UNIVERSITÉ DE OUAGADOUGOU

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
(FA. S. T.)

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de Doctorat de 3e cycle

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Algèbre Génétique

SUR LES ALGÈBRES D'ÉVOLUTION

par

Joseph BAYARA

Soutenue le 28 mai 1999 devant le Jury composé de :

Président :	Pr Artibano MICALI	Université Montpellier II
Membres :	Pr Akry KOULIBALY	Université de Ouagadougou
	Pr Albert OUEDRAOGO	Université de Ouagadougou
	Pr Moussa OUATTARA	Université de Bobo-Dioulasso
	Pr Théodore M. Y. TAPSOBA	Université de Bobo-Dioulasso

A la mémoire de mes Parents

Et à ma bien Aimée

Nathalie

Je remercie le Professeur Artibano MICALI de l'Université Montpellier II qui a accepté de présider le Jury et rapporter sur ce travail. Sa contribution à l'élaboration des résultats du deuxième chapitre a été essentielle.

Je remercie le Professeur Roberto Celso Fabrício COSTA de l'Université de São Paulo d'avoir accepté de rapporter sur mon travail. Sa réaction diligente a été remarquable.

Mes remerciements vont également aux professeurs Akry KOULIBALY, Albert OUEDRAOGO de l'Université de Ouagadougou et Théodore TAPSOBA de l'Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso, d'avoir accepté d'être membres du Jury.

Ce travail a été fait sous la direction du Professeur Moussa OUATTARA et ce, malgré ses multiples occupations. Ses conseils et sa franchise m'ont été d'une aide précieuse.

Que tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de cette thèse trouvent ici ma sincère reconnaissance.

INTRODUCTION

Ce travail concerne essentiellement les δ-algèbres de Bernstein.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions et les résultats de base connus dans la théorie des algèbres génétiques et qui inteviennent dans notre travail.

Le deuxième chapitre nous donne des conditions suffisantes pour qu'une algèbre de Bernstein soit génétique. On établit notamment que toute algèbre de Bernstein de dimension finie vérifiant la deuxième "condition faible d'Engel" ou la troisième condition d'Engel est génétique. Les résultats obtenus nous donnent l'occasion de classifier certains types d'algèbres de Bernstein train.

Les algèbres vérifiant une équation train aux trois premières puissances mixtes font l'objet d'une étude globale dans le troisième chapitre. Nous exhibons deux classes principales appelées respectivement δ-algèbres de Bernstein et δ-algèbres de Walcher.

A partir de la notion d'opérateur d'évolution. nous retrouvons dans le quatrième chapitre les deux classes d'algèbres précédemment définies. Nous montrons alors que du point de vue structure algébrique, les δ-algèbres de Bernstein sont très proches des algèbres de Bernstein. Quant aux δ-algèbres de Walcher, elles rappellent les algèbres de Walcher. Dans ce sens, les algèbres de Bernstein sont les 0-algèbres de Bernstein et les algèbres de Walcher, les $-\frac{1}{2}$-algèbres de Walcher. Ces dernières étant génétiques, nous montrons que les δ-algèbres de Walcher sont génétiques.

1

ALGEBRES GENETIQUES

1.1. Survol historique.

C'est en 1923 que S. Bernstein posait le problème de la classification des opérateurs d'évolution satisfaisant au principe de stationnarité. En d'autres termes, la classification de tous les opérateurs quadratiques idempotents agissant sur l'ensemble des n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Le principe de la stationnarité est en génétique, une généralisation des lois de Mendel et du théorème de Hardy-Weinberg.

A la suite des travaux de Serge Bernstein, les algèbres génétiques ont pris naissance en 1939 par les écrits de I. M. H. Etherington. En 1947 R. D. Schafer définissait, au moyen de l'algèbre des transformations des objets appelés, maintenant, *algèbres génétiques au sens de Schafer*. En 1969, H. Gonshor marquait cette théorie par sa définition des *algèbres génétiques au sens de Gonshor*. Pour plus de détails, voir [12] et [23].

La théorie des algèbres génétiques, connue aujourd'hui sous l'appellation **Algèbre génétique**, est une branche des algèbres non associatives sans élément unité.

1.2. Définitions et résultats de base.

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre commutative. Le couple (A, ω) est appelé *algèbre pondérée* si $\omega : A \longrightarrow K$ est un morphisme non nul de K-algèbres. Le morphisme ω est alors appelé *pondération* ou *fonction poids* de l'algèbre A. Le poids d'un élément x de A est le scalaire $\omega(x)$. Si A est une K-algèbre de dimension finie, on dira que A est une algèbre génétique au sens de Gonshor s'il existe une base $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ de A sur K telle que :

$$e_0^2 = e_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_{00k} e_k, \quad e_0 e_j = \sum_{k=j}^{n} \gamma_{0jk} e_k, \quad e_i e_j = \sum_{k=max\{i,j\}+1}^{n} \gamma_{ijk} e_k$$

avec $i, j \geq 1$.

Les constantes γ_{0ii} $(i = 0, 1, \ldots, n)$ sont appelées les *racines train* et $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de l'algèbre A. Les algèbres génétiques au sens de Gonshor sont nécessairement pondérées. Il suffit pour cela de considérer l'application K-linéaire $\omega : A \longrightarrow K$ définie par $\omega(e_0) = 1$ et $\omega(e_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On vérifie sans difficulté que $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$ quels que soient x, y dans A.

On dira qu'une K-algèbre pondérée (A, ω), de dimension finie, est une *algèbre génétique au sens de Schafer* si, pour tout $T = \lambda id_A + f(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots, R_{x_n})$, le polynôme caractéristique, $P_T(X)$=dét$(T - Xid_A)$ ne dépend des x_i qu'à travers leurs poids $\omega(x_i)$, où $\lambda \in K$ et R_{x_i} est la multiplication de A définie par x_i, f étant un polynôme en indéterminées associatives non commutatives. Toute K-algèbre génétique au sens de Gonshor est une algèbre génétique au sens de Schafer([23]). La réciproque, en général fausse, est vraie si le corps est algébriquement clos. En fait, sur un corps algébriquement clos il y a équivalence entre "être une algèbre génétique au sens de Gonshor" et "être une algèbre génétique au sens de Schafer".

Soit A une K-algèbre commutative. Pour tout élément x de A on définit les puissances principales et les puissances pleines de x respectivement par :

$$x^1 = x, \; x^{k+1} = xx^k;$$

$$x^{[1]} = x, \; x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]};$$

où $k \geq 1$ est un entier.

On dira que A est une *nil-algèbre* de *nil-index* k si $x^k = 0$ pour tout x dans A et k est le plus petit tel entier.

Un élément x de A vérifiant $x^2 = x$ est appelé *idempotent* de A. L'algèbre A est dite *à puissances associatives* lorsque $x^i x^j = x^{i+j}$ pour tout x dans A et $i, j \geq 1$ entiers. On dira que A est une *algèbre de Jordan* (*commutative*) si $x^2(xy) = x(x^2y)$ quels que soient x, y dans A. Il est bien connu que toute algèbre de Jordan est à puissances associatives.

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de A. On note UV le sous-espace vectoriel de A engendré par les éléments de la forme uv, u et v parcourant respectivement U et V. Les puissances principales et les puissances pleines de U sont définies respectivement par :

$$U^1 = U,\, U^{k+1} = UU^k;$$

$$U^{[1]} = U,\, U^{[k+1]} = U^{[k]}U^{[k]}.$$

On dira que l'algèbre A est *nilpotente* (resp. *résoluble*) *d'index* k si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (resp. $A^{[k]} = 0$ et $A^{[k-1]} \neq 0$).

THÉORÈME 1.2.1([1]). — *En caractéristique zéro, toute nil-algèbre commutative de dimension finie et de nil index* ≤ 3 *est nilpotente.*

Le résultat suivant est dû à Albert.

THÉORÈME 1.2.2. — *En caractéristique différente de* 2, *toute nil-algèbre de Jordan de dimension finie est nilpotente.*

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. On dira que A est une *algèbre train* s'il existe un entier r et des constantes $\gamma_i \in K$ tels que :

$$x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$$

pour tout x dans A; le plus petit entier r donnant lieu à cette identité, nommée *équation train*, est appelé *le rang* de l'algèbre A. Observons que $1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{r-1} = 0$ car ω est non nul.

Soit $P(X)$ le polynôme de $K[X]$ défini par $P(X) = X^r + \gamma_1 X^{r-1} + \ldots + \gamma_{r-1}X$. Dans une extension convenable de K (corps de rupture de $P(X)$ par exemple) on a $P(X) = X(X-1)(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_{r-2})$. Les scalaires $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-2}$ sont appelés les *racines train principales* de A. Toute algèbre train admet une unique pondération. Dans une algèbre train tout idempotent non nul est de poids 1.

Les algèbres génétiques au sens de Schafer sont des algèbres train. Mais la réciproque est fausse ([23,théorème 3.10]).

Si (A, ω) est une algèbre pondérée alors A admet la décomposition $A = Ke \oplus N$ où $N = ker\omega$ est le noyau de la pondération ω et e un élément de A de poids 1 (un tel élément existe toujours). On sait que N est un idéal de A. La proposition suivante est bien connue.

Proposition 1.2.3 ([19]). — *Soient K un corps commutatif et (A, ω) une K-algèbre pondérée. Si (A, ω) est une algèbre train (resp. une algèbre génétique) alors l'idéal $N = ker\omega$ est nil (resp. nilpotent).*

La réciproque de cette proposition est mise en défaut par l'exemple suivant :

Exemple 1.2.4. Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre commutative de dimension 3 dont la table de multiplication dans la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ est donnée par $e_0^2 = e_0$, $e_0e_2 = e_1$, $e_1^2 = e_2$, les autres produits étant nuls. L'application $\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega(e_0) = 1$, $\omega(e_1) = \omega(e_2) = 0$ est une pondération de A. Soit x dans A, $x = \alpha_0e_0 + \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2)$. On a $x^2 = \alpha_0^2e_0 + 2\alpha_0\alpha_2e_1 + \alpha_1^2e_2$, $x^3 = \alpha_0^3e_0 + \alpha_0(\alpha_1^2 + \alpha_0\alpha_2)e_1 + 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2e_2$ et $x^4 = \alpha_0^4e_0 + \alpha_0^2\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2)e_1 + \alpha_0\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_0\alpha_2)e_2$. Par suite $x^4 - \alpha_0x^3 - \alpha_0\alpha_1x^2 + \alpha_0^2\alpha_1x = 0$ et cette relation ne dépend pas que de $\omega(x) = \alpha_0$ mais aussi de α_1. Ainsi l'algèbre (A, ω) n'est pas une algèbre train, donc non génétique. Cependant, le noyau $N = ker\omega$, vérifie $N^3 = 0$ et N est nilpotent. Par conséquent N est un nil-idéal.

On dira qu'une K-algèbre pondérée (A, ω) est une *algèbre train spéciale* si $N = ker\omega$ est nilpotent et ses puissances principales N^k $(k \geq 1)$ sont des idéaux de A.

Le théorème suivant caractérise cette classe d'algèbres.

Théorème 1.2.5 ([23]). — *Soit (A, ω) une algèbre pondérée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) A est une algèbre génétique au sens de Gonshor et les puissances principales N^k de $N = ker\omega$ sont des idéaux de A,

(ii) A est une algèbre train spéciale.

On sait alors que toute algèbre train spéciale est une algèbre génétique. De plus, il existe des algèbres génétiques qui ne sont pas des algèbres train spéciales. L'exemple suivant nous en fournit l'illustration.

Exemple 1.2.6. ([21, théorème 3.30]). Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre dont la multiplication dans la base $\{c_0, c_1, \ldots, c_5\}$ est définie par : $c_0^2 = c_0$, $c_0c_1 = \frac{1}{2}c_1$, $c_0c_2 = \frac{1}{4}c_3$, $c_1^2 = \frac{1}{4}c_2$, $c_1c_2 = \frac{1}{8}c_4$, $c_2^2 = \frac{1}{16}c_5$, les autres produits étant tous nuls. L'algèbre A est pondérée par l'application $\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega(c_0) = 1$ et $\omega(c_i) = 0$, $(i = 1, \ldots, 5)$. On a $N = ker\omega =< c_1, \ldots, c_5 >$, $N^2 =< c_2, c_4, c_5 >$, $N^3 =< c_4, c_5 >$ et $N^4 = 0$. Mais N^2 n'est pas un idéal de A car $c_0c_2 = \frac{1}{4}c_3 \notin N^2$. Donc A n'est pas une algèbre train spéciale. Par contre elle est génétique au sens de Gonshor.

Puisque les algèbres génétiques sont des algèbres train, du théorème 1.2.5, il vient que toute algèbre train spéciale est une algèbre train.

On peut noter le résultat suivant dû à Abraham ([1]).

THÉORÈME 1.2.7. — *En caractéristique différente de 2, toute algèbre train commutative de rang ≤ 3 est une algèbre train spéciale.*

Exemple 1.2.8. Soit A la K-algèbre commutative de dimension 6 dont la multiplication dans la base $\{c_0, c_1, \ldots, c_5\}$ s'écrit $c_0^2 = c_0$, $c_0c_i = \frac{1}{2}c_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$. $c_1c_2 = c_2c_4 = -c_1c_5 = c_3$, $c_1c_3 = c_4$, $c_2c_3 = c_5$, les autres produits sont nuls. Soit x un élément de A de poids 1. Alors $x = c_0 + \alpha_1c_1 + \cdots + \alpha_5c_5$ et $x^2 - x = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4)c_3 + 2\alpha_1\alpha_3c_4 + 2\alpha_2\alpha_3c_5$, $x^3 - x^2 = \frac{1}{2}(x^2 - x) + 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4)(\alpha_1c_4 + \alpha_2c_5)$. Par suite A est une algèbre train vérifiant l'équation train $x^4 - 2\omega(x)x^3 + \frac{5}{4}\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{4}\omega(x)^3x = 0$. Mais le noyau $N = ker\omega =< c_1, \ldots, c_5 >$ de ω n'est pas nilpotent puisque $N^3 = N^2 =< c_3, c_4, c_5 >$. On obtient ainsi une algèbre train de rang 4 qui n'est pas une algèbre train spéciale.

THÉORÈME 1.2.9. ([11]). — *Soit (A, ω) une algèbre train de rang 4. Pour tout x dans A de poids non nul, la sous-algèbre engendrée par x est une algèbre train spéciale.*

Nous montrons à travers l'exemple ci-dessous que le rang 4 est le meilleur possible dans le théorème 1.2.9. En d'autres termes, le résultat n'est plus vrai pour les algèbres train de rang $n \geq 5$.

Exemple 1.2.10. On considère la $\mathbb{R}$-algèbre commutative dont la table de multiplication est donnée dans la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ par : $e_0^2 = e_0$, $e_0 e_i = e_{i+1}$, $e_1^2 = e_2$ $(i = 1, \ldots, n-3)$, $n \geq 5$, les autres produits sont nuls. Soit $x = e_0 + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i e_i$ dans A. On a : $x^2 - x = -\alpha_1 e_1 + (2\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2)e_2 + \sum_{i=2}^{n-3}(2\alpha_i - \alpha_{i+1})e_{i+1}$ et $x^3 - x^2 = -\alpha_1(\alpha_1 + 1)e_2 + (2\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2)e_3 + \sum_{i=2}^{n-4}(2\alpha_i - \alpha_{i+1})e_{i+2}$. Il est facile d'établir par récurrence sur k que $x^{k+1} - x^k = -\alpha_1(\alpha_1 + 1)e_k + (2\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2)e_{k+1} + \sum_{i=2}^{n-2-k}(2\alpha_i - \alpha_{i+1})e_{i+k}$ $(k = 2, 3, \ldots, n-4)$. Par suite, $x^{n-2} - x^{n-3} = -\alpha_1(\alpha_1 + 1)e_{n-3} + (2\alpha_1 + \alpha_1^2 - \alpha_2)e_{n-2}$, $x^{n-1} - x^{n-2} = -\alpha_1(\alpha_1 + 1)e_{n-2}$ et enfin $x^n - x^{n-1} = 0$. Donc, pour tout x dans A, on a $x^n - \omega(x)x^{n-1} = 0$. Posons $x_0 = e_0 + e_1$. Alors $x_0^k = e_0 + e_1 + \ldots + e_{k-1} + 3e_k$ $(k = 2, \ldots, n-2)$ et $x_0^{n-1} = e_0 + e_1 + \ldots + e_{n-2}$. Montrons que la famille $\{x_0, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^{n-1}\}$ est libre. En effet, si $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i x_0^i = 0$ alors en se ramenant à la base $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-2}\}$ on obtient : $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} = 0$, $\beta_1 = 0$ et $3\beta_k + \beta_{k+1} + \ldots + \beta_{n-1} = 0$, $(k = 2, 3, \ldots, n-2)$. Soit donc $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 0$. Par conséquent A est une algèbre train monogène de rang $n \geq 5$, engendrée par l'élément x_0. On a $N = ker\omega =< e_1, e_2, \ldots, e_{n-2} >$ avec $N^2 =< e_2 >$ et $e_0 N^2 =< e_3 > \not\subset N^2$. Donc (A, ω) n'est pas une algèbre train spéciale car N^2 n'est pas un idéal de A.

Remarque 1.2.11. Les exemples 1.2.8 et 1.2.10 nous montrent que pour $n \geq 4$ il existe des algèbres train de rang n qui ne sont pas des algèbres train spéciales.

Un corollaire immédiat du théorème 1.2.9, donné dans [12], est le suivant.

COROLLAIRE 1.2.12. — *Soit (A, ω) une algèbre train de rang 4 de racines train principales 1, λ_1 et λ_2. Si $\lambda_1 \neq \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 \neq \frac{1}{2}$ alors A admet au moins un idempotent non nul.*

L'exemple suivant nous montre que si $\frac{1}{2}$ est une racine train principale d'une algèbre train A de rang 4, alors A peut ne pas admettre d'idempotent non trivial.

Exemple 1.2.13. Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et A la K-algèbre dont les produits non nuls dans la base $\{e, u, v\}$ sont : $e^2 = e + u$,

$eu = \alpha u + v$ et $ev = \frac{1}{2}v$ avec $\alpha \in K$. A est une algèbre train de rang 4 d'équation train $x^4 - (\alpha + \frac{3}{2})\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{2}\alpha\omega(x)^3x = 0$ et ses racines train principales sont 1, $\frac{1}{2}$ et α. Soit maintenant $x = e + x_1u + x_2v$ un élément de poids 1 de A. Si $x^2 = x$ alors $x_1 = 0$ et $1 - x_1 + 2\alpha x_1 = 0$. Ce qui est impossible et donc A n'admet pas d'idempotent non nul.

1.3. Introduction aux algèbres de Bernstein.

En suivant [12] on peut poser le problème de Bernstein comme suit. Un état de la population dans une génération étant décrit par un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, soit Δ^{n-1} le simplexe de tous les états de cette population défini par :

$$\Delta^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Observons que Δ^{n-1} est un ensemble convexe. Les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base naturelle de $\mathbb{R}^n$ sont appelés les types d'individus dans la population considérée. Soit $p_{ij,k}$ la probabilité pour qu'un individu de type e_k provienne de parents de types e_i et e_j dans la génération suivante. Alors $p_{ij,k} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1$. On admettra que $p_{ij,k} = p_{ji,k}$ en supposant que l'origine des parents n'a pas d'importance chez les descendants. Les nombres $p_{ij,k}$ sont appelés les *coefficients d'hérédité.*

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est l'état d'une population alors, dans la génération suivante, son état est donné par $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ tel que :

$$x'_k = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} p_{ij,k} x_i x_j$$

pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

Ces formules définissent une application quadratique $V : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^{n-1}, x \longmapsto x'$, appelée *opérateur d'évolution* de cette population. Un état x est dit en *équilibre (stable)* si $V(x) = x$. Un opérateur d'évolution V est dit *stationnaire d'ordre* k si $V^{k+1} = V^k$.

Le problème posé par Bernstein est la description de tous les opérateurs d'évolution stationnaires.

Un opérateur d'évolution V peut s'interpréter de la façon suivante. Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on définit une multiplication commutative par :

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} e_k \quad (1 \leq i \leq j \leq n)$$

où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On obtient ainsi une algèbre commutative pondérée (A, ω), non nécessairement associative, où $\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $A \equiv \mathbb{R}^n$. Par suite, un opérateur d'évolution V définit sur $\mathbb{R}^n$ une unique algèbre commutative A_V satisfaisant

$$x^2 = V(x) = x'$$

pour tout x dans Δ^{n-1}. L'algèbre A_V est alors appelée *algèbre d'évolution* de la population considérée. Notons que dans ce cas $V^{k+1} = V^k$ équivaut à $x^{[k-2]} = \omega(x)^{2^k} x^{[k+1]}$ quel que soit x dans A (dans le cas où $V(x) = x^2$). Pour $k = 1$, i.e $V^2 = V$, on dit simplement que V est *stationnaire*.

THÉORÈME 1.3.1 ([12]). — *L'opérateur V est stationnaire si et seulement si $x^{[3]} = \omega(x)^2 x^2$.*

1.4. Structure des algèbres de Bernstein.

Dans ce paragraphe, K désignera un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K-algèbre commutative non nécessairement associative.

Définition 1.4.1. On appelle *algèbre de Bernstein* toute K-algèbre pondérée (A, ω) vérifiant l'identité $x^{[3]} - \omega(x)^2 x^2 = 0$ pour tout x dans A.

Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Alors A admet une pondération unique. De plus, si x est un élément de A de poids 1 alors $(x^2)^2 = x^{[3]} = x^2$ et donc A admet un idempotent non nul. Si e est un tel élément alors l'algèbre A admet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ avec $U_e = \{x \in ker\omega \mid ex = \frac{1}{2}x\}$ et $V_e = \{x \in ker\omega \mid ex = 0\}$.

La proposition suivante sera d'une grande utilité.

PROPOSITION 1.4.2 ([13]). — *Si $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ est une K-algèbre de Bernstein alors*

(*1*) $U_e^2 \subset V_e$, $U_eV_e \subset U_e$, $V_e^2 \subset U_e$, $U_eV_e^2 = 0$,

(*2*) $u^3 = 0$ *et* $u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0$,

(*3*) $u(uv) = 0$ *et* $u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0$,

(*4*) $(uv)^2 = 0$ *et* $(u_1v)(u_2v) = (uv_1)(uv_2) = 0$;

avec $u,\ u_1,\ u_2 \in U_e$ *et* $v,\ v_1,\ v_2 \in V_e$

Dans toute la suite du paragraphe (A, ω) désignera une algèbre de Bernstein. Si e est un idempotent non nul fixé dans A, l'ensemble des idempotents non nuls de A est donné par

$$I_p(A) = \{e + u + u^2 \mid u \in U_e\}.$$

Soient $e_0 = e + u_0 + u_0^2$, $u_0 \in U_e$, un autre idempotent et $A = Ke_0 \oplus U_{e_0} \oplus V_{e_0}$ la décomposition de Peirce de A relativement à e_0. Les sous-espaces U_{e_0} et V_{e_0} sont donnés par $U_{e_0} = \{u + 2u_0u \mid u \in U_e\}$ et $V_{e_0} = \{v - 2u_0v - 2u_0^2v \mid v \in V_e\}$.

PROPOSITION 1.4.3. — *Soient (A, ω) une K-algèbre de Bernstein, e et e_0 deux idempotents de A tels que $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ et $A = Ke_0 \oplus U_{e_0} \oplus V_{e_0}$. Alors on a les isomorphismes de K-espaces vectoriels $U_e \cong U_{e_0}$ et $V_e \cong V_{e_0}$.*

En effet, il suffit de voir que $\varphi : U_e \longrightarrow U_{e_0}$, $u \longmapsto u + 2u_0u$ et $\phi : V_e \longrightarrow V_{e_0}$, $v \longmapsto v - 2u_0v - 2u_0^2v$ sont des applications linéaires bijectives.

De la proposition ci-dessus, il vient que les dimensions de U_e et de V_e sont indépendantes du choix de l'idempotent e. D'où la définition suivante :

Definition 1.4.4. On appelle *type* d'une K-algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ le couple $(1 + r, s)$ avec $r = dim_K U_e$ et $s = dim_K V_e$.

Le type d'une K-algèbre de Bernstein intervient dans de nombreux théorèmes de classification.

Il est aussi bien connu que les entiers $dim_K U_e^2$ et $dim_K(U_eV_e + V_e^2)$ ne dépendent pas du choix de l'idempotent e dans la décomposition $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$.

Les définitions suivantes, qui en découlent, ont été introduites par Lyubich ([12]).

Une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ est dite *exceptionnelle* si $U_e^2 = 0$ et *normale* (ou *conservative*) lorsque $U_eV_e + V_e^2 = 0$.

Toute algèbre de Bernstein de type $(1+r, s)$ avec $inf(r, s) \leq 1$ est soit normale soit exceptionnelle [12, corollaire 3.4.24]. La proposition suivante donne une caractérisation de ces deux classes.

PROPOSITION 1.4.5 ([19]). — *Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (A, ω) est une algèbre de Bernstein normale (resp. exceptionnelle)

(ii) $x^2y = \omega(x)xy$ (resp. $(xy)^2 = \omega(xy)xy$) quels que soient x et y dans A.

Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. On sait que A se décompose sous la forme $A = Ke \oplus N$ où $N = ker\omega$ est le noyau de la pondération.

PROPOSITION 1.4.6. — *Si I est un idéal de A alors le sous-espace vectoriel NI est aussi un idéal de A.*

En effet, supposons que I est un idéal de A. Alors $NI \subset I$ et donc $N(NI) \subset NI$. Il suffit donc de montrer que $e(NI) \subset NI$. Or, la formule $e(xy) = \frac{1}{2}xy + \omega(x)ey - 2(ex)(ey)$, provenant de la linéarisation de l'identité $x^{[3]} - \omega(x)^2x^2 = 0$, pour tout x parcourant I et y parcourant N, nous donne cette inclusion, car si $I \not\subset N$, on peut supposer que $e \in I$. D'où le résultat.

COROLLAIRE 1.4.7. — *Les puissances principales N^k de $N = ker\omega$ sont des idéaux de A.*

En effet N étant un idéal, il suffit de procéder par récurrence sur $k \geq 1$ en utilisant la proposition 1.4.6.

COROLLAIRE 1.4.8. — *Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (A, ω) est une algèbre train spéciale,

(ii) (A, ω) est une algèbre génétique,

(iii) $ker\omega$ est un idéal nilpotent.

En effet, $(i) \Longrightarrow (ii)$ par le théorème 1.2.5, $(ii) \Longrightarrow (iii)$ par la proposition 1.2.3 et

$(iii) \Longrightarrow (i)$ par le théorème 1.2.5 et le corollaire 1.4.7.

PROPOSITION 1.4.9. — *Soient* (A, ω) *une* K*-algèbre de Bernstein et* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ *sa décomposition de Peirce relativement à l'idempotent* e. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (A, ω) *est une algèbre de Jordan,*

(ii) (A, ω) *est une algèbre à puissances associatives,*

(iii) (A, ω) *vérifie l'équation train* $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$,

(iv) *Il existe un idempotent* e *tel que* $V_e^2 = 0$ *et* $v(vu) = 0$ *quels que soient* $u \in U_e$, $v \in V_e$,

(v) $V_e^2 = 0$ *quel que soit l'idempotent* e *dans* A.

Dans une algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, le sous-espace vectoriel $L_0 = \{u \in U_e \mid uU_e = 0\} = U_e \cap AnnU_e$ est un idéal de A. Il a été prouvé dans [8] que L_0 est un invariant de l'idempotent. De plus l'algèbre quotient A/L_0 est une algèbre de Bernstein-Jordan.

LEMME 1.4.10 ([13]). — $L_0^2 = 0$, $V_e^2 \subset L_0$, $U_e^2 L_0 = 0$ *et* $v(vu) \in L_0$ *quels que soient* $u \in U_e$, $v \in V_e$.

THÉORÈME 1.4.11 ([17. théorème 2.7]). — *Soit* (A, ω) *une algèbre de Bernstein de noyau* $N = ker\omega$. *Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) N *est une nil-algèbre.*

(ii) A *est une algèbre train.*

De plus, son équation est de la forme : $(x^3 - \omega(x)x^2)(x - \frac{1}{2}\omega(x))^{r-3} = 0$.

Remarque 1.4.12. Puisque nos algèbres sont non associatives, l'équation train $(x^3 - \omega(x)x^2)(x - \frac{1}{2}\omega(x))^{r-3} = 0$ devrait se mettre rigoureusement sous la forme $x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \ldots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$ avec $\gamma_k = \dfrac{(-1)^k}{2^k}\left[\binom{r-3}{k} + 2\binom{r-3}{k-1}\right]$, $1 \leq k \leq r-1$. Mais cette notation est souvent utilisée par souci de simplification.

2

AUTOUR DE LA CONDITION D'ENGEL DANS LES ALGEBRES DE BERNSTEIN

2.1. Préliminaires

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre non nécessairement commutative ni associative. Pour tout x dans A, désignons respectivement par L_x et R_x les multiplications à gauche et à droite de A définies par l'élément x. On dira que A vérifie la *k-ième condition d'Engel à gauche* (resp. *à droite*) si $L_x^k = 0$ (resp. $R_x^k = 0$) pour tout x dans A, où $k \geq 1$ est le plus petit tel entier. Si l'algèbre A est commutative, on parlera simplement de *k-ième condition d'Engel.*

Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ une K-algèbre de Bernstein. Si $U_e = 0$, A est dite *constante* car pour tout $x = \lambda e + v$ de A où λ est dans K et v dans V_e, on a $x^2 = \lambda^2 e$. Dans ce cas, si $N = ker\omega$ alors, $N = V_e$ et N est trivialement nilpotent car $N^2 = V_e^2 = 0$. Ainsi, dans toute la suite, on supposera que les algèbres de Bernstein considérées sont non constantes et on établira des conditions suffisantes pour que l'idéal $N = ker\omega$ soit nilpotent, i.e pour que l'algèbre de Bernstein $(A.\omega)$ soit une algèbre génétique.

Une K-algèbre pondérée (A, ω) ne peut satisfaire une quelconque condition d'Engel au sens donné ci-dessus. En effet, si $L_x^k = 0$ pour tout x dans A alors $\omega(x) = 0$ quel que soit x dans A. Ce qui est absurde, puisque ω est une application non nulle par définition. On dira donc qu'une algèbre de Bernstein (A, ω) vérifie la *k-ième condition d'Engel* si l'idéal $N = ker\omega$ vérifie la k-ième condition d'Engel.

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1.1. — *Soient* (A, ω) *une* K*-algèbre de Bernstein et* $N = U_e \oplus V_e = \ker\omega$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) N *est un nil-idéal ,*

(ii) *L'application* $L_{x|N}$ *est nilpotente pour tout* x *dans* N ,

(iii) *L'application* $L_{v|U_e}$ *est nilpotente pour tout* v *dans* V_e.

En effet ,$(i) \Longrightarrow (ii)$ est donnée dans ([20]) et $(ii) \Longrightarrow (iii)$ est triviale. Montrons $(iii) \Longrightarrow (i)$. Soit donc $x \in N$. Alors il existe u dans U_e et v dans V_e tels que $x = u+v$. D'où $x^2 = u^2+2uv+v^2$ et $x^3 = u^3+2u(uv)+uv^2+u^2v+2(uv)v+v^3 = u^2v+2(uv)v+v^3$, après simplification à l'aide du théorème 1.4.2. La dernière expression nous montre que $x^3 \in U_e$. Par suite, on peut établir par récurrence sur l'entier $k \geq 0$, que $x^{k+3} = L^k_{v|U_e}(x^3)$. Donc, si l'application $L_{v|U_e}$ est nilpotente d'index t alors $x^{t+3} = 0$ et N est nil.

On peut remarquer que si $x = u+v \in N$, pour tout $k \geq 0$, on a $L^{k+3}_{x|N} = L^k_{v|U_e} \circ L^3_{x|N}$. Cette relation nous donne l'implication $(iii) \Longrightarrow (ii)$ dans le théorème 2.1.1.

On dira qu'une algèbre de Bernstein (A, ω) vérifie la *k-ième condition faible d'Engel* si $L^k_{v|U_e} = 0$ pour tout v dans V_e, $k \geq 1$ étant le plus petit entier avec cette propriété et $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ la décomposition de Peirce de A relative à un idempotent non nul e. Cette notion, bien que relative à un idempotent, ne change pas si l'on change l'idempotent. Seul l'indice de nilpotence peut changer. En fait, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.2. — *Soient* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e = Ke' \oplus U_{e'} \oplus V_{e'}$ *les décompositions de Peirce d'une algèbre de Bernstein* (A, ω) *relativement à deux idempotents* e *et* e'. *S'il existe un entier* $k \geq 1$ *tel que* $L^k_{v|U_e} = 0$ *alors* $L^{k+2}_{v'|U_{e'}} = 0$, v *et* v' *parcourant respectivement* V_e *et* $V_{e'}$.

En effet, on sait qu'il existe $u_0 \in U_e$ tel que $e' = e + u_0 + u_0^2$ et si $u' \in U_{e'}$, $v' \in V_{e'}$, on peut trouver u et v respectivement dans U_e et V_e tels que $v' = v - 2u_0v - 2u_0^2v$ et $u' = u + 2u_0u$. Ainsi, la proposition 1.4.2 permet d'obtenir la relation :

$$L^{p+2}_{v'|U_{e'}}(u') = L^p_{v|U_e}(v(vu) + 2v(u_0(vu)) + 2v(v(u_0u)) + 4v((u_0v)(u_0u)))$$

pour tout entier $p \geq 1$ et le résultat en découle.

THÉORÈME 2.1.3. — *Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein vérifiant la k-ième condition faible d'Engel. Alors A est une algèbre train de rang r, avec $k+1 \leq r \leq k+3$.*

En effet, si A vérifie la k-ième condition faible d'Engel alors $L^k_{v|U_e} = 0$ et, par suite, $v^{k+2} = 0$ pour tout $v \in V_e$. Ainsi, puisque $L^{k-1}_v \neq 0$ pour un certain $v \in V_e$, le théorème 3.2 de [5] nous dit que A est une algèbre train de rang r avec $k+1 \leq r \leq k+3$.

Nous montrons ci-dessous qu'il existe des algèbres de Bernstein vérifiant la k-ième condition faible d'Engel ($k \geq 1$) et qui sont des algèbres train de rang $k+i$ ($i = 1, 2, 3$).

En effet, pour $k = 1$, soit $A = < e, u, v >$. Si les produits non nuls de A sont donnés respectivement par :

(1) $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$;

(2) $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $u^2 = v$;

(3) $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $v^2 = u$;

alors (A, ω) est une algèbre de Bernstein train respectivement de rang 2, 3, 4.

Supposons maintenant que $k \geq 2$ et soit $A_i = < e, u_1, u_2, \ldots, u_k, v >$ avec comme produits non nuls $e^2 = e$, $eu_j = \frac{1}{2}u_j$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), $vu_j = u_{j+1}$ ($j = 1, 2, \ldots, k-1$) et $v^2 = u_{4-i}$ ($i = 1, 2, 3$). On vérifie que (A_i, ω) est une algèbre de Bernstein exceptionnelle satisfaisant $v^{k+i-2} = u_k \neq 0$, $v^{k+i-1} = 0$ et $L^k_{v|U_e} = 0$. Par suite, le théorème 3.2 de [5] nous dit encore que A_i est une algèbre train de rang $k+i$ ($i = 1, 2, 3$) vérifiant la k-ième condition faible d'Engel.

2.2. Les premières conditions d'Engel

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Si A vérifie la première condition d'Engel alors $N = ker\omega$ est nilpotent.*

En effet, si $L_{x|N} = 0$ quel que soit x dans N alors $N^2 = 0$.

PROPOSITION 2.2.2. — *Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Si A vérifie la première condition faible d'Engel alors $N = ker\omega$ est nilpotent.*

En effet, si $L_{v|U_e} = 0$ pour tout v dans V_e, alors $U_eV_e = 0$ et la proposition 4.2 de [13] nous dit que $N^4 = 0$.

2.3. Les deuxièmes conditions d'Engel

Lemme 2.3.1. — *Soit N une K-algèbre commutative. Si N vérifie la deuxième condition d'Engel alors $x(yz) = 0$ quels que soient x, y, z dans N et N est associative.*

En effet, comme N vérifie la deuxième condition d'Engel on a $x(xy) = 0$ quels que soient x, y dans N et en particulier $x^3 = 0$ pour tout x dans N. Cette dernière condition entraîne que $2x(xy) + x^2y = x^2y = 0$ et comme la caractéristique de K est différente de 2, nécessairement $x(yz) = 0$ quels que soient x, y, z dans N.

Corollaire 2.3.2. — *Toute algèbre de Bernstein vérifiant la deuxième condition d'Engel est génétique.*

En effet, d'après le lemme 2.3.1 on a $N^3 = 0$.

Note 2.3.3. On peut se demander si une algèbre de Bernstein dont le noyau de la pondération est associatif n'est pas elle-même associative. La réponse à cette question est, en général, non et, de plus elle n'est pas *n-associative* pour tout entier $n \geq 3$. Rappelons que le *n-associateur* d'une K-algèbre A est l'application K-multilinéaire $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n-1} \longrightarrow A$ définie par $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \{x_1, \ldots, x_n\}$ où $\{x_1, \ldots, x_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}\{x_1, \ldots, x_k x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ pour $n \geq 4$ et $\{x_1, x_2, x_3\} = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$. Une algèbre peut ne pas être associative, i.e 3-associative dans le langage ci-dessus, mais être 4-associative. Pour de tels exemples on renvoie à [19]. Dans le cas qui nous occupe concernant le corollaire 2.3.2, l'algèbre de Bernstein s'écrit $A = Ke \oplus N$ où e est un idempotent et $N = U_e \oplus V_e$ une algèbre associative vérifiant $(xy)z = 0$ quels que soient x, y, z dans N. En fait, le calcul du n-associateur donne $\{e, \ldots, e, v, v'\} = -\frac{1}{2^{n-1}}vv'$ quels que soient v, v' dans V_e. Cela nous dit qu'une algèbre de Bernstein n'est jamais n-associative pour tout entier $n \geq 3$, sauf si $V_e^2 = 0$. En fait, l'unique algèbre de Bernstein associative est l'algèbre $A = Ke \oplus V_e$ avec $V_e^2 = 0$. Nous donnons ci-dessous un exemple d'algèbre de Bernstein non associative dont le noyau est une algèbre associative.

Exemple 2.3.4. Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre dont la multiplication dans la base $\{e, u, v\}$ est donnée par $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $v^2 = u$ et les autres produits sont nuls. Cette algèbre vérifie la deuxième condition d'Engel. En effet, si $x = \alpha u + \beta v$ et $y = \alpha' u + \beta' v$ alors $xy = \beta\beta' u$ et $x(xy) = 0$. Par suite, le lemme 2.3.1 nous dit que N est associatif.

Quant à la deuxième condition faible d'Engel on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3.5. — *Toute algèbre de Bernstein de dimension finie vérifiant la deuxième condition faible d'Engel est génétique.*

La démonstration de ce théorème dépend du lemme suivant :

LEMME 2.3.6. — *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle et S un ensemble non vide de K-endomorphismes de E qui anticommutent deux à deux. Alors $\bigcap_{f \in S} Kerf \neq 0$.*

En effet, puisque $f^2 = 0$ pour tout f dans S, les cas où $dim_K(E) = 1$ ou $S = \{0\}$ sont immédiats. Supposons donc que $dim_K(E) \geq 2$ et qu'il existe un endomorphisme non nul f dans S. Alors $f^2 = 0$ et $0 \neq f(E) \subset Kerf$ nous disent que $F = Kerf \neq 0$ et $dim_K(F) < dim_K(E)$. Comme pour tout g dans S, $gf + fg = 0$, nécessairement $g(F) \subset F$ i.e $g_{|F}$ est un endomorphisme de F. Donc $\bigcap_{g \in S} Kerg = Kerf \cap \bigcap_{g \in S - \{f\}} Kerg = \bigcap_{g \in S - \{f\}} Ker(g_{|F})$. L'hypothèse de récurrence sur la dimension nous dit $\bigcap_{g \in S - \{f\}} Ker(g_{|F}) \neq 0$. d'où le lemme.

Démonstration du théorème 2.3.5. Soient (A, ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension finie et $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ sa décomposition de Peirce. Considérons l'idéal $L = U_e \cap Ann(U_e)$ de l'algèbre A. Si $L = 0$ on sait que l'algèbre A est génétique ([13], [9]) et elle vérifie n'importe quelle condition d'Engel. Supposons que $L \neq 0$ et considérons les multiplications $L_{v|U_e} : U_e \longrightarrow U_e$, $u \longmapsto uv$ pour tout v dans V_e. Comme $L_{v|U_e}(L) \subset L$, puisque L est un idéal, on pose $\ell_v = L_{v|L}$. Pour tout v dans V_e, $\ell_v^2 = 0$ car l'algèbre A vérifie la deuxième condition d'Engel, donc $\ell_v \ell_{v'} + \ell_{v'} \ell_v = 0$ quels que soient v, v' dans V_e. Le lemme 2.3.6 nous dit alors que $I = \bigcap_{v \in V_e} Ker(\ell_v) \neq 0$. Puisque $I \subset L \subset U_e$, $eI = I$, $U_e I = 0$ et $V_e I = 0$, alors I est un idéal de A et l'algèbre de Bernstein quotient A/I vérifie la deuxième condition faible d'Engel. L'hypothèse de récurrence sur la dimension nous dit que l'algèbre de Bernstein A/I est génétique ou encore, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $N^k \subset I$, donc $N^{k+1} \subset NI \subset U_e I + V_e I = 0$.

Il s'ensuit que A est une algèbre génétique d'après le corollaire 1.4.8.

COROLLAIRE 2.3.7. — *Toute algèbre de Bernstein-Jordan de dimension finie est génétique.*

En effet, il suffit de remarquer que toute algèbre de Bernstein-Jordan de dimension finie vérifie la deuxième condition faible d'Engel (voir condition (iv) de la proposition 1.4.9).

2.4. Les troisièmes conditions d'Engel

LEMME 2.4.1. — *Soit (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'algèbre (A, ω) vérifie la troisième condition d'Engel;*

(ii) *Pour toute décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ on a $v(v(vv')) = 0$, $v(u'(vu)) = 0$, $u^2(vu') + v(u^2u') = 0$, $v(v(U_eV_e)) = 0$, $v(vU_e^2) = 0$, quels que soient u, u' dans U_e et v, v' dans V_e.*

En effet, soient $x = u + v$ et $y = u' + v'$ dans $N = U_e \oplus V_e$. On a $x(xy) = u(uu') + u(vu') + v(uu') + v(uv') + v(vu') + v(vv')$ car $U_eV_e^2 = 0$ et $u(uV_e) = 0$ quels que soient v, v' dans V_e. Donc $x(x(xy)) = u(u(uu')) + u(u(vu')) + u(v(uu')) + u(v(uv')) + u(v(vu')) + u(v(vv')) + v(u(uu')) + v(u(vu')) + v(v(uu')) + v(v(uv')) + v(v(vu')) + v(v(vv'))$. Or, les termes $u(u(uu'))$, $u(v(uu'))$, $u(v(uv'))$, $u(v(vu'))$ et $u(v(vv'))$ sont tous nuls. D'où $x(x(xy)) = u(u(vu')) + v(u(uu')) + v(u(vu')) + v(v(uu')) + v(v(uv')) + v(v(vu')) + v(v(vv'))$, soit enfin

$$\begin{aligned} x(x(xy)) =& v(v(vv')) + v(u(vu')) + \frac{1}{2}(u^2(vu') + v(u^2u')) \\ &+ v(v(vu')) + v(v(v'u)) + v(v(uu')) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Compte tenu de cette dernière formule, la condition (ii) entraîne la condition (i).

Supposons maintenant que l'algèbre A vérifie la troisième condition d'Engel, c'est à dire, $x(x(xy)) = 0$ pour x, y parcourant N. On a, en particulier, $v(v(vu')) = v(v(vv')) = 0$ et en faisant $u' = 0$ dans la formule (2.4.2), on a $v(v(uv')) = 0$ quels que soient u dans U_e et v, v' dans V_e. Donc $v(v(U_eV_e)) = 0$.

Si l'on pose $u = u'$ dans (2.4.2) on a $v(vu^2) = 0$ quels que soient u dans U_e et v dans V_e et, par suite $v(vU_e^2) = 0$. La formule (2.4.2) se réduit alors à $0 = x(x(xy)) = u(u(vu')) + v(u(u(u')) + v(u(vu'))$ où, en remplaçant v par $-v$ et en additionnant les deux équations on a $v(u(vu')) = 0$ et $u(u(u'v)) + v(u(uu')) = 0$, soit encore $v(u^2u') + u^2(vu') = 0$ et le lemme s'ensuit.

Pour deux sous-K-espaces vectoriels B et C d'une K-algèbre A, posons, inductivement, $B^{(k)}C = B(B^{(k-1)}C)$ pour tout entier $k \geq 1$ et $B^{(0)}C = C$.

LEMME 2.4.3. — *Soient $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ une K-algèbre de Bernstein de dimension finie. Si pour tout v dans V_e on a $v(v(U_eV_e)) = 0$, alors l'idéal $N = U_e \oplus V_e$ est nilpotent.*

En effet, considérons la suite décroissante de sous-espaces vectoriels de A, $U_e = V_e^{(0)}U_e \supset V_e^{(1)}U_e \supset \cdots \supset V_e^{(k)}U_e \supset V_e^{(k+1)}U_e \supset \cdots$. La sous-algèbre N étant de dimension finie, cette suite est stationnaire et donc il existe un entier $k \geq 1$ tel que $V_e^{(k)}U_e = V_e^{(k+1)}U_e$. Si $V_e^{(k)}U_e = 0$, l'algèbre enveloppante $E(V_e)$ est nilpotente et le théorème 4.7 de [13] nous dit alors que l'idéal N est nilpotent. Sinon, c'est à dire, si $V_e^{(k)}U_e \neq 0$, on a $V_eI = I$ avec $I = V_e^{(k)}U_e$ et les lemmes 4.3 et 4.4 de [13] nous disent que I est un idéal de A contenu dans L. Considérons la famille de multiplications $(\ell_v)_{v\in V_e}$ où $\ell_v : I \longrightarrow I,\ x \longmapsto vx$ avec v parcourant V_e. Pour tout v dans V_e, $\ell_v^2 = 0$ car $v(v(U_eV_e)) = 0$ et $I \subset U_eV_e$. Donc la famille $(\ell_v)_{v\in V_e}$ est anticommutative et le lemme 2.3.6 nous dit que $J = \bigcap_{v\in V_e} Ker(\ell_v) \neq 0$. Or J est un idéal de A et l'algèbre quotient A/J vérifie les conditions du lemme avec $dim_K(A/J) < dim_K(A)$. Par récurrence sur la dimension, le noyau de A/J est nilpotent. Donc, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $N^m \subset J$. Puisque $U_eJ = V_eJ = 0$, on a $N^{m+1} = 0$. Ainsi, N est nilpotent et la condition (iii) du théorème 4.7 de [13] nous dit alors que $I = 0$ est le seul sous-espace vectoriel de A vérifiant $V_eI = I$, ce qui contredirait le fait que $I = V_e^{(k)}U_e \neq 0$.

COROLLAIRE 2.4.4. — *Toute algèbre de Bernstein de dimension finie vérifiant la troisième condition d'Engel est génétique*

En effet, d'après le lemme 2.4.1, une telle algèbre vérifie la condition du lemme

2.4.3.

Le résultat exprimé dans le corollaire 2.4.4 n'est plus vrai si l'algèbre de Bernstein vérifie la troisième condition faible d'Engel.

Exemple 2.4.5. Considérons la K-algèbre de Bernstein de dimension 6 du contre-exemple de Suttles ([18]) que nous appellerons *algèbre de Bernstein-Suttles.* Pour cette algèbre, on a $v(v(vu)) = 0$ quels que soient u dans U_e et v dans V_e, mais le noyau N n'est pas nilpotent car $N^3 = N^2 \neq 0$.

Par contre, un tel exemple est en défaut en dimension ≤ 5. Plus précisement on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.4.6. — *Toute algèbre de Bernstein de dimension* ≤ 5 *vérifiant n'importe quelle condition d'Engel est génétique.*

En effet, d'après le théorème 2.1.1, si (A, ω) est une algèbre de Bernstein vérifiant n'importe quelle condition d'Engel alors l'idéal $N = ker\omega$ est nil et d'après le théorème 1.4.11, toute algèbre de Bernstein telle que N est nil est une algèbre train. Finalement, d'après le théorème 3.1 de [18], toute algèbre de Bernstein qui est une algèbre train de dimension ≤ 5 est une algèbre train spéciale, c'est à dire, N est nilpotent et ses puissances principales N^k sont des idéaux de A. En particulier, A est une algèbre génétique.

2.5. Un contre-exemple

Considérons l'algèbre de Bernstein-Suttles, c'est à dire, la K-algèbre commutative A de dimension 6 dont la table de multiplication relative à une base $\{e, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ s'écrit $e^2 = e$, $ee_k = \frac{1}{2}e_k$ $(k = 3, 4, 5)$, $e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_2e_3 = e_5$, les autres produits étant nuls. On a $N = U_e \oplus V_e$ avec $U_e =< e_3, e_4, e_5 >$ et $V_e =< e_1, e_2 >$. Si $x = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i$ est dans N, la matrice de la multiplication $L_x : N \longrightarrow N$, $y \longmapsto xy$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ de N s'écrit

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 - \alpha_5 & \alpha_1 + \alpha_4 & 0 & \alpha_2 & -\alpha_1 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les calculs nous montrent que $L_x^4 = 0$ et $L_x^3 \neq 0$, c'est à dire, l'algèbre A vérifie la quatrième condition d'Engel, mais on a déjà vu dans l'exemple 2.4.5 que le noyau N n'est pas nilpotent, ou encore que l'algèbre de Bernstein-Suttles n'est pas une algèbre génétique.

2.6. Applications

Les résultats qui suivent nous permettent de classifier certaines classes d'algèbres de Bernstein.

PROPOSITION 2.6.1. — *Toute algèbre de Bernstein train de type* $(2, n-1)$ *est une algèbre train spéciale.*

En effet, soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ une K-algèbre de Bernstein de type $(2, n-1)$ et supposons que A soit une algèbre train. On sait que dans toute algèbre de Bernstein train, l'opérateur $L_{x|N}$ est nilpotent pour tout x dans N et, en particulier, $L_{v|U_e}$ est nilpotent pour tout v dans V_e. Comme $dim_K(U_e) = 1$, nécessairement $L_{v|U_e} = 0$, donc A vérifie la première condition faible d'Engel et la proposition 2.2.2 achève la démonstration.

PROPOSITION 2.6.2. — *Toute algèbre de Bernstein train de type* $(3, n-2)$ *est une algèbre train spéciale.*

Soit, en effet, $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ une algèbre de Bernstein de type $(3, n-2)$ et supposons que A soit une algèbre train. Comme l'endomorphisme $L_{v|U_e}$ est nilpotent et que $dim_K(U_e) = 2$, nécessairement $L^2_{v|U_e} = 0$ pour tout v dans V_e, c'est à dire l'algèbre A vérifie la deuxième condition faible d'Engel. Le théorème 2.3.5 nous dit alors que A est une algèbre génétique, ce qui équivaut à dire que A est une algèbre train spéciale.

Notons qu'il existe des exemples d'algèbres de Bernstein train de type $(4, n-3)$ qui ne sont pas des algèbres train spéciales. Ainsi, l'algèbre de Bernstein-Suttles est une algèbre train de type $(4, 2)$ qui n'est pas une algèbre train spéciale ([18] pour la démonstration du fait que l'algèbre de Bernstein-Suttles est une algèbre train).

PROPOSITION 2.6.3. — *Toute algèbre de Bernstein train de type* $(n, 1)$ *est une algèbre train spéciale.*

Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ une algèbre de Bernstein de type $(n, 1)$ et supposons que A soit une algèbre train. Puisque, pour tout v dans V_e l'opérateur $L_{v|U_e}$ est nilpotent et que $dim_K(V_e) = 1$, l'algèbre enveloppante $E(V_e)$ est nilpotente et le lemme 4.1 de [13] nous dit que l'idéal $N = U_e \oplus V_e$ est nilpotent. Donc A est une algèbre train spéciale. Notons encore ici qu'il existe des algèbres de Bernstein train de type $(n-1, 2)$ qui ne sont pas des algèbres train spéciales. C'est encore le cas de l'algèbre de Bernstein-Suttles.

Remarquons que les propositions 2.6.1, 2.6.2 et 2.6.3 permettent de retrouver le résultat du théorème 2.4.6.

Par la suite, nous allons classifier différents types d'algèbres de Bernstein en tenant compte des propositions ci-dessus démontrées.

THÉORÈME 2.6.4. — *Soit A une algèbre de Bernstein train de type* $(2, n-1)$. *Alors A est isomorphe à une seule des algèbres dont les tables de multiplication dans la base* $\{e, u, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *sont les suivantes :*

B_1 : $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $u^2 = v_1$.

$B_2(r)$: $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $v_i^2 = \alpha_i u$ $(1 \leq i \leq r)$ *où* $0 \leq r \leq n-1$ *et* $\alpha_i \in K^\star$, *les autres produits étant nuls.*

En effet, soient (A, ω) une algèbre de Bernstein train de type $(2, n-1)$ et $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ sa décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$; c'est une algèbre train spéciale vérifiant $U_e V_e = 0$. Si $U_e^2 \neq 0$, le théorème 4.11 de [12] nous dit que A est une algèbre conservative, donc $V_e^2 = 0$. Soit $\{u\}$ une base de U_e. Il existe alors une base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de V_e telle que la table de multiplication de cette algèbre dans la base $\{e, u, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $u^2 = v_1$, les autres produits étant nuls . On obtient ainsi B_1.

L'autre cas à examiner est celui où $U_e^2 = 0$. Dans ce cas, compte tenu des notations ci-dessus, la table de multiplication de cette algèbre dans la base $\{e, u, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $v_i v_j = \alpha_{ij} u$ $(i, j = 1, \ldots, n-1)$, les α_{ij} étant dans

K et les autres produits nuls. Notons R la matrice (symétrique) formée des α_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n-1)$. Il s'agit d'une matrice de rang r $(0 \leq r \leq n-1)$ et le lemme ci-dessous nous dit qu'il existe une base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de V_e sur K telle que $v_i^2 = \alpha_i u$ $(i = 1, \ldots, r)$, les autres produits étant nuls. Remarquons que le cas $r = 0$ correspond à $V_e^2 = 0$. Ainsi, l'algèbre A dépend ici de r paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et on la notera $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}$. Pour deux systèmes de paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$, l'algèbre $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \cap A_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_r}$ contient la sous-algèbre de base $\{e, u\}$. Il est donc possible de choisir un isomorphisme de K-algèbres $\varphi : A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \simeq A_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_r}$ qui soit l'identité sur l'espace $< e, u >$. Cela équivaut à l'existence de scalaires λ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, r)$ non tous nuls tels que l'on ait $\alpha_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik}^2 \alpha'_k$ $(i = 1, \ldots, r)$. En fait, il suffit de poser $\varphi(v_i) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} v_k$, $(i = 1, \ldots, r)$ et d'élever les deux membres au carré. Le lemme suivant, bien connu, achève nos considérations et nous donne $B_2(r)$.

LEMME 2.6.5. — *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et R une matrice symétrique d'ordre n et de rang r à coefficients dans K. Il existe alors une matrice inversible P d'ordre n telle que :*

$$ {}^tPRP = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

2.6.6. Algèbres de Bernstein train de type $(3, n-2)$.

Soit (A, ω) une algèbre de Bernstein train de type $(3, n-2)$ et soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ sa décomposition de Peirce relative à un idempotent $e \neq 0$. Comme $dim_K(U_e) = 2$, nécessairement $l_v^2 = 0$ pour tout v dans V_e où $l_v = L_{v|U_e}$.

Différents cas sont à examiner :

1) $U_e V_e = 0$ et $V_e^2 = 0$; dans ce cas, A est une algèbre de Bernstein conservative et les différentes possibilités pour l'espace U_e^2 sont les suivantes :

(i) $U_e^2 = 0$, donc si $\{u_1, u_2\}$ est une base de U_e et si l'on complète celle-ci avec une base $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ de V_e, la table de multiplication de l'algèbre A dans la base $\{e, u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $eu_2 = \frac{1}{2}u_2$, tous les autres produits étant nuls.

(ii) Si $dim_K(U_e^2) = 1$ et si $\{u_1, u_2\}$ est une base de U_e, on peut supposer que

$v_1 = u_1^2$ soit une base de U_e^2 et si l'on complète le système de vecteurs $\{e, u_1, u_2, v_1\}$ en une base $\{e, u_1, u_2, v_1 \dots v_{n-2}\}$ de A, la table de multiplication de A s'écrit $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $eu_2 = \frac{1}{2}u_2$, $u_1^2 = v_1$, $u_2^2 = \alpha v_1$ (avec α dans K), tous les autres produits étant nuls. Comme cette algèbre dépend d'un seul paramètre α, on la note A_α et pour deux paramètres α et α', l'algèbre $A_\alpha \cap A_{\alpha'}$ contient la sous-algèbre engendrée par la famille $\{e, u_1, v_1\}$. Si $\varphi : A_\alpha \simeq A_{\alpha'}$ est un isomorphisme de K-algèbres, on peut, sans perdre la généralité, supposer que la restriction de φ à l'espace $< e, u_1, v_1 >$ soit l'identité. Cela entraîne l'existence d'un scalaire λ dans $K^\star$ tel que $\alpha' = \lambda^2\alpha$.

(iii) Si $dim_K(U_e^2) = 2$ et si $\{u_1, u_2\}$ est une base de U_e, on peut supposer, par exemple, que les vecteurs $v_1 = u_1^2$ et $v_2 = u_1u_2$ forment une base de U_e^2. On a alors $u_2^2 = \alpha v_1 + \beta v_2$ avec α, $\beta \in K$ et quitte à remplacer u_2 par $u_2' = u_2 - \frac{1}{2}\beta u_1$, on peut supposer que $\beta = 0$. La table de multiplication de A dans la base obtenue en complétant le système $\{e, u_1, u_2, v_1, v_2\}$ s'écrit $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $eu_2 = \frac{1}{2}u_2$. $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = v_2$, $u_2^2 = \alpha v_1$, les autres produits étant nuls. Cette algèbre, dépendante d'un seul paramètre α, sera notée A_α et pour deux paramètres α et α', l'algèbre $A_\alpha \cap A_{\alpha'}$, contient le sous-$K$-espace vectoriel $< e, u_1, v_1 >$. Donc si $\varphi : A_\alpha \simeq A_{\alpha'}$ est un isomorphisme de K-algèbres, on peut supposer que la restriction de φ à l'espace $< e, u_1, v_1 >$ soit l'identité. Comme $\varphi(e) = e$, on a nécessairement $\varphi(u_2) \in U_e$. Donc $\varphi(u_2) = \lambda u_1 + \mu u_2$ avec λ, $\mu \in K$ et l'équation $\varphi(u_2)^2 = \varphi(u_2^2)$ nous dit que $\lambda^2 + \alpha'\mu^2 = \alpha$ et $\lambda\mu = 0$. Or, on ne peut avoir $\lambda \neq 0$ car sinon on aurait $\mu = 0$ et le vecteur (non nul) $u_2 - \lambda u_1$ serait dans $Ker(\varphi)$. Donc $\lambda = 0$, ce qui montre qu'il existe un scalaire μ dans $K^\star$ tel que $\alpha = \mu^2\alpha'$.

(iv) Si $dim_K(U_e^2) = 3$ et si $\{u_1, u_2\}$ est une base de U_e, on peut supposer que les vecteurs $v_1 = u_1^2$, $v_2 = u_1u_2$ et $v_3 = u_2^2$ forment une base de U_e^2 et si l'on complète le système de vecteurs $\{e, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ en une base de A, sa table de multiplication relative à une telle base s'écrit $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $eu_2 = \frac{1}{2}u_2$, $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = v_2$ et $u_2^2 = v_3$, tous les autres produits étant nuls.

On vient en fait de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.6.6.1. — *Soit A une algèbre de Bernstein train de type* $(3, n-2)$. *Si A est exceptionnelle alors elle est isomorphe à une seule des algèbres dont les tables de* *multiplication dans la base* $\{e, u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ *sont les suivantes :*

$B_1 : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2\,;$

$B_2(\alpha) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ u_2^2 = \alpha v_1\,;$

$B_3(\alpha) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ u_1u_2 = v_2,\ u_2^2 = \alpha v_1\,;$

$B_4 : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ u_1u_2 = v_2,\ u_2^2 = v_3\,;$

où $\alpha \in K$, *les autres produits étant nuls.*

2) $U_eV_e = 0$ et $V_e^2 \neq 0$; les différentes possibilités pour l'espace V_e^2 sont les suivantes (on note que la dimension de V_e^2 est invariante car $U_eV_e = 0$ et $dim_K(U_eV_e + V_e^2)$ est constante) :

(i) Supposons que $dim_K(V_e^2) = 1$. On peut alors admettre que $V_e^2 = < v^2 >$ avec v dans V_e et soit $U_e =< u, v^2 >$ avec u dans U_e. Alors $U_e^2 \subset< u^2 >$ et par suite $dim_K(U_e^2) \leq 1$. Si $U_e^2 = 0$ et si $\{u_1, u_2\}$ est une base de U_e, en complétant le système de vecteurs $\{e, u_1, u_2\}$ en une base $\{e, u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ de A, la table de multiplication de A dans cette base s'écrit $e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2$, $u_1^2 = v_1,\ v_k^2 = \alpha_k u_1$ $(k = 1, \ldots, r)$, les autres produits étant nuls, où les α_k sont dans $K^\star$ et $1 \leq r \leq n-2$. L'algèbre A ainsi obtenue sera notée $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}$. Ainsi $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \simeq A_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_r}$ équivaut à l'exitence de scalaires λ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, r)$, non tous nuls, tels que l'on ait $\alpha_i = \sum_{k=1}^r \lambda_{ik}^2\alpha'_k$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Supposons maintenant que $dim_K(U_e^2) = 1$ et si $\{u_1, u_2\}$ est une base de U_e, que $v_1 = u_1^2$ soit une base de U_e^2. On peut alors compléter le système de vecteurs $\{e, u_1, u_2, v_1\}$ en une base $\{e, u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ de A de sorte que $\{u_2\}$ soit une base de V_e^2 et en appliquant le lemme 2.6.5. que la table de multiplication de A dans cette base s'écrive $e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ v_k^2 = \alpha_k u_2$ $(k = 2, \ldots, r)$, les autres produits étant nuls, où les α_k sont $K^\star$ et $2 \leq r \leq n-2$. L'algèbre A dépend de $r-1$ paramètres et sera notée $A_{\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$ et pour deux systèmes de paramètres $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ et $\alpha'_2, \ldots, \alpha'_r$, l'algèbre $A_{\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \cap A_{\alpha'_2,\ldots,\alpha'_r}$ contient le sous-espace vectoriel $< e, u_1, u_2, v_1 >$. On peut alors choisir un isomorphisme de K-algèbres $\varphi : A_{\alpha_2,\ldots,\alpha_r} \simeq A_{\alpha'_2,\ldots,\alpha'_r}$ qui soit l'identité sur l'espace $< e, u_1, u_2, v_1 >$. Cela équivaut à l'existence de scalaires λ_{ij} $(i, j = 2, \ldots, r)$, non tous nuls, tels que l'on ait $\alpha_i = \sum_{k=2}^r \lambda_{ik}^2\alpha'_k$ $(i = 2, \ldots, r)$.

(ii) Supposons que $dim_K(V_e^2) = 2$. Dans ce cas on a $U_e = V_e^2$. Donc $U_e^2 = (V_e^2)^2 = 0$. Comme $U_eV_e = 0$, le lemme suivant nous dit qu'il existe une base $\{u_1, u_2\}$ de U_e et une base $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ de V_e telle que $v_1^2 = u_1$, $v_1v_2 = u_2$, $v_2^2 = \alpha u_1$, $v_2v_j = \alpha_j u_1 + \beta_j u_2$ $(j = 3, \ldots, n-2)$, $v_iv_j = \gamma_{ij}u_1 + \lambda_{ij}u_2$ $(3 \leq i \leq j \leq n-2)$, les autres produits étant nuls, où α, α_j, β_j, γ_{ij} et λ_{ij} sont dans K.

LEMME 2.6.6.2. — *Soient U et V deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives n et 2 $(n \geq 2)$ et $f : U \times U \longrightarrow V$ une application K-bilinéaire symétrique et surjective. Il existe alors des bases $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U et $\{v_1, v_2\}$ de V telles que $f(u_1, u_1) = v_1$, $f(u_1, u_2) = v_2$, $f(u_2, u_2) = \alpha v_1$, $f(u_1, u_i) = 0$, $f(u_2, u_i) = \alpha_i v_1 + \beta_i v_2$, $f(u_i, u_j) = \gamma_{ij1}v_1 + \gamma_{ij2}v_2$ $(3 \leq i \leq j \leq n)$, où α, α_i, β_i, γ_{ij1} et γ_{ij2} sont dans K.*

En effet, puisque f est surjective et symétrique, f est non nulle et il existe $u_1 \in U$ tel que $f(u_1, u_1) = v_1 \neq 0$. Montrons qu'il existe un tel u_1 tel que l'application K-linéaire $U \longrightarrow V$, $u \mapsto f(u_1, u)$ soit surjective ou encore que $\{f(u_1, u_1), f(u_1, u_2)\}$ soit une base de V où $\{u_1, u_2\}$ est un système libre de vecteurs de U. Autrement, pour toute base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U, on aurait $f(u_1, u_i) = \alpha_i f(u_1, u_1)$ où $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont dans K, soit $f(u_1, u_i - \alpha_i u_1) = 0$ et, quitte à poser $u_i' = u_i - \alpha_i u_1$, on peut supposer que $\alpha_i = 0$ pour $i = 2, \ldots, n$. Or, f étant surjective, il existe nécessairement un vecteur u_2 dans le sous-K-espace vectoriel supplémentaire de Ku_1 dans U tel que $\{f(u_1, u_1), f(u_2, u_2)\}$ soit une base de V. En posant $u_1' = u_1 + u_2$ et $u_2' = u_1 - u_2$, on constate que $\{f(u_1', u_1'), f(u_1', u_2')\}$ est une base de V et on a ainsi trouvé u_1' tel que l'application $U \longrightarrow V$, $u \mapsto f(u_1', u)$ soit surjective. Il existe donc un système libre de vecteurs, soit $\{u_1, u_2\}$ dans U tel que la famille $\{f(u_1, u_1), f(u_1, u_2)\}$ soit une base de V. Soient α et β dans K tels que $f(u_2, u_2) = \alpha f(u_1, u_1) + \beta f(u_1, u_2)$. Alors, quitte à remplacer u_2 par $u_2' = u_2 - \frac{1}{2}\beta u_1$, on peut supposer que $\beta = 0$. Enfin, si $f(u_1, u_i) = \alpha_i f(u_1, u_1) + \beta_i f(u_1, u_2)$, alors quitte à remplacer u_i par $u_i - \alpha_i u_1 - \beta_i u_2$, on peut supposer que $\alpha_i = \beta_i = 0$ pour $i = 3, \ldots, n$. Il existe donc une base $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U et une base $\{v_1, v_2\}$ de V telles que $f(u_1, u_1) = v_1$, $f(u_1, u_2) = v_2$, $f(u_2, u_2) = \alpha f(u_1, u_1) = \alpha v_1$ et $f(u_1, u_i) = 0$ pour $i = 3, \ldots, n$. D'où le lemme.

En fait, les considérations qui précèdent ont permis d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 2.6.6.3. — *Soit A une algèbre de Bernstein train de type $(3, n-2)$. Si $U_eV_e = 0$ et $V_e^2 \neq 0$ alors A est isomorphe à une seule des algèbres dont les tables de multiplication dans la base $\{e, u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ sont les suivantes :*

$A_1(r) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ v_k^2 = \alpha_k u_1$;

$A_2(r) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ v_k^2 = \alpha_k u_2$;

$A_3(\alpha) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ v_1^2 = u_1,\ v_1v_2 = u_2,\ v_2^2 = \alpha u_1,$ $v_2v_j = \alpha_j u_1 + \beta_j u_2,\ v_iv_j = \gamma_{ij}u_1 + \lambda_{ij}u_2$;

où $p \leq k \leq r \leq n-2$, $\alpha_k \in K^\star$ dans $A_p(r)$ $(p = 1, 2)$, $3 \leq i \leq j \leq n-2$, $\alpha_k \in K^\star$, α, α_j, β_j, γ_{ij}, $\lambda_{ij} \in K$ dans $A_3(\alpha)$, les autres produits étant nuls.

3) $U_eV_e \neq 0$. C'est une algèbre train spéciale vérifiant la deuxième condition faible d'Engel. Considérons l'idéal $I = \bigcap_{v \in V_e} Ker(l_v)$ du lemme 2.3.6. On sait que $I \neq 0$ et I est strictement contenu dans U_e car $U_eV_e \neq 0$ et $V_eI = 0$. Il existe donc un vecteur u_2 dans U_e tel que $I = Ku_2$, $I \subset Ann(N)$. Soit $B = A/I$ l'algèbre de Bernstein quotient de type $(2, n-2)$. Si $B = K\bar{e} \oplus \bar{U}_{\bar{e}} \oplus \bar{V}_{\bar{e}}$ est la décomposition de Peirce de B, on a $\bar{U}_{\bar{e}}\bar{V}_{\bar{e}} = 0$ et le théorème 2.6.4 nous dit que B est isomorphe à l'une des algèbres dont les tables de multiplication dans la base $\{\bar{e}, \bar{u}, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-2}\}$ sont les suivantes :

$B_1 : \bar{e}^2 = \bar{e},\ \bar{e}\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{u},\ \bar{u}^2 = \bar{v}_1$.

$B_2(r) : \bar{e}^2 = \bar{e},\ \bar{e}\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{u},\ \bar{v}_k^2 = \bar{\alpha}_k\bar{u}$; $(1 \leq k \leq r)$, pour $\alpha_k \in K^\star$, $r \in \{1, \ldots, n-2\}$.

Ainsi, si $U_e^2 \neq 0$, il existe $u_1 \in U_e$, $u_1^2 = v_1$ et A est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

$A_1(r) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ v_2u_1 = u_2,\ v_2^2 = \delta u_2,\ v_k^2 = \alpha_k u_2$;

$A_2(r) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ v_2u_1 = u_2,\ v_2v_3 = u_2,\ v_k^2 = \alpha_k u_2$;

$A_3(r) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ v_3u_1 = u_2,\ v_1v_2 = u_2,\ v_3^2 = \delta u_2,$ $v_k^2 = \alpha_k u_2$;

$A_4(r) : e^2 = e,\ eu_1 = \frac{1}{2}u_1,\ eu_2 = \frac{1}{2}u_2,\ u_1^2 = v_1,\ v_3u_1 = u_2,\ v_1v_2 = u_2,\ v_3v_4 = u_2,$ $v_k^2 = \alpha_k u_2$;

où $3 \leq k \leq r$ et $2 \leq r \leq n-2$ dans $A_1(r)$, $4 \leq k \leq r$ et $3 \leq r \leq n-2$ dans $A_2(r)$ et $A_3(r)$, $5 \leq k \leq r$ et $4 \leq r \leq n-2$ dans $A_4(r)$ et $\alpha_k \in K^\star$, $\delta \in \{0, 1\}$, les autres produits étant nuls.

Les algèbres $A_1(r)$, $A_2(r)$, $A_3(r)$ et $A_4(r)$ correspondent, respectivement, aux algèbres $A_2(r)$, $A_3(r)$, $A_{12}(r)$ et $A_{13}(r)$ de [6, théorème 4]

Supposons maintenant que $U_e^2 = 0$. Il existe une base $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ de V_e telle que $v_1u_1 = u_2$, $v_1u_2 = 0$, $v_ku_1 = v_ku_2 = 0$ $(2 \leq k \leq n-2)$. Comme $v(vu) = 0$, pour tout $u \in U_e$ et pour tout $v \in V_e$, le sous-espace V_e^2 est invariant. On considère alors quatre cas :

(i) $V_e^2 = 0$. La table de multiplication de A se complète par :

$A_5 : v_iv_j = 0$ $(1 \leq i \leq j \leq n-2)$.

(ii) $dim_K(V_e^2) = 1$ et $dim_K(U_eV_e + V_e^2) = 1$, c'est à dire, $V_e^2 = U_eV_e$. Supposons qu'il existe $v_2 \in V_e$ tel que $v_1v_2 = a_2u_2$ avec $a_2 \neq 0$. Alors on peut remplacer v_2 par $a_2^{-1}v_2$ et obtenir $v_1v_2 = u_2$. Si $v_1v_k = \alpha_ku_2$, en remplaçant v_k par $v'_k = v_k - \alpha_kv_2$, on peut supposer que $v_1v_k = 0$ $(3 \leq k \leq n-2)$. On complète alors $\{v_1, v_2\}$ en une base $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ de V_e telle que :

$A_6(r) : v_1^2 = \alpha_1u_2$, $v_1v_2 = u_2$, $v_2^2 = \alpha_2u_2$, $v_k^2 = \alpha_ku_2$ $(3 \leq k \leq r$ et $2 \leq r \leq n-2)$ où $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ et $\alpha_k \in K^\star$.

Par contre, si $v_1V_e = 0$, il existe une base $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ de V_e telle que

$A_7(r) : v_k^2 = \alpha_ku_2$, $v_1^2 = 0$ avec $\alpha_k \in K^\star$ $(2 \leq k \leq r$ et $2 \leq r \leq n-2)$.

(iii) $dim_K(V_e^2) = 1$ et $dim_K(U_eV_e + V_e^2) = 2$. Quitte à changer la base de U_e, on peut supposer que $V_e^2 = Ku_1$. On obtient à isomorphisme près :

$A_8(r) : v_1^2 = 0$, $v_k^2 = \alpha_ku_1$ $(2 \leq k \leq r$ et $2 \leq r \leq n-2)$;

$A_9(r) : v_1^2 = u_1$, $v_k^2 = \alpha_ku_1$ $(2 \leq k \leq r$ et $1 \leq r \leq n-2)$;

avec $\alpha_k \in K^\star$, où l'on a posé $u'_1 = \alpha u_1$ et $u'_2 = \alpha u_2$ quand $v_1^2 = \alpha u_1$ avec $\alpha \neq 0$.

(iv) $dim_K(V_e^2) = 2$; Puisque $V_e^2 = U_e$, posons $v_1^2 = \alpha u_1 + \beta u_2$. Si $\alpha \neq 0$, en posant $u'_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$ et $u'_2 = \alpha u_2$, on peut supposer que $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ et si $\alpha = 0$, quitte à changer la base de V_e, on peut se ramener au premier cas. Ainsi, le lemme 2.6.6.2 nous dit que A est isomorphe à :

$A_{10}(\alpha) : e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $eu_2 = \frac{1}{2}u_2$, $u_1v_1 = u_2$, $v_1^2 = u_1$, $v_1v_2 = u_2$, $v_2^2 = \alpha u_1$, $v_2v_i = \alpha_iu_1 + \beta_iu_2$, $v_1v_i = 0$, $v_iv_j = \gamma_{ij1}u_1 + \gamma_{ij2}u_2$ $(3 \leq i, j \leq n-2)$, les autres produits étant nuls.

3

ALGEBRES VERIFIANT UNE EQUATION TRAIN POUR LES TROIS PREMIERES PUISSANCES MIXTES

Soient K un corps commutatif et (A, ω) une K-algèbre pondérée. On dira que (A, ω) est une *algèbre train de rang* r s'il existe des scalaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$ dans K tels que $x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$ pour tout x dans A, r étant le plus petit entier naturel vérifiant cette condition. Le rang de A détermine alors de façon unique les coefficients $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}$.

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble d'algèbres pondérées (A, ω), on note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé des algèbres pondérées vérifiant l'équation $x^r + \gamma_1\omega(x)x^{r-1} + \cdots + \gamma_{r-1}\omega(x)^{r-1}x = 0$ pour des scalaires γ_i fixés dans K. On dira que $\mathcal{C}$ est de rang r si $r = \max_{A \in \mathcal{C}} r(A)$ où $r(A)$ désigne le rang de l'algèbre train (A, ω).

Les algèbres train de rang ≤ 3 (à puissances principales), i.e. celles vérifiant $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 0$, ont été étudiées par I. M. H. Etherington ([4]). Quant à celles de rang 3, aux trois premières puissances pleines, i.e. celles vérifiant $x^{[3]} - (1+2\delta)\omega(x)^2x^2 + 2\delta\omega(x)^3x = 0$, S. Walcher ([21]) a montré que, exception faite des cas $\delta \in \{0, -\frac{1}{2}\}$, elles se ramènent aux précédentes.

Ici, nous nous intéressons aux trois premières puissances mixtes : x, x^2, x^3, $x^{[3]}$. On dira donc qu'une K-algèbre (A, ω) est une *algèbre vérifiant une équation train pour les trois premières puissances mixtes* si elle vérifie

$$(*) \qquad x^{[3]} - (1+\alpha+\beta)\omega(x)x^3 + \alpha\omega(x)^2x^2 + \beta\omega(x)^3x = 0$$

pour tout $x \in A$ et α, β fixés dans K.

Nous montrons qu'en général, ces algèbres sont des algèbres train de rang ≤ 4, auquel cas elles seront appelées δ-algèbres de Walcher. Une deuxième classe mise en évidence est celle des δ-algèbres de Bernstein. On rappelle qu'une algèbre de Walcher est une algèbre pondérée (A, ω) vérifiant l'équation $x^{[3]} - \omega(x)^3 x = 0$ pour tout x dans A.

Dans toute la suite, K est un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2.

3.1. Equation train aux puissances mixtes

La linéarisation de l'équation $(*)$ nous donne les identités

$$\begin{aligned} 4(xy)x^2 &= (1+\alpha+\beta)\omega(y)x^3 + (1+\alpha+\beta)\omega(x)[2x(xy) + x^2y] \\ &\quad - 2\alpha\omega(xy)x^2 - 2\alpha\omega(x)^2xy - 3\beta\omega(x^2y)x - \beta\omega(x)^3y \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned} 4(yz)x^2 + 8(xy)(xz) &= (1+\alpha+\beta)\omega(y)[x^2z + 2x(xz)] \\ &\quad + (1+\alpha+\beta)\omega(z)[2x(xy) + x^2y] + 2(1+\alpha+\beta)\omega(x)[x(yz) + z(xy) + y(xz)] \\ &\quad - 2\alpha\omega(yz)x^2 - 4\alpha\omega(xy)xz - 4\alpha\omega(xz)xy - 2\alpha\omega(x)^2yz - 3\beta\omega(x^2y)z \\ &\quad - 6\beta\omega(xyz)x - 3\beta\omega(x^2z)y \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

En substituant x^2 à y dans (3.1.1) on obtient, via $(*)$

$$\begin{aligned} 4x^2x^3 &= 2(1+\alpha+\beta)\omega(x)x^4 + [(1+\alpha+\beta)(2+\alpha+\beta) - 2\alpha]\omega(x)^2x^3 \\ &\quad - (\alpha^2 + \alpha\beta + 3\alpha + \beta)\omega(x)^3x^2 - \beta(4+\alpha+\beta)\omega(x)^4x \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Multiplions $(*)$ par $4x^2$ et utilisons (3.1.3) pour avoir

$$\begin{aligned} 4x^2x^{[3]} &= 2(1+\alpha+\beta)^2\omega(x)^2x^4 \\ &\quad + [(1+\alpha+\beta)^2(2+\alpha+\beta) - 6\alpha(1+\alpha+\beta) - 4\beta]\omega(x)^3x^3 \\ &\quad - [(1+\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+3\alpha+\beta) - 4\alpha^2]\omega(x)^4x^2 \\ &\quad + [4\alpha\beta - \beta(1+\alpha+\beta)(4+\alpha+\beta)]\omega(x)^5x \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Si nous faisons maintenant $y = z = x^2$ dans (3.1.2), par (3.1.4) il vient que

(3.1.5)
$$4x^3x^3 = (1+\alpha+\beta)(3+\alpha+\beta)\omega(x)^2x^4 + [(1+\alpha+\beta)^2 + 2(\beta-2\alpha)]\omega(x)^3x^3$$
$$- [2\alpha^2 + 2\alpha + 2\alpha\beta + 4\beta + \beta^2]\omega(x)^4x^2 - (2\alpha\beta + \beta^2 + 4\beta)\omega(x)^5x$$

La multiplication de $(*)$ par $16x^3$ donne, moyennant (3.1.3) et (3.1.5)

(3.1.6)
$$16x^3x^{[3]} = [4(1+\alpha+\beta)^2(3+\alpha+\beta) - 8\alpha(1+\alpha+\beta) - 16\beta]\omega(x)^3x^4$$
$$+ 4[(1+\alpha+\beta)(1-4\alpha+4\beta+\beta^2+\alpha\beta) + 2\alpha^2]\omega(x)^4x^3$$
$$+ [-4(1+\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\alpha+2\alpha\beta+4\beta+\beta^2) + 4\alpha(\alpha^2+\alpha\beta+3\alpha+\beta)]\omega(x)^5x^2$$
$$+ 4\beta[\alpha(4+\alpha+\beta) - (1+\alpha+\beta)(2\alpha+\beta+4)]\omega(x)^6x$$

En substituant x^2 à x puis x à y dans (3.1.1) on obtient

(3.1.7)
$$16x^3x^{[3]} = 2(1+\alpha+\beta)^2(5+\alpha+\beta)\omega(x)^3x^4$$
$$+ [(1+\alpha+\beta)((1+\alpha+\beta)(6-\alpha+5\beta+(\alpha+\beta)^2) - 4(4\alpha+\beta)) - 8\alpha]\omega(x)^4x^3$$
$$+ [(1+\alpha+\beta)(4\alpha^2 - \alpha(3+\alpha+\beta)^2 - \beta(\alpha+\beta+7)) + 8\alpha^2 - 12\beta]\omega(x)^5x^2$$
$$+ \beta\big[(1+\alpha+\beta)(4\alpha - (3+\alpha+\beta)(4+\alpha+\beta)) + 8\alpha - 4\big]\omega(x)^6x$$

Elevons les deux membres de $(*)$ au carré et utilisons les identités (3.1.3) et (3.1.5)

(3.1.8)
$$4x^{[3]}x^{[3]} = (1+\alpha+\beta)[(1+\alpha+\beta)^2(3+\alpha+\beta) - 4\alpha(1+\alpha+\beta) - 8\beta]\omega(x)^4x^4$$
$$+ [(1+\alpha+\beta)(1-5\alpha+(\alpha-\beta)^2 - \alpha^3 - (\alpha^2-5)\beta + (\beta+4+\alpha)\beta^2) + 8\alpha\beta]\omega(x)^5x^3$$
$$+ [(1+\alpha+\beta)(2\alpha(\alpha-1-3\beta-\alpha\beta) - (3\alpha+\beta+5)\beta^2 - 4\beta) - 4(\alpha^3-\beta^2)]\omega(x)^6x^2$$
$$-\beta[(1+\alpha+\beta)(4-2\alpha+\alpha\beta+\beta^2+5\beta) + 4\alpha^2]\omega(x)^7x$$

Faisons $x = x^2$ dans $(*)$ et utilisons l'identité (3.1.4)

$$4x^{[3]}x^{[3]} = 2(1+\alpha+\beta)^3\omega(x)^4x^4$$
$$+ (1+\alpha+\beta)[(1+\alpha+\beta)^2(2+\alpha+\beta) - 6\alpha(1+\alpha+\beta) - 4(\beta+\alpha)]\omega(x)^5x^3$$
(3.1.9)
$$- [(1+\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\alpha\beta+3\alpha+\beta) - 4\alpha^2(1+\alpha+\beta) - 4(\alpha^2-\beta)]\omega(x)^6x^2$$
$$+ \beta[(1+\alpha+\beta)(4\alpha - (1+\alpha+\beta)(4+\alpha+\beta)) + 4\alpha]\omega(x)^7x$$

Le corps K étant infini, l'ensemble $\{x \in A | \omega(x) \neq 0\}$ est dense au sens de la topologie de Zariski dans A. Par suite (3.1.6) et (3.1.7), (3.1.8) et (3.1.9) donnent respectivement, par différence,

$$F_4(\alpha,\beta)x^4 + F_3(\alpha,\beta)\omega(x)x^3 + F_2(\alpha,\beta)\omega(x)^2x^2 + F_1(\alpha,\beta)\omega(x)^3x = 0 \tag{3.1.10}$$

$$D_4(\alpha,\beta)x^4 + D_3(\alpha,\beta)\omega(x)x^3 + D_2(\alpha,\beta)\omega(x)^2x^2 + D_1(\alpha,\beta)\omega(x)^3x = 0 \tag{3.1.11}$$

pour tout x dans A, où les coefficients $F_k(\alpha,\beta)$ et $D_k(\alpha,\beta)$ sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned}
F_4(\alpha,\beta) &= -2(-1+\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]\\
F_3(\alpha,\beta) &= (-2+\alpha+\alpha^2+2\alpha\beta-\beta+\beta^2)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]\\
F_2(\alpha,\beta) &= (\alpha-\alpha^2+3\beta-\alpha\beta)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]\\
F_1(\alpha,\beta) &= -\beta(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

$$\begin{aligned}
D_4(\alpha,\beta) &= (-1+\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]\\
D_3(\alpha,\beta) &= (1+\alpha-2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]\\
D_2(\alpha,\beta) &= (\alpha^2-\beta^2-\alpha\beta-\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]\\
D_1(\alpha,\beta) &= \alpha\beta[(\alpha+\beta)^2+4\beta-1]
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

3.2. Extension d'un théorème de Walcher

Dans ce paragraphe, on suppose que la K-algèbre pondérée (A,ω) vérifie l'équation $(*)$. Une telle algèbre sera donc caractérisée par le couple (α,β).

LEMME 3.2.1. — *Si $(\alpha+\beta)^2+4\beta-1 \neq 0$ dans $(*)$ alors (A,ω) est une algèbre train de rang ≤ 4.*

En effet, supposons que $(\alpha+\beta)^2+4\beta-1 \neq 0$. Alors la nullité de tous les coefficients $F_k(\alpha,\beta)$ dans (3.1.12) entraîne que $(\alpha,\beta) = (1,0)$ et dans ce cas $(\alpha+\beta)^2+4\beta-1 = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse. Ainsi, dès que $(\alpha+\beta)^2+4\beta-1 \neq 0$, les coefficients $F_k(\alpha,\beta)$ ne sont pas tous nuls. Par suite, quitte à normaliser le coefficient de plus haut degré en x, l'équation (3.1.10) nous montre que (A, ω) est une algèbre train, à puissances principales, de rang ≤ 4.

Posons $C_k(\alpha, \beta) = 2D_k(\alpha, \beta) + (1 + \alpha + \beta)F_k(\alpha, \beta)$, les $F_k(\alpha, \beta)$ et les $D_k(\alpha, \beta)$ étant respectivement donnés par (3.1.12) et (3.1.13). Alors l'algèbre $(A. \omega)$ vérifie

$$C_3(\alpha, \beta)\omega(x)x^3 + C_2(\alpha, \beta)\omega(x)^2x^2 + C_1(\alpha, \beta)\omega(x)^3x = 0 \tag{3.2.2}$$

pour tout x dans A, où les coefficients $C_k(\alpha, \beta)$ sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} C_3(\alpha, \beta) &= (-1 + \alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 + \beta - \alpha][(\alpha + \beta)^2 + 4\beta - 1] \\ C_2(\alpha, \beta) &= (1 - \alpha)[(\alpha + \beta)^2 + \beta - \alpha][(\alpha + \beta)^2 + 4\beta - 1] \\ C_1(\alpha, \beta) &= -\beta[(\alpha + \beta)^2 + \beta - \alpha][(\alpha + \beta)^2 + 4\beta - 1] \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Dans toute la suite du paragraphe, on suppose que $(\alpha + \beta)^2 + 4\beta - 1 \neq 0$. On note alors $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des algèbres train vérifiant $(*)$.

THÉORÈME 3.2.4. — *$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est de rang 4 si et seulement si $(\alpha + \beta)^2 = \alpha - \beta$*

En effet, supposons que $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ soit de rang 4. Alors il existe un élément (A, ω) de $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ qui est de rang 4. Par conséquent, les coefficients $C_k(\alpha, \beta)$ dans (3.2.2) sont tous nuls et cela se traduit par l'égalité $(\alpha + \beta)^2 = \alpha - \beta$. Supposons maintenant que $(\alpha + \beta)^2 = \alpha - \beta$ et posons $\alpha + \beta = 2\delta$, $\delta \in K$ (cela est possible parce que la caractéristique de K est différente de 2). Par suite, la condition $(\alpha + \beta)^2 + 4\beta - 1 \neq 0$ s'écrit $\delta \neq \frac{1}{2}$. Alors $\alpha = \delta(1 + 2\delta)$, $\beta = \delta(1 - 2\delta)$ et l'équation $(*)$ devient

$$x^{[3]} - (1 + 2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(1 + 2\delta)\omega(x)^2x^2 + \delta(1 - 2\delta)\omega(x)^3x = 0. \tag{3.2.5}$$

caractérisée ainsi par le seul paramètre $\delta \in K \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Par ailleurs les coefficients $F_k(\alpha, \beta)$ deviennent $F_4(\alpha, \beta) = 2(2\delta - 1)^3$, $F_3(\alpha, \beta) = -2(1 + 2\delta)(2\delta - 1)^3$, $F_2(\alpha, \beta) = 2\delta(2 + \delta)(2\delta - 1)^3$, $F_1(\alpha, \beta) = -2\delta^2(2\delta - 1)^3$. Donc, l'équation train associée à (3.2.5) s'obtient au moyen de (3.1.10) et s'écrit

$$x^4 - (1 + 2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(2 + \delta)\omega(x)^2x^2 - \delta^2\omega(x)^3x = 0 \tag{3.2.6.}$$

Ainsi $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est de rang ≤ 4. Considérons à présent l'algèbre (A, ω) dont la table de multiplication dans la base $\{e, u, v_1, v_2\}$ est donnée par $e^2 = e, eu = ue = \frac{1}{2}u, ev_1 = v_1e = \delta v_1, ev_2 = v_2e = \delta v_2, v_1^2 = v_2$ $(\delta \in K \setminus \{\frac{1}{2}\})$, les autres produits étant nuls et $\omega(e) = 1, \omega(u) = \omega(v_1) = \omega(v_2) = 0$. Soit x un élément de poids 1 dans A. Alors $x = e + \alpha u + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, α, α_1, $\alpha_2 \in K$ et $x^2 = e + \alpha u + 2\alpha_1\delta v_1 + (\alpha_1^2 + 2\delta\alpha_2)v_2$, $x^3 = e + \alpha u + \alpha_1\delta(1+2\delta)v_1 + \delta(3\alpha_1^2 + \alpha_2(1+2\delta))v_2$, $x^{[3]} = e + \alpha u + 4\delta\alpha_1 v_1 + 2\delta((1+2\delta)\alpha_1^2 + 2\delta\alpha_2)v_2$ et $x^4 = e + \alpha u + \delta\alpha_1(2\delta^2+\delta+1)v_1 + \delta((5\delta+1)\alpha_1^2 + (2\delta^2+\delta+1)\alpha_2)v_2$. Par suite, $x^{[3]} - (1+2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(1+2\delta)\omega(x)^2x^2 + \delta(1-2\delta)\omega(x)^3x = 0$. Il en résulte que l'algèbre (A, ω) ainsi construite vérifie (3.2.5). De plus c'est une algèbre train de rang 4 d'équation (3.2.6). Donc $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est de rang 4.

THÉORÈME 3.2.7. — *$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est de rang 2 si et seulement si $\alpha + \beta - 1 = 0$*

En effet, si $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est de rang 2 alors $C_3(\alpha, \beta) = 0$. On a nécessairement $(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha - \beta$ compte tenu du théorème 3.2.4. Ainsi, $C_3(\alpha, \beta) = 0$ signifie $\alpha + \beta - 1 = 0$. Supposons que $\alpha + \beta - 1 = 0$ et remarquons que dans ce cas (3.2.2) s'écrit $x^2 - \omega(x)x = 0$ après simplification. D'où le rang de $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est égal à 2.

THÉORÈME 3.2.8. — *$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est de rang 3 si et seulement si $(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha - \beta$ et $\alpha + \beta - 1 \neq 0$*

Ce résultat résulte des théorèmes 3.2.4, 3.2.7 et du lemme 3.2.1

Remarques 3.2.9. (i) Pour $\alpha + \beta + 1 = 0$, l'hypothèse $(\alpha + \beta)^2 + 4\beta - 1 \neq 0$ se traduit par $\beta \neq 0$ et l'équation $(*)$ devient

$$x^{[3]} - (1+\beta)\omega(x)^2x^2 + \beta\omega(x)^3x = 0 \quad \text{avec } \beta \neq 0.$$

Ainsi, si $\beta = -1$, l'ensemble correspondant, i.e $\mathcal{C}_{0,-1} = \{(A, \omega) \mid x^{[3]} - \omega(x)^3x = 0\}$, est de rang 4, tandis que si $\beta \neq -1$, il est de rang 3. On retrouve alors les résultats de Walcher ([21]).

(ii) Il existe des classes d'algèbres vérifiant le théorème 3.2.8 mais ne rentrant pas à priori dans le cas de Walcher. En effet, la classe d'algèbres définies par

$$x^{[3]} - \omega(x)x^3 + \alpha\omega(x)^2x^2 - \alpha\omega(x)^3x = 0 \quad \text{avec } \alpha \in K \setminus \{0, -\frac{1}{4}\}$$

vérifie l'équation $x^3 - (1-\alpha)\omega(x)x^2 - \alpha\omega(x)^2x = 0$.

Définition 3.2.10. Soit $\delta \in K$ tel que $\delta \neq \frac{1}{2}$. On appelle *δ-algèbre de Walcher* toute K-algèbre pondérée (A, ω) vérifiant l'équation

$$(3.2.5) \qquad x^{[3]} - (1+2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(1+2\delta)\omega(x)^2x^2 + \delta(1-2\delta)\omega(x)^3x = 0.$$

3.3. Les δ-algèbres de Bernstein

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée vérifiant l'équation $(*)$. On suppose que $(\alpha+\beta)^2 + 4\beta - 1 = 0$. On introduit un nouveau paramètre en posant $\alpha + \beta = 4\delta - 1, \delta \in K$. Alors $\beta = -2\delta(2\delta-1)$ et l'équation $(*)$ prend la forme

$$(3.3.1) \qquad x^{[3]} - 4\delta\omega(x)x^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 - 2\delta(2\delta-1)\omega(x)^3x = 0.$$

Proposition 3.3.2. — *Si $(\alpha+\beta)^2 + 4\beta - 1 = 0$ dans $(*)$ alors l'algèbre (A, ω) n'est pas nécessairement une algèbre train.*

En effet, pour $\delta \in K$, considérons la K-algèbre A de dimension 3 dont la table de multiplication dans la base $\{e, u, v\}$ est donnée par $e^2 = e, eu = ue = \frac{1}{2}u, ev = ve = \delta v, uv = vu = v^2 = u$ et $u^2 = 0$. L'application K-linéaire $\omega : A \to K$ définie par $\omega(e) = 1$ et $\omega(u) = \omega(v) = 0$ est une pondération de A. Soit donc $x \in A$ de poids 1. Alors on a $x = e + \alpha_1 u + \alpha_2 v, \alpha_1, \alpha_2 \in K$. Par suite $x^2 = e + (\alpha_1 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2)u + 2\delta\alpha_2 v$, $x^3 = e + [(\frac{1}{2} + 2\delta)\alpha_2^2 + \alpha_1 + 2(1+\delta)\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3]u + \delta(2\delta+1)\alpha_2 v$ et $x^{[3]} = e + [(4\delta^2+1)\alpha_2^2 + 4\alpha_2^3 + 4(1+\delta)\alpha_1\alpha_2 + 8\delta\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1]u + 4\delta^2\alpha_2 v$. D'où $x^{[3]} - 4\delta x^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)x^2 - 2\delta(2\delta-1)x = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in A$, on a $x^{[3]} - 4\delta\omega(x)x^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 - 2\delta(2\delta-1)\omega(x)^3x = 0$. De plus $u = v^k \neq 0$ pour tout entier $k \geq 2$, donc cette algèbre n'est pas une algèbre train car son noyau n'est pas nil.

Définition 3.3.3. Soit $\delta \in K$ tel que $\delta \neq \frac{1}{2}$. On appelle *δ-algèbre de Bernstein* toute K-algèbre pondérée (A, ω) vérifiant l'équation

$$(3.3.1) \qquad x^{[3]} - 4\delta\omega(x)x^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 - 2\delta(2\delta-1)\omega(x)^3x = 0.$$

L'étude des algèbres pondérées vérifiant l'équation $(*)$ peut se ramener à celle de deux classes principalement, à savoir, celles définies respectivement par les équations (3.2.5) et (3.3.1) de paramètre $\delta \neq \frac{1}{2}$. Une classe particulière découlant de cette étude et dont l'approche semble difficile, est celle donnée par l'équation $x^{[3]} - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2 = 0$. Notons que toutes ces trois classes renferment strictement la classe des algèbres train de rang ≤ 3 d'équation $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 0$.

THÉORÈME 3.3.4. — *Soient K un corps commutatif infini de caractéristique différente de 2 et A une K-algèbre commutative telle que $x^{[3]} = 0$ pour tout x dans A. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) A est une nil-algèbre.

(ii) Pour tout x dans A, l'application $R_x : A \longrightarrow A$, $y \mapsto xy$ est nilpotente.

En effet, (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Supposons que A est une nil-algèbre de nil-index $r \geq 3$. On a $x^r = 0$ pour tout x dans A. Ainsi, quels que soient x et y dans A . $\lambda \in K$, on a $(x + \lambda y)^r = 0$. En annulant le coefficient de λ dans cette dernière identité, il vient :

$$(1) \qquad 2R_x^{r-1} + \sum_{j=0}^{r-3} R_x^j R_{x^{r-j-1}} = 0, \quad \forall x \in A$$

où $R_x : A \longrightarrow A$, $y \mapsto xy$.

Comme $x^{[3]} = 0$ pour tout x dans A, il en résulte les identités suivantes par linéarisation :

$$(2) \qquad x^2(xy) = 0$$

$$(3) \qquad x^2(yz) + 2(xy)(xz) = 0$$

quels que soient x, y et z dans A. Faisons $y = x^i$ dans (3) $(i \geq 2)$ pour obtenir

$$(4) \qquad R_{x^2}R_{x^i}(z) + 2R_{x^{i+1}}R_x(z) = 0, \quad \forall x, z \in A$$

Pour $z = R_x^{i-1}(t)$, avec $t \in A$, dans (4) il vient

$$R_{x^2} R_{x^i} R_x^{i-1} + 2R_{x^{i+1}} R_x^i = 0, \quad \forall x \in A \tag{5}$$

Par ailleurs, l'identité (2) équivaut à $R_{x^2} R_x = 0$ pour tout x dans A. Ainsi on établit par récurrence sur $i \geq 2$

$$R_{x^i} R_x^{i-1} = 0 \tag{6}$$

Multiplions maintenant (1) par R_x^{r-2} à droite. On obtient $R_x^{2r-3} = 0$ puisque $R_{x^{r-j-1}} R_x^{r-2} = 0$ pour tout j tel que $0 \leq j \leq r-3$, compte tenu de la relation (6).

COROLLAIRE 3.4.5. — *Soit (A, ω) une algèbre pondérée vérifiant l'équation $(*)$. L'idéal $N = ker\omega$ est nil si et seulement si l'application $L_x : N \longrightarrow N$, $y \longmapsto xy$ est nilpotente pour tout x dans N.*

En effet, il suffit de remarquer que pour tout x dans N on a $x^{[3]} = 0$ et on applique le théorème 3.3.4.

4

ALGEBRES D'EVOLUTION STATIONNAIRES ET INVOLUTIVES

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A, ω) une K-algèbre commutative pondérée. Posons $\Delta = \{x \in A \mid \omega(x) = 1\}$. On dira qu'un opérateur quadratique $V : A \longrightarrow A$ est un *opérateur d'évolution* si $V(\Delta) \subset \Delta$. Ainsi, si $x \in \Delta$ alors $\omega(V(x)) = 1$. Par conséquent $\omega(V(x)) = \omega(x)^2$ pour tout $x \in A$ avec $\omega(x) \neq 0$. Pour un tel opérateur, on note $\widehat{V} : \Delta \longrightarrow \Delta, x \longmapsto V(x)$. Un opérateur d'évolution V est dit *stationnaire* (resp. *involutif*) si $\widehat{V}^2 = \widehat{V}$ (resp. $\widehat{V}^2 = id_\Delta$).

Soit $V : A \longrightarrow A$ un opérateur d'évolution. On définit une multiplication sur le K-espace vectoriel A par $x \times y = \frac{1}{4}(V(x+y) - V(x-y))$ et on obtient ainsi une algèbre commutative A_V appelée *algèbre d'évolution*. On dira qu'une algèbre d'évolution A_V est une *algèbre stationnaire* (resp. *involutive*) si $V^2(x) = \omega(x)^2 V(x)$ (resp. $V^2(x) = \omega(x)^3 x$), pour tout x dans A.

Dans toute la suite K sera un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et toute K-algèbre A sera commutative.

4.1. Exemples

4.1.1. *Algèbres gamétiques diploïdes multialléliques*

Soit $A = G(n+1, 2)$ la K-algèbre gamétique diploïde à $n+1$ allèles. La multiplication dans A est définie par $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)$ où $\omega : A \longrightarrow K$ est une pondération. Pour $V(x) = \omega(x)x$, on voit que $V^2(x) = \omega(x)^2 V(x)$ et $V^2(x) = \omega(x)^3 x$ pour tout x dans A. L'algèbre gamétique est donc à la fois stationnaire et involutive. En fait c'est l'unique algèbre gamétique ayant ces deux propriétés.

4.1.2. *Algèbres induites par un opérateur linéaire*

Soient $T : A \longrightarrow A$ un opérateur linéaire sur un K-espace vectoriel A et $\omega : A \longrightarrow K$ une forme linéaire non nulle vérifiant $\omega \circ T = \omega$. On définit une multiplication sur A par $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)T(y) + \omega(y)T(x))$. Alors, ω est une pondération de A et pour $V(x) = \omega(x)T(x)$, on a $V^2(x) = \omega(x)^3T^2(x)$ et $V^2(x) = \omega(x)^2V(x)$ si et seulement si $T^2 = T$, i.e. T est un projecteur. De même $V^2(x) = \omega(x)^3x$ si et seulement si $T^2 = id_A$, i.e T est une involution. Dans le cas où $T^2 = T$ (resp. $T^2 = id_A$), la décomposition de Peirce de A relativement à un idempotent $e \neq 0$ est donnée par $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ (resp. $A = Ke \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_{-\frac{1}{2}}$) avec $A_\lambda = \{x \in ker\omega \mid ex = \lambda x\}$, $\lambda \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ et $(ker\omega)^2 = 0$. On peut noter que de telles algèbres contiennent toujours un idempotent. En effet, il suffit de prendre $e_x = T(x)$ avec $\omega(x) = 1$ pour obtenir $e_x^2 = e_x$.

4.1.3. *Algèbres de Bernstein*

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. On rappelle que A est une algèbre de Bernstein si $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$, pour tout x dans A. Pour $V(x) = x^2$, on a $V^2(x) = \omega(x)^2V(x)$.

4.1.4. *Algèbres de Walcher*

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. On dira que A est *une algèbre de Walcher* si $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$, pour tout x dans A. Pour $V(x) = x^2$, on a $V^2(x) = \omega(x)^3x$. Dans [21] S. Walcher établit que ces algèbres sont génétiques et il montre qu'elles ne sont pas en général des algèbres train de rang 3 bien qu'elles proviennent de l'équation $2x^3 - \omega(x)x^2 - \omega(x)^2x = 0$. Il montre également qu'elles admettent toujours un idempotent e et se décomposent en $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_{-\frac{1}{2}}$.

Les algèbres de Bernstein (resp. de Walcher) sont donc des algèbres stationnaires (resp. involutives) par définition. Cependant elles ne sont pas les seules.

4.2. Opérateurs d'évolution de la forme $V(x) = ax^2 + b\omega(x)x$

Soient (A, ω) une K-algèbre pondérée et $V : A \longrightarrow A$ l'opérateur d'évolution défini par $V(x) = ax^2 + b\omega(x)x$, où a et b sont dans K. Comme $\omega(V(x)) = \omega(x)^2$, pour tout x dans A tel que $\omega(x) \neq 0$, nécessairement $a + b = 1$. Il existe alors $\alpha \in K$ tel que

$V(x) = (1-\alpha)x^2 + \alpha\omega(x)x$.

Considérons sur l'espace vectoriel A, la nouvelle multiplication définie par

$$x \circ y = (1-\alpha)xy + \frac{1}{2}\alpha(\omega(x)y + \omega(y)x)$$

où xy désigne le produit de x par y dans l'algèbre A. On note A° la nouvelle algèbre ainsi construite. On a trivialement $\omega(x \circ y) = \omega(x)\omega(y)$ et donc A° est une algèbre pondérée par ω.

L'algèbre A° peut s'interpréter comme une combinaison convexe de l'algèbre de base A et de l'algèbre gamétique diploïde à $(n+1)$ allèles $G(n+1,2)$, dont la multiplication est définie par $xy = \frac{1}{2}(\omega(x)y + \omega(y)x)$. Dans un autre sens, A° est le *mélange* de A et de $G(n+1,2)$. En effet, la notion de *mélange d'algèbres* (en anglais : mixture of algebras) a été introduite par P. Holgate dans [10] comme suit : Soient $A^\bullet$ et A° deux K-algèbres dont les multiplications définies sur un même K-espace vectoriel A, sont notées respectivement $\bullet$ et $\circ$. On appelle mélange des algèbres $A^\bullet$ et A° de paramètre $\theta \in K$, l'algèbre dont la multiplication est définie sur l'espace vectoriel A par $xy = \theta x \bullet y + (1-\theta)x \circ y$. Une interprétation biologique de cette notion est donnée par l'auteur pour $0 \leq \theta \leq 1$ et $K = \mathbb{R}$ (le corps des nombres réels).

Exemple 4.2.1. Les algèbres d'autofécondation.

Elles ont été introduites par P. Holgate et définies comme suit. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, A un K-espace vectoriel, $\omega : A \longrightarrow K$ une forme K-linéaire non nulle sur A et $T : A \longrightarrow A$ un opérateur K-linéaire tel que $\omega \circ T = \omega$. Sur le K-espace vectoriel A on définit une structure de K-algèbre non nécessairement associative ni commutative par $xy = \dfrac{1}{2}\theta(\omega(x)y + \omega(y)x) + (1-\theta)\omega(x)T(y)$ quels que soient x et y dans A, où θ est un élément de K. On dira que A est une *algèbre d'autofécondation* de paramètre θ. Il est clair que l'algèbre d'autofécondation de paramètre θ est le mélange de l'algèbre gamétique $G(n+1,2)$ et d'une algèbre dont le produit est défini sur A par $x \cdot y = \omega(x)T(y)$. Les propriétés de ces algèbres sont données dans ([16]). On y étudie également les automorphismes et les dérivations associés.

Nous revenons à l'algèbre A° définie précédemment.. Si $\alpha = 1$ alors $x \circ y =$

$\frac{1}{2}(\omega(x)y+\omega(y)x)$ et A° est l'algèbre gamétique $G(n+1,2)$. Si $\alpha=0$ alors $A=A^\circ$ en tant qu'algèbres. On suppose maintenant et pour la suite que $\alpha\neq 1$.

PROPOSITION 4.2.2. — *Si $I_p(A)$ et $I_p(A^\circ)$ désignent respectivement l'ensemble des idempotents de poids 1 de A et de A° alors $I_p(A)=I_p(A^\circ)$.*

En effet, si x est un élément de A de poids 1 alors $x\circ x-x=(1-\alpha)(x^2-x)$. Le résultat en découle.

PROPOSITION 4.2.3. — *Soit I un sous-espace vectoriel de A contenu dans $ker\omega$. Alors I est un idéal de A si et seulement si I est un idéal de A°. De plus on a $I^k=I^{\circ k}$.*

En effet, pour tout x dans I et y dans A les relations $x\circ y=(1-\alpha)xy+\frac{1}{2}\alpha\omega(y)x$ et $xy=(1-\alpha)^{-1}x\circ y-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)^{-1}\omega(y)x$ nous donnent la première assertion. De plus, comme $x\circ y=(1-\alpha)xy$ quels que soient x et y dans N, il vient que $I^k=I^{\circ k}$.

Remarque 4.2.4. Soit $\varphi:N\longrightarrow N^\circ$, $x\mapsto(1-\alpha)^{-1}x$. Cette application linéaire bijective vérifie $\varphi(x)\circ\varphi(y)=\varphi(xy)$ pour tout $x\in N$ et tout $y\in N$. D'où N et N° sont isomorphes en tant qu'algèbres. Par suite, les noyaux de A et de A° ont la même structure algébrique. Par contre, A et A° ne sont pas isomorphes en général.

COROLLAIRE 4.2.5. — *L'algèbre (A,ω) est une algèbre train spéciale si et seulement si (A°,ω) est une algèbre train spéciale.*

En effet, si (A,ω) est une algèbre train spéciale alors $N=ker\omega$ est nilpotent et ses puissances principales N^k sont des idéaux de A. La proposition 4.2.3 nous dit que $N^{\circ k}=N^k$ pour tout entier $k\geq 1$. Par suite N° est nilpotent et les $N^{\circ k}$ sont des idéaux de A°.

Si l'opérateur $V(x)=(1-\alpha)x^2+\alpha\omega(x)x$ est stationnaire alors $V^2(x)=\omega(x)^2V(x)$. Cette dernière condition est équivalente à $(1-\alpha)[(1-\alpha)x^2+\alpha\omega(x)x]^2+\alpha\omega(x)^2[(1-\alpha)x^2+\alpha\omega(x)x]=\omega(x)^2[(1-\alpha)x^2+\alpha\omega(x)x]$ ou encore $(1-\alpha)^3x^{[3]}+2\alpha(1-\alpha)^2\omega(x)x^3-(\alpha^2+\alpha-1)(1-\alpha)\omega(x)^2x^2-\alpha(1-\alpha)\omega(x)^3x=0$, qui prend la forme $x^{[3]}+2\alpha(1-\alpha)^{-1}\omega(x)x^3-(\alpha^2+\alpha-1)(1-\alpha)^{-2}\omega(x)^2x^2-\alpha(1-\alpha)^{-2}\omega(x)^3x=0$. En posant $2\delta=-\alpha(1-\alpha)^{-1}$, on a $1-2\delta=(1-\alpha)^{-1}$, $1-\alpha=(1-2\delta)^{-1}$, $\alpha=-2\delta(1-2\delta)^{-1}$

et $V(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$. L'équation précédente devient

$$x^{[3]} - 4\delta\omega(x)x^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 + 2\delta(1-2\delta)\omega(x)^3x = 0.$$

Si par contre l'opérateur $V(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$ est involutif, alors $V^2(x) = \omega(x)^3x$ et cette égalité donne lieu à l'équation

$$x^{[3]} - 4\delta\omega(x)x^3 + 2\delta(4\delta - 1)\omega(x)^2x^2 + (4\delta - 1)(1-2\delta)\omega(x)^3x = 0.$$

Pour de futurs besoins de simplification, remplaçons δ par $\frac{1}{4}(1+2\delta)$ dans la dernière équation. On obtient alors l'équation équivalente

$$x^{[3]} - (1+2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(1+2\delta)\omega(x)^2x^2 + \delta(1-2\delta)\omega(x)^3x = 0.$$

De ce qui précède, les propositions suivantes deviennent immédiates.

PROPOSITION 4.2.6. — *Soient (A,ω) une K-algèbre pondérée et $V : A \longrightarrow A$ l'opérateur d'évolution défini par $V(x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta\omega(x)x)$, $\delta \in K \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(*i*) $\widehat{V}^2 = \widehat{V}$

(*ii*) *(A,ω) est une δ-algèbre de Bernstein.*

PROPOSITION 4.2.7. — *Soient (A,ω) une K-algèbre pondérée et $V : A \longrightarrow A$ l'opérateur d'évolution défini par $V(x) = (1-2\delta)^{-1}(2x^2 - (1+2\delta)\omega(x)x)$, $\delta \in K \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(*i*) $\widehat{V}^2 = id_\Delta$

(*ii*) *(A,ω) est une δ-algèbre de Walcher.*

4.3. Automorphismes et dérivations

Définition 4.3.1. On appelle *automorphisme* d'une K-algèbre pondérée (A,ω), toute application K-linéaire bijective $\varphi : A \longrightarrow A$ satisfaisant aux conditions $\omega \circ \varphi = \omega$ et $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, quels que soient x , y dans A.

L'ensemble des automorphismes de (A,ω) est un groupe noté $Aut_K((A,\omega))$.

Définition 4.3.2. Une application K-linéaire d de A dans A, est appelée *K-dérivation* de A, ou simplement *dérivation* de A, si $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ pour tout x, y dans A.

On note $Der_K(A)$ l'ensemble des dérivations de l'algèbre A. Muni du crochet $[d, d'] = dd' - d'd$, $Der_K(A)$ est une algèbre de Lie appelée *algèbre de Lie des dérivations.*

PROPOSITION 4.3.3. — *On a $Aut_K((A, \omega)) = Aut_K((A^\circ, \omega))$.*

En effet, soit $\varphi : A \longrightarrow A$ une application K-linéaire bijective. Pour tout x, y dans A on a $\varphi(x \circ y) - \varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi[(1-\alpha)xy + \frac{1}{2}\alpha(\omega(x)y + \omega(y)x)] - (1-\alpha)\varphi(x)\varphi(y) - \frac{1}{2}\alpha(\omega(\varphi(x))\varphi(y) + \omega(\varphi(y))\varphi(x)) = (1-\alpha)[\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)]$ car $\omega \circ \varphi = \omega$. Comme $\alpha \neq 1$, le résultat en découle aisément.

PROPOSITION 4.3.4. — *On a $Der_K(A) = Der_K(A^\circ)$.*

Par suite, le groupe des automorphismes et l'algèbre de Lie des dérivations sont des invariants du paramètre α.

4.4. Structure des δ-algèbres de Bernstein

THÉORÈME 4.4.1. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) (A, ω) est une algèbre de Bernstein;

(ii) $\delta = 0$ ou $x^2 - \omega(x)x = 0$ pour tout x dans A.

En effet $(ii) \Longrightarrow (i)$ est triviale. Supposons que (A, ω) est une δ-algèbre de Bernstein. Si cette algèbre vérifie $x^{[3]} - \omega(x)^2x^2 = 0$ alors l'équation (3.3.1) caractérisant les δ-algèbres de Bernstein prend la forme $4\delta(x^3 - \frac{1}{2}(1+2\delta)\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}(2\delta-1)\omega(x)^2x) = 0$. Alors $\delta = 0$ ou $x^3 - \frac{1}{2}(1+2\delta)\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}(2\delta-1)\omega(x)^2x = 0$. Dans le cas où $x^3 - \frac{1}{2}(1+2\delta)\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}(2\delta-1)\omega(x)^2x = 0$, (A, ω) est une algèbre de Bernstein train de rang ≤ 3. Alors le théorème 1.4.11 nous dit que $x^3 = \omega(x)x^2$ quel que soit x dans A. Par suite, l'équation $x^3 - \frac{1}{2}(1+2\delta)\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}(2\delta-1)\omega(x)^2x = 0$ s'écrit $(1-2\delta)(x^2 - \omega(x)x) = 0$ après simplification. Il en résulte que $x^2 - \omega(x)x = 0$ car $\delta \neq \frac{1}{2}$.

Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. Sur le K-espace vectoriel sous-jacent A, on pose

$$x \circ y = (1 - 2\delta)^{-1}(xy - \delta\omega(x)y - \delta\omega(y)x)$$

où xy désigne le produit de x par y dans l'algèbre A et $\delta \in K \setminus \{\frac{1}{2}\}$. La nouvelle algèbre sera notée A°. On sait que ω est une pondération de A°.

THÉORÈME 4.4.2. — *Soit (A, ω) une K-algèbre pondérée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *(A, ω) est une δ-algèbre de Bernstein;*

(*ii*) *(A°, ω) est une algèbre de Bernstein.*

En effet, il suffit de voir que pour tout $x \in A$ on a :

$$(x \circ x) \circ (x \circ x) - \omega(x)^2 x \circ x =$$

$$(1 - 2\delta)^{-3}\left[x^{[3]} - 4\delta\omega(x)x^3 + (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2 x^2 - 2\delta(2\delta - 1)\omega(x)^3 x\right]$$

Le résultat en découle.

Aussi, si (A, ω) est une algèbre de Bernstein alors, en changeant la multiplication par

$$x \cdot y = (1 - 2\delta)xy + \delta\omega(x)y + \delta\omega(y)x,$$

on obtient une δ-algèbre de Bernstein pour tout $\delta \in K \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

LEMME 4.4.3. — *Toute δ-algèbre de Bernstein possède au moins un idempotent non nul.*

En effet, soit x un élément de A de poids 1. Posons $e_x = (1 - 2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x)$. On a $e_x^2 = (1 - 2\delta)^{-2}(x^{[3]} - 4\delta x^3 + 4\delta^2 x^2)$. Comme (A, ω) est une δ-algèbre de Bernstein, il vient que $x^{[3]} = 4\delta x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)x^2 + 2\delta(2\delta - 1)x$. Par suite $e_x^2 = (1-2\delta)^{-2}(4\delta x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)x^2 + 2\delta(2\delta - 1)x - 4\delta x^3 + 4\delta^2 x^2) = (1-2\delta)^{-2}((1-2\delta)x^2 - 2\delta(1-2\delta)x) = (1-2\delta)^{-2}(1-2\delta)(x^2 - 2\delta x) = (1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x) = e_x$.

Soient (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein et e un idempotent non nul de A. Pour $\alpha = 4\delta^2 + 2\delta - 1$, $\beta = -2\delta(2\delta - 1)$, $x = e$ et $y \in ker\omega$ dans (3.1.1) on obtient

$2e(ey) = (1+2\delta)ey - \delta y$. Ainsi, il est facile de montrer que l'application L définie de $ker\omega$ dans $ker\omega$ par $L(x) = 2(1-2\delta)^{-1}(ex - \delta x)$ est un projecteur, i.e. $L^2 = L$. Par suite A admet la décomposition de Peirce donnée par $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$, avec $U_e = \{x \in ker\omega \mid ex = \frac{1}{2}x\}$, $V_{e,\delta} = \{x \in ker\omega \mid ex = \delta x\}$. Par ailleurs, on sait que la décomposition de Peirce de l'algèbre de Bernstein (A°, ω), relative à l'idempotent e, est $A^\circ = Ke \oplus U_e^\circ \oplus V_e^\circ$, où $U_e^\circ = \{x \in ker\omega \mid e \circ x = \frac{1}{2}x\}$, $V_e^\circ = \{x \in ker\omega \mid e \circ x = 0\}$.

Compte tenu des formules $x \circ y = (1-2\delta)^{-1}(xy - \delta\omega(x)y - \delta\omega(y)x)$ et $xy = (1-2\delta)x \circ y + \delta\omega(x)y + \delta\omega(y)x$, la proposition suivante est immédiate :

Proposition 4.4.4. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein. On a*

(*i*) $I_p(A) = I_p(A^\circ) = \{x \circ x \mid x \in A, \omega(x) = 1\} = \{(1-2\delta)^{-1}(x^2 - 2\delta x) \mid x \in A, \omega(x) = 1\}$;

(*ii*) $U_e = U_e^\circ$ *et* $V_{e,\delta} = V_e^\circ$.

Théorème 4.4.5 ([13]). — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Bernstein A relative à l'idempotent non nul e. On a :*

(*i*) $U_e^2 \subset V_{e,\delta}$, $U_eV_{e,\delta} \subset U_e$, $V_{e,\delta}^2 \subset U_e$,

(*ii*) $u^3 = u(uv) = uv^2 = u^2(xu) = v^2(xv) = (uv)^2 = u^2v^2 = 0$, *pour tout* $u \in U_e$, $v \in V_{e,\delta}$ *et* $x \in \ker\omega$.

(*iii*) $L_\delta = \{u \in U_e \mid uU_e = 0\}$ *est un idéal vérifiant* $V_{e,\delta}^2 \subset L_\delta$, $U_e^2 L_\delta = 0$, $(uv)v \in L_\delta$, $L_\delta^2 = 0$, *pour tout* $u \in U_e$, $v \in V_{e,\delta}$

Dans la suite L_δ désignera l'idéal de l'assertion (*iii*) dans le théorème 4.4.5. Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$ une δ-algèbre de Bernstein. Alors l'ensemble des idempotents non nuls est donné par :

$$I_p(A) = \{e + u + (1-2\delta)^{-1}u^2 \mid u \in U_e\}.$$

De plus, si $e' = e + u_0 + (1-2\delta)^{-1}u_0^2$, $u_0 \in U_e$, alors $U_{e'} = \{u + 2(1-2\delta)^{-1}uu_0 \mid u \in U_e\}$ et $V_{e',\delta} = \{v - 2(1-2\delta)^{-1}vu_0 - 2(1-2\delta)^{-2}vu_0^2 \mid v \in V_{e,\delta}\}$. Ainsi, on a les isomorphismes de K-espaces vectoriels $U_e \cong U_{e'}$ et $V_{e,\delta} \cong V_{e',\delta}$. Si $dim_K U_e = r$ et $dim_K V_{e,\delta} = s$,comme dans le cas des algèbres de Bernstein, on dira que la δ-algèbre de Bernstein A est de *type* $(1 + r, s)$.

Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Bernstein. On note que pour $\delta \neq 0$ on a toujours $A^2 = A$ même si $U_e^2 \neq V_{e,\delta}$.

Exemple 4.4.6 : Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre dont la multiplication dans la base $\{e, u, v\}$ est donnée par $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $ev = \delta v$, $uv = v^2 = u$ et $u^2 = 0$, où $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$. On a $A = \mathbb{R}e \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$ avec $U_e =< u >$, $V_{e,\delta} =< v >$ et $A^2 = A$, tandis que $0 = U_e^2 \neq V_{e,\delta}$.

Ces considérations nous amènent à redéfinir la notion d'algèbre nucléaire afin de l'étendre aux δ-algèbres de Bernstein.

Définition 4.4.7 On dira qu'une δ-algèbre de Bernstein est nucléaire s'il existe un idempotent e dans A tel que $U_e^2 = V_{e,\delta}$.

PROPOSITION 4.4.8. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est une algèbre nucléaire*;

(ii) *Pour tout idempotent $e' \neq 0$ de A on a $U_{e'}^2 = V_{e',\delta}$.*

En effet, l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est triviale. Montrons donc $(i) \Rightarrow (ii)$. Si A est nucléaire alors il existe un idempotent e tel que $U_e^2 = V_{e,\delta}$. Soit e' un autre idempotent de A. Alors il existe $u_0 \in U_e$ tel que $e' = e + u_0 + (1-2\delta)^{-1}u_0^2$ et $A = Ke' \oplus U_{e'} \oplus V_{e',\delta}$ avec $U_{e'} = \{u + 2(1-2\delta)^{-1}uu_0 \mid u \in U_e\}$ et $V_{e',\delta} = \{v - 2(1-2\delta)^{-1}vu_0 - 2(1-2\delta)^{-2}vu_0^2 \mid v \in V_{e,\delta}\}$. Soit $x \in V_{e',\delta}$. Il existe $v \in V_{e,\delta} = U_e^2$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i'$ (u_i, $u_i' \in U_e$) et $x = v - 2(1-2\delta)^{-1}vu_0 - 2(1-2\delta)^{-2}vu_0^2 = \sum_{i=1}^{n}(u_iu_i') - 2(1-2\delta)^{-1}(u_iu_i')u_0 - 2(1-2\delta)^{-2}(u_iu_i')u_0^2 = \sum_{i=1}^{n}(u_i + 2(1-2\delta)^{-1}u_iu_0)(u_i' + 2(1-2\delta)^{-1}u_i'u_0)$ grâce au théorème 4.4.5. Par conséquent $x \in U_{e'}^2$ et $V_{e',\delta} \subset U_{e'}^2$, soit $V_{e',\delta} = U_{e'}^2$.

La proposition précédente nous dit que la notion de δ-algèbre de Bernstein nucléaire ne dépend pas de l'idempotent choisi.

COROLLAIRE 4.4.9. — *Si A est une δ-algèbre de Bernstein nucléaire alors $A^2 = A$.*

La réciproque du corollaire n'est vraie que pour $\delta = 0$, i.e. pour les algèbres de Bernstein qui sont ici les 0-algèbres de Bernstein. En effet, l'exemple 4.4.6 nous dit que pour tout $\delta \neq 0$, la δ-algèbre de Bernstein A ainsi construite n'est pas nucléaire alors que $A^2 = A$.

PROPOSITION 4.4.10. — *Soit A une δ-algèbre de Bernstein. Alors A est nucléaire si et seulement si A° est nucléaire.*

Ce résultat découle de la proposition 4.2.3 et du fait que $U_e = U_e^\circ$ et $V_{e,\delta} = V_e^\circ$.

THÉORÈME 4.4.11. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein de type fini. Si A est nucléaire alors $ker\omega$ est nilpotent et A est génétique.*

En effet, si A est nucléaire alors A° l'est aussi (proposition 4.4.10). Alors N° est nilpotent([13, théorème 6.9 (Conjecture de Grishkov)]). Par suite le corollaire 4.2.5 nous donne le résultat.

PROPOSITION 4.4.12. — *Toute δ-algèbre de Bernstein nucléaire de type fini est une algèbre train spéciale satisfaisant*

$$x^4 - \frac{1}{2}(3+2\delta)\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}(1+3\delta)\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{2}\delta\omega(x)^3x = 0$$

En effet, soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein nucléaire de type fini. L'algèbre de Bernstein (A°, ω) est alors nucléaire de type fini. Par suite, le théorème 3.1 de [19, chap. 6] nous dit que (A°, ω) est une algèbre train spéciale vérifiant l'équation $x^{\circ 4} - \frac{3}{2}\omega(x)x^{\circ 3} + \frac{1}{2}\omega(x)^2x^{\circ 2} = 0$. Cette équation est équivalente à $x^4 - \frac{1}{2}(3+2\delta)\omega(x)x^3 + \frac{1}{2}(1+3\delta)\omega(x)^2x^2 - \frac{1}{2}\delta\omega(x)^3x = 0$ compte tenu du fait que $x \circ y = (1-2\delta)^{-1}(xy - \delta\omega(x)y - \delta\omega(y)x)$ quels que soient x et y dans A. Le corollaire 4.2.5 termine la démonstration.

Dans [15] les auteurs montrent que dans toute algèbre de Bernstein nucléaire (A, ω), l'annulateur $AnnN$ de $N = ker\omega$ est un idéal satisfaisant $V_e^2 \subset AnnN$ et $v_1(v_2u) + v_2(v_1u) \in AnnN$ pour v_1, $v_2 \in V_e$ et $u \in U_e$. Ce résultat s'étend sans difficulté à toute δ-algèbre de Bernstein et on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4.13. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein nucléaire. Alors $A/AnnN$ est une algèbre train d'équation $\bar{x}^3 - (1+\delta)\bar{\omega}(\bar{x})\bar{x}^2 + \delta\bar{\omega}(\bar{x})^2\bar{x} = 0$.*

PROPOSITION 4.4.14. — *Soit I un sous-espace vectoriel de A. Alors I est un idéal de A non contenu dans N si et seulement si A^2 est contenu dans I.*

En effet, si $I \not\subset N$ alors il existe x dans I tel que $\omega(x) \neq 0$. Alors, pour $y = \omega(x)^{-1}x$, l'élément $e = (1-2\delta)^{-1}(y^2 - 2\delta y)$ est un idempotent de A appartenant à I. Relativement à e, on a $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$. Comme $U_e = eU_e$, on a $U_e \subset I$ car I est un idéal de A. Par suite, pour tout $x_i = \lambda_i e + u_i + v_i$ $(i = 1, 2)$, on a $x_1 x_2 = \lambda_1\lambda_2 e + \frac{1}{2}(\lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1) + u_1u_2 + u_1v_2 + u_2v_1 + v_1v_2 + ev_2 + ev_1 \in I$, soit $A^2 \subset I$. Réciproquement, supposons $A^2 \subset I$. Alors, puisque $I \subset A$, il vient $AI \subset A^2 \subset I$ et I est un idéal de A non contenu dans N.

Remarques 4.4.15. (i) Si A est nucléaire alors A n'admet pas d'idéal propre non contenu dans N.

(ii) Si $I \not\subset N$, $J \not\subset N$ et $A^2 \subset I \cap J$, alors $A^2 \subset IJ$ car $(A^2)^2 = A^2$. Par suite IJ devient dans ce cas un idéal de A.

PROPOSITION 4.4.16. — *Soit I un idéal de A. Alors l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) $I = Ke \oplus U_e \oplus (V_{e,\delta} \cap I)$;

(ii) $I = (U_e \cap I) \oplus (V_{e,\delta} \cap I)$.

En effet, on distingue deux cas. Si $I \subset N$ alors il existe un idempotent non nul e dans I et $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$. Pour $x \in I$, on a $x = \lambda e + u + v$, $\lambda \in K$, $u \in U_e$ et $v \in V_{e,\delta}$. Par suite $v = x - \lambda e - 2eu \in I$ car $U_e = eU_e \subset I$. Ainsi $I = Ke \oplus U_e \oplus (V_{e,\delta} \cap I)$. Par contre, si $I \subset N$ alors pour tout $x \in I$, il existe $u \in U_e$ et $v \in V_{e,\delta}$ tels que $x = u + v$. On obtient donc $ex = \frac{1}{2}u + \delta v$, $v = (\delta - \frac{1}{2})^{-1}(ex - \frac{1}{2}x)$. D'où $v \in I$ et par conséquent $u = x - v \in I$, soit $I = (U_e \cap I) \oplus (V_{e,\delta} \cap I)$.

PROPOSITION 4.4.17. — *Soit I un sous-espace vectoriel de A. Si I est un idéal de A alors I est un idéal de A°.*

En effet, si $\delta = 0$, le résultat est évident. Si $\delta \neq 0$ et $I \subset N$ la proposition 4.2.3 nous permet de conclure. Supposons donc que $\delta \neq 0$ et $I \not\subset N$. Alors $I = A$ et on obtient le résultat.

La réciproque de la proposition 4.4.17 est fausse. En effet, considérons la $\mathbb{R}$-algèbre A dont la multiplication dans la base $\{e, u, v\}$ est donnée par $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $ev = \delta v$, $uv = (1 - 2\delta)u = v^2$ les autres produits étant nuls et $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$. On vérifie que A est une δ-algèbre de Bernstein. La table de multiplication de l'algèbre de Bernstein A° associée à A est donnée par $e \circ e = e$, $e \circ u = \frac{1}{2}u$, $u \circ v = v \circ v = u$ les autres produits étant nuls. Le sous-espace vectoriel $I =< e, u >$ est un idéal de $A°$. Par contre I n'est pas un idéal de A car $ev = \delta v \notin I$.

THÉORÈME 4.4.18. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Bernstein A, relative à l'idempotent non nul e. Alors la δ-algèbre de Bernstein quotient A/L_δ est une algèbre train vérifiant $\bar{x}^3-(1+\delta)\bar{\omega}(\bar{x})\bar{x}^2+\delta\bar{\omega}(\bar{x})^2\bar{x} = 0$.*

En effet $\bar{\omega} : A/L_\delta \longrightarrow K, \bar{x} \mapsto \omega(x)$ est une pondération de A/L_δ et si $x = \omega(x)e + u + v$ est dans $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$, on a $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = \frac{1}{2}(2\delta - 1)\omega(x)v^2 + u^2v + v^3 + 2(uv)v$. En appliquant le morphisme canonique $\pi : A \longrightarrow A/L_\delta$ aux deux membres de l'égalité précédente, le résultat s'ensuit.

PROPOSITION 4.4.19. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(A°, \omega)$ est une algèbre de Bernstein-Jordan

(ii) (A, ω) est une algèbre train vérifiant $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 0$

En effet, il suffit de remarquer que pour tout $x \in A$ on a : $x \circ x \circ x - \omega(x)x \circ x = (1-2\delta)^{-2}(x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x)$ et d'utiliser le fait que $(A°, \omega)$ est une algèbre de Bernstein-Jordan si et seulement si $x \circ x \circ x - \omega(x)x \circ x = 0$.

Dans le même sens on a :

PROPOSITION 4.4.20. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(A°, \omega)$ est une algèbre de Bernstein normale;

(ii) (A, ω) vérifie $x^2y - \omega(x)xy - \delta\omega(y)x^2 + \delta\omega(xy)x = 0$.

On rappelle qu'une algèbre de Bernstein est dite *normale* si elle vérifie $x^2y - \omega(x)xy = 0$.

Les propositions 4.4.19 et 4.4.20 suggèrent les définitions suivantes :

Définitions 4.4.21 : Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. On dira que A est une *δ-algèbre de Bernstein-Jordan* (resp. une *δ-algèbre de Bernstein-normale*) si $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 0$ (resp. $x^2y - \omega(x)xy - \delta\omega(y)x^2 + \delta\omega(xy)x = 0$).

PROPOSITION 4.4.22. — *Soit $A = Ke \oplus U_e \oplus V_{e,\delta}$ la décomposition de Peirce d'une*

δ-algèbre de Bernstein A. Alors A est une δ-algèbre de Bernstein-Jordan (resp. une δ-algèbre de Bernstein normale) si et seulement si $V_{e,\delta}^2 = 0$ et $v(vu) = 0$ quels que soient $u \in U_e$ et $v \in V_{e,\delta}$ (resp. $U_e V_{e,\delta} = 0$ et $V_{e,\delta}^2 = 0$).

Le théorème suivant nous montre qu'une δ-algèbre de Bernstein-Jordan n'est pas, en général, de Jordan.

THÉORÈME 4.4.23. — *Soit (A, ω) une δ-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (A, ω) est une algèbre à puissances associatives ;

(ii) (A, ω) vérifie l'une des équations suivantes :

(a) $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2 x = 0 \quad (\delta \in \{0, 1\})$;

(b) $x^2 - \omega(x)x = 0 \quad (\delta \notin \{0, 1\})$;

(iii) (A, ω) est une algèbre de Jordan.

En effet, seule l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ nécessite d'être prouvée, les autres étant bien connues dans la littérature. En faisant $y = x^2, \alpha = 4\delta^2 + 2\delta - 1$ et $\beta = -2\delta(2\delta - 1)$ dans (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} 2x^2x^3 = {}& 4\delta\omega(x)x^4 + (4\delta^2+1)\omega(x)^2x^3 - (8\delta^3 + 6\delta^2 + \delta - 1)\omega(x)^3x^2 \\ & + \delta(2\delta-1)(3+4\delta)\omega(x)^4 x \end{aligned} \tag{1}$$

Supposons maintenant que A est à puissances associatives. Alors (3.3.1) s'écrit

$$x^4 = 4\delta\omega(x)x^3 - (4\delta^2 + 2\delta - 1)\omega(x)^2x^2 + 2\delta(2\delta - 1)\omega(x)^3 x \tag{2}$$

et (1) donne

$$\begin{aligned} 2x^5 = {}& (20\delta^2 + 1)\omega(x)^2x^3 + (-24\delta^3 - 14\delta^2 + 3\delta + 1)\omega(x)^3x^2 \\ & + 3\delta(8\delta^2 - 2\delta - 1)\omega(x)^4 x \end{aligned} \tag{3}$$

où on a remplacé x^4 par son expression dans (2). En multipliant (2) par $2x$, il vient

$$\begin{aligned} 2x^5 = {}& 2(12\delta^2 - 2\delta + 1)\omega(x)^2x^3 + 4\delta(-8\delta^2 - 2\delta + 1)\omega(x)^3x^2 \\ & + 16\delta^2(2\delta - 1)\omega(x)^4 x \end{aligned} \tag{4}$$

Les identités (3) et (4) donnent par différence

$$(5)\qquad (1-2\delta)x^3+(4\delta^2-\delta-1)\omega(x)x^2+\delta(3-4\delta)\omega(x)^2x=0$$

La différence des identités (2) et (5), multipliées respectivement par $(1-2\delta)^2$ et $(1-2\delta)x$, s'écrit $\delta(\delta-1)(x^2-\omega(x)x)=0$. Ainsi, soit $\delta\in\{0,1\}$ et on a (a) via (5), soit $\delta\notin\{0,1\}$ et on obtient (b).

On a l'analogue du théorème 1.4.11 .

THÉORÈME 4.4.24. — *Soit (A,ω) une δ-algèbre de Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$N=ker\omega$ est une nil-algèbre ;*

(ii) *(A,ω) est une algèbre train vérifiant $(x^3-(1+\delta)\omega(x)x^2+\delta\omega(x)^2x)(x-\frac{1}{2}\omega(x))^k=0$, k entier naturel.*

4.5. Structure des δ-algèbres de Walcher

On rappelle qu'une δ-algèbre de Walcher est caractérisée par l'identité

$$(3.2.5)\qquad x^{[3]}-(1+2\delta)\omega(x)x^3+\delta(1+2\delta)\omega(x)^2x^2+\delta(1-2\delta)\omega(x)^3x=0$$

On a l'analogue du théorème 4.4.1.

THÉORÈME 4.5.1. — *Soit (A,ω) une δ-algèbre de Walcher. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *(A,ω) est une algèbre de Walcher ;*

(ii) *$\delta=-\frac{1}{2}$ ou $x^2-\omega(x)x=0$ pour tout x dans A.*

Soit (A,ω) une K-algèbre pondérée. On change la multiplication de A en posant

$$x*y=(1-2\delta)^{-1}(2xy-\frac{1}{2}(1+2\delta)(\omega(x)y+\omega(y)x))$$

où xy désigne le produit de x par y dans l'algèbre A. On note A^* la nouvelle algèbre.

THÉORÈME 4.5.2. — *Soit (A,ω) une K-algèbre pondérée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) (A, ω) *est une* δ*-algèbre de Walcher*;

(*ii*) (A^*, ω) *est une algèbre de Walcher.*

En effet, on note que pour tout x dans A,

$$(x * x) * (x * x) - \omega(x)^3 x =$$
$$8(1-2\delta)^{-3}\left[x^{[3]} - (1+2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(1+2\delta)\omega(x)^2x^2 + \delta(1-2\delta)\omega(x)^3x\right]$$

et le résultat en découle.

Proposition 4.5.3. — *Soit* (A, ω) *une* δ*-algèbre de Walcher. On a*

$$x^4 - (1+2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(2+\delta)\omega(x)^2x^2 - \delta^2\omega(x)^3x = 0$$

pour tout $x \in A$.

Pour la preuve, voir la démonstration du théorème 3.2.4.

L'exemple suivant nous dit que la réciproque de la proposition 4.5.3 n'est pas vraie.

Exemple 4.5.4. Soit A la $\mathbb{R}$-algèbre dont la multiplication dans la base $\{e, u, v_1, v_2\}$ est définie par $e^2 = e$, $eu = ue = \frac{1}{2}u$, $ev_1 = v_1e = \delta v_1$, $ev_2 = v_2e = \delta v_2 + v_1$, $v_2^2 = v_1$, les autres produits étant tous nuls et $\delta \neq \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\omega(e) = 1$ et $\omega(u) = \omega(v_1) = \omega(v_2) = 0$ est une pondération de A. Soit $x \in A$ de poids 1. Alors $x = e + \alpha_1 u + \alpha_2 v_1 + \alpha_3 v_2$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$. On a $x^2 = e + \alpha_1 u + (\alpha_3^2 + 2\alpha_3 + 2\delta\alpha_2)v_1 + 2\delta\alpha_3 v_2$, $x^3 = e + \alpha_1 u + (3\delta\alpha_3^2 + (1+4\delta)\alpha_3 + \delta(1+2\delta)\alpha_2)v_1 + \delta(1+2\delta)\alpha_3 v_2$, et $x^4 = e + \alpha_1 u + (\delta(5\delta+1)\alpha_3^2 + (6\delta^2+2\delta+1)\alpha_3 + \delta(2\delta^2+\delta+1)\alpha_2)v_1 + \delta(2\delta^2+\delta+1)\alpha_3 v_2$. Ainsi $x^4 - (1+2\delta)x^3 + \delta(2+\delta)x^2 - \delta^2 x = 0$. Par suite, pour tout $x \in A$, on a : $x^4 - (1+2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(2+\delta)\omega(x)^2x^2 - \delta^2\omega(x)^3x = 0$. Soit maintenant $x = e + v_2$. On a $x^2 = e + 3v_1 + 2\delta v_2$, $x^3 = e + (7\delta+1)v_1 + \delta(1+2\delta)v_2$ et $x^{[3]} = e + 2\delta(5+2\delta)v_1 + 4\delta^2 v_2$. D'où $x^{[3]} - (1+2\delta)x^3 + \delta(1+2\delta)x^2 + \delta(1-2\delta)x = -(1-2\delta)^2 v_1 \neq 0$ pour tout $\delta \neq \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$. Donc (A, ω) n'est pas une δ-algèbre de Walcher. D'où le résultat.

La linéarisation partielle de (3.2.5) nous donne les identités :

$$\begin{aligned} 4x^2(xy) &= (2\delta+1)[\omega(y)x^3 + 2\omega(x)x(xy) + \omega(x)x^2y] \\ &-2\delta(1+2\delta)[\omega(xy)x^2 + \omega(x)^2xy] - \delta(1-2\delta)[3\omega(x^2y)x + \omega(x)^3y] \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

$$(4.5.6)\quad \begin{aligned} 4x^2(yz)+8(xy)(xz) &= (1+2\delta)[\omega(y)x^2z+2\omega(y)x(xz)+2\omega(z)x(xy) \\ &\quad +\omega(z)x^2y+2\omega(x)((xy)z+(yz)x+(zx)y)] \\ &\quad -2\delta(1+2\delta)[\omega(yz)x^2+2\omega(xy)xz+2\omega(xz)xy+\omega(x)^2yz] \\ &\quad -3\delta(1-2\delta)[\omega(x^2y)z+2\omega(xyz)x+\omega(x^2z)y] \end{aligned}$$

Faisons $y = x^2$ et $y = z = x^2$ respectivement dans (4.5.5) et (4.5.6) puis utilisons (3.2.5) et la proposition 4.5.3 . Il vient que

(4.5.7)
$$\begin{aligned} x^2x^3 &= (1+2\delta)(1+\delta)\omega(x)^2x^3-2\delta(1+\delta)^2\omega(x)^3x^2+\delta(2\delta^2+2\delta-1)\omega(x)^4x \\ x^3x^3 &= (1+4\delta+3\delta^2+2\delta^3)\omega(x)^3x^3-\delta(3+5\delta+5\delta^2+2\delta^3)\omega(x)^4x^2 \\ &\quad +\delta(-1+2\delta+3\delta^2+2\delta^3)\omega(x)^5x \end{aligned}$$

LEMME 4.5.8. — *Toute δ-algèbre de Walcher possède au moins un idempotent non nul.*

En effet, pour tout $x \in A$ tel que $\omega(x) = 1$, soit l'élément $e_x = (1-2\delta)^{-2}(x^3-3\delta x^2+\delta(4\delta-1)x)$. On a $e_x^2 = (1-2\delta)^{-4}[x^3x^3-6\delta x^2x^3+9\delta^2x^2x^2+2\delta(4\delta-1)x^4-6\delta^2(4\delta-1)x^3+\delta^2(4\delta-1)^2x^2]$. Au moyen des identités (3.2.5), (4.5.7) et la proposition 4.5.3, on obtient : $e_x^2 = (1-2\delta)^{-4}[(1-2\delta)^2x^3-3\delta(1-2\delta)^2x^2+\delta(-1+8\delta-20\delta^2+16\delta^3)x] = (1-2\delta)^{-4}(1-2\delta)^2(x^3-3\delta x^2+\delta(4\delta-1)x) = e_x$.

Soit (A,ω) une δ-algèbre de Walcher et (A^*,ω) l'algèbre de Walcher correspondante. On sait que A et A^* ont le même ensemble d'idempotents. De plus, si e est un idempotent non nul de A alors, pour $x = e$ et $y \in ker\omega$ dans (4.5.5), il vient que $2e(ey))-(1+2\delta)ey+\delta y = 0$. D'où $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$ où $N_{\frac{1}{2}} = \{x \in ker\omega \mid ex = \frac{1}{2}x\}$, $N_\delta = \{x \in ker\omega \mid ex = \delta x\}$. Par ailleurs $A^* = Ke \oplus N^*_{\frac{1}{2}} \oplus N^*_{-\frac{1}{2}}$ avec $N^*_{\frac{1}{2}} = \{x \in ker\omega \mid e*x = \frac{1}{2}x\}$, $N^*_{-\frac{1}{2}} = \{x \in ker\omega \mid e*x = -\frac{1}{2}x\}$. On a aussi les égalités de sous-espaces vectoriels : $N_{\frac{1}{2}} = N^*_{\frac{1}{2}}$ et $N_\delta = N^*_{-\frac{1}{2}}$. Enfin, on peut remarquer que les noyaux de (A,ω) et de (A^*,ω) ont la même structure algébrique car $x*y = 2(1-2\delta)^{-1}xy$ pour tous $x, y \in ker\omega$. En fait, on a le théorème qui suit.

THÉORÈME 4.5.9. — *Soit $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Walcher relative à l'idempotent non nul e. Alors*

(1) $$N_{\frac{1}{2}}^2 \subset N_\delta, \quad N_{\frac{1}{2}} N_\delta \subset N_{\frac{1}{2}}, \quad N_\delta^2 \subset N_\delta;$$

(2) $$x^2(xy) = x(x^2y) = 0;$$

(3) $$2(xy)(xz) + x^2(yz) = 0;$$

(4) $$(xy)(tz) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = 0;$$

(5) $$2e(ex) - (1+2\delta)ex + \delta x = 0;$$

(6) $$(1-2\delta)e(xy) + 4(ex)(ey) - (1+2\delta)((ex)y + (ey)x - \delta xy) = 0;$$

(7) $$4((ex)(yz) + (ey)(xz) + (ez)(xy)) = (1+2\delta)((xy)z + (yz)x + (zx)y);$$

(8) $$u^3 = v^3 = 0;$$

(9) $$(u_1u_2)u_3 + (u_2u_3)u_1 + (u_3u_1)u_2 = 0, \quad (v_1v_2)v_3 + (v_2v_3)v_1 + (v_3v_1)v_2 = 0;$$

(10) $$(v_1v_2)u = v_1(v_2u) + v_2(v_1u);$$

(11) $$(u_1u_2)v = u_1(u_2v) + u_2(u_1v),$$

quels que soient x, y, z, t dans $ker\omega$, u, u_i dans $N_{\frac{1}{2}}$, v, v_i dans N_δ $(i = 1, 2, 3)$.

PROPOSITION 4.5.10. — *Toute δ-algèbre de Walcher est une algèbre train spéciale, donc génétique.*

En effet, supposons que (A, ω) est une δ-algèbre de Walcher et soit $N = ker\omega$. Alors, l'algèbre de Walcher (A^*, ω) est une algèbre train spéciale d'après ([21]). Par suite , le corollaire 4.2.5 achève la démonstration.

LEMME 4.5.11. — *Soient $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$ une δ-algèbre de Walcher dans sa décomposition de Peirce relativement à l'idempotent non nul e et k un entier strictement positif. On a les inclusions suivantes :*

$$(i) \quad N_{\frac{1}{2}}(N_{\frac{1}{2}} N_\delta^k) \subset N_\delta^k, \quad (ii) \quad N_\delta(N_{\frac{1}{2}} N_\delta^k) \subset N_{\frac{1}{2}} N_\delta^k.$$

En effet, (i) s'obtient par récurrence sur l'entier $k \geq 1$. Si $k = 1$ le résultat est trivial par les inclusions (1) du théorème 4.5.9. Supposons que cette inclusion ait lieu pour un entier $k \geq 1$ et soient u_1, $u_2 \in N_{\frac{1}{2}}$, v_1, $v_2 \in N_\delta$ et $v \in N_\delta^k$. On établit, à l'aide des identités (4), (9) et (10) du théorème 4.5.9, que $u_1(u_2(v_1v)) = u_1(v_1(vu_2)) + u_1(v(v_1u_2)) = v_1(u_1(vu_2)) - (v_1u_1)(vu_2) + v(u_1(v_1u_2)) - (v_1u_2)(vu_1) = (u_1u_2)(v_1v) + v(u_1(u_2v_1)) + v_1(u_1(u_2v))$. On a $(u_1u_2)(v_1v)$, $v(u_1(u_2v_1) \in N_\delta^{k+1}$ trivialement et $v_1(u_1(u_2v)) \in N_\delta^{k+1}$ du fait que $u_1(u_2v) \in N_\delta^k$ par hypothèse de récurrence. D'où l'inclusion (i). Quand à l'inclusion (ii) elle provient de ce que $v_1(u_1(v_2v)) = u_1(v_1(v_2v)) - (v_1u_1)(v_2v)$ quels que soient $u_1 \in N_{\frac{1}{2}}$, v_1, $v_2 \in N_\delta$ et $v \in N_\delta^k$.

Corollaire 4.5.12. — *Soient $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$ une δ-algèbre de Walcher et $k \geq 1$ un entier. Alors le sous-espace vectoriel $J_k = N_{\frac{1}{2}}N_\delta^k \oplus N_\delta^k$ est un idéal de A.*

Proposition 4.5.13. — *Soient (A, ω) une δ-algèbre de Walcher, I_1 et I_2 les idéaux de A engendrés respectivement par les éléments de la forme $x^2 - \omega(x)x$ et $x^3 - (1+\delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x$, x parcourant A. Alors $I_1 = J_1$ et $I_2 = J_2$.*

En effet, soit $x \in A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$. $x = \omega(x)e + u + v$, $u \in N_{\frac{1}{2}}$ et $v \in N_\delta$. On a $x^2 - \omega(x)x = 2uv + (u^2 + v^2 + (2\delta - 1)\omega(x)v)$ et $x^3 - (1 + \delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 2uv^2 + (2u^2v + (2\delta - 1)\omega(x)v^2)$. Par suite, $(x^2 - \omega(x)x) \in J_1$ et $(x^3 - (1 + \delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x) \in J_2$. Soit donc $I_1 \subset J_1$ et $I_2 \subset J_2$. Soit maintenant $v \in N_\delta$. On a $v = (2\delta - 1)^{-1}[(e + v)^2 - \omega(e + v)(e + v) - (v^2 - \omega(v)v)]$ et $v^2 = (2\delta - 1)^{-1}[(e + v)^3 - (1 + \delta)\omega(e + v)(e + v)^2 + \delta\omega(e + v)^2(e + v)]$. Ces deux dernières identités nous disent que $N_\delta \subset I_1$ et $v^2 \in I_2$ pour tout $v \in N_\delta$. Comme $v_1v_2 = \frac{1}{2}[(v_1 + v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2]$ pour tout v_1, $v_2 \in N_\delta$, on en déduit que $N_\delta^2 \subset I_2$. D'où $J_1 \subset I_1$ et $J_2 \subset I_2$. Par conséquent $J_1 = I_1$ et $J_2 = I_2$.

Proposition 4.5.14. — *Soit $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$ la décomposition de Peirce d'une δ-algèbre de Walcher relative à l'idempotent non nul e. Alors $J_2 = N_{\frac{1}{2}}N_\delta^2 \oplus N_\delta^2$ est un idéal de A et l'algèbre quotient A/J_2 est une algèbre train vérifiant l'équation $\bar{x}^3 - (1 + \delta)\bar{\omega}(\bar{x})\bar{x}^2 + \delta\bar{\omega}(\bar{x})^2\bar{x} = 0$.*

En effet, d'après le corollaire 4.5.12, J_2 est un idéal de A. Soit maintenant $x \in A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$. Alors $x = \omega(x)e + u + v$, $u \in N_{\frac{1}{2}}$, $v \in N_\delta$ et $x^3 - (1 + \delta)\omega(x)x^2 + \delta\omega(x)^2x = 2v^2u + 2u^2v - (1 - 2\delta)\omega(x)v^2 \in J_2$. En appliquant le morphisme canonique $\pi : A \longrightarrow A/J_2$ aux deux membres de l'égalité, le résultat s'ensuit.

COROLLAIRE 4.5.15. — *Soit* $A = Ke \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_\delta$ *la décomposition de Peirce d'une* δ*-algèbre de Walcher relative à l'idempotent non nul* e*. Alors* A *est une algèbre train de rang* 4 *si et seulement si* $N_\delta^2 \neq 0$.

En effet, si $N_\delta^2 = 0$ alors A est une algèbre train de rang ≤ 3 d'après la proposition 4.5.14.

PROPOSITION 4.5.16. — *Soit* (A, ω) *une* δ*-algèbre de Walcher. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) (A, ω) *est une algèbre à puissances associatives ;*

(ii) *L'équation de* (A, ω) *est de l'une des formes suivantes :*

(a) $x^{[3]} - \omega(x)x^3 = 0$;

(b) $x^{[3]} - 3\omega(x)x^3 + 3\omega(x)^2x^2 - \omega(x)^3x = 0$;

(iii) (A, ω) *est une algèbre de Jordan.*

En effet. $(i) \Rightarrow (ii)$: On sait que (A, ω) est une algèbre train de rang ≤ 4. Sans perdre la généralité, on peut supposer que l'algèbre (A, ω) est de rang 4. Alors, puisque A est à puissances associatives, (3.2.5) s'écrit $x^4 - (1 + 2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(1 + 2\delta)\omega(x)^2x^2 + \delta(1 - 2\delta)\omega(x)^3x = 0$. Par ailleurs la proposition 4.5.3 nous dit que $x^4 - (1 + 2\delta)\omega(x)x^3 + \delta(2 + \delta)\omega(x)^2x^2 - \delta^2\omega(x)^3x = 0$ pour tout $x \in A$. Ainsi, ces deux dernières identités donnent par différence $\delta(1 - \delta)(x^2 - \omega(x)x) = 0$. Par suite, A étant de rang 4, $\delta = 0$ ou $\delta = 1$ et nous obtenons respectivement les équations (a) et (b).

L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ bien connue, résulte de la linéarisation des équations (a) et (b). De plus $(iii) \Rightarrow (i)$ est immédiate.

Bibliographie

[1] V. M. Abraham. — *A note on train algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 20, 1976, p. 53–58.

[2] R. Andrade and A. Labra. — *On a class of Baric Algebras*, Linear Algebra and Appl. 245, 1996, p. 49–53.

[3] J. Bayara, A. Micali et M. Ouattara. — *Autour de la condition d'Engel dans les algèbres de Bernstein*, Comm. Algebra, à paraître.

[4] I. M. H. Etherington. — *Commutative train algebras of ranks 2 and 3*. J. London Math. Soc. 15, 1940, p. 136–149.

[5] M. A. Garcia-Muniz and S. Gonzalez. — *Baric, Bernstein and Jordan algebras*. Comm. Algebra, 26 (3), 1998, p. 913–930.

[6] S. Gonzalez and C. Martinez. — *Idempotent elements in a Bernstein algebra*, J. London Math. Soc. 42, 1991, p. 430–436.

[7] S. Gonzalez, J. C. Gutierrez and C. Martinez. — *Classification of Bernstein Algebras of type (3, n-3)*, Comm. Algebra 23 (1), 1995, p. 201–213.

[8] H. Guzzo Jr. — *The Peirce decomposition for commutative train algebras*. Comm. Algebra 22 (14), 1994, p. 5745–5757.

[9] I. R. Hentzel et L. A. Peresi. — *Semi-prime Bernstein algebras*. Arch. Math. (Basel) 52 (6), 1989, p. 171–178.

[10] P. Holgate. — *Selfing in Genetic algebras*, J. Math. Biology 6, 1978, p. 197–206.

[11] J. Lopez Sanchez, E. Rodriguez S. Maria. — *On train algebras of rank 4*. Comm. Algebra 24 (14), 1996, p. 4439–4445.

[12] Yu. I. Lyubich. — *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics 22. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[**13**] A. Micali et M. Ouattara. — *Structure des algèbres de Bernstein*, Linear Algebra Appl. 148, 1991, p. 171–178.

[**14**] A. Micali et M. Ouattara. — *Sur la dupliquée d'une algèbre*, Bull. Soc. Math. Belgique 45, 1, Ser. B., 1993, p. 5–24.

[**15**] R. W. K. Odoni and A. E. Stratton. — *Structure of Bernstein algebras*, in Algèbres génétiques, Cahiers Mathématiques 38, Montpellier, 1989, p. 117–125.

[**16**] M. Ouattara. — *Algèbres de Jordan et Algèbres génétiques*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 1988.

[**17**] M. Ouattara. — *Sur les T-algèbres de Jordan*, Linear Algebra Appl. 144, 1991, p. 11–21.

[**18**] M. Ouattara. — *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T-algèbres*, Linear Algebra Appl. 148, 1991, p. 171–178.

[**19**] M. Ouattara. — *Algèbre de la Génétique des Populations*, Thèse d'Etat, Université de Ouagadougou, 1991.

[**20**] R. D. Schafer. — *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, London, 1966.

[**21**] S. Walcher. — *Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers*, Arch. Math.(Basel) 56, 1991, p. 547–551.

[**22**] S. Walcher. — *On Bernstein algebras which are train algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 35, N-1, 1992, p. 159–168.

[**23**] A. Wörz-Busekros. — *Algebras in genetics*, Lecture Notes in Biomathematics 36, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

RESUME

A travers ce mémoire, qui se divise en quatre chapitres, nous apportons notre contribution à la théorie des **algèbres génétiques**. Le premier chapitre nous donne l'occasion de rappeler les définitions de quelques mots clés et certains résultats que nous utilisons couramment dans cette thèse. Nous définissons, dans le second chapitre, les conditions d'Engel dans une algèbre de Bernstein et nous montrons que toute algèbre de Bernstein de dimension finie vérifiant la "deuxième condition faible d'Engel" est génétique. Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'étude globale des algèbres vérifiant une **équation train aux trois premières puissances mixtes**. Elle nous permet de mettre en évidence les **δ-algèbres de Bernstein** et les **δ-algèbres de Walcher**. Nous retrouvons ces deux classes d'algèbres à travers la notion d'opérateur d'évolution. Les δ-algèbres de Bernstein, très proches des **algèbres de Bernstein**, ne sont pas nécessairement des algèbres train. Quant aux δ-algèbres de Walcher, elles sont génétiques et s'apparentent aux **algèbres de Walcher**.