}(Ap,\ IAp)}{(u,\ PAp)\ \mathcal{R}(Ap, IAp)} = \ell_{pAp}(I^n Ap).$$

Or, si $\frac{A}{P}$ est infini alors $\frac{Ap}{PAp}$ est infini et d'après le corollaire 3.4.

$\overset{*}{\ell}_p(I) = \overset{*}{\ell}_{pAp}(IAp)$ et $\ell_p(I) = \ell_{pAp}(I\,Ap)$, donc on a

$$\ell_p(I) = \ell_p(I, k) = \overset{*}{\ell}_p(I, k) = \lambda_{pAp}(IAp) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n Ap}{PI^n Ap}$$

$$= \dim \frac{\mathcal{R}(Ap,\ IAp)}{(u,\ PAp)\ \mathcal{R}(Ap, IAp)} = \ell_{pAp}(I^n Ap) = \ell_p(I^n).$$

CHAPITRE 5

CAS DES FILTRATIONS FORTEMENT A.P.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à différentes généralisations de la largeur analytique aux filtrations fortement A.P d'un anneau nœthérien.
Le théorème suivant donne une caractérisation de la J-largeur analytique d'une filtration fortement A.P $g = (J_n)_n$ par des $\ell_J(J_n)$ dans un anneau nœthérien.

5.1. <u>Théorème</u> :

Soit A un anneau nœthérien. Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A fortement A.P. Soit $m \geq 1$ tel que $\forall n \ \ J_{mn} = J_m^n$. Soit J un idéal de A contenant J_1. Alors on a :

(i) $\ell_J^*(g, k) \geq \ell_J(J_{mn}, k) = \ell_J(J_{mn}) \qquad \forall n \geq 1$

(ii) $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}^*$, multiple de m tel que

$$\ell_J^*(g, k) = \ell_J(J_{nk_1}, k) = \ell_J(J_{nk_1}) \text{ pour tout } n \geq 1$$

(iii) $\ell_J^*(g, k) = \sup\{\ell_J(J_{mn}, k) : n \in \mathbb{N}^*\} = \ell_J^*(J_m^n, k)$

$$= \ell_J^*(g) = \sup\{\ell_J(J_{mn}) : n \in \mathbb{N}^*\} = \ell_J^*(J_m^n) \quad \forall n \geq 1$$

(iv) La suite $n \longmapsto \ell_J(J_{m(n!)})$ est croissante, stationnaire et converge vers $\ell_J^*(g)$; de même que la suite $n \longmapsto \ell_J(J_{n!})$ à partir d'un certain rang.

Preuve :

(i) Soient $a_1, \ldots, a_r$ J-indépendants d'ordre k dans $J_{m'}$, où m' est un multiple de $m \in \mathbb{N}^*$. Alors $J_{m'n} = J_{m'}^n \quad \forall n \geq 0$. Soit $k'_n = m'n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$;

$a_i \in J_{k'_1} \; \forall i$. $x = \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1 \ldots i_r} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} \equiv 0 \pmod{J.J_{k'n} + J_{k'(n+k)}}$

$\Rightarrow x \equiv 0 \pmod{J.J_{m'}^n + J_{m'}^{n+k}} \Rightarrow \alpha_{i_1 \ldots i_r} \in J + J_{m'}^k = J + J_{k'_k}$. On vérifie que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$, $k'_p + k'_q \geq k'_{p+q} > k'_p > k'_0 = 0 \geq k'_{-p}$; d'où $a_1, \ldots, a_r$ sont faiblement J-indépendants d'ordre k relativement à g. Donc :

$\ell_J(J_{m'}, k) \leq \ell_J^*(g, k)$ et $\ell_J(J_{mn}, k) \leq \ell_J^*(g, k) \quad \forall n \geq 1$ et on a

$\ell_J(J_{mn}, k) = \ell_J(J_{mn})$ (d'après le corollaire 4.7.)

(ii) : Soient $a_1, \ldots, a_r$ J-indépendants d'ordre k relativement à $(J_{k'n})_n$ avec $r = \ell_J^*(g, k)$ et $(k'_n)_n$ une famille d'entiers telle que

$$k'_{-p} \leq k'_0 = 0 < k'_p < k'_{p+q} \leq k'_p + k'_q, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*.$$

Soit n un multiple non nul de m ;

$a_i^n \in (J_{k'_1})^n \subseteq (J_{nk'_1})$; $x = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \alpha_{i_1 \ldots i_r} a_1^{ni_1} \ldots a_r^{ni_r} \equiv 0 \pmod{J.J_{nk'_1}^s + J_{nk'_1}^{s+k}} \Rightarrow$

$x \equiv 0 \; (J.J_{nk'_1 s} + J_{nk'_1(s+k)})$. La propriété $k'_{p+q} \leq k'_p + k'_q$ entraîne

$k'_{ns} \leq ns\, k'_1$ et $k'_{n(s+k)} \leq n(s+k)\, k'_1$ d'où $x \equiv 0 \pmod{J.J_{k'_{ns}} + J_{k'_{n(s+k)}}}$

d'où $x \equiv 0 \pmod{J.J_{k'_{ns}} + J_{k'_{(ns+k)}}}$

d'où $\qquad \alpha_{i_1 \ldots i_r} \in J + J_{k'_k} = J + J_{nk'_1}^k$.

On en déduit que $a_1^n, \ldots, a_r^n$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à $f_{J_{nk'_1}}$ c'est-à-dire dans $J_{nk'_1}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; en posant $n = pm$ on a $a_1^n, \ldots, a_r^n$

J-indépendants d'ordre k dans $J_{pmk'_1} = J_{pk_1}$ où $k_1 = mk'_1$ est multiple de m

donc on a : $r = \ell^*_J(g, k) \leq \ell_J(J_{pk_1}, k) \quad \forall p \geq 1$,

(i) $\Rightarrow \ell_J(J_{pk_1}, k) \leq \ell^*_J(g, k)$ d'où $\ell^*_J(g, k) = \ell_J(J_{pk_1}, k) \quad \forall p \geq 1$

(iii) . (ii) $\Rightarrow \ell^*_J(g, k) \geq \sup \{ \ell_J(J_{mn}, k) . n \in \mathbb{N}^* \}$

(i) $\Rightarrow \ell^*_J(g, k) \geq \sup \{ \ell_J(J_{mn}, k) \; n \in \mathbb{N}^* \}$

On a donc l'égalité : $\ell^*_J(g, k) = \sup \{ \ell_J(J_{mn}, k) . n \in \mathbb{N}^* \}$.

En remplaçant g par la filtration adique $(J_m^n)_n$ on a : Comme $J_m^{np} = (J_m^p)^n$

$\forall n$ (p jouant le rôle de m dans $g = (J_n)_n$ tel que $J_m^n = J_{mn}$) on a

$\ell^*_J(J_m) = \sup \{ \ell_J(J_m^{np}) . n \in \mathbb{N}^* \}$ et ceci pour tout $p \geq 1$.

En particulier $\ell^*_J(J_m) = \sup \{ \ell_J(J_m^n) . n \in \mathbb{N}^* \} = \ell^*_J(g)$

et $\ell^*_J(g, k) = \sup \{ \ell_J(J_{mn}, k) : n \in \mathbb{N}^* \} = \sup \{ \ell_J(J_{mn}) . n \in \mathbb{N}^* \} = \ell^*_J(g)$

$= \ell^*_J(J_m)$. De même $\forall p \geq 1$, $\ell^*_J(J_m^p) = \sup \{ \ell_J(J_m^{pn}) \; n \in \mathbb{N}^* \} = \ell^*_J(J_m)$

et $\ell^*_J(J_m^p, k) = \ell^*_J(J_m^p)$.

(iv) : Si $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants dans un idéal I alors on a $a_1^n, \ldots, a_r^n$

J-indépendants dans I^n par conséquent $\ell_J(I) \leq \ell_J(I^n)$. Donc

$\ell_J(J_{m(n+1)!}) = \ell_J(J_m^{(n+1)n!}) = \ell_J((J_m^{n!})^{(n+1)}) \geq \ell_J(J_m^{n!}) = \ell_J(J_{mn!})$

(ii) $\Rightarrow \exists \; k_1 \geq 1$ tel que $\ell^*_J(g) = \ell_J(J_{nk_1}) \quad \forall n \geq 1$ d'où

$\ell_J(J_{m(k_1)!}) = \ell_J(J_{mk_1}) = \ell^*_J(g)$ et chaque $\ell_J(J_{mn!}) \le \ell^*_J(g)$; comme

$n \longmapsto \ell_J(J_{mn!})$ est croissante et que certains termes sont égaux à $\ell^*_J(g)$

on a que $\ell_J(J_{mn!})$ est stationnaire et converge vers $\ell^*_J(g)$.

On applique le même raisonnement à $n \longmapsto \ell_J(J_{n!})$, $n!$ étant multiple de $k_1 m$ à partir d'un certain rang.

5.2 **Remarque** :

Okon a montré que : $\dim \dfrac{\mathcal{R}(A, g)}{(u, \mathfrak{M})\, \mathcal{R}(A, g)} = \dim \dfrac{\mathcal{R}(A, J_{mn})}{(u, \mathfrak{M})\, \mathcal{R}(A, J_{mn})}$ $\forall n \ge 1$

pour tout anneau nœthérien local $(A, \mathfrak{M})$ et pour toute filtration nœthérienne $g = (J_n)_n$ telle que $\forall n\ J_{mn} = J_m^n$. D. Sangaré a généralisé ce résultat aux filtrations fortement A.P d'un anneau nœthérien quelconque.

Nous montrerons à la fin de ce chapitre que $\dfrac{\mathcal{R}(A, g)}{(u^k, I)\, \mathcal{R}(A, g)}$ a la même dimension que $\dfrac{\mathcal{R}(A, J_{mn})}{(u^k, J)\, \mathcal{R}(A, J_{mn})}$ avec A un anneau nœthérien quelconque, $m \ge 1$, $g = (J_n)_n$ une filtration telle que $\forall n\ J_{mn} = J_m^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si $(A, \mathfrak{M})$ est nœthérien local avec $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ infini alors $\ell_{\mathfrak{M}}(I) = \dim \dfrac{\mathcal{R}(A, I)}{(u, \mathfrak{M})\, \mathcal{R}(A, I)}$ et

$\ell^*_{\mathfrak{M}}(g) = \ell_{\mathfrak{M}}(J_{nk_1})$ où k_1 est un certain multiple de m; d'où :

$\ell(g) = \ell^*_{\mathfrak{M}}(g) = \dim \dfrac{\mathcal{R}(A, J_{nk_1})}{(u, \mathfrak{M})\, \mathcal{R}(A, J_{nk_1})} = \dim \dfrac{\mathcal{R}(A, g)}{(u, \mathfrak{M})\, \mathcal{R}(A, g)}$ (= largeur analytique de la filtration g au sens de Okon si g est nœthérienne)

$\boxed{\textbf{CONCLUSION}}$: Si $(A, \mathfrak{M})$ est nœthérien local avec $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ infini alors la largeur analytique d'une filtration nœthérienne coïncide avec sa largeur analytique au sens de Okon.

Dans la partie suivante nous nous proposons de généraliser $\lambda_{\mathfrak{M}}(I)$

définie au 4.1.2 aux filtrations fortement A.P.

5.3. Exemple

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local contenant un idéal I de largeur

analytique $r \geq 2$. Soit g la filtration $(J_n)_n$ telle que :

$\forall j \in [1, m] \quad J_{mn+j} = I^{n+1}$ avec $m \geq 2$. Alors

$n \longmapsto \varphi_{\mathfrak{M}}(n, g) = \dim_k \dfrac{J_n}{\mathfrak{M} J_n}$ n'est pas polynômiale $\left(k = \dfrac{A}{\mathfrak{M}}\right)$.

En effet soit $k_n = mn \ \forall n$.

* $\varphi_{\mathfrak{M}}(k_n+1, g) = \varphi_{\mathfrak{M}}(k_n+2, g)$; si $\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,, g)$ est polynômiale

$\exists\, a_0, a_1 \ldots, a_p \in \mathbb{Q}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$\varphi_{\mathfrak{M}}(k_n+1, g) = a_p(k_n+1)^p + a_{p-1}(k_n+1)^{p-1} + \cdots + a_0 \quad \forall n \geq n_0$

avec $a_p \neq 0$ et $\varphi_{\mathfrak{M}}(k_n+2, g) = a_p(k_n+2)^p + \cdots + a_0$

d'où $0 = \varphi_{\mathfrak{M}}(k_n+2, g) - \varphi_{\mathfrak{M}}(k_n+1, g) =$

$a_p C_p^1 (k_n+1)^{p-1} + a'_{p-1}(k_n+1)^{p-2} + \cdots + a'_0$ ou $p = 0$ et $a'_i \in \mathbb{Q}\ \forall i \in [0 ; p-1]$.

si $p \geq 1$, $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} a_p C_p^1 (k_n+1)^{p-1} \Rightarrow a_p = 0$; donc $p = 0$. Donc si $\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,, g)$

est polynômiale, le polynôme associé est constant.

* $\varphi_{\mathfrak{M}}(k_n, g) = \dim_k \dfrac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ d'où si $n \longmapsto \varphi_{\mathfrak{M}}(k_n, g)$ est constante à partir

d'un certain rang alors $\varphi_{\mathfrak{M}}(.\,, I)$. $n \longmapsto \dim_k \dfrac{I^n}{\mathfrak{M} I^n}$ est constante à partir d'un

certain rang d'où $\partial^0 \varphi_{\mathfrak{M}}(.\,, I) \leq 0$ et $\lambda_{\mathfrak{M}}(I) \leq 1$, ce qui n'est pas.

CONCLUSION : g est une filtration nœthérienne sur un anneau local nœthérien mais $\varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, g)$ n'est pas polynômiale

5.4 Définition de $\lambda_{\mathfrak{M}}(g)$ avec g une filtration fortement A.P.

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration sur A. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal contenant $\sqrt{g}$. On suppose que $g = (J_n)_n$ et on pose $\varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, g)$ l'application $n \longmapsto \varphi_{\mathfrak{M}}(n, g) = \dim_k \dfrac{J_n}{\mathfrak{M}J_n}$ avec $k = \dfrac{A}{\mathfrak{M}}$

Si g est fortement A.P., $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_{mn} = J_m^n$ $\forall n \geq 0$.

Si $n \geq m$, $n!$ est multiple de m et $\varphi_{\mathfrak{M}}(n!, g) = \dim_k \dfrac{J_m^{n!/m}}{\mathfrak{M}J_m^{n!/m}} =$

$\varphi_{\mathfrak{M}}(\dfrac{n!}{m}, J_m)$. Or $n \longmapsto \varphi_{\mathfrak{M}}(n, J_m) = \dim_k \dfrac{J_m^n}{\mathfrak{M}J_m^n}$ est polynômiale d'où

$\exists\, a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{Q}$, $n_0 \geq m$ tels que $\forall n \geq n_0$ $\varphi_{\mathfrak{M}}(n, J_m)$

$= a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0$. $\varphi_{\mathfrak{M}}(\dfrac{n!}{m}, J_m) = a_p(\dfrac{n!}{m})^p + \cdots + a_1(\dfrac{n!}{m}) + a_0 = \varphi_{\mathfrak{M}}(n!, g)$

est une fonction polynôme de $(n!)$. Ce polynôme est de même degré que celui associé à $\varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, J_m)$. Comme $\{k! : k \geq n_0\}$ est infini, on ne peut identifier la restriction de $\varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, g)$ à $\{n! ,\ n \in \mathbb{N}\}$ qu'à un polynôme unique, le degré de ce polynôme est noté $\partial^0 \varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, g)$, est le même que celui de $\varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, J_m)$ et ne dépend pas de m choisi tel que $J_m^n = J_{mn}$ pour tout n.

On pose $\quad \lambda_{\mathfrak{M}}(g) = \partial^0 \varphi_{\mathfrak{M}}(\,.\,, g) + 1$

$$\lambda(g) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$$

5.5. Proposition :

Soit A un anneau nœthérien. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration fortement A.P. de A, et soit $m \geq 1$ tel que $J_{mn} = J_m^n$ $\forall n$. Soit I un idéal de A. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal contenant J_1 et I. Alors on a :

$$\lambda_{\mathfrak{M}}(g) = \lambda_{\mathfrak{M}}(J_{mn}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ en particulier,}$$

$$\lambda_{\mathfrak{M}}(f_I) = \lambda_{\mathfrak{M}}(I) = \lambda_{\mathfrak{M}}(I^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

5.6. Corollaire :

Soit A un anneau nœthérien. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration fortement A.P. de A. Soit P un idéal maximal sur J_1. Alors on a : $\lambda_P(g) = \lambda_{PA_P}(gA_P)$ où $gA_P = (J_nA_P)_n$

Preuve :

$5.5 \Rightarrow \lambda_P(g) = \lambda_P(J_m)$; le corollaire 4.3 $\Rightarrow \lambda_P(J_m) = \lambda_{PA_P}(J_mA_P)$;

$5.5 \Rightarrow \lambda_{PA_P}(J_mA_P) = \lambda_{PA_P}(gA_P)$

5.7. Corollaire

Soit A un anneau nœthérien. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A fortement A.P. Soit P un idéal maximal sur J_1. On suppose que $\frac{A}{P}$ soit infini. Alors on a : pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$

$$\ell^*_P(g, k) = \ell^*_P(g) = \lambda_P(g)$$

Preuve

Soit m tel que $m \geq 1$ et $J_{mn} = J_m^n$ pour tout n on a :

le théorème 5.1 $\Rightarrow \ell^*_P(g, k) = \ell^*_P(J_m)$; $\frac{A}{P}$ étant infini, la proposition 4.8 $\Rightarrow \ell^*_p(J_m) = \lambda_p(J_m)$ et 5.5 $\Rightarrow \lambda_p(J_m) = \lambda_p(g)$

5.8. Généralisation de dim $\dfrac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ g)}$ où g est fortement A.P et A un anneau nœthérien.

5.8.1. <u>Notations</u> :

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration fortement A.P. On pose

$\forall\ k \in \overline{\mathbb{N}}^*$

(i) $$\boxed{\gamma_J(g,\ k) = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{\mathcal{R}(A,\ g) \cap (u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ g)}} = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{J_n}{JJ_n + J_{n+k}}$$

En particulier on a :

1) $$\gamma_J(g,\ 1) = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ g)} = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{J_n}{JJ_n + J_{n+1}}$$

2) $$\gamma_J(g,\ +\infty) = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{J\mathcal{R}(A,\ g)} = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{J_n}{JJ_n}$$ et sera noté $\gamma_J(g)$.

(ii) $$\gamma(g,\ k) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \gamma_{\mathfrak{M}}(g,\ k)$$

5.8.2. <u>Localisation</u>

Soit A un anneau. Soit Δ un monoïde commutatif et soient $(J_n)_{n \in \Delta}$ et $(K_n)_{n \in \Delta}$ deux familles de sous groupes de A telles que :

$$K_n \subseteq J_n,\ J_n J_m \subseteq J_{n+m} \text{ et } K_n J_m \subseteq K_{n+m} \quad \forall\ n, m \in \Delta$$ On munit,

comme au chapitre 2, le groupe somme directe $\sum_{n \in \Delta} \dfrac{J_n}{K_n}$ de la multiplication

telle que :

$\forall\ n, m \in \Delta,\ \forall\ a_n \in J_n,\ \forall\ b_m \in J_m,\ (a_n + K_n).(b_m + K_m) = a_n b_m + K_{n+m}$

Ici encore tous les anneaux gradués de la forme $\Sigma \frac{J_n}{K_n}$ seront supposés munis

de la multiplication définie ci-dessus. Soit P un idéal premier.

On considère l'anneau gradué $\sum_{n\in\Delta} \frac{J_n A_P}{K_n A_P}$. On a les résultats suivants :

5.8.3. **Lemme** :

Si P est un idéal maximal tel que $\forall\ n\in\Delta$, $P\ J_n \subseteq K_n$ alors l'application A-linéaire :

$$\Psi : \sum_{n\in\Delta} \frac{J_n}{K_n} \longrightarrow \sum_{n\in\Delta} \frac{J_n A_P}{K_n A_P}$$

telle que :

$$\forall\ a_n\in J_n\ ,\ \Psi\ : a_n + K_n \longmapsto \frac{a_n}{1} + K_n\ A_P$$

est un isomorphisme, d'isomorphisme inverse l'application

$\sum_{n\in\Delta} \Psi_n$ **où** $\Psi_n : \frac{J_n A_P}{K_n A_P} \longrightarrow \frac{J_n}{K_n}$ **est telle que** $\forall\ b_n\in J_n$,

$\forall\ x_n\in A\text{-}P$, $\Psi_n : \frac{b_n}{x_n} + K_n\ A_P \longmapsto b_n c_n + K_n$ **avec** $1 - c_n x_n \in P$

Preuve :

Soit $\mathcal{S} = A\text{-}P$. $\forall\ n\in\Delta$ soit $\psi_n : \frac{J_n A_P}{K_n A_P} \longrightarrow \frac{J_n}{K_n}$ telle que

$$\forall\ b_n \in J_n\ ,\ \forall\ x_n\in\mathcal{S}\ ,\ \psi_n : (\frac{b_n}{x_n} + K_n\ A_P) \longmapsto b_n a_n + K_n$$

où a_n est telle que : $\exists\ y_n \in P$ avec $1 = x_n a_n + y_n$.

Montrons que ψ_n <u>est bien définie</u>

$\forall\ x'_n \in \mathcal{S}$, $\forall\ b'_n \in J_n$ tels que $\frac{b_n}{x_n} - \frac{b'_n}{x'_n} \in K_n\ A_P$. P étant maximal,

$\exists\ z_n \in P$, $a'_n \in A$ tels que $1 = x'_n a'_n + z_n$. Montrons que

$b_n a_n - b'_n a'_n \in K_n \quad \dfrac{b_n}{x_n} - \dfrac{b'_n}{x'_n} \in K_n Ap \Rightarrow \exists \mu \in \mathcal{S}$ tel que

$\mu(b_n x'_n - x_n b'_n) \in K_n$ d'où en multipliant par $a_n a'_n$ on a :

$$\mu[(a_n b_n)(1 - z_n) - a'_n b'_n (1 - y_n)] \in K_n$$

d'où

$$\mu[a_n b_n - a'_n b'_n] + \mu\, a'_n (b'_n y_n) - \mu\, a_n (b_n z_n) \in K_n$$

or $\quad b'_n y_n \in PJ_n \subseteq K_n$ et $b_n z_n \in PJ_n \subseteq K_n$,

d'où $\mu[a_n b_n - a'_n b'_n] \in K_n$.

μ et P engendrent A. Soient $v_n \in P$, $\mu_n \in A$ tels que $1 = \mu u_n + v_n$,

on a alors $(1 - v_n) = \mu u_n$ et $(1 - v_n)\,[a_n b_n - a'_n b'_n] \in K_n$;

or $v_n b_n \in PJ_n$ et $v_n b'_n \in PJ_n \subseteq K_n$ d'où $a_n b_n - a'_n b'_n \in K_n$.

on a donc $b_n a_n + K_n = b'_n a'_n + K_n$. ψ_n est donc bien défini.

ψ_n **est injective** :

$\mathrm{Ker}\ \psi_n = \{\dfrac{b_n}{x_n} + K_n Ap : \exists\ a_n \in A,\ \exists\ y_n \in P$ tels que $b_n a_n \in K_n$ et

$1 = x_n a_n + y_n$ où $x_n \in \mathcal{S}$ et $b_n \in J_n\}$. Si $b_n a_n \in K_n$ et

$1 = x_n a_n + y_n$ avec $y_n \in P$ on a : comme $a_n \notin P$,

$\dfrac{b_n}{x_n} = \dfrac{b_n a_n}{x_n a_n} = \dfrac{b_n a_n}{1 - y_n} \in K_n Ap$ d'où $\dfrac{b_n}{x_n} + K_n Ap = 0$; donc $\mathrm{Ker}\ \psi_n = (0)$

d'où ψ_n est injective

ψ_n **est surjective** :

$\forall\ b_n \in J_n$, $b_n + K_n = b_n \times 1 + K_n = \psi_n\left(\dfrac{b_n}{1} + K_n Ap\right)$.

ψ_n est donc un isomorphisme de modules, d'après la proposition 7 de Bourbaki

Algèbre, chapitre 2 §1, $\psi = \sum_{n \in \Delta} \psi_n$ est un isomorphisme de modules.

Vérifions que $\psi = \sum_n \psi_n$ est un morphisme d'anneaux gradués :

$$\forall\, b_n \in J_n\ ,\ x_n \in \mathcal{S},\ \psi\left[\left(\frac{b_n}{x_n} + K_nAp\right)\left(\frac{b'_m}{x'_m} + K_mAp\right)\right]$$

$= \psi\left(\dfrac{b_nb'_m}{x_nx'_m} + K_{n+m}Ap\right) = b_n\, b_m'\ a_{n+m} + K_{n+m}$ où $\exists\, y_n \in P\ ,\ z_m \in P$

tels que $1 = x_n a_n + y_n = x'_m a'_m + z_m$ et on choisit $a_{n+m} = a_n a'_m$.

$x_n\, x'_m\ a_n\, a'_m = (1 - y_n)(1 - z_m) = 1 - [y_n + z_m - y_n z_m]$. Soit

$y' = y_n + z_m - y_n z_m \in P$; $1 = a_{n+m}\, x_n\, x'_m + y'$ avec $y' \in P$, ceci montre que

$\psi\left(\dfrac{b_nb'_m}{x_nx'_m} + K_{n+m}Ap\right)$ est bien égal à $b_n\, b_m'\ a_{n+m} + k_{n+m}$.

D'autre part,

$$\psi\left(\frac{b_n}{x_n} + K_nAp\right)\psi\left(\frac{b'_m}{x'_m} + K_mAp\right) = (b_n\, a_n + k_n)\,.\,(b'_m\, a'_m + k_m)$$

$= b_n\, b'_m\, a_{n+m} + k_{n+m} = \psi\left[\left(\dfrac{b_n}{x_n} + K_nAp\right)\left(\dfrac{b'_m}{x'_m} + K_mAp\right)\right]$.

CONCLUSION : ψ est un isomorphisme d'anneaux gradués, d'isomor-

phisme inverse $\sum_{n\in\Delta} \varphi_n$ où $\varphi_n = \psi_n^{-1}$: $b_n + K_n \longmapsto \dfrac{b_n}{1} + K_nAp$ donc

$\varphi = \psi^{-1}$ est un isomorphisme. φ est un isomorphisme d'anneaux gradués

et sa réciproque est $\psi = \sum_{n\in\Delta} \psi_n$.

5.8.3 <u>Corollaire</u> :

Soit A un anneau. Soit g $(J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de A. Soit P

un idéal <u>maximal</u> de A. $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ on a :

(i) $\displaystyle\sum_{n>-k} \frac{J_n}{PJ_n + J_{n+k}}$ est isomorphe à $\displaystyle\sum_{n>-k} \frac{J_nAp}{PJ_nAp + J_{n+k}Ap}$

et par conséquent $\dfrac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u^k,\ p)\ \mathcal{R}(A,\ g)}$ est isomorphe à

$\dfrac{\mathcal{R}(Ap,\ gAp)}{(u^k,\ pAp)\ \mathcal{R}(Ap,\ gAp)}$ où $u = \dfrac{1}{X}$, $\mathcal{R}(A, g) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} J_n X^n$ et pour

$n = +\infty$ on convient que $J_\infty = (0)$ et $u^\infty = 0$.

(ii) $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{J_n}{PJ_n + J_{n+k}}$ est isomorphe à $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{J_n Ap}{PJ_n Ap + J_{n+k} Ap}$

et par conséquent $\dfrac{R(A,\ g)}{R(A,\ g) \cap (u^k,\ p)\mathcal{R}(A,\ g)}$ est isomorphe à

$\dfrac{R(Ap,\ gAp)}{R(Ap,\ gAp) \cap (u^k,\ pAp)\ \mathcal{R}(Ap, gAp)}$ où $u = \dfrac{1}{X}$, $R(A, g) = \sum\limits_{n \geq 0} J_n X^n$,

$u^\infty = 0$ et $J_\infty = (0)$.

En particulier $\dfrac{R(A,\ g)}{PR(A,\ g)}$ est isomorphe à $\dfrac{R(Ap,\ gAp)}{PApR(Ap,\ gAp)}$.

(iii) Si $g = f_I$ et P maximal sur I alors $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{I^n}{PI^n} = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{I^n}{PI^n + I^{n+k}}$

$\approx \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{I^n Ap}{PI^n Ap} = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{I^n Ap}{PI^n Ap + I^{n+k} Ap}$ et, par conséquent :

$$\frac{R(A,\ I)}{R(A,\ I) \cap (u^k,\ p)\mathcal{R}(A,\ I)} \approx \frac{R(A,\ I)}{PR(A,\ I)} \approx \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{PI^n} \approx$$

$$\frac{\mathcal{R}(A,\ I)}{(u,\ p)\ \mathcal{R}(A,\ I)} \approx \frac{\mathcal{R}(Ap,\ IAp)}{(u,\ pAp)\ \mathcal{R}(Ap,\ IAp)} \approx \frac{R(Ap,\ IAp)}{PApR(Ap,\ IAp)}$$

Preuve

On applique le lemme 5.8.2 :

Dans (i) et (ii) on remplace K_n par $PJ_n + J_{n+k}$ et on a :

$PJ_n \subseteq K_n$ (iii) est une conséquence de (i) et (ii) ainsi que de 2.2.3.2 au chapitre 2.

En appliquant la dimension de Krull aux anneaux gradués utilisés dans (ii) et (iii) du corollaire précédent on a le corollaire suivant

5.8.4 Corollaire :

Soit A un anneau nœthérien. Soit $g = (J_n)_n$ une filtration de A. Soit P un idéal maximal. Alors $\forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*$ on a :

$$\gamma_P(g, k) = \gamma_{PA_P}(gA_P, k) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{J_n}{PJ_n + J_{n+k}} \text{ et en particulier,}$$

$$\gamma_P(g) = \gamma_{PA_P}(gA_P) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{J_n}{PJ_n} \text{ et si } g = f_I \text{ avec } I \subseteq P, \text{ on a}$$

$$\gamma_P(I, k) = \gamma_P(I) = \gamma_{PA_P}(IA_P, k) = \gamma_{PA_P}(IA_P)$$

$$= \dim \frac{\mathcal{R}(A, I)}{(u, p)\mathcal{R}(A, I)} = \dim \frac{R(A, I)}{PR(A, I)} = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{PI^n}$$

= largeur analytique de IA_P au sens de Okon.

5.8.5. Remarques :

1) Lorsque P est maximal ne contenant pas $\sqrt{g}$ alors on a :

(i) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n$ $\dfrac{J_nA_P}{PJ_nA_P + J_{n+k}A_P} = \dfrac{A_P}{A_P} = (0)$ et

$\dfrac{\mathcal{R}(A_P, gA_P)}{(u^k, pA_P)\mathcal{R}(A_P, gA_P)} = (0)$ est de dimension nulle. On pourrait aussi montrer directement que $\forall n$ $J_n = PJ_n + J_{n+k}$ et que $\dfrac{\mathcal{R}(A, g)}{(u^k, p)\mathcal{R}(A, g)} = (0)$

on a donc $\boxed{\gamma_P(g, k) = \gamma_{PA_P}(gA_P, k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*}$ et P maximal ne contenant pas $\sqrt{g}$.

(c) Pour $k = +\infty$ $\forall n$ $\dfrac{J_n A_P}{P J_n A_P} = \dfrac{A_P}{P A_P}$ et $\dfrac{\mathcal{R}(A_P,\ gA_P)}{pA_P\ \mathcal{R}(A_P,\ gA_P)} \approx \dfrac{A_P}{PA_P}\,[X]$

est de dimension 1. On pourrait aussi montrer directement que

$\forall n \quad P \cap J_n = PJ_n$ d'où $\dfrac{J_n}{PJ_n} \approx \dfrac{P + J_n}{P} = \dfrac{A}{P}$ et $\dfrac{R(A,\ g)}{PR(A,\ g)} \approx \sum_{n \geq 0} \dfrac{J_n}{PJ_n}$

est isomorphe à $\dfrac{A}{P}[X]$. On a donc $\boxed{\gamma_P(g) = \gamma_{PA_P}(gA_P) = 1}$

2) En particulier si $k = 1$ on a : $\gamma_{\mathfrak{M}}(g, 1) = 0$ $\forall \mathfrak{M}$ maximal ne

contenant pas $\sqrt{g}$. D'où $\sup\limits_{\mathfrak{M} \in \max A} \gamma_{\mathfrak{M}}(g, 1) = \sup\limits_{\mathfrak{M} \in \max A \text{ contenant } \sqrt{g}} \gamma_{\mathfrak{M}}(g, 1) = \gamma(g, 1)$

Donc si g est nœthérienne la largeur analytique de g au sens de Okon est

$\gamma(g, 1)$.

5.8.6. Proposition.

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration de A fortement

A.P. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_{mn} = J_m^n$ $\quad \forall n \geq 0$. Alors on a $\forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*$

$$\dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ g)} = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ J_{mn})}{(u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ J_{mn})} \quad \forall n \geq 1 \text{ et}$$

$\gamma_J(g, k) = \gamma_J(J_{mn},\, k) \quad \forall n \geq 1.$

Preuve

Soit $A_1 = \sum\limits_{p \geq -k} \dfrac{J_m^p}{JJ_m^p + J_m^{p+k}} X^p$ et soit $B_1 = \sum\limits_{p \geq -k} \dfrac{J_p}{JJ_p + J_{p+k}} X^p$

Soit $\psi \quad A_1 \longrightarrow B_1$ tel que $\forall a_{mp} \in J_m^p$,

$\psi \quad \sum\limits_p (a_{mp} + JJ_m^p + J_m^{p+k}) X^p \longmapsto \sum\limits_n (b_n + JJ_n + J_{n+k}) X^n$ avec

$$\begin{cases} b_{mp} = a_{mp} & \forall\ p > -k \\ b_n = 0 & \forall\ n \notin \{mp : p \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Dans A_1 le produit est défini tel que : $\forall\, a_{mp} \in J_{mp}$, $\forall\, a'_{mq} \in J_{mq}$,

$$(a_{mp} + JJ_m^p + J_m^{p+k})X^p\,(a'_{mq} + JJ_m^q + J_m^{q+k})X^q = (a_{mp}\,a'_{mq} + JJ_m^{p+k} + J_m^{p+q+k})X^{p+q}$$

Dans B_1 le produit est tel que $\forall\, b_p \in J_p$, $\forall\, b'_q \in J_q$,

$$(b_p + JJ_p + J_{p+k})X^p\,(b'_q + JJ_q + J_{q+k})X^q = (b_p\,b'_q + JJ_{p+q} + J_{p+q+k})X^{p+q}$$

On vérifie que ces deux produits sont bien définis.

$\boxed{\Psi \text{ est bien définie}}$

Si $a_{mp} \in JJ_m^p + J_m^{p+k}$ alors $a_{mp} \in JJ_m^p + J_{mp+k}$

d'où $a_{mp} + JJ_{mp} + J_{mp+k} = 0$.

Soit $B_0 = \operatorname{Im}\Psi$. Montrons que B_1 est entier sur B_0

$\forall\, y = (b_p + JJ_p + J_{p+k})X^p$ où $b_p \in J_p$, $y^m = (b_p^m + JJ_{pm} + J_{pm+k})X^{mp}$

d'où $y^m = \Psi\left[(b_p^m + JJ_m^p + J_m^{p+k})X^p\right]$ d'où B_1 est entier sur B_0 d'où

$\dim B_1 = \dim B_0 \leq \dim A_1$.

Soit $\quad \Psi : B_1 \longrightarrow A_1$

$$\sum_p (a_p + JJ_p + J_{p+k})X^p \longmapsto \sum_p (a_p^m + JJ_m^p + J_m^{p+k})X^p \quad \forall\, a_p \in J_p$$

$\boxed{\varphi \text{ est bien définie}}$

Si $a_p \in JJ_p + J_{p+k}$, $a_p^m \in \sum_{j=0}^{m} (JJ_p)^{m-j}\, J_{p+k}^j$.

$\forall\ j \leq m \quad (JJ_p)^{m-j}\, J_{p+k}^j \subseteq J^{m-j}\, J_{pm+jk} \subseteq JJ_{pm} + J_{m(p+k)}$ car

Si $j = m$ on a : $J^{m-j}\, J_{pm+jk} = J_{pm+mk} = J_{m(p+k)}$

Si $j < m$ $J^{m-j} \subseteq J$ et $J_{pm+jk} \subseteq J_{pm}$ d'où $J^{m-j}\, J_{pm+jk} \subseteq JJ_{pm}$

φ est donc bien définie.

Soit $A_0 = \operatorname{Im}\varphi = \{ \sum\limits_p (a_p^m + JJ_m^p + J_m^{p+k})X^p \; ; \; a_p \in J_p \}$.

Montrons que A_1 est entier sur A_0.

Soit $y = (b_{mp} + JJ_m^p + J_m^{p+k})X^p \in A_1$ où $b_{mp} \in J_m^p$.

$$\varphi[(b_{mp} + JJ_m^p + J_{mp+k})X^{mp}] = (b_{mp}^m + JJ_m^{mp} + J_m^{mp+k})X^{mp}$$

Or $y^m = (b_{mp}^m + JJ_m^{mp} + J_m^{mp+k})X^{mp}$ d'où $y^m \in \operatorname{Im}\varphi = A_0$; donc

A_1 est entier sur A_0 et $\dim A_1 = \dim A_0 \leq \dim B_1$

$\boxed{\textbf{CONCLUSION}}$: $\dim A_1 = \dim B_1$.

Comme $\dfrac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ g)}$ est isomorphe à $\sum\limits_{n \geq -k} \dfrac{J_n}{JJ_n + J_{n+k}} = B_1$ et

$\dfrac{\mathcal{R}(A,\ J_m)}{(u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ J_m)}$ isomorphe à A_1 on a :

$$\dim \frac{\mathcal{R}(A,\ g)}{(u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ g)} = \dim \frac{\mathcal{R}(A,\ J_m)}{(u^k,\ J)\ \mathcal{R}(A,\ J_m)}$$

En remplaçant m par m n avec $n \geq 1$ on a la première partie de la proposition. De la même manière, en se restreignant aux degrés positifs

on a : $\dim \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{J_n}{JJ_n + J_{n+k}} = \dim \sum\limits_{p \geq 0} \dfrac{J_m^p}{JJ_m^p + J_m^{p+k}}$

d'où $\vartheta_J(g, k) = \vartheta_J(J_m, k)$ et en remplaçant m par mn pour $n \geq 1$

on a la dernière partie de la proposition.

Dans la première partie de la proposition si on remplace k par 1 et J par $\mathfrak{M}$ on retrouve un résultat établi par D. Sangaré qui généralise un résultat établi par Okon ([7], Lemma 2).

5.8.6. **Proposition**

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration de A fortement A.P. . Soit J un idéal contenant J_1 avec $g = (J_n)_n$. Alors on a :

$$\forall\ k \in \overline{\mathbb{N}}^*,\ \ \gamma_J(g, k) = \gamma_J(g).$$

Preuve :

Pour tout idéal I contenu dans J on a :

$$\gamma_J(I, k) = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{JI^n + I^{n+k}} = \dim \sum_{n \geq 0} \frac{I^n}{JI^n} = \gamma_J(I)$$

$\exists\, m > 0$ tel que $J_{mn} = J_m^n$ $\forall n$ on a alors, d'après la proposition 5.8.5,

$$\gamma_J(g, k) = \gamma_J(J_m, k) = \gamma_J(J_m) = \gamma_J(g).$$

5.8.7. **Théorème** :

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration de A fortement A.P. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal contenant $\sqrt{g}$. Alors on a :

$$\forall p \in \overline{\mathbb{N}}^*,\ \ \forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*,\ \ \ell^*_{\mathfrak{M}}(g, p) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g).$$

Si de plus $\dfrac{A}{\mathfrak{M}}$ **est infini alors** $\forall p \in \overline{\mathbb{N}}^*$, $\forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*$,

$$\ell^*_{\mathfrak{M}}(g, p) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g).$$

Preuve :

Soit $m \geq 1$ tel que $\forall n$ $J_{mn} = J_m^n$. Les propositions 5.8.5 et 5.8.6 entraînent $\gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(J_m)$.

Le corollaire 5.8.4, la proposition 4.4. et le corollaire 3.4 entraînent :

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(J_m) = \gamma_{\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}}(J_m A_{\mathfrak{M}}) \geq \ell^*_{\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}}(J_m A_{\mathfrak{M}}) = \ell^*_{\mathfrak{M}}(J_m).$$

Le théorème 5.1 implique que $\ell^*_{\mathfrak{M}}(J_m) = \ell^*_{\mathfrak{M}}(g, p)$. De même le corollaire 4.5 $\Rightarrow \gamma_{\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}}(J_m A_{\mathfrak{M}}, 1) = \lambda_{\mathfrak{M}}(J_m) = \lambda_{\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}}(J_m A_{\mathfrak{M}})$ et le corollaire 5.8.4 $\Rightarrow \gamma_{\mathfrak{M}}(J_m) = \gamma_{\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}}(J_m A_{\mathfrak{M}}) = \gamma_{\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}}(J_m A_{\mathfrak{M}}, 1)$

D'après la proposition 5.5, $\lambda_{\mathfrak{M}}(J_m) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$. En conclusion on a $\lambda_{\mathfrak{M}}(g) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) \geq \ell^*_{\mathfrak{M}}(g, p)$. Si $\frac{A}{\mathfrak{M}}$ est infini le corollaire 5.7 $\Rightarrow \ell^*_{\mathfrak{M}}(g, p) = \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$

5.8.8. <u>Corollaire</u> :

Soit $(A, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local. Si $A/\mathfrak{M}$ est infini alors la largeur analytique d'ordre p d'une filtration g fortement A.P. est égale à $\lambda(g)$ et à $\gamma(g, k)$ pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$.

5.8.9. <u>Corollaire</u> :

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration fortement A.P.

Alors : $\ell^*(g) = \ell^*(g, p) \leq \gamma(g, k) = \gamma(g) = \lambda(g) \quad \forall p \in \overline{\mathbb{N}}^*, \forall k \in \overline{\mathbb{N}}^*$.

<u>Preuve</u> :

$$\ell^*(g, k) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \ell^*_{\mathfrak{M}}(g,k)$$

$$\gamma(g, k) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g)$$

$$\lambda(g) = \sup_{\mathfrak{M} \text{ maximal sur } \sqrt{g}} \lambda_{\mathfrak{M}}(g)$$ On applique le théorème 5.8.7

5.8.10. <u>Corollaire</u> :

Soit A un anneau nœthérien. Soit g une filtration nœthérienne ;

la largeur analytique de g au sens de Okon est égale à :

$$\boldsymbol{\lambda(g) \text{ et à } \gamma(g, k) \quad \forall k \geq 1.}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la 2è remarque de 5.8.5 et le corollaire 5.8.9

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BARSHAY. Graded Algebra of Powers of ideals generated by A-Sequences. J. Algebra 25 (1973) 90-99 MR 48-11704.

[2] J. BARSHAY. Generalized analytic independence. Proc. Amer. Math Soc. 58 (1976) , 32-36.

[3] N. Bourbaki, Algèbre Commutative chapitres 1 à 9, Masson ; Paris.

[4] W. BRUNS. On the number of elements independent with respect to an ideal. J. London Math. Soc. 22 (1980) 57-62.

[5] NAGATA M.. Local Rings. Interscience Publishers 13. 1962).

[6] D. G. NORTHCOTT. Lessons on rings, modules and multiplicities (Cambridge University Press, 1968).

[7] D. G. NORTHCOTT and D. RESS. Reductions of ideals in local Rings. Proc. Cambridge Philos. Society 50 (1954) 145-158.

[8] J. S. OKON. Prime Divisors, Analytic Spread and Filtrations Pacific Journal of Mathematics Vol. 113 n°2 (1984) P 451-462.

[9] L. J. RATLIFF, Jr and D. E. RUSH. Notes on I-good Filtrations and nœtherian Rees rings. Comm. in Algebra 16 (5) P. 955-975 (1988).

[10] D. REES A Trans Form of local rings and a Theorem of multiplicities for ideals. Camb. Philos Soc. 57 (1960) P. 8-17.

[11] D. SANGARE. Some aspects of the Asymptotic theory of ideals, generalization to Filtrations Lectures Notes, NMC, Abuja, Nigeria

[12] M. SOUMARE, Reduction de Filtrations. These de Doctorat 3e Cycle du 29 Novembre 1990, Université d'Abidjan.

[13] G. Valla. Remarks on Generalized analytic independence, Math. Proc. Cambridge Philos. Society 85 (1979), 281-289.