

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
U.F.R DES SCIENCES EXACTES ET APPLIQUEES

THESE

Présentée par :

Ngarkodje NGARHASTA

Pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : Analyse Numérique.

THEME :

ETUDE NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES DE DIFFUSION
ET D'EQUATIONS INTEGRALES PAR LA METHODE
DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN.

Directeur de thèse :

Blaise SOME, Maitre de Conférence Université de Ouagadougou (Burkina-Faso).

Rapporteurs :

Yves CHERRUAULT ; Professeur Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
Ousseynou NAKOULIMA, Professeur Université de Pointe à Pitre (Aux Antilles).
Albert OUEDRAOGO, Professeur Université de Ouagadougou (Burkina-Faso).
Benjamin MAMPASSI, Maitre Assistant Université Cheik Anta Diop (Sénégal).

Soutenu le 10 janvier 2003

Devant le jury :

Président :

Jacques Teghem, Professeur Faculté Polytechnique de Mons(Belgique).

Membres :

Albert OUAGADOUGOU , Professeur Université de Ouagadougou (Burkina-Faso).
Benjamin MAMPASSI, Maitre Assistant Université Cheik Anta Diop(Sénégal).
Cyprien GNANVO, Maitre de Conférence Université de Calavie Abomey(Benin).
Koïna RODOUMTA, Maitre Assistant Université de Ndjamena (Tchad).
Blaise SOME, Maitre de Conférence Université de Ouagadougou(Burkina-Faso).

DEDICACE

A

*Ma mère,
Toute ma famille,
Mes parents.*

REMERCIEMENT

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur B.SOME pour m'avoir donné l'ensemble des moyens nécessaires à la réalisation de ce travail et qui m'a fait bénéficier de son aide bienveillante et de précieux conseils tout au long de la préparation de cette thèse. J'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines.

Je remercie sincèrement le Professeur J.TEGHEM qui me fait l'honneur de présider le jury.

Le Professeur Y.CHERRUAULT m'a accueilli au sein de son laboratoire pour un stage qui m'a permis d'avoir de rencontres fructueuses sur mon thème de recherche. Il a aussi accepté d'examiner ce travail avec un intérêt bienveillant et d'en être rapporteur. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et mes vifs remerciements. Je dois également toute ma reconnaissance au Professeur K.ABBAOUI avec qui j'ai eu beaucoup d'échanges constructifs sur la nouvelle méthode décompositionnelle.

Je remercie très chaleureusement le Professeur B.MAMPASSI, rapporteur et membre du jury. Par sa collaboration fructueuse et ses multiples conseils, il a contribué de manière significative à l'aboutissement de ce travail. Je lui exprime ici toute ma reconnaissance.

Je remercie très vivement les Professeurs A.Ouedraogo, K.Rodounata d'avoir examiné ce travail et de faire partie du jury. Merci pour leurs multiples conseils et encouragements au long de mon parcours.

Je remercie également le Professeur O.NAKOULIMA, rapporteur de cette thèse. De même je remercie le Professeur C.GNANVO qui a accepté de participer au jury.

Un grand merci à tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Ouagadougou. Particulièrement, le Dr Longin SOME a été pour moi une personne ressource. Je lui exprime toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à tous mes amis, collègues, frères et sœurs de la CTO, du RAMAD, de l'Université de Ouagadougou et de notre laboratoire LANIBIO avec qui nous avons passé des moments agréables et inoubliables. Je ne saurais oublier mon ami SOME Pascal, le gestionnaire du projet CIUF-CUD pour toute sa disponibilité à mon égard

Bien sûr, ma profonde gratitude va à mes parents et ma famille dont le soutien m'a été indispensable. Je remercie en particulier Noubara, Nguéyam, Ngombaye, Ndolnibé et Kladoumadje qui m'ont beaucoup soutenu ces dernières années. Que chacun trouve en ce travail l'aboutissement de son sentiment désiré.

Qu'il me soit permis d'exprimer toute ma reconnaissance à Madyara pour sa fraternité et son amitié à mon endroit. Qu'il trouve aussi en ce travail le fruit de ses efforts.

Le soutien financier de la coopération belge CIUF-CUD Activités mathématiques de l'Université de Ouagadougou a été indispensable pour la réalisation de ce travail. Je remercie très vivement les responsables de ce projet, les Professeurs, J.TEGHEM de la Faculté Polytechnique de Mons et B.SOME de l'Université de Ouagadougou.

Table des matières

I	Introduction	6
II	Méthode d'Adomian : Description	11
1	DESCRIPTION GENERALE DE LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN.	12
1.1	Introduction	12
1.2	Fondement Mathématique de la Théorie Décompositionnelle.	13
1.2.1	Notion de Série Décompositionnelle [26].	13
1.2.2	Notion Générale d'une Méthode Décompositionnelle [26].	14
1.2.3	Schéma Décompositionnel de Base	15
1.3	Présentation Générale de la Méthode d'Adomian [18].	16
1.3.1	Justifications des polynômes d'Adomian.	18
1.4	Remarque	20
1.4.1	Quelques Formules Pratiques des Polynômes d'Adomian.	21
1.5	Résultats Généraux de Convergence.	22
1.5.1	Convergence utilisant l'analyse combinatoire [1] [18].	23
1.5.2	Convergence utilisant le théorème du point fixe[21].	28
1.6	Convergence dans un cas plus général des EDP.	30
1.7	Conclusion	35

III	Equations aux dérivées partielles	36
2	GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET DES MODELES DE DIFFUSION	37
2.1	Introduction	37
2.2	Définitions générales	38
2.3	Classification d'EDP d'ordre 2	38
2.3.1	Equations à plusieurs variables	38
2.3.2	Equations à deux variables	40
2.4	Cadre Fonctionnel	42
2.5	Rappel sur des problèmes de diffusion linéaire.	42
2.5.1	Principe du maximum	44
2.6	Cas des problèmes de diffusion non linéaires.	48
2.6.1	Existence et unicité de la solution de l'équation : $u_t = u_{xx} -$ $N(x, t, u, u_x)$	48
2.7	Quelques modèles des phénomènes de diffusion	51
2.7.1	La diffusion	51
2.7.2	Equation de diffusion-réaction.	52
2.7.3	Exemples des modèles de diffusion-réaction dans les sciences du vivant.	53
2.8	Conclusion	56
3	RESOLUTION DES PROBLEMES DE DIFFUSION PAR LA METHODE D'ADOMIAN	57
3.1	PREALABLE	57
3.2	Cadre fonctionnel	58
3.3	Schéma numérique d'Adomian de résolution	59
3.4	Etude théorique de la convergence de l'algorithme d'Adomian.	62

3.5	Quelques exemples d'application	66
3.6	Résolution numérique de problème de diffusion- réaction avec conditions initiales ou aux limites.	67
3.7	PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES DANS LA FORME CANONIQUE.	69
3.7.1	Résultats existants[43][55]	69
3.8	Nouvelle technique pour l'obtention d'une bonne forme canonique des EDP[44]. .	75
3.9	Applications	80
3.9.1	Résolution d'un problème de diffusion réaction avec conditions aux bords portant sur le flux.	80
3.10	Application à la résolution de la diffusion d'une souche de bactéries dans l'eau. 85	
3.10.1	CHOIX DE $\phi(x, t)$. (ou choix de u_0) [44]	88
3.11	Diffusion à croissance logistique(Modèle de Fisher)	99
4	PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL APPLIQUE AU MODELE DE DIFFUSION DE MEDICAMENTS DANS LE CERVEAU	103
4.1	La méthode Alienor	104
4.2	Courbes α -denses[9][18]	107
4.3	Transformation Alienor Modifiée.	108
4.4	Méthode d'optimisation globale DIVANU	109
4.5	Application à l'identification de paramètres[18].	111
4.6	Exemple d'application.	112
4.7	Contrôle optimal	114
4.8	Couple Alienor-Adomian.	116
4.9	Application au modèle de diffusion de substances dans le cerveau.	118
IV	Equations intégrales	123
5	ETUDE GENERALE D'EQUATIONS INTEGRALES	124

5.1	Introduction	124
5.2	Classification des équations intégrales[51]	125
5.3	Quelques définitions	127
5.4	Etude théorique d'équations intégrales	128
5.5	Résultats d'existence et d'unicité de solution d'équations intégrales de première espèce.	129
5.6	Résultats d'existence et d'unicité de solution d'équations intégrales de deuxième espèce.	130
5.7	Quelques méthodes numériques de résolution d'équations intégrales	131
5.7.1	Résolution à l'aide des méthodes d'optimisation	131
5.7.2	La méthode de collocation	132
5.7.3	Méthode de Liouville-Neumann.	133
5.8	Résolution des équations intégrales de deuxième espèce par la méthode d'Adomian	136
5.9	Conclusion	141
6	ETUDE DES EQUATIONS INTEGRALES DE PREMIERE ESPECE PAR LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE.	142
6.1	Résultats déjà obtenus.	143
6.1.1	Equation de type Fredholm	144
6.1.2	Equation de type Volterra	148
6.2	Nouveaux résultats[45].	153
6.2.1	Recherche de la forme canonique dans le cas linéaire	154
6.2.2	Cas non Linéaire	158
6.3	Décomposition Asymptotique	163
6.4	Transformation d'Equations de Type Fredholm en Equations de Type Volterra[45].	168

6.4.1	Formes canoniques :	170
6.5	Applications Biologiques	172
6.5.1	Phénomènes de "CAUSE A EFFET" [18]	172
6.6	Conclusion	175
7	Conclusion générale	176

Première partie

Introduction

INTRODUCTION GENERALE

Les mathématiques ont toujours été présentes dans les autres disciplines scientifiques. Les modèles mathématiques étaient surtout utilisés pour la description des processus de nature purement physique. Mais aujourd'hui, les mathématiques ont encore gagné plus du terrain. Elles sont devenues un outil efficace et indispensable pour le développement des sciences de la vie et de la terre.

Le monde réel est caractérisé par une diversité et une complexité. Cela se constate à travers la description des phénomènes physiques ou biologiques. Par exemple, le corps humain peut être comparé à une société de cellules qui communiquent entre elles par les hormones, les nerfs et le système immunitaire.

Le seul langage capable de regrouper à la fois tous les aspects essentiels d'un système complexe (composantes, interactions, modulations, mécanismes de contrôle...) semble être le langage mathématique à travers la modélisation. Celle-ci est un compromis entre une réalité physique et l'aptitude des mathématiciens à résoudre les équations qui en résultent. A ce niveau, il faut éviter l'utilisation abusive de mathématiques ésotériques qui privilégient l'aspect mathématique au détriment de la réalité physique. Ainsi, dans le domaine de la biomathématique qui nous intéresse, les mathématiques doivent servir d'instruments et la biologie doit être la finalité (le modèle doit être validé par le biologiste).

Pendant longtemps, les formulations mathématiques privilégiées sont linéaires pour des raisons pratiques : les outils mathématiques les plus puissants sont conçus pour l'analyse linéaire. Mais l'inconvénient majeur réside dans leur incapacité à prendre en compte certaines propriétés non linéaires essentielles et inhérentes aux phénomènes naturels.

Pour résoudre les équations non linéaires qui gouvernent la plupart des phénomènes physiques réels, on a recours aux méthodes numériques. Les méthodes numériques les plus anciennes et les plus usuelles sont des méthodes de discrétisation et de linéarisation.

Dans notre travail, nous adopterons la méthode d'**Adomian** qui permet d'obtenir des solutions plus réalistes des modèles. Elle évite la discrétisation et la linéarisation. Elle satisfait

ainsi à l'un des objectifs fondamentaux de la physique qui consiste à ne pas détruire la nature des phénomènes modélisés en les linéarisant ou en les discrétisant.

L'idée originelle de la méthode décompositionnelle est due à **Georges ADOMIAN**, physicien américain [5] [6] [7]. Mais c'est sous l'impulsion du professeur **Y.Cherruault**, directeur du laboratoire **Medimat** que les bases théoriques et pratiques de la méthode ont été initiées et développées. N'eût été donc les apports fondamentaux de **Y.Cherruault** et de ses élèves **K.Abbaoui, S.Guellal, B.Some, V.Seng, M.Ndour, L.Gabet...**[1][2][21][43][53][55][26][27]... la méthode serait restée à l'état d'ébauche.

La méthode est basée sur la recherche de la solution d'une équation fonctionnelle du type $u = G(u)$ sous la forme d'une série et sur la décomposition en séries de l'opérateur non linéaire. C'est surtout ce dernier aspect qui singularise la méthode d'**Adomian** comparativement aux autres méthodes décompositionnelles [1][26][33].

La méthode d'**Adomian** permet d'approcher des équations non linéaires par des solutions analytiques. Dans certains cas linéaires, on obtient des algorithmes qui convergent en général très vite vers la solution exacte. Elle permet aussi d'éviter des calculs lourds qui apparaissent dans l'emploi des méthodes classiques de discrétisation (généralement) utilisées pour résoudre des équations différentielles. Dans le cas des modèles biologiques complexes, tous les paramètres intervenant dans la formulation du modèle peuvent apparaître explicitement dans la solution calculée.

La méthode a été utilisée (empiriquement) par le physicien **Georges ADOMIAN** et quelques-uns de ses collègues américains pour la résolution de différents types d'équations fonctionnelles. Mais des bases théoriques importantes n'étaient pas développées au départ. De plus, les conditions aux limites considérées dans les équations différentielles sont toujours choisies simples et faciles à prendre en compte dans les équations à résoudre.

De nos jours, l'application de la méthode d'**Adomian** aux équations algébriques, intégrales et différentielles, constituent des problèmes moins ardues. Cependant le champ reste peu exploré dans certains domaines. Les problèmes suivants demeurent ouverts[18] :

- Démontrer la convergence de la méthode sous des hypothèses plus faciles à vérifier dans la pratique.

- Adapter la méthode décompositionnelle pour qu'elle puisse résoudre tous les types d'équations aux dérivées partielles. A ce niveau, une difficulté majeure subsiste pour l'**obtention d'une forme canonique prenant en compte les conditions initiales et/ou aux limites**

- Comment résoudre des équations intégrales de première espèce qui ne sont pas sous la **forme canonique**, et, surtout, celles dont le **noyau présente des singularités**.

Dans ce travail, notre contribution à la méthode décompositionnelle est une des réponses possibles aux problèmes ouverts ci-dessus énumérés.

Ce travail est composé de trois parties :

La première partie concerne la présentation de la méthode d'**Adomian**, la deuxième partie traite des problèmes de diffusion et la troisième partie est consacrée aux équations intégrales.

Nous nous bornerons dans la première partie à rappeler les principes de base de la méthode décompositionnelle d'**Adomian** et à en donner des bases théoriques déjà établies.

La deuxième partie traitera des problèmes de diffusion qui appartiennent à la classe des équations aux dérivées partielles paraboliques. Cette partie se décompose en trois chapitres. Au premier chapitre, nous rappelons une généralité sur les équations aux dérivées partielles et nous présentons quelques modèles de diffusion avec leur importance dans la pratique. Ensuite au chapitre deux, nous rentrerons dans le vif du sujet en les résolvant numériquement par la méthode d'**Adomian**. Notre apport personnel sera à deux niveaux. D'une part, nous donnerons une **condition suffisante de convergence de la méthode d'Adomian appliquée aux équations de diffusion-réaction** les plus couramment rencontrées dans la modélisation des phénomènes biologiques. D'autre part, **nous donnerons une nouvelle technique qui permet d'intégrer dans la forme canonique des conditions aux limites de certains types d'équations de diffusion**. Cette technique est simple et permet de résoudre des problèmes non résolubles par le schéma classique de la méthode d'**Adomian**. Enfin le troisième chapitre aborde un problème de contrôle optimal. Nous faisons ressortir l'avantage de l'utilisation de la méthode d'**Adomian** pour passer d'un problème de contrôle optimal à un problème

d'optimisation classique facile à résoudre. Cette partie ouvre des perspectives pour nos travaux futurs.

Enfin, la troisième partie portera sur l'étude des **équations intégrales**. Notre attention portera particulièrement sur les **équations intégrales de première espèce**. Cette partie comportera deux chapitres. Au premier chapitre, nous rappellerons des généralités sur les équations intégrales avec quelques exemples de méthodes numériques de résolution. Le chapitre deux comporte l'**essentiel du travail** avec un certain nombre de résultats originaux qui constituent notre apport. Il s'agira ici de résoudre des équations intégrales de première espèce qui ne sont pas sous la forme canonique par la méthode d'Adomian. Cela nécessitera au préalable la recherche des formes canoniques. Nous présenterons d'abord des résultats déjà obtenus [55] avant d'aboutir à nos propres résultats. Nous utiliserons des techniques appropriées pour ramener des **équations de première espèce à des équations de deuxième espèce** qui seront des formes canoniques recherchées.

Notre apport scientifique global dans ce travail a été déjà l'objet des publications suivantes :

- **N.Ngarhasta, B.Some, K.Abbaoui and Y.Cherruault** : New numerical study of Adomian method applied to a diffusion mode. *Kybernetes*, vol 31 N°1, pp 61-75(2002).

- **N.Ngarhasta et B.Some** : Quelques nouvelles formes canoniques d'Adomian applicables aux équations intégrales de 1ere especes. *Afrika Matematika*, série 3 volume 13, pp 53-73 (2002).

Une publication acceptée pour parution en 2003 :

- **N.Ngarhasta, B.Some**. Solving integral equations of first kind by Adomian method. *Far East Journal of Mathematical Sciences(FJMS)*. To be published in 2003.

Deuxième partie

Méthode d'Adomian : Description

Chapitre 1

DESCRIPTION GENERALE DE LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN.

1.1 Introduction

La première partie de ce document est consacrée à un exposé détaillé sur la méthode décompositionnelle d'**Adomian**. Nous tenterons de la présenter d'une manière assez complète en faisant un tour d'horizon depuis le début de l'art jusqu'au stade actuel de la recherche. Dans un premier temps, nous décrivons d'une manière générale les méthodes décompositionnelles et celle d'**Adomian**. Celle-ci sera présentée sous sa forme originelle telle que l'auteur en avait l'habitude[5][6][18]. Puis nous finirons par des bases théoriques déjà établies [1][2][3][4][27][30][33] sur lesquelles nous nous référons. Ici, il s'agit de donner des justifications de l'existence des polynômes d'**Adomian**, de nouvelles formules plus pratiques pour la mise en oeuvre informatique. Ensuite, nous donnerons des résultats théoriques de convergence . Les résultats de convergence sont établis soit par le **théorème du point fixe**[18], soit en ayant recours à

l'analyse combinatoire[1].

1.2 Fondement Mathématique de la Théorie Décompositionnelle.

Dans ce paragraphe nous allons donner une série de définitions qui permettront de mieux comprendre l'origine supposée de la méthode décompositionnelle.

Considérons d'une manière générale une équation fonctionnelle de type

$$u = Gu$$

dans un espace de **Banach** E , u la fonction inconnue à déterminer.

1.2.1 Notion de Série Décompositionnelle [26].

Définition 1 Série décompositionnelle

On appelle série décompositionnelle toute série de fonctions $\sum_k C_k$ où chaque C_k est une fonction des $(k + 1)$ variables de $E : X_0, \dots, X_k$ à valeurs dans E .

Définition 2 Convergence faible des séries décompositionnelles

Une série décompositionnelle $\sum_k C_k$ est dite faiblement convergente si pour toute série convergente $\sum_n u_n$ d'éléments de E , la série $\sum_k C_k(u_0, \dots, u_k)$ d'éléments de E converge.

Définition 3 Somme d'une série décompositionnelle convergente

La somme S d'une série décompositionnelle convergente est une application de l'ensemble des séries convergentes d'éléments de E dans $E : S \left(\sum_n u_n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(u_0, \dots, u_k)$

Définition 4 Convergence forte des séries décompositionnelles

On appelle série décompositionnelle fortement convergente toute série décompositionnelle faiblement convergente dont la valeur de la somme ne dépend que de la somme de la série considérée, c'est à dire :

qui permet de construire une série $\sum_n u_n$ d'éléments de E .

Justification :

On peut construire une telle série parce que chaque C_n ne dépend que de u_0, \dots, u_n et pas des termes suivants. ■

Définition 6 Méthode décompositionnelle

On appelle méthode décompositionnelle la méthode consistant à construire la solution d'une équation à l'aide d'un schéma décompositionnel.

1.2.3 Schéma Décompositionnel de Base

Soit de nouveau à résoudre une équation fonctionnelle $u = Gu$ dans un espace de **Banach** E .

Définition 7 Série décompositionnelle de base

On appelle série décompositionnelle de base associée à l'opérateur G , la série $\sum_n B_n$ dont les termes sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = G(X_0) \\ B_n = G\left(\sum_{i=0}^n X_i\right) - G\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right) \end{array} \right.$$

Justification :

Les B_n sont bien à valeurs dans E et fonction de $n + 1$ variables. ■

Théorème 2 Convergence de la série décompositionnelle de base

La série décompositionnelle de base $\sum_k B_k$ associée à l'opérateur G est une série décompositionnelle fortement convergente de somme dégénérée G .

Justification

Il est facile de vérifier que si $\sum_n u_n$ converge alors la série $\sum_n B_n(u_0, \dots, u_n)$ converge vers $G(\sum_n^{+\infty} u_n)$ qui ne dépend que de la somme de la série. ■

Définition 8 Série décompositionnelle de base associé à un opérateur linéaire :

La série décompositionnelle de base $\sum_n B_n$ associé à l'opérateur linéaire L , est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = L(X_0) \\ \\ B_n = L(X_n) \end{array} \right.$$

Dans ce paragraphe, nous avons mis en évidence le concept mathématique de la série décompositionnelle d'une manière générale. **Partant de ce concept, nous pouvons expliquer la méthode décompositionnelle d'Adomian** par sa description :

1.3 Présentation Générale de la Méthode d'Adomian [18].

Considérons l'équation fonctionnelle générale

$$F(u(t)) = g(t) \tag{1.1}$$

où F est un opérateur non linéaire quelconque d'un espace de **Banach** E dans E possédant des termes linéaires et non linéaires, g une fonction donnée dans E et u la fonction inconnue.

Le terme linéaire est décomposé en $L + R$ avec L "facilement inversible" et R le reste de l'opérateur linéaire.

L'équation (1.1) devient :

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{1.2}$$

où N représente le terme non linéaire. L étant "inversible", on a l'expression équivalente à (1.2) suivant :

$$u = \theta + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (1.3)$$

avec θ une fonction vérifiant $L\theta = 0$, et L^{-1} "l'inverse" de L .

La méthode d'**Adomian** consiste à chercher la solution (quand elle existe!) u de (1.1) sous la forme d'une série

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad (1.4)$$

et à décomposer le terme non linéaire Nu en série

$$Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (1.5)$$

où les A_n sont des polynômes spéciaux appelés "polynômes d'**Adomian**" qui dépendent exclusivement de u_0, u_1, \dots, u_n , et sont obtenus à partir des relations suivantes [5][6][7][1][18] :

$$z = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i, \quad N(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i A_i \quad (1.6)$$

où λ est un paramètre introduit par "convenance." Ces relations consistent à substituer la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i$ dans la série $N(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i$.

Les propriétés des séries substituées permettent de justifier le

Théorème 3

Les A_n ne dépendent que de u_0, u_1, \dots, u_n et sont donnés par les formules

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Ce résultat n'est que formel et les convergences des séries $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} A_i$ demeurent non justifiées. En reportant les expressions (1.4) et (1.5) dans (1.3)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \quad (1.8)$$

En supposant les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ convergentes, on obtient par identification les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \theta + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{array} \right. \quad (1.9)$$

dit algorithme d'**Adomian**.

1.3.1 Justifications des polynômes d'Adomian.

Considérons l'équation $u = Gu$ et supposons que l'opérateur G soit analytique.

Théorème 4 [27][26] : *Etant donné, un opérateur G analytique et une série convergente*

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'éléments de E , on peut définir les polynômes d'Adomian par :

$$A_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} G \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad (1.10)$$

On note $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on définit $u^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n$.

Cette série entière converge pour $\lambda = 1$. Or la somme d'une série entière de rayon de convergence ρ est analytique sur $DO(0, \rho)$, disque ouvert de centre O et de rayon ρ , donc u^+ est analytique sur $DO(0, \rho)$. Comme G est aussi analytique, par composition[17], $G \circ u^+$ est analytique sur $DO(0, \rho)$ c'est à dire qu'il existe des A_k tels que

$$G \circ u^+ = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \lambda^k$$

qui vérifient

$$A_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} G \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}$$

Dans la pratique, le calcul des polynômes d'**Adomian** utilisant l'expression (1.10) est un peu délicat. Mais on peut remarquer qu'en posant

$$N = G \circ u$$

on retrouve la formule de **Mc Laurin**

$$A_k = \frac{N^{(k)}(0)}{k!}$$

Et on a le théorème suivant :

Théorème 5 [27]

Si N est analytique, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(u - u_0)^n}{n!} \right] N^{(n)}(u_0)$$

1.4 Remarque

1) Les A_n données par (1.7) ne dépendent que de u_0, \dots, u_n et peuvent ainsi être écrits simplement :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad (1.11)$$

2) En pratique, il sera des fois difficile (sinon impossible) de calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On se contentera dans ce cas d'une solution approchée sous la forme de série tronquée

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i \quad (1.12)$$

où

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n \quad (1.13)$$

3) En posant

$$f = \theta + L^{-1}g \text{ et } G = -L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (1.14)$$

alors la relation (1.3) est équivalente à

$$u = f + Gu \quad (1.15)$$

L'équation (1.15) est dite **forme canonique d'Adomian**. Cette notion a été introduite par **Y.Cherruault**[18]. En utilisant cette forme canonique, le schéma d'**Adomian** sera donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = f \\ u_1 = A_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+1} = A_n \end{array} \right. \quad (1.16)$$

1.4.1 Quelques Formules Pratiques des Polynômes d'Adomian.

Dans ce paragraphe, nous donnerons des formules équivalentes des polynômes d'**Adomian** relativement faciles pour la mise en oeuvre informatique. L'établissement de ces formules fait essentiellement appel à la notion de la **théorie des nombres** [1][3][18][27].

Si N est une fonction scalaire on a le

Théorème 6 [1]

$$(n+1)!A_n = \frac{d^n}{du^n} [N^{[n+1]}(u)]_{u=u_0}$$

Y.Cherruault et **K.Abbaoui**[1][18][2][3][4] ont montré les théorèmes suivants :

Théorème 7

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(u_0) = f \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ A_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \end{array} \right.$$

où $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ est une suite décroissante.

Théorème 8

$$A_n = \sum_{p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = n} N^{(p_1 + \dots + p_n)}(u_0) \frac{u_1^{p_1} \dots u_n^{p_n}}{p_1! \dots p_n!}$$

Théorème 9

$$A_n = \sum_{p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = n} \frac{1}{p_1! \dots p_n!} N^{(p_1 + \dots + p_n)}(u_0) (u_{1[p_1]}, \dots, u_{n[p_n]})$$

où

$$u_{i[p_k]} = \underbrace{(u_i, \dots, u_i)}_{p_k \text{ fois}}$$

1.5 Résultats Généraux de Convergence.

Si on considère l'équation fonctionnelle générale

$$u = N(u) + f$$

dans un espace convenablement choisi, on peut établir des résultats de convergence en faisant des hypothèses sur N .

1.5.1 Convergence utilisant l'analyse combinatoire [1] [18].

Théorème 10

Si

$$\left\| N^{(n)}(u_0) \right\| \leq M < \frac{1}{e} \quad \forall n \geq 0$$

alors la série décompositionnelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente et on a de plus la majoration :

$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \leq M^{n+1} \exp(n+1)$$

Estimation de l'erreur de troncature

Nous avons signalé plus haut qu'en pratique, on se contentera d'une solution approchée sous forme de série tronquée

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$$

Dans ce cas, une estimation de l'erreur de troncature peut être donnée par le théorème suivant :

Théorème 11

Sous les hypothèses du théorème précédent, l'erreur de troncature est bornée par :

$$\|\epsilon_n\| = \|u - \phi_n\| \leq \frac{(M \exp(1))^n}{1 - \exp(1)}$$

On a :

$$\|\epsilon_n\| = \|u - \phi_n\| = \left\| \sum_{i=n}^{\infty} u_i \right\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|u_i\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} (M \exp(1))^i$$

$$\begin{aligned}
&= (M \exp(1))^n \sum_{n=0}^{\infty} (M \exp(1))^n \\
&= \frac{(M \exp(1))^n}{1 - M \exp(1)}
\end{aligned}$$

■

Ce résultat de convergence a été amélioré par **Himoun** [30] :

Théorème 12[30]

Si on suppose que N satisfait la condition suivante

$$\|N^{(n)}(u_0)\| \leq M\beta^n \quad , \beta > 0 \quad \forall n \geq 0$$

alors une condition suffisante de convergence de la méthode d'Admian est :

$$M\beta < \frac{1}{e}$$

Preuve :

indication [30] :

La preuve se fait en 2 étapes

1) 1^{ere} étape : **cas où N est une fonction scalaire :**

en utilisant

$$A_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} N^{\alpha_1}(u_0) \dots N^{\alpha_n}(u_0)$$

On montre que

$$|A_n| = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} M^{n+1} \beta^n = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \beta^n, n \geq 0$$

la formule de **Stirling**[13] permet de déduire la convergence de la série pour $M\beta e \leq 1$

2) 2^{eme} étape : cas où N est un opérateur

Dans ce cas il est suffisant de prouver par récurrence que :

$$\|A_n\| = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \beta^n, n \geq 0$$

Dans[53], on a donné le théorème suivant :

Théorème 13 [53]

Si N est analytique en u_0 avec un rayon R fini, la série

$$u_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \varphi^n$$

est majorée par $m'/(1+\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \times \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^n$ où $m' \geq m = \sup |u_n|$, $\varepsilon > m/R$

et $\rho \leq 1$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \lambda^n = N(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \cdot \lambda^n)$ admet un rayon de convergence $r \geq 1$. Donc

$u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ est solution de l'équation(1.15).

La démonstration de ce théorème utilise uniquement les propriétés des séries substituées. Ce théorème comporte de paramètres (complexes) difficiles à vérifier pratiquement. Ainsi **M.J.Pujol** a proposé des conditions de convergence plus simples à vérifier :

Théorème 14 [33]

Si la fonction N est analytique en u_0 pour $\|u - u_0\| < R$ et si $\|N^{(n)}(u_0)\| \leq n!M \cdot \alpha^n$ avec $M > 0$, $\alpha > 0$, alors une condition suffisante pour la convergence de la méthode est :

- a) $4M\alpha \leq 1$ si R est infini
- b) $5M\alpha \leq 1$ si R est fini

Preuve

Indications[33]

a) D'abord en posant

$$A_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(N^{[n+1]}(u_0) \right)^{(n)}$$

On montre que les polynômes d'**Adomian** vérifient

$$\|A_n\| \leq [(2n)!/((n+1)!n!)] \cdot M^{n+1} \alpha^n$$

La démonstration se fait en 2 étapes en supposant le cas où N est un scalaire et le cas où N est un opérateur. Ce dernier se démontre par récurrence.

- Si R est infini il suffit de prouver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < \infty$$

on a

$$\|A_n\| \leq [(2n)!/((n+1)!n!)] \cdot M^{n+1} \alpha^n$$

Mais

$$[(2n)!/((n+1)!n!)] M^{n+1} \alpha^n \sim (4^n M^{n+1} \alpha^n) / \sqrt{\pi} (n+1)^{\frac{3}{2}}, \quad (n \rightarrow \infty)$$

cela se montre par la formule de **STIRLING**[13]. Or

$$\sum_n (4^n M^{n+1} \alpha^n) / \sqrt{\pi} (n+1)^{\frac{3}{2}}$$

converge si et seulement si

$$4M\alpha < 1$$

- Si R est fini, on a :

$$\|A_n\| \leq [(2n)! / ((n+1)!n!)] \cdot M^{n+1} \alpha^n$$

$$\leq [(2n)!M / (4^n(n+1)!n!)] (4^n M^n \alpha^n)$$

$$\leq M(4M\alpha)^n$$

car

$$(2n)! / (4^n(n+1)!n!) < 1$$

On peut donc écrire $\|A_n\| \leq M \cdot (4M\alpha)^n = \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$ car $4M\alpha < 1$ avec

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{4M\alpha}\right) - 1 \geq \frac{M}{R-M}$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4M\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\alpha - M}\right) \geq 4M^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow (1 - 4M\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\alpha - M}\right) \geq 4M^2\alpha$$

En développant on a

$$(4M^2\alpha) - 5M + \frac{1}{\alpha} \geq 4M^2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \geq 5M$$

Par suite

$$5M\alpha \leq 1$$

On note que $\|A_n\| \leq \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$ est une condition suffisante de convergence de la série[30].

1.5.2 Convergence utilisant le théorème du point fixe[21].

Y.Cherruault[21] a été le premier à établir la convergence de la méthode d'**Adomian**. Il procède par le **théorème du point fixe** comme suit :

Soit une équation fonctionnelle générale :

$$y - N(y) = f \quad (1.17)$$

où $N : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire ou non, H un espace de **Hilbert** et f une fonction donnée dans H .

Puis on cherche une solution approchée de l'équation (1.17) sous la forme d'une série tronquée

$$u_n = \sum_{i=0}^n y_i \quad (1.18)$$

on peut donc écrire

$$N(u_n) = \sum_{i=0}^n A_i(y_0, y_1, \dots, y_i) \quad (1.19)$$

en reportant (1.18) et (1.19) dans (1.17) on a :

$$\sum_{i=0}^n y_i = \sum_{i=0}^n A_i(y_0, y_1, \dots, y_i) + f \quad (1.20)$$

on en déduit l'algorithme d'**Adomian**

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = f \\ y_1 = A_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n = A_{n+1} \end{array} \right. \quad (1.21)$$

On peut prouver[18] que la méthode décompositionnelle équivaut à trouver la suite

$$S_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n, S_0 = 0 \quad (1.22)$$

satisfaisant la relation récurrente

$$S_{n+1} = N(y_0 + S_n), S_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

En effet : d'après (1.20) et (1.21) on a :

$$y_1 = S_1 = N(y_0) = A_0$$

puis

$$S_2 = y_1 + y_2 = N(y_0 + y_1) = A_0 + A_1$$

Mais puisque $y_1 = A_0$, on déduit que $y_2 = A_1$ et de proche en proche, on retrouve ainsi toutes les relations définissant la méthode décompositionnelle.

On peut donc en déduire le résultat de convergence :

Théorème 15[18][21]

Supposons que l'opérateur N soit une contraction ($\|N\| < \delta < 1$) alors la suite S_n vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{cases} S_{n+1} = N(y_0 + S_n) & n \geq 0 \\ S_0 = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

converge vers S solution de

$$N(y_0 + S) = S \quad (1.24)$$

Preuve[21]

on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|N(y_0 + S_n) - N(y_0 + S)\| \\ &\leq \|N\| \cdot \|S_n - S\| < \delta \cdot \|S_n - S\| \end{aligned}$$

on en déduit que S_n converge vers S . Pour retrouver toutes les relations de la méthode d'**Adoman**, on doit poser en plus de la définition donnant S_n :

$$y_0 = f \quad (1.25)$$

■

1.6 Convergence dans un cas plus général des EDP.

Il s'agit ici de faire une extension de la méthode décompositionnelle et de montrer la convergence dans des circonstances plus générales. En partant de la technique principale proposée par **Sibony** et **Brezis** pour la résolution des équations variationnelles non linéaires[15][58], **Cherruault**[18].a montré la convergence de la méthode d'**Adomian** de la manière suivante :

Considérons un espace de **Hilbert** H et son dual H' . Désignons par $\|\cdot\|$ la norme dans H associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) . Soit à résoudre le problème

$$y - N(y) = f \quad (1.26)$$

où f est donnée dans H' . Sous les hypothèses suivantes[21][18][34][35] :

(H_1)

$$R(y) = N(y) - y \quad (1.27)$$

est hémicontinue (c'est à dire la restriction de l'opérateur $(N - I)$ est continue sur les segments de H relativement à la topologie faible de H').

(H_2) $R(y)$ satisfait l'inégalité suivante :

$$(Ru - Rv, u - v) \geq k \|u - v\|^2 \quad (1.28)$$

pour tout u et $v \in H, k > 0$

(H_3) quelque soit $M > 0$, il existe une constante $C(M) > 0$ telle que pour u et $v \in H$ avec

$$\|u\| \leq M, \|v\| \leq M \quad (1.29)$$

on a :

$$(Ru - Rv, w) \leq C(M) \|u - v\| \|w\| \quad (1.30)$$

pour tout $w \in H$

On a le résultat suivant :

Théorème 16[21]

1) pour tout $f \in H'$, il existe y appartenant à H tel que

$$y - N(y) = f \quad (1.31)$$

2) la suite (y_n) définie par :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - \rho(N(y_0 + y_n) - y_n) & \rho > 0, n \geq 0 \\ y_0 = f \end{cases} \quad (1.32)$$

est fortement convergente dans H et sa limite y est la solution de :

$$y = N(y_0 + y) \quad (1.33)$$

Une première conséquence de ce théorème est que $u = y_0 + y$ avec $y_0 = f$ est solution de

$$u = f + N(u) \quad (1.34)$$

Preuve[21][18]

1) **Indication** : cette partie a été démontrée par **H.Brezis** et **M.Sibony**[15].

2) pour justifier la convergence de la suite (y_n) on pose :

$$\varepsilon_{n+1} = y_{n+1} - y \quad (1.35)$$

où y est la solution de l'équation (1.33). On peut écrire :

$$\|\varepsilon_{n+1}\|^2 = \|y_n - \rho(N(y_0 + y_n) - y_n) - (y - \rho(N(y_0 + y) - y))\|^2$$

$$= \|\varepsilon_n\|^2 - 2\rho(R(y_n) - R(y), \varepsilon_n) + \rho^2(R(y_n) - R(y), R(y_n) - R(y))$$

où l'on a posé

$$R(y) = N(y_0 + y) - y \quad (1.36)$$

Si on choisit M_0 tel que $\|y\| \leq \frac{M_0}{2}$ (qui implique $\|y\| \leq M_0$) alors les hypothèses (H_2) , (H_3) et l'hypothèse de récurrence permettent d'écrire :

$$\|R(y_n) - R(y)\|^2 \leq V(M_0) \|R(y_n) - R(y)\| \|\varepsilon_n\| \quad (1.37)$$

soit encore

$$\|R(y_n) - R(y)\| \leq C(M_0) \|\varepsilon_n\| \quad (1.38)$$

et par conséquent :

$$\|\varepsilon_{n+1}\|^2 \leq (1 - 2\rho k + \rho^2 C^2) \|\varepsilon_n\|^2 - \theta \|\varepsilon_n\|^2 \quad (1.39)$$

Si l'on choisit $\rho > 0$ tel que $\theta < 1$, l'hypothèse de récurrence est satisfaite à l'étape $n + 1$. On en déduit alors que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers ∞ .

Ce qui démontre la convergence de la suite (y_n) .

On remarque que la relation (1.32) permet de calculer la solution (approchée) de façon récursive. En fait la limite de la suite (y_n) vérifie l'équation :

$$N(y_0 + y) = y \quad (1.40)$$

■

Lien avec la méthode décompositionnelle[18]

Si on pose $y_n = S_n$ dans la relation (1.32) on a :

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \rho(N(y_0 + S_n) - S_n) , S_0 = 0 \\ y_0 = f \end{cases} \quad (1.41)$$

En posant

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n \quad (1.42)$$

Lorsque n est grand, on montre que les z_i trouvés par cette méthode sont identiques à ceux donnés par la méthode décompositionnelle.

En effet lorsque n est grand on a :

$$(N(y_0 + S_n) - S_{n+1}) - (N(y_0 + S_n) - S_n) + (S_n + S_{n+1}) = 0 \quad (1.43)$$

En conséquence :

$$S_{n+1} - S_n = z_{n+1} \simeq N(y_0 + S_n) - N(y_0 + S_{n-1}) \quad (1.44)$$

puisque n suffisamment grand,

$$S_{n+1} \simeq N(y_0 + S_n), S_n \simeq N(y_0 + S_{n-1}) \quad (1.45)$$

Or d'après le théorème 15 précédent

$$S_{n+1} = N(y_0 + S_n) \quad (1.46)$$

cela implique que

$$N(y_0 + S_n) = \sum_{i=0}^n A_i \quad (1.47)$$

on en déduit que

$$S_{n+1} - S_n = z_{n+1} = A_0 + A_1 + \dots + A_n - A_1 - A_2 - \dots - A_{n-1} = A_n$$

1.7 Conclusion

A la lumière de la présentation générale de la méthode décompositionnelle d'**Adomian**, et surtout des concepts théoriques de base y afférant, nous pouvons conclure que cette méthode est bien fiable et elle peut être utilisée à raison pour la résolution des équations fonctionnelles.

A travers les différents théorèmes, les résultats de convergence sont établis sous des hypothèses faciles à vérifier. Des formules donnant des polynômes d'**Adomian** sont faciles pour la mise en oeuvre informatique.

Pour la suite, nous utiliserons la méthode d'**Adomian** pour la résolution des problèmes de diffusion de type équations aux dérivées partielles paraboliques et des équations intégrales. Nous donnerons aussi de nouveaux résultats permettant une amélioration de la méthode.

Troisième partie

Equations aux dérivées partielles

Chapitre 2

GENERALITES SUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ET DES MODELES DE DIFFUSION

2.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à quelques rappels sur les équations aux dérivées partielles (EDP). Notre attention portera particulièrement sur les EDP de type parabolique pour pouvoir atteindre notre objectif qui est l'étude des modèles de diffusion. Après avoir rappelé quelques définitions classiques des EDP, nous donnerons des solutions analytiques classiques des principaux problèmes de diffusion linéaire connus. Quant aux problèmes non linéaires, il n'existe pas de méthodes analytiques spécifiques pour leur résolution. Nous nous contenterons de donner des résultats de l'analyse fonctionnelle sur l'existence et l'unicité des solutions des équations de diffusion-réaction généralement rencontrées. On se propose de résoudre numériquement les EDP non linéaires par la méthode décompositionnelle en supposant les conditions d'existence et / ou d'unicité remplies.

2.2 Définitions générales

Définition 1

On appelle une équation aux dérivées partielles (EDP), toute relation du type

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

qui contient les variables indépendantes x, y , etc, la fonction inconnue u et ses dérivées partielles successives.

Définition 2

On appelle ordre d'une EDP le plus grand ordre des dérivées partielles "qui y apparaissent".

Définition 3

On dit qu'une EDP (2.1) est linéaire si la fonction f est linéaire en u et en toutes ses dérivées.

2.3 Classification d'EDP d'ordre 2

Les EDP d'ordre 2 sont les plus couramment rencontrées en mathématiques appliquées lors de la modélisation des phénomènes physiques [24].

2.3.1 Equations à plusieurs variables

Sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$, une EDP d'ordre 2 à plusieurs variables est de la forme

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (2.2)$$

où $a_{ij} = a_{ji}$ et a, b, c, f sont des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n .

Notation :

$$u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

Classification

l'EDP(2.2) peut être classée en trois grands types suivant les formes :

(i) Si l'EDP(2.2) peut se mettre sous la forme

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} + \Phi = 0 \quad (2.3)$$

alors elle est dite de type **elliptique** :

(ii) Si l'EDP(2.2) peut se mettre sous la forme

$$u_{x_1 x_1} = \sum_{i=2}^n u_{x_i x_i} + \Phi \quad (2.4)$$

alors elle est dite de type **hyperbolique** :

(iii) Si l'EDP(2.2) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^m u_{x_i x_i} = \sum_{i=m+1}^n u_{x_i x_i} + \Phi \quad (2.5)$$

alors elle est dite de type **ultrahyperbolique** :

Si l'EDP(2.2) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_i x_i}) + \Phi = 0 \quad (m > 0) \quad (2.6)$$

alors elle est dite de type **parabolique**.

Ces différentes formes qui permettent d'établir la classification sont obtenues à partir de (2.2) en effectuant des changements de variables. On pourra consulter[61].

2.3.2 Equations à deux variables

Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, une EDP d'ordre 2 à 2 variables indépendentes est de la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f(u) = 0 \quad (2.7)$$

avec a, b, c, d, e, f des fonctions continûment dérivables de x et y .

Les propriétés de ces solutions dépendent fortement de la grandeur relative des coefficients a, b, c .

Classification

Par définition l'EDP(2.7) est :

(1) **hyperbolique** si

$$ac - b^2 < 0$$

Exemple 1 : équation d'ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(2) **parabolique** si

$$ac - b^2 = 0$$

Exemple 2 : équation de la chaleur

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

(3) **elliptique** si

$$ac - b^2 > 0$$

Exemple 3 : équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Nous notons qu'en pratique, les deux variables indépendantes seront la variable spatiale et la variable temporelle. Cela se justifie par le fait que les phénomènes de la nature évoluent suivant l'espace et le temps. Ces équations sont étudiées sur des ensembles donnés.

2.4 Cadre Fonctionnel

Si n est le nombre de variables indépendantes dans une EDP, on considère cette équation sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ (espace euclidien). Mais selon la nature de certains problèmes, il est plus convenable de travailler dans des espaces plus généraux (réguliers) tels que les espaces de **Hilbert** [14].

Pour des précisions mathématiques, il est nécessaire de doter ces espaces des topologies adéquates afin d'établir (s'il est nécessaire), l'existence et l'unicité des solutions recherchées.

En pratique, pour obtenir de façon unique la solution d'une EDP, on lui ajoute des contraintes liées à la nature physique des phénomènes à étudier. Dans notre travail où nous nous intéressons aux phénomènes de diffusion évoluant dans le temps et l'espace, ces contraintes seront sous formes des conditions initiales liées à la variable temporelle et des conditions aux bords liées aux variables spatiales.

Les deux types de **conditions aux limites** les plus usuelles sont :

- Condition de type **Diriclet** : on impose des valeurs particulières sur la fonction inconnue.
- Condition de type **Neuman** : on fixe des valeurs sur le flux de la fonction inconnue.

Quand le domaine est non borné, on a des fois recours à des conditions de régularités [14] [59] pour établir l'existence et l'unicité des solutions.

Nous allons à présent rappeler quelques résultats théoriques sur des problèmes de diffusion. Ces résultats seront basés essentiellement sur l'équation de la chaleur qui est un exemple fondamental des phénomènes de diffusion. Les autres cas en seront des généralisations.

2.5 Rappel sur des problèmes de diffusion linéaire.

Les problèmes de diffusion linéaire sont régis par des EDP linéaires de type parabolique. Des méthodes analytiques classiques (méthode de **Laplace** ou de **Fourier**) sont bien adaptées pour leur résolution. Il existe suffisamment d'outils de l'analyse fonctionnelle pour leur étude.

Nous allons à présent donner quelques résultats sur l'équation de la chaleur que l'on peut étendre aux différents modèles régis par des équations de diffusion de types paraboliques simples.

Lemme 1

Soient

$$D = \{(x, t)/t \in [0, T] \text{ et } x \in [a, b]\}$$

$$A_1 = \{(x, 0)/x \in [a, b]\}$$

$$A_2 = \{(a, t)/t \in [0, T]\}$$

$$A_3 = \{(b, t)/t \in [0, T]\}$$

$$\Gamma = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

Si $u(x, t) \geq 0$ sur Γ , alors $u(x, t) \geq 0$ sur D

Ce lemme implique la positivité des solutions de diffusion. Nous allons l'utiliser pour le principe du maximum qui va suivre.

2.5.1 Principe du maximum

On considère le modèle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \text{ et } 0 < t < T \quad (2.8)$$

1) Si $u_1 \leq u_2$ sur Γ (u_1 et u_2 sont des solutions de (2.8) sur D), alors $u_1 \leq u_2$ sur D

2) Les extrémums d'une solution u sont atteints sur Γ :

si

$$m \leq u(x, t) \leq M \text{ sur } \Gamma$$

alors

$$m \leq u(x, t) \leq M \text{ sur } D$$

3) Si u n'est pas constante sur Γ alors

$$m < u(x, t) < M \text{ sur } D$$

Les extrémums sont seulement atteints sur Γ .

Le principe du maximum est employé pour établir l'unicité de certains problèmes. Nous allons le montrer sur un exemple :

Considérons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où

$$u = u(x, t), (x, t) \in [a, b] \times [0, T]$$

Supposons de plus

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \Phi(x) \\ u(a, t) = f(t) \\ u(b, t) = g(t) \end{array} \right.$$

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de ce problème, leur différence est nulle sur Γ , elle est aussi nulle sur $D = [a, b] \times [0, T]$ et $u_1 = u_2$.

A présent nous donnons sous forme de théorèmes des solutions de quelques types d'équations de la chaleur que l'on rencontre couramment. Il s'agit des EDP linéaires résolubles analytiquement par des méthodes exactes (la méthode de **Laplace** ou la méthode de **Fourier**).

Théorème 1

La solution de l'équation de diffusion

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \Phi(x) \quad \text{avec } \Phi(x) \in L^1(R) \end{array} \right. \quad (2.9)$$

est :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-w)^2}{4\alpha t}\right) \Phi(w)dw$$

Théorème 2

La solution du problème de diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x) & a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \Phi(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

est :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \int_a^b \exp\left(\frac{-(x-w)^2}{4\alpha t}\right) \Phi(w)dw + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-(x-w)^2}{4\alpha t}\right) f(w, t-s)dw$$

Théorème 3

La solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0 \text{ et } t > 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

est

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left[\frac{-(x-w)^2}{4\alpha t}\right] - \exp\left[\frac{-(x-w)^2}{4\alpha s}\right] \right] \phi(w)dw$$

Définition 4

On dit que la fonction Φ est une fonction à croissance exponentielle sur \mathbb{R}^n s'il existe deux nombres a et b tels que :

$$\|\varphi\| \leq a \exp(bt), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

D'après cette définition

$$\Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 4

La solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x > 0 \quad \text{et} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \phi(t) \end{cases}$$

où ϕ est à croissance exponentielle est

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^t s^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(-x)^2}{4\alpha s}\right) \phi(t-s) ds \quad (2.12)$$

Toutes les démonstrations de ces théorèmes 1, 2, 3, 4 sont basées sur les transformations

intégrales classiques de **Laplace** ou de **Fourier**. Pour plus d'information, on pourra consulter les ouvrages [25][62][50][52].

2.6 Cas des problèmes de diffusion non linéaires.

Comme nous l'avons dit plus haut, les EDP non linéaires sont difficiles à résoudre. Il n'existe pas de méthodes de résolution analytique spécifique. Seules les méthodes numériques permettent d'obtenir des solutions approchées avec certaines précisions. Dans ce paragraphe, nous nous contenterons juste de donner des résultats théoriques généralement utilisés pour prouver l'existence et/ou l'unicité de solution des EDP non linéaires.

En général, il est facile d'établir l'unicité de la solution d'une EDP donnée. Pour établir l'existence (pas toujours évidente), on procède souvent de trois façons :

- (i) Soit on impose des conditions sur la partie non linéaire de l'équation [14][59].
- (ii) Soit on utilise le théorème du point fixe [18].
- (iii) Soit on utilise la théorie variationnelle [15][58].

2.6.1 Existence et unicité de la solution de l'équation : $u_t = u_{xx} - N(x, t, u, u_x)$

Dans ce paragraphe, on se limitera à donner des conditions d'existence et d'unicité de solutions sur un domaine rectangulaire. Les résultats restent valables pour les espaces semi-infinis :

$$\{(x, t), x \geq 0, t \geq 0\} \tag{2.13}$$

Soit le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t u & = L_{xx} u - N(x, t, u, u_x) \\ u(0, t) & = f(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ u(1, t) & = g(t) \quad 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) & = h(x) \quad -\infty < x < +\infty \end{array} \right. \quad (2.14)$$

où

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ et } L_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pour établir l'existence et l'unicité de ce type de problèmes (2.14), on fait des hypothèses sur l'opérateur N :

(H₁) La fonction N est définie et continue sur :

$$S = \{(x, t, u, p) / (x, t) \in D = D_T \cup B_T \text{ avec } u, p \text{ bornées}\}$$

où $D_T = \overset{\circ}{D}$ est l'intérieur de D et $B_T = \partial D$ est la frontière de D paramétrée par $T > 0$.

(H₂) Pour chaque $C > 0$ et pour chaque $|u|, |p| < C$, la fonction $N(x, t, u, p)$ est uniformément continue au sens de **Hölder** en x et en t sur chaque compact de D .

(H₃) Il existe une constante C_N telle que :

$$|N(x, t, u_1, p_1) - N(x, t, u_2, p_2)| \leq C_N \{|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|\}$$

(H₄) Si D_T n'est pas bornée, on peut ajouter une hypothèse sur N et dire que N est borné pour u et p . Avec u, u_t et u_{xx} continues sur D_T .

Lemme 2 : (existence)

On considère le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} L_t u &= L_{xx} u + N(x, t, u, u_x) & -\infty < x < +\infty & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) &= \phi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (2.15)$$

où $\phi \in D(\mathbb{R})$ et ϕ, ϕ' sont bornés.

Le problème (2.15) possède au moins une solution. On sait que la solution du problème (2.15) pour N nul (solution fondamentale de l'équation de la chaleur) est :

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

D'après le lemme de **Friedmann**[25]

$$(u(\zeta, \tau)K(x - \zeta, t - \tau))_\tau - (u_\zeta(\zeta, \tau)K(x - \zeta, t - \tau))_\zeta$$

$$+ (u(\zeta, \tau)K_\zeta(x - \zeta, t - \tau))_\zeta = N(\zeta, \tau, u(\zeta, \tau))K(x - \zeta, t - \tau)$$

où $()_\tau$ et $()_\zeta$ sont respectivement les dérivées en τ et ζ .

En intégrant l'identité sur $-\infty < \zeta < +\infty$ et $0 < \tau \leq t$, on obtient la représentation :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x - \zeta)\phi(\zeta)d\zeta + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - \zeta, t - \tau)N(\zeta, \tau, u(\zeta, \tau), u_\zeta(\zeta, \tau))d\zeta d\tau \quad (2.16)$$

On remarque que toutes les hypothèses (H_1) (H_2) (H_3) et (H_4) sont vérifiées. Ce qui permet de conclure que (2.16) est bien une solution du problème (2.15).

Lemme 3 : (unicité)

Le problème à valeur initiale (2.15) possède une solution unique si et seulement si l'équation intégral-différentielle (2.16) possède une solution unique telle que u et u_x continues et bornées pour $x \in]-\infty, +\infty[$ et $t \in]0, T]$

Pour la démonstration de ces 2 lemmes, se référer à [25]

2.7 Quelques modèles des phénomènes de diffusion

La modélisation de beaucoup de phénomènes physiques et en particulier biologiques aboutit à des équations de diffusion. En biologie, un grand nombre d'exemples est caractérisé par des bases physico-chimiques. Ces équations qui intègrent à la fois la dimension temporelle et la dimension spatiale, appartiennent à la classe des équations aux dérivées partielles de type parabolique dite évolutive.

Dans ce paragraphe, notre objectif n'est pas de faire une théorie de la modélisation des problèmes de diffusion. Nous allons donner quelques exemples rencontrés dans la vie pratique de ces problèmes, qui ont nécessité l'utilisation de la méthode d'**Adomian**.

Mais avant tout , nous voulons **définir le phénomène de diffusion** :

2.7.1 La diffusion

La diffusion est un phénomène par lequel un groupe de particules s'étend suivant un mouvement irrégulier. Autrement dit, lorsque le mouvement microscopique irrégulier de chaque particule débouche sur une régularité du mouvement du groupe total de particules (régularité macroscopique), le phénomène de diffusion survient. La diffusion résulte d'une dispersion aléatoire des particules.

On peut citer des exemples simples suivants :

- Osmose : la diffusion de l'eau à travers une membrane.
- Il peut y avoir diffusion s'il existe une différence de potentiel (ddp) entre 2 compartiments membranaires. Ici, la diffusion est fonction des gradients de concentrations mais aussi du gradient électrique. On parle alors de gradient électro-chimique.

Le modèle de diffusion le plus courant et usuel est l'**équation de la chaleur**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u \quad (2.17)$$

où α est le coefficient de diffusion et $\Delta(\cdot)$ désigne le laplacien.

En dimension 1 d'espace, par exemple le cas d'une barre métallique dont la température u ne dépend que de l'abscisse x et du temps t , on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.18)$$

Cette équation de la chaleur est le prototype des **équations paraboliques** qui caractérisent les **équations de diffusion** les plus couramment rencontrées.

L'expression de l'équation de la chaleur peut être établie par la loi de **Fick**[11][19].

2.7.2 Equation de diffusion-réaction.

L'équation(2.18) représente une **diffusion simple**. Mais dans la pratique, des mécanismes tels que la **convection**(lié au mouvement global du milieu dans lequel la diffusion se produit) ou la **réaction** (qui indique une formation ou une perte de substance diffusante) interviennent dans la formulation d'une équation de diffusion.

Ainsi, une équation générale de diffusion en dimension 1 d'espace sera -t-elle de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \quad (2.19)$$

Dans cette équation :

- $\frac{\partial u}{\partial t}$: représente le **stockage**

- $C \frac{\partial u}{\partial x}$: représente le terme de **convection**
- $\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: représente le terme de **diffusion**
- $F(u)$: représente le terme de la **réaction**

où C représente la vitesse du milieu dans lequel la diffusion se produit. C est aussi appelé la **célérité**.

Dans une diffusion moléculaire, le terme de la réaction exprime les relations intra et inter-espèces. Ces relations résultent des mouvements en général non aléatoires. Ce sont des mouvements qui obéissent à certaines lois et qui agissent sur la distribution spatiale des populations (attraction ou répulsion entre espèces, effet de l'environnement, etc)

L'équation (2.19) avec des conditions assez simples où l'EDP est linéaire, peut être résolue par des méthodes exactes classiques telles que la transformée de **Laplace** ou de **Fourier**. Mais il n'existe pas de méthodes générales pour résoudre le problème(2.19) lorsque $F(u)$ est une fonctionnelle non linéaire en u . Et plusieurs méthodes numériques peuvent être utilisées pour trouver des solutions approchées.

En réalité l'équation générale de la diffusion-réaction $u_t = \alpha \Delta u + F(u)$ peut être écrite en différentes coordonnées selon la nature physique des phénomènes à étudier[55].

2.7.3 Exemples des modèles de diffusion-réaction dans les sciences du vivant.

Contrairement au milieu physique, le milieu biologique se caractérise par une complexité dans sa structure physiologique et son activité chimique. Les paramètres décrivant le transport des molécules sont souvent très nombreux et les propriétés des milieux biologiques sont souvent malconnues[10][11][26][33].

Diffusion d'une souche de bactérie dans l'eau.

On suppose que les bactéries sont soumises à deux facteurs, l'un limitant sa croissance, l'autre stimulant sa prolifération. Ces deux facteurs seront exprimés par les taux de croissance et de mortalité des bactéries. Ainsi la propagation des bactéries peut être décrite par[43] :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \Delta c + (r - q)f(c) \quad (2.20)$$

où r est le taux de croissance des bactéries et q leur taux de mortalité.

Nous signalons que le diamètre des bactéries varie en général entre 0,2 et 1,5 μm . Les germes sont assujettis à un mouvement brownien du fait de la petitesse de leur rayon effectif qui est de l'ordre de μm (micro-mètre).

Le coefficient de diffusion des bactéries peut être déterminé par :

$$\alpha = \frac{RT}{6\pi\eta rN} \quad \text{où} \quad T \text{ est la température du milieu(eau)}$$

r est le rayon des bactéries

η est la viscosité de l'eau

R est la constante des gaz

N est le nombre d'Avogadro

La population de germes sera soumise à des facteurs biotiques ou abiotiques. Ceci est pris en compte dans la fonction cinétique f .

Les **facteurs abiotiques** sont : Les radiations solaires, la température, le PH, la salinité de l'eau et la présence de matière organique.

les **facteurs biotiques** sont : les propriétés intrinsèques des micro-organismes, comme leur faculté de résister à des conditions de famine, leur éventuelle fixation sur un support, et leur relation avec les autres espèces de l'écosystème.

Pour la suite, nous considérons l'équation de diffusion générale à une dimension d'espace

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + F(c) \quad (2.21)$$

où

$$F(c) = (r - q)f(c) \quad (2.22)$$

Et nous y ajoutons des conditions aux limites[42]

$$c(0, 0) = a \quad \text{et} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(0, 0) = b \quad (2.23)$$

où a représente le nombre de bactéries libérées par unité de surface au point $(x = 0, t = 0)$. Et b désigne le flux au même point.

Diffusion de médicaments dans le cerveau.

Sur le plan clinique, le traitement de la tumeur cancéreuse du cerveau par des inhibiteurs(anticancéreux) permet de garantir un traitement optimal. En effet le cerveau est un organe très sensible et l'usage de l'intervention chirurgicale classique pourrait provoquer une destruction massive des neurones. Il en est de même pour un traitement d'accident cérébrovasculaire.

La modélisation de la diffusion de l'inhibiteur dans le cerveau obéit à l'équation suivante[10][11][33] :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{V}{K} \left(c - \frac{c^2}{K} \right) \quad (2.24)$$

où $c = c(x, t)$ est la concentration de la substance (inhibiteur) injectée dans le cerveau. Ici x représente la variable spatiale et t la variable temporelle avec la condition initiale souhaitée : $c(x, 0) = 0$. Les paramètres V, K représentent respectivement la vitesse de réaction et la constante de **Michaelis-Menten**.

L'étude de ce phénomène permet de prédire la quantité minimale de substance initiale à injecter pour obtenir une certaine concentration assez précise à une profondeur x_0 voulue et à un instant donné t_0 .

On rencontre aussi fréquemment les équations de diffusion-réaction de type(2.21) dans les domaines tels que :

- L'étude dynamique des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques.
- En **chimie** : on rencontre ce type d'équations lorsque l'on a des substances qui se diffusent dans un liquide ou dans un gaz.
- En **écologie** : on retrouve ces équations lorsqu'on étudie la pollution des eaux (rivières, nappes phréatiques,...).
- En **médecine**, ces équations interviennent en épidémiologie et bio-ingénierie(génie-génétique, immuno-technologie, biotechnologie),la dispersion de matériaux injectés dans le plasma sanguin.
etc.

Or la maîtrise de ces phénomènes peut contribuer à la prise de nombreuses décisions politico-écologiques. L'étude donc d'un tel type d'équation révèle un grand intérêt pratique.

2.8 Conclusion

Un grand nombre de phénomènes issus des sciences du vivant est modélisé par des équations de diffusion de diffusion-réaction de type $u_t = \alpha \Delta u + F(u)$. D'où l'étude de tels types d'équations revêt une importance, indéniable, pour des applications. Nous utilisons la méthode d'**Adomian** pour leur résolution. L'avantage de cette méthode réside au niveau de l'apparition explicite de différents paramètres physiques dans la solution calculée. Ce qui facilitera l'étude de l'identification et du contrôle des systèmes qui en découlent comme l'a montré **Y.Cherruault** dans ses deux ouvrages fondamentaux[18][20]. De plus, l'algorithme utilisé permet d'éviter des calculs lourds.

Chapitre 3

RESOLUTION DES PROBLEMES DE DIFFUSION PAR LA METHODE D'ADOMIAN

3.1 PREALABLE

Nous voulons résoudre numériquement des problèmes de diffusion par la méthode décompositionnelle. Il y a quelques travaux sur ces problèmes[26][36][43][55], mais des difficultés demeurent quant à **l'intégration des conditions initiales et des conditions aux limites dans la forme canonique** des équations à résoudre. Notre contribution dans ce travail a été une technique permettant de prendre en compte les conditions initiales ou aux limites dans la forme canonique d'**Adomian**. Ce qui a fait l'objet d'une publication[44]. La technique consiste à ajouter **un terme supplémentaire au premier terme de la série d'Adomian pour inclure les contraintes imposées au problème considéré.**

Notons que dans [44], en plus de la technique ci-dessus cité, nous avons donné une condition suffisante de convergence de la méthode d'**Adomian** appliquée aux équations de type diffusion-réaction. Ce sont les deux aspects qui constituent l'essentiel de ce chapitre.

3.2 Cadre fonctionnel

Nous nous intéressons à la résolution des équations de diffusion-réaction de la forme :

$$u_t = D\Delta u + F(u) \quad (3.1)$$

en dimension 1 d'espace où $u = u(x, t)$ sera la concentration de la substance diffusante, définie sur un domaine borné D de \mathbb{R}^2

$$D = (\alpha, \beta) \times (0, T)$$

Nous savons qu'avec la présence du terme de la réaction $F(u)$ (en général non linéaire) dans (3.1), les résultats exprimés dans le chapitre 1 à travers les théorèmes 1, 2, 3 et 4 ne permettent pas la résolution de tels problèmes. D'où la nécessité d'envisager des méthodes numériques pour leur résolution. En général, on utilise des méthodes classiques de discrétisation ou d'approximation. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser la méthode décompositionnelle d'**Adomian** pour leur résolution.

Nous allons considérer l'espace de **Hilbert** H défini par :

$$H = L^2((\alpha, \beta) \times (0, T), \mathbb{R}) \quad (3.2)$$

l'ensemble des fonctions

$$u : (\alpha, \beta) \times (0, T) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.3)$$

telle que :

$$\int_{(\alpha,\beta)\times(0,T)} u^2(x,s) dx ds < +\infty \quad (3.4)$$

Avec le produit scalaire

$$(u,v)_H = \int_{(\alpha,\beta)\times(0,T)} u(x,s)v(x,s) dx ds \quad (3.5)$$

et

$$\|u\|_H^2 = \int_{(\alpha,\beta)\times(0,T)} u^2(x,s) dx ds \quad (3.6)$$

la norme associée.

Soit $H' = L(H, \mathbb{R})$ le dual de H .

3.3 Schéma numérique d'Adomian de résolution

Soit l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \quad (3.7)$$

Si on considère les opérateurs L , R et N définis par

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad Ru = -D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad N = -F(u)$$

L'équation (3.7) peut se réécrire :

$$Lu + Ru + Nu = 0 \quad (3.8)$$

où encore l'équation équivalente :

$$u = g(x) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.9)$$

avec $g(x) = u(x, 0)$ et $L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) ds$.

Nous notons que l'équation (3.9) représente la **forme canonique d'Adomian**[1][18]. En effet si on pose

$$B = -L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.10)$$

alors l'équation (3.9) peut s'écrire

$$u = g + Bu \quad (3.11)$$

On peut donc appliquer la méthode d'**Adomian** à (3.9).

Soit alors

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ et } Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$$

En les reportant dans (3.9), on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = g(x) - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \quad (3.12)$$

On peut en déduire l'algorithme d'**Adomian** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = g(x) \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{array} \right. \quad (3.13)$$

NB : la forme canonique (3.9) n'est pas unique.

On peut par exemple considérer

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ et } L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) ds ds$$

Dans ce cas, la forme canonique sera :

$$u(x, t) = u(0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{1}{D}L^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{D}L^{-1}F(u) \quad (3.14)$$

En posant

$$Bu = \frac{1}{D}L^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{D}L^{-1}F(u) \quad (3.15)$$

et

$$g = u(0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \quad (3.16)$$

on a :

$$u = g + Bu \quad (3.17)$$

Il en résultera **l'algorithme d'Adomian :**

$$\begin{cases} u_0 &= u(0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{D}L^{-1}\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{1}{D}L^{-1}A_n \end{cases} \quad (3.18)$$

3.4 Etude théorique de la convergence de l'algorithme d'Adomian.

Dans ce paragraphe, nous allons faire l'étude théorique de la convergence de l'algorithme d'Adomian associé aux problèmes de diffusion-réaction $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$ en donnant de nouveaux résultats. Plus précisément, nous utiliserons les propriétés des opérateurs monotones décrits par les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) du chapitre 1 pour établir une condition suffisante d'existence de solution de l'équation (3.7) puis surtout assurer la convergence de l'algorithme d'Adomian (3.13) vers une solution du problème considérée.

Théorème[44](existence)

Pour toute fonction g dans H' (le dual de H), si $F(u)$ est lipschitzienne alors l'équation (3.7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

équivalente à (3.9)

$$u = g(x) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

admet une solution dans H .

Théorème[44](convergence)

Si $F(u)$ est lipschitzienne dans H alors pour toute fonction $u_0 = g(x)$ dans H' , l'algorithme d'Adomian défini par la relation (3.13) est convergent.

Preuves :

Si on pose l'opérateur

$$Tu = Ru + Nu$$

Alors d'après **Sibony-Brezis** [15] et **Cherruault, Mavoungou** [21][34][35], pour établir les preuves des théorèmes 1 et 2, il suffit que l'opérateur T vérifie les hypothèses (H_1) , (H_2) , et (H_3) définies précédemment au paragraphe (1.6) du chapitre 1.

On a :

$$Tu = Ru + Nu = -D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(u)$$

(H_1) Si $F(u)$ lipschitzienne alors l'opérateur

$$T = -D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(u)$$

est hémicontinue.

(H_2) Montrons que

$$(Tu - Tv, u - v) \geq k \|u - v\|^2$$

pour tout u et $v \in H$, $k > 0$?

on a :

$$Tu - Tv = -D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - v) - (F(u) - F(v))$$

et

$$(Tu - Tv, u - v) = D\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v), u - v\right) - (F(u) - F(v), u - v)$$

Comme $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est un opérateur différentiel dans H , on a [34] :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v), u - v\right) \geq \delta \|u - v\|^2$$

Aussi on déduit de l'inégalité de **Schwartz** que :

$$(F(u) - F(v), u - v) \leq \|F(u) - F(v)\| \|u - v\|$$

puis

$$(F(u) - F(v), u - v) \leq \alpha \|u - v\|^2$$

où α est la constante de lipschitz relativement à F

Mais

$$(F(u) - F(v), u - v) \leq \alpha \|u - v\|^2 \Leftrightarrow -(F(u) - F(v), u - v) \geq -\alpha \|u - v\|^2$$

par suite

$$(Tu - Tv, u - v) \geq (D\delta - \alpha) \|u - v\|^2$$

En posant $k = D\delta - \alpha$ (avec $D\delta > \alpha$), l'hypothèse (H_2) est satisfaite.

(H_3) Montrons que

$$\forall M > 0, \exists C(M) > 0 \text{ tels que } \|u\| \leq M \text{ et } \|v\| \leq M$$

$$\implies (Tu - Tv, w) \leq C(M) \|u - v\| \|w\|, \quad \forall w \in H?$$

On a :

$$(Tu - Tv, w) = \left(-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - v) - (F(u) - F(v)), w\right)$$

$$\leq \left(-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - v), w\right) + (-F(u) - F(v), w)$$

$$\leq |D| \|u - v\| \|w\| + \alpha \|u - v\| \|w\|$$

on en déduit que :

$$(Tu - Tv, w) \leq C(M) \|u - v\| \|w\|$$

avec

$$C(M) = |D| + \alpha$$

Ainsi l'hypothèse (H_3) est satisfaite.

CQFD

3.5 Quelques exemples d'application

Si on considère l'espace de **Hilbert** $H = L^2([\alpha, \beta] \times [0, T], \mathbb{R})$ alors nous avons les propositions suivantes :

Proposition

La méthode d'Adomian appliquée au problème de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au$$

est convergente.

Ce type de modèle représente la **diffusion d'une population à taux de croissance exponentielle.**

Proposition

La méthode d'Adomian appliquée au problème de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

est convergente.

Ce type de modèle représente la **diffusion d'une population à taux de croissance logistique.**

Proposition

La méthode d'Adomian appliquée au problème de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2$$

est convergente.

Pour les preuves de ces propositions 1,2,3 se référer [44].

3.6 Résolution numérique de problème de diffusion- réaction avec conditions initiales ou aux limites.

La résolution d'une équation aux dérivées partielles inclut des conditions initiales ou aux limites. Or la méthode décompositionnelle telle que exposée dans le chapitre 2 ne permet pas en général de prendre en compte simultanément toutes les contraintes imposées à certaines formes d'EDP[55][18][43][36]. Cela conduit à de solutions moins satisfaisantes.

D'où la nécessité de trouver des formes canoniques adaptées(**formes canoniques bien posées**) prenant en compte les conditions initiales et aux limites.

En effet, la méthode décompositionnelle s'adapte bien aux équations fonctionnelles qui peuvent être écrites sous la forme

$$u = Nu + f \quad (3.19)$$

(**forme canonique**). Et si une équation n'est pas sous cette forme, il conviendra de l'y ramener avant de pouvoir appliquer la méthode d'**Adomian**.

Au niveau des équation aux dérivées partielles, cette forme s'obtient généralement par des intégrations successives. Cette procédure ne permet pas d'inclure à la fois les conditions initiales et les conditions aux bords dans la forme canonique.

En effet :

Si on considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \\ u(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_1(t) \\ u(\beta, t) = h_2(t) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

avec $u = u(x, t)$ et $(x, t) \in (0, \beta) \times (0, T)$

En considérant les opérateurs

$$L = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) \text{ et } L^{-1} = \int_0^t (\cdot) ds$$

L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

peut se réécrire formellement

$$u = u(x, 0) + \int_0^t D \frac{\partial^2 u(x, s)}{\partial x^2} ds + \int_0^t F(u(x, s)) ds$$

qui est une **forme canonique d'Adomian**.

Cette forme canonique ne permet pas de prendre en compte les 2 conditions aux bords.

De même en considérant les opérateurs $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot)$ et $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) ds$

L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u)$$

peut se réécrire formellement

$$u = u(0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x D \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial x^2} ds ds + \int_0^x \int_0^x F(u(s, t)) ds ds$$

qui est aussi une **forme canonique d'Adomian** où une seule condition aux bords y figure.

On dit dans les deux cas que les **formes canoniques sont incomplètes**. Et les solutions obtenues par la méthode d'**Adomian** ne vérifient pas en général les conditions aux limites . D'où la nécessité de chercher des formes canoniques qui puissent englober conditions initiales et conditions aux limites.

3.7 PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES DANS LA FORME CANONIQUE.

3.7.1 Résultats existants[43][55]

Les premiers travaux sur la prise en compte des conditions aux limites des équations aux dérivées partielles dans la forme canonique ont été ceux de **V.Seng et coll**[55]. Elle transforme le problème d'EDP en une équation intégrale ou intégréo-différentielle dans laquelle toutes les conditions imposées à l'EDP y apparaissent. Les différentes transformations font appel essentiellement à la théorie du potentiel, au principe de superposition, à la transformation de **Fourier** et de **Laplace**. Mais les calculs sont trop lourds du point de vue application.

Si l'on considère l'équation

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} + F(u) \\ u(x, 0) & = g(x) \\ u(0, t) & = f(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

avec

$$u = u(x, t) \text{ , } x > 0 \text{ et } t > 0$$

La résolution du problème (3.21) se fait par le principe de superposition en résolvant deux sous problèmes (3.22) et (3.23) dont la somme des solutions donne la solution de (3.21).

Soit

$$\begin{cases} v_t & = v_{xx} \\ v(x, 0) & = g(x) \\ v(0, t) & = f(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

et

$$\begin{cases} w_t & = w_{xx} + F(v + w) \\ w(x, 0) & = 0 \\ w(0, t) & = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Et alors

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (3.24)$$

La résolution de (3.22) se fait par le principe de superposition linéaire

$$v(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t) \quad (3.25)$$

avec

$$\begin{cases} (v_1)_t &= (v_1)_{xx} \\ v_1(x, 0) &= g(x) \\ v_1(0, t) &= 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

dont la solution est :

$$v_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[- \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} g(2z\sqrt{t} - x) dz + \int_{\frac{-x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} g(2z\sqrt{t} - x) dz \right] \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+y)^2}{4t} \right] \right\} g(y) dy \quad (3.28)$$

Et

$$\begin{cases} (v_2)_t &= (v_2)_{xx} \\ v_2(x, 0) &= 0 \\ v_2(0, t) &= f(t) \end{cases} \quad (3.29)$$

avec la solution :

$$v_2(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\Pi}} \int_0^t f(t-\zeta) \zeta^{\frac{-3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\zeta}} d\zeta = \frac{2}{\sqrt{\Pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right) e^{-z^2} dz \quad (3.30)$$

La résolution du problème (3.23) est plus complexe. Elle utilise la méthode des images, la transformation de **Fourier**, la transformation de **Laplace** [55].

La solution satisfait :

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\Pi}} \int_0^t \int_0^{+\infty} (t-\zeta)^{-1/2} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4(t-\zeta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+y)^2}{4(t-\zeta)}\right] \right\} \times F[v(y, \zeta) + w(y, \zeta)] dy d\zeta \quad (3.31)$$

Et enfin on peut obtenir la solution du problème(3.21) sous la forme :

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{2\sqrt{\Pi}} \int_0^t \int_0^{+\infty} (t-\zeta)^{-1/2} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4(t-\zeta)}\right] \right\} \times F[u(y, \zeta)] dy d\zeta \quad (3.32)$$

qui est une **forme canonique d'Adomian**. On peut donc en déduire l'algorithme d'**Adomian**

$$\begin{cases} u_0(x, t) & = v(x, t) \\ u_{n+1}(x, t) & = \frac{1}{2\sqrt{\Pi}} \int_0^t \int_0^{+\infty} (t - \zeta)^{-1/2} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - y)^2}{4(t - \zeta)} \right] \right\} A_n \{F[u(y, \zeta)]\} dy d\zeta \end{cases} \quad (3.33)$$

M.Ndour[43] également a contourné le problème en ramenant un problème d'EDP de type diffusion en un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) facile à résoudre par la méthode décompositionnelle. Il procède par des changements de variables dans un cas très particulier.

Soit donc l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} & = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + F(C) \\ C(x, 0) & = g_1(x) \\ \frac{\partial C}{\partial x}(x, 0) & = g_2(x) \\ C(+\infty, t) & = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

où $f \in L^2(\mathbb{R})$, g_1 et g_2 sont uniformément bornées et appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$

L'idée est de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires où l'utilisation de la méthode décompositionnelle sera aisée.

Pour cela, on fait le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} z & = x - ct \\ h(z) & = h(x - ct) = C(x, t) \\ g & = \frac{dh}{dz} \end{cases} \quad (3.35)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{dz} = \frac{dC}{dz} = \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -c \frac{\partial C}{\partial z} \\ \frac{dh}{dz} = \frac{dh}{dt} \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{c} \frac{dh}{dt} \\ \frac{dg}{dz} = \frac{dg}{dt} \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{c} \frac{dg}{dt} \end{array} \right. \quad (3.36)$$

où c représente la vitesse.

Si nous supposons que x parcourt l'ensemble $]-\infty, +\infty[$, nous constatons que z parcourt le même ensemble.

Ainsi, f devient une fonction non linéaire de la variable h .

Nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh}{dt} = -cg \\ \frac{dg}{dt} = \frac{1}{D}(c^2g + cF(h)) \end{array} \right. \quad (3.37)$$

$$\text{avec } h_{t=0} = 0 = C(x, 0) = g_1(x) \quad g_{t=0} = 0 = \frac{\partial C}{\partial x}(x, 0) = g_2(x)$$

Le système (3.37) peut être résolu à l'aide de la méthode décompositionnelle. Remarquons que les **conditions initiales et aux limites sont bien prises en compte**.

Résolution du système d'équations différentielles ordinaires équivalent à l'aide de la méthode décompositionnelle :

Pour la résolution du système différentiel (3.37) par la méthode d'**Adomian**, on peut poser :

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \quad , \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \quad , \quad F(h) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

où les A_n représentent les polynômes d'**Adomian** relatifs à la fonction non linéaire $F(h)$.

Les G_n et H_n seront déterminés par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = g_1(x) \\ H_{n+1} = -cL^{-1}G_n \\ G_0 = g_2(x) \\ G_{n+1} = \frac{1}{D}(c^2L^{-1}G_n + cL^{-1}A_n) \end{array} \right. \quad (3.38)$$

3.8 Nouvelle technique pour l'obtention d'une bonne forme canonique des EDP[44].

Vu les difficultés persistantes dans l'obtention d'une forme canonique d'Adomian prenant en compte toutes les conditions imposées à une EDP, **nous proposons ici une nouvelle idée qui permet de pallier au problème et surtout de résoudre directement le problème sans avoir à faire une transformation sous forme d'équations différentielles ou intégral-différentielles.** L'efficacité de cette technique sera vérifiée à travers des **exemples non résolubles par le schéma classique de la méthode d'Adomian.**

Considérons la forme canonique classique d'une équation aux dérivées partielles obtenue par des intégrations successives :

$$u = Nu + f \quad (3.39)$$

Si on écrit

$$u = \sum_n u_n \text{ et } Nu = \sum_n A_n \quad (3.40)$$

et on les reporte dans cette forme canonique(3.39), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_n^{\infty} A_n + f \quad (3.41)$$

On en déduit l'algorithme d'Adomian suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = f \\ u_1 = A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+1} = A_n \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Mais nous savons que dans les EDP, la forme canonique (3.39) conduisant à cet algorithme (3.42) ne permet pas de prendre en compte toutes les conditions imposées à une EDP . Pour pallier à cet handicap, nous proposons d'ajouter un terme supplémentaire au premier terme de la série d'Adomian comme suit[44] :

$$\tilde{u}_0 = u_0 + \phi(x, t) \quad (3.43)$$

où $\phi(x, t)$ est une fonction à choisir qui prend en compte toutes les contraintes imposées au problème d'EDP considérée.

Cela nous permet d'obtenir un nouvel algorithme d'Adomian

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u}_0 = f + \phi \\ \widetilde{u}_1 = A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widetilde{u}_{n+1} = A_n \end{array} \right. \quad (3.44)$$

et aussi une **nouvelle forme canonique**[44]

$$u = Nu + f + \phi \quad (3.45)$$

La série solution s'obtient par :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{u}_n \quad (3.46)$$

Ainsi si nous réconsidérons le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \\ u(x, 0) = g(u) \\ u(0, t) = h_1(t) \\ u(\beta, t) = h_2(t) \end{array} \right. \quad (3.47)$$

avec $u = u(x, t)$ et $(x, t) \in (0, \beta) \times (0, T)$

Alors en considérant les opérateurs

$$L = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) \text{ et } L^{-1} = \int_0^t (\cdot) ds$$

La **forme canonique classique** sera :

$$u(x, t) = u(x, 0) + L^{-1}(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + L^{-1}(f(u)) \quad (3.48)$$

Et la **nouvelle forme canonique** que nous proposons sera [44] :

$$u(x, t) = u(x, 0) + \phi(x, t) + L^{-1}(D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + L^{-1}(f(u)) \quad (3.49)$$

En posant $u = \sum_n u_n$, $f(u) = \sum_n A_n$

On déduit de la **nouvelle forme canonique**, l'**algorithme d'Adomian** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = u(x, 0) + \phi(x, t) \\ u_1 = L^{-1}(D \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}) + L^{-1} A_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+1} = L^{-1}(D \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}) + L^{-1} A_n \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Si on considère les opérateurs

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) \text{ et } L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) ds ds \quad (3.51)$$

alors on a :

Forme canonique classique

$$u(x, t) = u(0, t) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{1}{D} L^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{D} L^{-1} (f(u)) \quad (3.52)$$

soit encore

$$u(x, t) = u(0, t) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds ds - \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x (f(u(s, t))) ds ds \quad (3.53)$$

L'algorithme d'Adomian :

$$\begin{cases} u_0 &= -tx + (1+x)u(0, t) = u(0, t) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial t}(s, t) ds ds - \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x A_n \{f(u)\} ds ds, \forall n \end{cases} \quad (3.54)$$

La nouvelle forme canonique sera :

$$u(x, t) = u(0, t) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \phi(x, t) + \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds ds - \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x (f(u(s, t))) ds ds \quad (3.55)$$

avec l'algorithme d'Adomian suivant :

$$\begin{cases} u_0 &= u(0, t) + x \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \phi(x, t) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial t}(s, t) ds ds - \frac{1}{D} \int_0^x \int_0^x A_n \{f(u)\} ds ds \end{cases} \quad (3.56)$$

Note : La vérification de la prise en compte des conditions initiales et aux limites en incluant le terme supplémentaire $\phi(x, t)$ se fera sur des exemples concrets.

3.9 Applications

Ici, pour les problèmes linéaires, la nouvelle technique va permettre d'obtenir des solutions exactes. Dans les cas non linéaires, on obtient des solutions approchées(sous forme de série tronquée)qui vérifient les conditions aux limites. On considérera deux types de problème avec des conditions aux limites de nature différente.

3.9.1 Résolution d'un problème de diffusion réaction avec conditions aux bords portant sur le flux.

Nous considérons ici un type d'équations de diffusion-réaction non résolubles par la forme canonique classique de la méthode d'Adomian.

Soit l'équation de diffusion de type :

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} + f(u) \\ u(0, t) - u_x(0, t) & = h(t) \end{cases} \quad (3.57)$$

Avec $u = u(x, t)$, $x > 0$ et $t > 0$

L'utilisation classique de la méthode décompositionnelle[18] ne permet pas de résoudre directement ce type d'équations.

Si on considère les opérateurs

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot) ds ds$$

Forme canonique classique :

$$u(x, t) = u(0, t) + xu_x(0, t) + \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds ds - \int_0^x \int_0^x (f(u(s, t))) ds ds \quad (3.58)$$

Et l'algorithme d'Adomian

$$\begin{cases} u_0 &= u(0, t) - xu_x(0, t) \\ u_{n+1} &= \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial t}(s, t) ds ds - \int_0^x \int_0^x A_n \{f(u(s, t))\} ds ds \end{cases} \quad (3.59)$$

comme

$$u(0, t) - u_x(0, t) = h(t) \quad (3.60)$$

cela implique que

$$u_0 = u(0, t) - xu_x(0, t) = -h(t)x + (1+x)u(0, t) \quad (3.61)$$

Nouvelle forme canonique

$$u(x, t) = -h(t)x + (1+x)u(0, t) + \phi(x, t) + \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds ds - \int_0^x \int_0^x f(u(s, t)) ds ds \quad (3.62)$$

Algorithme d'Adomian

$$\begin{cases} u_0 &= -h(t)x + (1+x)u(0, t) + \phi(x, t) \\ u_{n+1} &= \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial t}(s, t) ds ds - \int_0^x \int_0^x A_n ds ds \end{cases} \quad (3.63)$$

Choix de $\phi(x, t)$ (bon choix de u_0)

Ici nous choisissons $\phi(x, t)$ tels que la contrainte

$$u(0, t) - u_x(0, t) = h(t) \quad (3.64)$$

soit satisfaite en u_0

Pour cela, il suffit de prendre

$$\phi(x, t) = (x + 1)(h(t) - u(0, t)) \quad (3.65)$$

Exemple 1 : Résolution d'un problème linéaire

$$\begin{cases} u_t & = u_{xx} + u \\ u(0, t) - u_x(0, t) & = t \end{cases} \quad (p1)$$

Ici on a : $f(u) = u$ et $h(t) = t$

D'où

$$\phi(x, t) = (x + 1)(t - u(0, t))$$

Par suite

$$u_0 = -tx + (1 + x)u(0, t) + \phi(x, t) = t$$

L'algorithme d'**Adomian** sera :

$$\begin{cases} u_0 & = t \\ u_{n+1} & = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial u_n}{\partial t}(s, t) ds ds - \int_0^x \int_0^x u_n(s, t) ds ds \end{cases}$$

Cela permet de calculer de manière récursive les différents termes de la série d'**Adomian** :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x^2}{2!} - t \frac{x^2}{2!} \\ u_2 &= -2 \frac{x^4}{4!} - t \frac{x^4}{4!} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_n &= (-1)^{n+1} n \frac{x^{2n}}{2n!} + t (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = t \cos x + x \frac{\sin x}{2}$$

qui est **une solution exacte du problème (p1)**

Exemple 2 : Résolution d'un problème non linéaire

$$\begin{cases} u_t & = Du_{xx} + u^2 \\ u(0, t) - u_x(0, t) & = t \end{cases} \quad (p2)$$

Dans ce cas il n'est pas possible de calculer tous les termes de la série d'**Adomian**. On se limitera à **une solution approchée (série tronquée)**. Et cette solution vérifiera la contrainte imposée au problème.

Ici on a : $f(u) = u^2$ et $h(t) = t$

Avec le **choix de la fonction**

$$\phi(x, t) = (x + 1)(h(t) - u(0, t))$$

Le premier terme de la série est le même que dans le cas linéaire :

$$u_0 = t$$

On obtient l'**algorithme d'Adomian** suivant :

$$\begin{cases} u_0 = t \\ u_{n+1} = \int_0^x \int_0^t \frac{\partial u_n}{\partial t}(s, t) ds dt - \int_0^x \int_0^t A_n \{f(u(s, t))\} ds dt \end{cases}$$

où $f(u) = u^2$, les polynômes d'Adomian A_n sont donnés par :

$$A_0 = f(u_0) = u_0^2$$

$$A_1 = f'(u_0)u_1 = 2u_0u_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2}f''(u_0)u_1^2 + f'(u_0)u_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$$

$$A_3 = \frac{1}{3}f'''(u_0)u_1^3 + f''(u_0)u_1u_2 + f'(u_0)u_3 = 2u_1u_2 + 2u_0u_3$$

Et les termes de la série d'Adomian :

$$\begin{aligned} u_0 &= t \\ u_1 &= \frac{x^2}{2}(1 - t^2) \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{x^4}{4!}(-4t + 2t^3)$$

$$u_3 = \frac{x^6}{6!}(-4 + 6t^2) + \frac{x^6}{6!}(1 - t^2)^2 + \frac{x^6}{6!}(8t^2 + 4t^4)$$

La solution approchée

$$\varphi_3 = u \simeq u_0 + u_1 + u_2 + u_3$$

vérifie bien :

$$\varphi_3(0, t) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(0, t) = t$$

Et il en est de même pour la troncature à l'ordre n :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

On pourra vérifier que

$$\varphi_n(0, t) - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(0, t) = t$$

3.10 Application à la résolution de la diffusion d'une souche de bactéries dans l'eau.

Réconsidérons le problème associé à la diffusion d'une souche de bactéries dans l'eau, décrit dans le chapitre 2.

Soit donc à résoudre le problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \\ u(0,0) & = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) & = b \end{cases} \quad (3.66)$$

où $u = u(x, t)$ et $(x, t) \in (\alpha, \beta) \times (0, T)$

Cet type de problème (3.66) est un modèle qui peut généraliser la diffusion de germes au niveau de l'eau[43].

Remarque : Ce problème pouvait être représenté par le modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) \\ u(x,0) & = a\delta(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) & = b\delta(x) \end{cases} \quad (3.67)$$

où $\delta(k)$ est la masse de **Dirac** définie par :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

Mais on peut remarquer que

$$\begin{aligned} u(0,0) & = a\delta(0) = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) & = b\delta(0) = b \end{aligned} \quad (3.69)$$

Mais avec le modèle considéré(3.66), nous prenons la valeur de u_0 comme suit

$$u_0 = a + \phi(x, t).$$

L'algorithme peut alors se réécrire :

$$\begin{cases} u_0 & = a + \phi(x, t) \\ u_{n+1} & = \int_0^t D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) ds + \int_0^t A_n \{f(u(x, s))\} ds \end{cases} \quad (3.73)$$

3.10.1 CHOIX DE $\phi(x, t)$. (ou choix de u_0)[44]

Nous notons que le choix de ϕ revient au même du choix de u_0

Dans la suite, nous montrerons à travers des exemples que plusieurs choix de $\phi(x, t)$ sont possibles. Nous donnerons des assertions(théorèmes, corollaires, propositions)qui seront justifiées à travers la résolution effective du problème considéré en distinguant le cas linéaire et le cas non linéaire.

Théorème :

Soit

$$u_0 = a + \phi(x, t)$$

Si $\phi(x, t)$ est telle que

$$\phi(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 0) = b$$

Alors

$$u_0(0, 0) = a \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x}(0, 0) = b$$

et la méthode d'**Adomian** permet d'obtenir des solutions exactes dans le cas où $F(u)$ est

Si on considère les opérateurs $L = \frac{\partial}{\partial t}$ et $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) ds$
alors la **forme canonique classique** associé à (3.67) est :

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ds + \int_0^t F(u) ds$$

La **nouvelle forme canonique** sera :

$$u(x, t) = u(x, 0) + \phi(x, t) + \int_0^t D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ds + \int_0^t F(u) ds$$

où $\phi(x, t)$ est une **fonction à choisir**.

En écrivant $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ dans la nouvelle forme canonique, on peut en déduire l'algorithme d'**Adomian** suivant :

$$\begin{cases} u_0 &= u(x, 0) + \phi(x, t) \\ u_{n+1} &= \int_0^t D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s) ds + \int_0^t A_n \{f(u(x, s))\} ds \end{cases} \quad (3.70)$$

En résolvant le problème (3.67), on devrait avoir

$$u(x, 0) = a\delta(x) \quad (3.71)$$

et donc

$$u_0 = a\delta(x) + \phi(x, t) \quad (3.72)$$

linéaire puis dans le cas non linéaire toute solution approchée :

$$u(x, t) \simeq \phi_n(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i$$

vérifie les conditions

$$u(0, 0) = a \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = b$$

Corollaire :

Dans notre étude présente, il suffit de choisir u_0 dans la forme simplifiée

$$u_0 = a + \phi(x)$$

où

$$\phi(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x}(0) = b$$

Ainsi l'algorithme d'**Adomian** du problème (3.66) sera le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a + \phi(x), \\ u_{n+1} = \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} ds + \int_0^t A_n ds \end{array} \right. \quad (3.74)$$

$\phi(x)$ sous forme polynômiale

Si

Proposition :

$$\phi(x) = bP_m(x)$$

avec

$$P_m(x) = b \sum_{i=1}^m x^i$$

alors

$$u_0 = a + bP_m(x)$$

et l'algorithme d'**Adomian** (3.74) converge vers une solution exacte dans le cas linéaire et dans le cas non linéaire toute solution approchée vérifie les deux conditions imposées au problème.

Nous faisons remarquer ici que $\phi(0) = 0$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0) = b$

Résolution d'un problème linéaire : soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(o, o) = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = b \end{array} \right. \quad (\text{p3})$$

Si $F(u) = \alpha u$ alors $A_n = \alpha u_n \quad \forall n \in N$ et $\alpha \in R$

L'algorithme d'**Adomian** s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a + b \sum_{i=1}^m x^i \\ u_{n+1} = \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} ds + \int_0^t u_n ds \end{array} \right. \quad (3.75)$$

Les solutions sont données par :

Théorème [46]

Si on pose

$$u_0 = a + b \sum_{i=1}^m x^i = u_0^m$$

alors la solution exacte du problème (p3) de la forme $u = \sum_n u_n$ peut s'écrire comme suit :

$$- m = 1, \quad u = u^1 = \sum_n u_n = u_0^1 e^t = (a + bx) e^t$$

$$- 2 \leq m \leq 6 \quad u = u^1 = \sum_n u_n = u_0^1 e^t + b e^t \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\sum_{j=0}^{m-2i} a_{m_{ij}} x^{m-2i-j} \right) \times (Dt)^i$$

où

— $a_{m_{ij}}$ est une fonction de m, i, j

— $[m]$ est la partie entière de m $[m] \leq m < [m] + 1$

ILLUSTRATION[46] :

- Si $m = 1$,

$$u(x, t) = \sum u_n = (a + bx) e^t$$

est une solution exacte

- Si $m = 2$,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = [a + b(x + x^2) + 2b(Dt)]e^t$$

est une solution exacte.

- Si $m = 3$,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = [a + b(x + x^2 + x^3) + 2bDt(1 + 3x)]e^t$$

est une solution exacte

- Si $m = 4$,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = [a + b(x + x^2 + x^3 + x^4) + 2b(1 + 3x + 6x^2) + 6(Dt)^2]e^t$$

est une solution exacte

- Si $m = 5$,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$= [a + b(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)e^t] + be^t[(Dt)^2(12 + 72x) + Dt(2 + 6x + 12x^2 + 24x^3)]$$

est une solution exacte

- Si $m = 6$,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$= [a + b(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)e^t] +$$

$$+be^t[120(Dt)^3 + (Dt)^2(12 + 60x + 180x^2) + Dt(2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + 35x^4)]$$

Résolution du problème non linéaire soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 \\ u(0,0) = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = b \end{array} \right. \quad (p4)$$

l'algorithme s'écrit comme suit pour le choix de u_0 suivant :pour

$$u_0 = a + bp_1(x) \text{ avec } p_1(x) = x$$

comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a + bx \\ u_{n+1} = \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} ds + \int_0^t A_n \{u^2\} ds \end{array} \right. \quad (3.76)$$

Les polynômes d'**Adomian** sont données par :

$$A_0 = F(u_0) = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0 u_1$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$$

$$A_3 = 2u_1u_2 + 2u_0u_3$$

·
·
·

On en déduit :

$$u_0 = a + bx$$

$$u_1 = u_0^2 t$$

$$u_2 = (2b^2 D + 2u_0^3) \frac{t^2}{2!}$$

$$u_3 = (16b^2 Du_0 + 6u_0^4) \frac{t^3}{3!}$$

$$u_4 = (116b^2 Du_0^2 + 24u_0^5) \frac{t^4}{4!}$$

$$u_5 = (256b^4 D^2 + 888b^2 Du_0^3 + 120u_0^6) \frac{t^5}{5!}$$

$$u_6 = (6480b^4 D^2 u_0 + 7416b^2 Du_0^4 + 720u_0^7) \frac{t^6}{6!}$$

Les solutions approchées

$$u(x, t) \simeq \phi_n(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i \tag{3.77}$$

vérifient :

$$\phi_n(0, 0) = u(0, 0) = a \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(0,0) = b \quad (3.79)$$

Remarque

Nous obtenons encore des solutions approchées veifiant (3.78) et (3.79) si on prend la valeur de u_0 comme suit :

$$u_0 = a + b \sum_{i=1}^m x^i \text{ avec } m \geq 2 \quad (3.80)$$

$\phi(x)$ sous forme trigonométrique

Proposition :

Si

$$\phi(x) = a \cos x + b \sin x - a \quad (3.81)$$

Alors

$$u_0 = a + \phi(x) = a \cos x + b \sin x \quad (3.82)$$

et l'algorithme d'**Adomian** (3.74) converge vers une solution exacte dans le cas linéaire et dans le cas non linéaire, toute solution approchée vérifie les 2 conditions imposées au problème.

On a bien :

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = b \quad (3.83)$$

Résolution d'un problème linéaire Soit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0,0) & = a \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) & = b \end{cases}$$

L'algorithme d'**Adomian** s'écrira :

$$\begin{cases} u_0 & = a \cos x + b \sin x \\ u_{n+1} & = \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} ds + \int_0^t u_n(x, s) ds \end{cases} \quad (3.84)$$

$$u_1 = u_0(1 - D)t$$

$$u_2 = \frac{u_0[(1 - D)t]^2}{2!}$$

$$u_n = \frac{u_0[(1 - D)t]^n}{n!}$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 e^{(1-D)t} = (a \cos x + b \sin x) e^{(1-D)t}$$

est une solution exacte.

Résolution d'un problème non Linéaire Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 \\ u(0,0) = a \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,0) = b \end{array} \right.$$

L'algorithme d'**Adomian** pour

$$u_0 = a \cos x + b \sin x$$

nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \cos x + b \sin x \\ u_{n+1} = \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} ds + \int_0^t A_n \{u^2(x, s)\} ds \end{array} \right. \quad (3.85)$$

$$u_1 = [-Du_0 + u_0^2] t$$

$$u_2 = \left[2D \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + D^3 u_0 - 4Du_0^2 + 2u_0^3 \right] \frac{t^2}{2!}$$

$$u_3 = \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 [6D - 12D^2 + 4Du_0] - D^2 u_0 - 4Du_0^2 + 10D^2 u_0^3 + 2u_0^4 \right] \frac{t^3}{3!}$$

·
·
·

Les solutions approchées :

$$u(x, t) \simeq \phi_n(x, t) = \sum_{i=0}^n u_i$$

Elles vérifient :

$$u(0, 0) = \phi_n(0, 0) = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(0, 0) = b$$

Si $n = 1$,

$$\text{on a : } u(x, t) \simeq \phi_1(x, t) = u_0 + u_1$$

$$= a \cos x + b \sin x + [a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x + 2ab \cos x \sin x - aD \cos x - bD \sin x] t$$

Elle vérifie :

$$u(0, 0) = \phi_1(0, 0) = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(0, 0) = b$$

Si $n = 2$,

$$\text{on a : } u(x, t) \simeq \phi_2(x, t) = u_0 + u_1 + u_2$$

$$= a \cos x + b \sin x + [a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x + 2ab \cos x \sin x - aD \cos x - bD \sin x] t$$

$$+ [aD^2 \cos x + bD^2 \sin x - 2a^2 D \cos^2 x - 2bD \sin^2 x - 6abD \sin^2 2x] \frac{t^2}{2!}$$

$$+ [2a^3 \cos^3 x + 2b^3 \sin^3 x + 3a^2 b \cos x \sin 2x + 3ab^2 \cos x \sin^2 x] \frac{t^2}{2!}$$

Elle vérifie :

$$u(0,0) = \phi_2(0,0) = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(0,0) = b$$

3.11 Diffusion à croissance logistique (Modèle de Fisher)

Nous appliquons ici la même technique qui a permis de prendre en compte les conditions aux limites pour résoudre le modèle de diffusion de **Fisher**.

Soit donc le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) \\ u(o,o) = a \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,0) = b \end{array} \right. \quad (p5)$$

où par exemple $a = 0.5$ et $b = -0.1195731559$ comme dans[42].

En choisissant la valeur du premier terme de la série d'**Adomian** sous la forme polynômiale

$$u_0 = a + bx$$

, on obtient l'algorithme d'**Adomian** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a + bx \\ u_{n+1} = \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} ds + \int_0^t A_n \{u(1-u)(x, s)\} ds \end{array} \right. \quad (3.86)$$

où

$$A_0 = u_0 - u_0^2$$

$$A_1 = (1 - 2u_0)u_1$$

$$A_2 = (1 - 2u_0)u_2 - u_1^2$$

.

.

.

De l'algorithme ci-dessus, on déduit les termes de la série d'**Adomian** :

$$u_0 = a + bx$$

$$u_1 = (u_0 - u_0^2)t$$

$$u_2 = [-2b^2 + u_0 - 3u_0^2 - 2u_0^3] \frac{t^2}{2}$$

.

.

Les solutions approchées :

$$u(x, t) \simeq \phi_n(x, t) = \sum_{i=0}^n u_i$$

vérifient

$$u(0, 0) = \phi_n(0, 0) = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(0,0) = b$$

En choisissant la valeur du premier terme de la série d'Adomian sous la forme trigonométrique

$$u_0 = a \cos x + b \sin x$$

, on obtient l'algorithme d'Adomian suivant :

$$\begin{cases} u_0 &= a \cos x + b \sin x \\ u_{n+1} &= \int_0^t D \frac{\partial^2 u_n(x,s)}{\partial x^2} ds + \int_0^t A_n \{u(1-u)(x,s)\} ds \end{cases} \quad (3.87)$$

De cet algorithme, on déduit :

$$u_0 = a \cos x + b \sin x$$

$$u_1 = -u_0^2 t$$

$$u_2 = [2(a \sin x + b \cos x) u_0 - u_0^3 + 2u_0^3] \frac{t^2}{2}$$

...

Les solutions approchées :

$$u(x,t) \simeq \phi_n(x,t) = \sum_{i=0}^n u_i$$

vérifient

$$u(0,0) = \phi_n(0,0) = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(0,0) = b$$

Chapitre 4

PROBLEME DU CONTROLE OPTIMAL APPLIQUE AU MODELE DE DIFFUSION DE MEDICAMENTS DANS LE CERVEAU

L'étude du modèle de diffusion de l'inhibiteur dans le cerveau est d'une importance capitale en cancérologie[37][38][39][10].

En effet, dans le traitement du cancer de cerveau par des inhibiteurs, la stabilisation de la concentration de la substance utilisée $c(x, t)$, à une quantité constante a pendant un temps t_0 au niveau de la zone cancéreuse, permet de garantir un traitement optimal. Cette étude conduit à la résolution numérique d'un problème de contrôle optimal.

Il s'agira de trouver un contrôle optimal $u(t)$ qui rend minimal le critère :

$$\min_{u(t)} \int_0^T [c(x_0, t_0) - a]^2 dt \quad (\text{P})$$

où T constante fixée, est la durée de l'observation du phénomène ; x_0 est la profondeur de la zone tumorale par rapport au cortex de la surface du cerveau.

$c(x, t)$, $u(t)$ satisfont aux contraintes :

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{V}{K} (c - \frac{c^2}{K}) \\ c(0, t) &= u(t), \quad t > 0 \\ c(x, 0) &= C_0 e^{-K_0 x}, \quad x > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

D , V , K , K_0 et C_0 sont des paramètres biologiques à identifier.

La résolution effective de ce problème de contrôle optimal nécessite l'usage d'une panoplie d'outils mathématiques. L'utilisation du couple **Alienor-Adomian** est plus simple et adapté pour la résolution d'un tel problème[18][20].

4.1 La méthode Alienor

C'est une méthode d'optimisation globale qui a été développée au début des années 80 au Laboratoire **MEDIMAT**. Elle a été inventée par **Y.Cherruault** et **A.Guillez**. Mais c'est dans les travaux de **Y.Cherruault** que la méthode a reçu sa justification théorique, complétée par les résultats de **A.Ziadi**, **G.Mora**, **Y.Cherruault** [40][41][62]

La méthode utilise un algorithme déterministe basé sur les propriétés de la spirale d'Archimède. L'idée principale consiste à transformer un problème d'optimisation à n variables en un problème d'optimisation à une seule variable.

Il s'agit là d'une **transformation réductrice** utilisant des approximations de l'espace \mathbb{R}^n par des courbes α -denses.

Nous exposerons la méthode d'**Alienor** sous sa forme originelle et des indications seront données pour sa justification.

Soit à résoudre le problème de minimisation

$$\text{Glob. Min} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

où f est une fonction supposée continue sur \mathbb{R}^n .

La fonction continue f vérifie de plus la condition de croissance à l'infini[18]

$$\lim_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty} f(x_1, \dots, x_n) = +\infty \quad (4.3)$$

En dimension deux, soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$)

La transformation réductrice consiste à exprimer x_1 et x_2 en coordonnées polaires comme suivant :

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases} \quad (4.4)$$

En se restreignant à la spirale d'Archimède, on pose :

$$r = a\theta \quad , \quad \theta \geq 0 \quad (4.5)$$

a est un paramètre positif, destiné à tendre vers 0 . Ainsi en substituant la relation (4.6) dans la relation (4.5), on aura

$$\begin{cases} x_1 = a\theta \cos \theta \\ x_2 = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (4.6)$$

En dimension trois, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$ ($n = 3$)

On relie d'abord x_1 et x_2 par la spirale d'équation

$$r = a\theta_1 \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} x_1 = a\theta_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = a\theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Ensuite , on relie θ_1 et x_3 par la spirale d'équation :

$$r = a\theta \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \theta_1 = a\theta \cos \theta \\ x_3 = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (4.10)$$

Puis enfin , en substituant (4.10) et (4.10) dans (4.9), on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = a^2\theta \cos \theta \cos [a\theta \cos \theta] \\ x_2 = a^2\theta \cos \theta \sin [a\theta \cos \theta] \\ x_3 = a\theta \sin \theta \quad , \quad \theta \geq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Ainsi de suite, pour tout n , on obtiendra en dimension n

$$x_i = h_i(\theta) \quad , \quad \theta \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

où $h_i(\theta)$ est une fonction de classe C^∞ , constituée d'un produit de sinus et cosinus[18]. Les $h_i(\theta)$ peuvent être obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

En définitive, la transformation réductrice d'**Alienor** permet de passer du problème de minimisation de n variables (éventuellement de la maximisation) (4.3) au problème de minimisation (éventuellement maximisation) à une seule variable suivant :

$$\text{Globmin}_{\theta} f^*(\theta)$$

avec

$$f^*(\theta) = f(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)). \quad (4.13)$$

et $\theta \in [0, \theta_{\max}]$; où θ_{\max} est à définir.

On démontre que tout minimum de f peut être approché par un minimum de f^* mais la réciproque est fautive [18]. Cela s'explique par le fait que f^* est la restriction de f à la spirale généralisée et donc elle peut introduire des minima locaux parasites. Par contre tout minimum absolu de f^* approche un minimum absolu de f .

4.2 Courbes α -denses[9][18]

Définition 1 : *ensemble α -dense*

Soit B une partie de \mathbb{R}^n munie de la métrique d associée à la norme euclidienne. Soit A une partie de B . On dit que A est α -dense dans B si et seulement si : quelque soit un point M dans B il existe au moins un point N dans A tel que $d(M, N) < \alpha$.

Définition 2 : *courbe α -dense*

Une courbe de \mathbb{R}^n définie par :

$$h : A \rightarrow \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

est dite α -dense dans $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ si pour tout $x \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ il existe au moins un $t \in A$ tel

que

$$d(x, h(t)) \leq \alpha$$

où d est la distance euclidienne dans \mathbb{R}^n .

4.3 Transformation Alienor Modifiée.

La méthode **Alienor** a connu une grande évolution, nous en donnons quelques unes :

Dans [8] [9], en prenant $a = \frac{\alpha}{\pi}$, on obtient en dimension 3 (\mathbb{R}^3) une courbe paramétrée dont les coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x_1 = h_1(\theta) - INT\left(\frac{h_1(\theta) - a_1}{b_1 - a_1}\right)(b_1 - a_1) \\ x_2 = h_2(\theta) - INT\left(\frac{h_2(\theta) - a_2}{b_2 - a_2}\right)(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + \frac{\theta}{\theta_3}(b_3 - a_3) \end{cases} \quad (4.14)$$

$$h_1(\theta) = a\delta_2(\theta) \cos(\delta_2(\theta)) + (a_1 + b_1)/2 \quad (4.15)$$

$$h_2(\theta) = a\delta_2(\theta) \sin(\delta_2(\theta)) + (a_2 + b_2)/2 \quad (4.16)$$

$INT(.)$ est la fonction partie entière.

$$\delta_2(\theta) = (-1)^{\beta_2(\theta)} \left[\theta - (\beta_2(\theta)) + \frac{1}{2}((1)^{\beta_2(\theta)+1} + 1)\theta_2 \right] \quad (4.17)$$

$$\beta_2(\theta) = INT(\theta/\theta_2) \quad (4.18)$$

$$\theta_2 = \frac{\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}{2a} \quad (4.19)$$

$$\theta_3 := \frac{b_3 - a_3}{\alpha} \theta_2 \quad (4.20)$$

Cette courbe paramétrée est $\alpha\sqrt{2}$ dense dans $\prod_{i=1}^3 [a_i, b_i]$
 Pour la généralisation à n dimensions, voir [9].

4.4 Méthode d'optimisation globale DIVANU

DIVANU : Diminution Variables Number

C'est une variante d'Aliénor développée par **Bendiab et Cherruault** [12][18].

La méthode consiste à réduire le nombre de variables en posant :

$$x_i = \varphi(t)h_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, bornée et telle que la mesure de son noyau au sens de Lebesgue soit nulle :

$$Mes(Ker\varphi) = 0 \text{ et } |\varphi(t)| \leq b_f, \forall t \in [0, t_{\max}] \quad (4.22)$$

De plus les fonctions $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sont bornées et T -périodiques.

Si on note

$$H(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) \quad (4.23)$$

alors

$$\exists b_h > 0 / \|H(t)\| < b_h, \forall t \in [0, t_{\max}] \quad (4.24)$$

Avec ses conditions on peut définir une α -densité où $\alpha = \sqrt{2}b_f b_h$. Pour plus d'information, consulter [12]. Dans [18] **Cherruault** a montré que si on considère la transformation

$$x_i = a\theta \sin(\alpha_i \theta) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.25)$$

où la suite α_i est croissante vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & 1 \\ \alpha_i & \gg & \alpha_{i-1} \\ \frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} & = & \rho, \rho \text{ constante} \end{cases} \quad (4.26)$$

alors cette transformation réductrice densifie l'espace \mathbb{R}^n avec

$$\alpha = \sqrt{n-1}\pi\rho$$

Une méthode constructive pour générer des courbes α -denses avec un temps de calcul optimal a été donnée par **Mora et Cherruault** [40] [41]. Mais ce sont les transformations du type(4.25) qui sont les plus utiles en pratique.

4.5 Application à l'identification de paramètres[18].

On peut se placer dans un cadre général d'un système biologique, modélisé par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1(t), \dots, x_n(t), \alpha_1, \dots, \alpha_p, t) \\ x_i(0) &= \beta_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

où les f_i et β_i sont respectivement des fonctions non linéaires et des paramètres connus. Dans l'expression des f_i , les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont inconnus et ils doivent être identifiés à partir d'une observation.

Soit

$$z = Bx \tag{4.27}$$

l'observation où B est une matrice ($n \times n$) connue.

Alors les $\alpha_i, i = 1, \dots, p$ sont obtenus en minimisant la fonctionnelle d'erreur

$$J = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [z_i(t_j) - z_i^c(t_j)]^2 \tag{4.28}$$

Dans cette expression (4.28), les t_j sont des instants de mesure et z_i^c désigne la fonction $z_i(t)$ calculée à partir de (4.29) en fixant les $\alpha_i, i = 1, \dots, p$.

De manière pratique :

La fonctionnelle J contient des paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ à déterminer (c'est l'**identification**).

La méthode d'**Alienor** peut être utilisée suivant le schéma[20] :

1. Soit $J(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ la fonctionnelle à minimiser
2. J dépend des variables x_1, \dots, x_p . Ces variables peuvent être décrites par un parallélogramme :

$$H = \{(x_1, \dots, x_p) : \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, p\} \quad (4.29)$$

3. On densifie H par une courbe α -dense d'équation

$$x_i = h_i(\theta), \quad i = 1, \dots, p \quad (4.30)$$

4. Par l' α -densité on a :

$$\min_{(x_1, \dots, x_p) \in H} J(x_1, \dots, x_p) = \min_{\theta \in [a, b]} J^*(\theta) = J^*(\theta_0) \quad (4.31)$$

où

$$J^*(\theta) = J(h_1(\theta), \dots, h_p(\theta)) \quad (4.32)$$

5. En fin les paramètres sont obtenus par :

$$\alpha_i = h_i(\theta_0) \quad , \quad i = 1, \dots, p \quad (4.33)$$

4.6 Exemple d'application.

Nous allons montrer comment appliquer la méthode d'identification au modèle de diffusion d'inhibiteur dans le cerveau.

Soit

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{V}{K} (c - \frac{c^2}{K}) \\ c(x, 0) = e^{-K_0 x} \end{cases} \quad (4.34)$$

où $c = c(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$

D , V , K , et K_0 sont des paramètres biologiques à identifier.

La résolution de ce problème par la méthode d'**Adomian**, permet d'obtenir une solution (approchée) où apparaissent explicitement les variables x et t et des paramètres D, V, K, K_0 . L'identification de ces paramètres suit le schéma suivant :

On définit la fonction coût

$$J(D, V, K, K_0) \quad (4.35)$$

par la formule :

$$J(D, V, K, K_0) = \sum_{i,j} [c(x_i, t_j, D, V, K, K_0) - c_{i,j}]^2 \quad (4.36)$$

où $c(x_i, t_j)$ est la solution $c(x, t)$ du problème(4.34), obtenue par la méthode d'**Adomian**, appliquée au point (x_i, t_j) . Et $c_{i,j}$ les concentrations observées à la profondeur x_i . avec un temps de diffusion t_j .

L'identification de D, V, K , et K_0 revient à minimiser la fonctionnelle J sur un ensemble admissible

$$\Omega = [a_D, b_D] \times [a_V, b_V] \times [a_K, b_K] \times [a_{K_0}, b_{K_0}] \quad (4.37)$$

Soit

$$\min_{\Omega} J(D, V, K, K_0) = J(D^*, V^*, K^*, K_0^*) \quad (4.38)$$

les valeurs D^*, V^*, K^*, K_0^* étant les solutions de notre problème d'identification.

En utilisant la méthode Aliénor courbes α -dense on aura :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} J(D, V, K, K_0) &= \min_{\theta \in [0, \theta_{\max}]} J(h_1(\theta), h_2(\theta), h_3(\theta), h_4(\theta),) \\ &= \min_{\theta \in [0, \theta_{\max}]} J^*(\theta) \\ &= J^*(\theta_0) \end{aligned}$$

On en déduira :

$$D^* = h_1(\theta_0), \quad V^* = h_2(\theta_0), \quad K^* = h_3(\theta_0), \quad K_0^* = h_4(\theta_0)$$

4.7 Contrôle optimal

Soit un phénomène physique modélisé par une équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u) \quad (4.39)$$

- L'équation (4.49) est appelée équation contrôlée.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état
- $u \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur de contrôle (ou de commande)

On suppose que les fonctions :

$$f, \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont continues

avec

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- On appelle $U \subset \mathbb{R}^r$ l'ensemble des valeurs admissibles prises par le paramètre de contrôle $u(t)$.
- Un contrôle $u(t) \in U$, mesurable et borné est dit un contrôle admissible.
- La classe des contrôles admissibles est notée Ω_0

On peut donc définir :

Définition :

un problème de contrôle optimal est la donné :

- *d'une équation contrôlée (4.39).*
- *d'une classe de contrôle admissible Ω_0*
- *d'un certain critère donné qu'on veut optimiser par le contrôle $u(t)$ vérifiant (4.39).*
- *d'un état du phénomène décrit par $x(t)$ dans (4.39).*

Pour plus de détails, consulter par exemple[32].

D'une manière générale , il s'agira de trouver

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_p) \tag{4.40}$$

qui minimise (ou maximise) le critère :

$$J = \int g(\vec{x}, \vec{u}) dt, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \tag{4.41}$$

où :

- La fonction g et le paramètre T sont connus.
- \vec{x} et \vec{u} doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t), \quad n \geq p \\ \dot{x}_i(0) &= \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.42)$$

f_i, α_i sont connus. \dot{x} et \dot{x}_i désignent les dérivées respectives de x et x_i par rapport au temps.

En général, la résolution du problème de contrôle optimal fait appel aux méthodes classiques telles que la méthode de programmation dynamique de **Richard Bellman** ou la méthode liée au principe du maximum de **Pontryagin**. Quand bien même que ces méthodes sont bien sophistiquées, elles sont lourdes pour la mise en oeuvre pratique. Mais l'utilisation du couple **Alienor-Adomian** est plus aisée en ce sens que l'on ramène un problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation classique[20].

4.8 Couple Alienor-Adomian.

Prenons le cas général d'un problème de contrôle optimal.

Soit à trouver le contrôle

$$\dot{u} = (u_1, \dots, u_p) \quad (4.43)$$

minimisant le critère

$$J = \int_0^T g(\vec{x}, \vec{u}) dt, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad (4.44)$$

où la fonction g et T sont connus; \vec{x} et \vec{u} satisfaisant le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) ; n \geq p \\ \dot{x}_i(0) &= \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.45)$$

f_i et α_i sont connus.

Ici, la fonctionnelle J depend **implicitement** du contrôle $\vec{u}(t)$.

En effet, la solution \vec{x} de (4.39) contient implicitement les u_1, \dots, u_p à travers les fonctions f_i . Et donc, on ne peut appliquer directement les méthodes d'optimisation classique (locale ou globale) à (4.44). Il serait intéressant de transformer d'abord le problème de contrôle optimal(4.44) en un problème d'**optimisation classique**[20].

Nous savons qu'en utilisant la méthode décompositionnelle d'**Adomian** pour la résolution du problème(4.45), nous obtenons une solution \vec{x} où apparaissent explicitement les variables du contrôle. La démarche est la suivante :

Tout d'abord il faut poser

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^q C_k^i \theta_k(t), \quad i = 1, \dots, p \quad (4.46)$$

où les $\theta_k(t)$ sont des fonctions connues qui constituent une base dans l'espace des fonctions où évoluent les $u_i(t)$. Selon l'approximation choisie, les $\theta_k(t)$ peuvent être des fonctions polynômiales, exponentielles, splines....

Ainsi, déterminer les $u_i(t)$ qui minimisent la fonctionnelle J de (4.44), sous les contraintes(4.45). revient à déterminer les paramètres C_k^i , $i = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, q$.

La solution de (4.45) obtenue par l'emploi de la méthode d'**Adomian** sera sous la forme

$$J = \int_0^T g \left[v_j^1(C_k^s, t), \dots, v_j^n(C_k^s, t), \sum_{k=1}^q C_k^1 \theta_k(t), \dots, \sum_{k=1}^q C_k^p \theta_k(t) \right] dt \quad (4.47)$$

qui est une fonction explicite de $p \cdot q$ variables (C_k^s).

Pour minimiser la fonctionnelle J , on peut utiliser la méthode d'**Alienor** ou une de ses variantes[18][20]. Une transformation réductrice permet d'écrire :

$$C_k^s = h_k^s(\theta), \quad \theta \geq 0, \quad s = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, q$$

La fonctionnelle J de (4.44) devient une fonction d'une seule variable θ :

$$J((C_k^s)) = J((h_k^s(\theta))) = J^*(\theta)$$

Par suite, il ne restera qu'à trouver les minima globaux de J^* qui seront des approximations des minima globaux de J .

L'étude de l'existence et d'unicité du problème de contrôle optimal se ramène ainsi à l'étude d'existence et d'unicité des minima de la fonction d'une variable $J^*(\theta)$.

Souvent $J^*(\theta)$ sera une fonction continue dont on cherchera le (les) minimum sur un ensemble fermé et borné (compact) $[0, \theta_{\max}]$, et donc l'existence d'un minimum global est évidente.

L'étude de l'unicité fait appel à des propriétés supplémentaires, pas toujours facile à vérifier pratiquement[18].

4.9 Application au modèle de diffusion de substances dans le cerveau.

En revenant au problème du contrôle optimal(P) sous la contrainte(4.1). On suppose que les paramètres D, V, K, K_0 sont déjà déterminés par identification. La démarche **Alienor-Adomian** consistera à :

- Prendre le contrôle sous la forme

$$u(t) = \sum_{i=1}^p u_i \theta_i(t) \quad (4.48)$$

- La méthode d'**Adomian** permet d'exprimer la solution $c(x, t)$ de (4.1) par

$$c(x, t) = \sum_{n=0}^N c_n(x, t, u_1, \dots, u_p) \quad (4.49)$$

où les c_n dépendent explicitement des paramètres de contrôle u_1, \dots, u_p .

- En posant $x = x_0$, et $t = t_0$

, on aura :

$$c(x_0, t_0) = \sum_{n=0}^N c_n(x_0, t_0, u_1, \dots, u_p) \quad (4.50)$$

en reportant cette expression(4.50) dans l'expression de la fonctionnelle à minimiser (P), le problème du contrôle optimal (P) devient un problème de minimisation classique

$$\min_{u_1, \dots, u_p} \int_0^T [c(x_0, t_0) - a]^2 dt \quad (4.51)$$

où la méthode **Alienor** peut être employée aisément.

Exemple de résolution

Nous résolvons ici un cas très particulier. Les valeurs des paramètres D, V, K et K_0 sont prises dans[33]. Elles ont été obtenues par identification en utilisant des données expérimentales obtenues par le Dr **A.Meulemans**[37][38].

Il en est de même pour x_0, t_0, a , qui sont respectivement la profondeur de la zone tumorale, l'instant voulue et la concentration souhaitée de l'inhibiteur.

On a[33] :

$$D = 38.10^{-6}; \quad V = 10^{-7}; \quad K = 10^{-4}; \quad K_0 = 1100$$

$$x_0 = 0,01cm; \quad t_0 = 1200s; \quad a = 10^{-3}$$

De plus, on simplifiera le problème en prenant :

$$u(t) = \sum_{i=1}^p u_i \theta_i(t) = u_1$$

Problème

Trouver le contrôle u_1 qui minimise le critère

$$\min_{u_1} [c(0, 01; 1200) - 0, 001]^2$$

où c satisfait

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{V}{K} (c - \frac{c^2}{K}) \\ c(x, 0) = u_1 e^{-K_0 x}, \quad x > 0 \end{cases}$$

avec $c = c(x, t)$,

De

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{V}{K} c - \frac{V}{K^2} c^2$$

On peut déduire :

$$c(x, t) = c(x, 0) + D \int_0^t \frac{\partial^2 c(x, s)}{\partial x^2} ds + \frac{V}{K} \int_0^t c(x, s) ds - \frac{V}{K^2} \int_0^t c^2(x, s) ds$$

Le schéma de la méthode d'**Adomian** permet d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, 0) + D \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, s) ds + \frac{V}{K} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x, s) ds - \frac{V}{K^2} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} A_n \{c^2(x, s)\} ds$$

Il en résulte l'algorithme d'**Adomian** suivant :

$$\begin{cases} c_0 &= u_1 e^{-K_0 x} \\ c_{n+1} &= D \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_n(x, s) ds + \frac{V}{K} \int_0^t c_n(x, s) ds - \frac{V}{K^2} \int_0^t A_n \{c^2(x, s)\} ds \end{cases}$$

avec

$$A_0 = c_0^2$$

$$A_1 = 2c_0 c_1$$

$$A_2 = 2c_0 c_2 + c_1^2$$

$$A_3 = 2c_0 c_3 + 2c_1 c_2$$

.d'où

$$\begin{aligned} c_1 &= D \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_0(x, s) ds + \frac{V}{K} \int_0^t c_0(x, s) ds - \frac{V}{K^2} \int_0^t A_0 ds \\ &= Du_1 K_0^2 \exp(-K_0 x) t + \frac{V}{K} u_1 \exp(-K_0 x) t - \frac{V}{K^2} u_1^2 \exp(-2K_0 x) t \\ c_1 &= [Du_1 K_0^2 \exp(-K_0 x) + \frac{V}{K} u_1 \exp(-K_0 x) - \frac{V}{K^2} u_1^2 \exp(-2K_0 x)] t \\ c_2 &= D \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_1(x, s) ds + \frac{V}{K} \int_0^t c_1(x, s) ds - \frac{V}{K^2} \int_0^t A_1 ds \\ &= D [Du_1 K_0^4 \exp(-K_0 x) + \frac{V}{K} u_1 K_0^2 \exp(-K_0 x) - \frac{4V}{K^2} u_1^2 K_0^2 \exp(-2K_0 x)] \frac{t^2}{2} \\ &\quad + \frac{V}{K} [Du_1 K_0^2 \exp(-K_0 x) + \frac{V}{K} u_1 \exp(-K_0 x) - \frac{V}{K^2} u_1^2 \exp(-2K_0 x)] \frac{t^2}{2} \\ &\quad - \frac{V}{K^2} [2Du_1^2 K_0^2 \exp(-2K_0 x) + \frac{2u_1^2 V}{K} u_1 \exp(-2K_0 x) - \frac{2u_1^3 V}{K^2} u_1^2 \exp(-3K_0 x)] \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

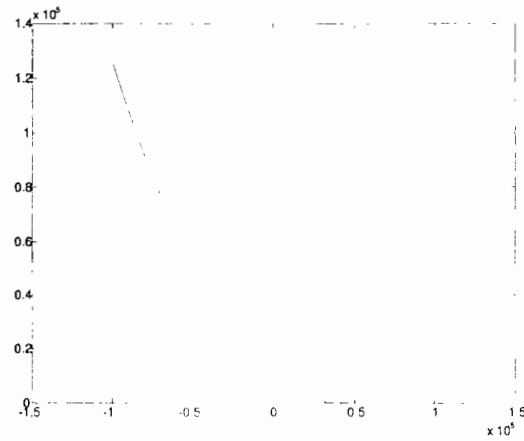
En remplaçant les différentes constantes par leur valeur, on obtient une solution approchée :

$$\begin{aligned} c(x, t) &\simeq c_0 + c_1 + c_2 \\ &= u_1 \exp(-1100x) + [4, 5981u_1 - u_1^2 \exp(-2200x)] t \\ &\quad + \frac{1}{2} [-27, 5881u_1^2 \exp(-2200x) - 0, 0002u_1^3 \exp(-2200x)] t^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} [2u_1^5 \exp(-3300x) + 21, 14252361u_1 \exp(-1100x)] t^2 \end{aligned}$$

Et on obtient en utilisant le logiciel **Matlab** :

$$\min_{u_1} [c(0, 01; 1200) - 0, 001]^2 \simeq 0, 381966.10^{-5}$$

Ce minimum s'observe bien à travers la courbe suivante :



Quatrième partie

Equations intégrales

Chapitre 5

ETUDE GENERALE D'EQUATIONS INTEGRALES

5.1 Introduction

Les équations intégrales interviennent fréquemment dans la modélisation de problèmes physiques dont les plus courants sont : des phénomènes de cause à effet, des problèmes de type hérédité, l'étude dynamique des populations etc. Nous notons aussi que des systèmes d'équations différentielles avec des conditions initiales ou aux limites se transforment facilement en équations intégrales. La formulation en équations intégrales permet de prendre en compte simultanément des conditions initiales ou aux limites et rendent plus facile leur traitement numérique par la méthode d'**Adomian**..

Plusieurs méthodes numériques classiques sont généralement utilisées pour la résolution des équations intégrales. Parmi celles-ci, on peut citer des méthodes exactes(**Laplace, Fourier...**), des méthodes d'approximation(la méthode du noyau résolvant, la méthode des approximations successives) et des méthodes de discrétisation. Cependant ces méthodes ne convergent pas dans les cas où le noyau de l'équation intégrale présente des singularités ou quand l'intervalle d'intégration est infini[47][57][48]. De plus ces méthodes conduisent, le plus souvent à des systèmes algébriques non linéaires qui sont difficiles à résoudre numériquement. En général leur résolution exige des moyens très robustes. Nous proposons ici de les résoudre par la méthode d'**Adomian**

qui donne des résultats très satisfaisants si les équations à résoudre sont sous la **forme canonique**.

Dans ce chapitre, nous rappèlerons quelques notions sur les équations intégrales avec des exemples de méthodes numériques de résolution. La méthode d'**Adomian** sera utilisée pour résoudre des équations de deuxième espèce qui sont déjà posées sous la **forme canonique**. L'étude des équations intégrales de première espèce qui ne sont pas sous la **forme canonique d'Adomian**, fera l'objet du prochain chapitre avec de nouveaux résultats.

5.2 Classification des équations intégrales[51]

Soit l'équation intégrale suivante :

$$\int_a^b K(x, t)g(u(t))dt = f(x), \quad a < x < b \quad (5.1)$$

où $f(x)$, $K(x, t)$, et g sont des fonctions connues, a et b sont des nombres fixés, puis u l'inconnue à déterminer.

Cette équation(5.1) est appelée **équation intégrale de première espèce de type Fredholm**.

$K(x, t)$ est appelé le **noyau de l'intégrale**.

– L'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)g(u(t))dt, \quad a < x < b \quad (5.2)$$

,où $f(x)$, $K(x, t)$ sont des fonctions connues puis a , b , et λ sont des nombres fixés, est appelée **équation intégrale de 2^{ème} espèce de type Fredholm**.

– L'équation

$$\int_a^x K(x, t)g(u(t))dt = f(x), \quad x > a \quad (5.3)$$

est appelée **équation de première espèce de type Volterra**.

– L'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)g(u(t))dt, x > a \quad (5.4)$$

est appelée **équation de 2^{ème} espèce de type Volterra**.

Ces différents types d'équations ci-dessus peuvent être présentées comme des cas particuliers de l'équation générale suivante dite : **équation de 3^{ème} espèce**:

$$\sigma(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\rho(x)} K(x,t)g(u(t))dt \quad (5.5)$$

(1) Cas de **Volterra** on a :

$$\rho(x) = x$$

(2) Cas de **Fredholm** on a :

$$\rho(x) = b$$

(3) Cas des équations de 1^{ère} espèce :

$$\sigma(x) = 0$$

(4) Cas des équations de 2^{ème} espèce :

$$\sigma(x) = 1$$

Remarque :

la forme de l'équation générale(5.5) est la suivante :

$$\sigma(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\rho(x)} K(x, t, g(u(t))) dt \quad (5.6)$$

c'est à dire que le noyau contient le terme en u .

5.3 Quelques définitions

Définition 1

On appelle équation singulière une équation pour laquelle l'intervalle d'intégration est infini ou dans laquelle le noyau possède au moins un point singulier.

Définition 2

L'équation(5.5) sera dite homogène si $f(x) = 0$

Définition 3

Si le noyau de l'équation intégrale est tel que $K(x, y) = K(y, x)$, on dit que le noyau est symétrique.

Définition 4

Une équation de type (5.5) est dite bien posée si

- (i) *pour toute fonction f , il existe une et une seule solution*
- (ii) *la dépendance de u par rapport à f est continue.*

Définition 5 :

Un noyau $k(x, t)$ de la forme $k(x, t) = \sum_{j=0}^J a_j(x)b_j(t)$ où les a_j ($j = 0 \dots J$) sont linéairement indépendants aussi bien que les fonctions b_j ($j = 0 \dots J$), est appelé noyau dégénéré d'ordre J .

5.4 Etude théorique d'équations intégrales

Tout d'abord, nous rappelons la formule généralisée de **Leibnitz** qui sera exploitée dans la recherche de certaines **formes canoniques**, à travers le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} F : \Omega \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \longmapsto F(x, t) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

une application bornée

(i) admettant une dérivée partielle en x , $F_x(x, t)$, bornée

(ii) Séparablement continue en t sur $[a, b]$

Soit $C : \Omega \longrightarrow [a, b]$ une application dérivable. Alors l'application

$$I : \Omega \longrightarrow \mathbb{K} / x \longmapsto \int_a^{c(x)} F(x, t) dt \quad (5.8)$$

est dérivable de dérivée

$$I'(x) = \int_a^{c(x)} F_x(x, t) dt + C'(x)F(x, C(x)) \quad (5.9)$$

Corollaire :

Plus généralement, on a la formule de dérivation suivante :

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x, t) dt = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F_x(x, t) dt + \beta'(x)F(x, \beta(x)) - \alpha'(x)F(\alpha(x), x) \quad (5.10)$$

Dans toute la suite, on utilisera la notation suivante :

$$K_x^{(k)}(x, t) = \frac{\partial^k K(x, t)}{\partial x^k}, \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (5.11)$$

5.5 Résultats d'existence et d'unicité de solution d'équations intégrales de première espèce.

Nous considérons les équations de la forme

$$\int_a^{b(x)} K(x, t, u(t)) dt = f(x) \quad (5.12)$$

avec $a \leq x \leq T$ et $a \leq t \leq b(x) \leq T$. Mais sans restreindre la généralité et pour simplifier les calculs, nous allons nous intéresser aux équations de type :

$$\int_0^x K(x, t)g(u(t))dt = f(x) \quad (5.13)$$

où le noyau K est une fonction réelle connue définie sur $[0, T] \times [0, x]$. Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution de (5.13) sont données par le théorème suivant :

Théorème 2[31]

Sous les hypothèses :

- (i) $K(x, x)$ et $K_x(x, t)$ continue sur $0 \leq t \leq x \leq T$
- (ii) $K(x, x) \neq 0$ partout sur $0 \leq x \leq T$
- (iii) $f(0) = 0$ (iv) $f(x)$ et $f'(x)$ continues sur $0 \leq x \leq T$

Alors (5.13) possède une unique solution continue.

5.6 Résultats d'existence et d'unicité de solution d'équations intégrales de deuxième espèce.

Soit l'équation non linéaire d'inconnue u :

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t, u(t)) dy + f(x) \quad (5.14)$$

Cette équation peut être une équation de **Volterra** ou une équation de **Fredholm**. Les conditions d'existence d'une solution de (5.14) sont assurées par le théorème suivant [31] :

Théorème 3[31]

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées : (i) $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (ii) $K(x, t, u)$

est continue et bornée sur l'espace $\Delta_T \times \mathbb{R}$ où

$$\Delta_T = \{(x, t) / 0 \leq t \leq x \leq T\}$$

Alors il existe au moins une solution continue $u(x)$ de l'équation

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t)) dt$$

qui est définie sur tout l'intervalle $[0, T]$.

5.7 Quelques méthodes numériques de résolution d'équations intégrales

Nous rappèlerons ici quelques méthodes numériques classiques qui sont généralement utilisées pour la résolution des équations intégrales avec quelques exemples. La méthode d'**Adomian** exposée dans la première partie de ce document sera utilisée pour la résolution des équations intégrales de deuxième espèce qui sont déjà sous la forme canonique.

5.7.1 Résolution à l'aide des méthodes d'optimisation

Soit une équation intégrale de type Fredholm de seconde espèce. Elle s'écrit sous la forme :

$$u = Nu + f \quad (5.15)$$

où N est un opérateur intégral non linéaire connu. La fonction f est donnée et l'on cherche u dans un ensemble de **Hilbert** H . Dans la pratique, H sera souvent l'espace $L^2(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On peut aussi se placer dans des espaces plus réguliers (espaces de **Sobolev**). On suppose $\forall f \in H$, (5.15) admet une unique solution. Pour résoudre (5.15), on utilise la fonctionnelle J :

$$J = \|u - Nu - f\|_{L^2}^2 \quad (5.16)$$

La résolution de (5.16) est ramenée à un problème d'optimisation

$$\underset{u}{\text{min}} \left(J(u) = \int_{\Omega} (u - Nu - f)^2 dt \right) \quad (5.17)$$

qui n'est pas tout à fait un problème de minimisation classique. Et pour s'y ramener, il suffit de chercher la solution $u(t)$ sous la forme $u(t) \approx \sum_{p=1}^n C_p \theta_p(t)$ où les $\theta_p(t)$ sont des fonctions connues. Nous verrons plus loin qu'il existe une méthode d'optimisation plus indiquée pour la résolution de (5.17) : la méthode réductrice d'**Alienor**.

5.7.2 La méthode de collocation

Soit l'équation intégrale linéaire :

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [a,b] \quad (5.18)$$

où $K(x,t)$ et $f(x)$ sont connues et où l'on cherche la fonction $u(t)$ satisfaisant (5.18). La méthode de collocation consiste à utiliser une formule approchée pour le calcul de l'intégrale. On obtient une équation approchée de (5.18) sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n w_i K(x, t_i) u_i = f(x) \quad (5.19)$$

où les w_i sont les poids de la méthode d'intégration, où les t_i sont associés à la méthode d'intégration et où l'on a posé

$$u_i = u(t_i). \quad (5.20)$$

On écrit l'équation fonctionnelle (5.19), dépendant de la variable x , aux points

$$x = x_j; \quad j = 1, \dots, n \quad (5.21)$$

Ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^n w_i K(x_j, t_i) u_i = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.22)$$

On obtient alors les inconnues u_i en résolvant (5.22) qui est un système algébrique linéaire de n équations à n inconnues. Il suffira que le déterminant de ce système soit non nul pour que la solution existe (et soit unique). On peut montrer que les $u(t_i)$ ainsi trouvées sont des

approximations de la solution de l'équation intégrale (5.18).

Remarque

Si l'on considère une équation intégrale non linéaire

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)g(u(t))dt + f(x) \quad , \quad x \in [a, b]$$

Alors la méthode de collocation conduit à un système algébrique non linéaire et la mise en oeuvre numérique sera bien délicat. Mais la méthode d'**Adomian** s'appliquera bien à ce type d'équation

5.7.3 Méthode de Liouville-Neumann.

Soit une équation intégrale :

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,y)\phi(y)dy \quad (5.23)$$

où le noyau K est supposé suffisamment régulier. On écrira :

$$\phi^{(0)}(x) = f(x) \quad (5.24)$$

$$\phi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,y)\phi^{(n-1)}(y)dy \quad (5.25)$$

$n = 2, 3, \dots$ alors la solution $\phi(x)$ de l'équation (5.24) sera donnée par la série :

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^n K^n f + \dots \quad (5.26)$$

dite série de **Liouville-Neumann**.

Avec

$$Kf = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, y)f(y)dy \quad (5.27)$$

$$K^n f = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, y)K^{(n-1)} f dy \quad (5.28)$$

, $n = 2, 3, \dots$

Condition suffisante de convergence[51]

Une condition suffisante de convergence de la série (5.26) est :

$$|\lambda| (b(x) - a(x)) \max |K(x, y)| < 1 \quad (5.29)$$

avec

$$a(x) \leq x, y \leq b(x) \quad (5.30)$$

Exemple 1 : Résoudre l'équation de **Fredholm**

$$\phi(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^1 xy\phi(y)dy$$

Par itération on a :

$$\phi^{(0)}(x) = x$$

$$\phi^{(1)}(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^1 xy^2 dy = (1 + \frac{1}{15})x \quad \phi^{(2)}(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^1 x(1 + \frac{1}{15})y^2 dy = (1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{15^2})x$$

$$\dots \phi(x) = (1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{15^2} + \dots)x = \frac{15}{14}x$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation de **Volterra**

$$\phi(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^x xy\phi(y)dy, \quad x > 0$$

On a :

$$\phi^{(0)}(x) = x \quad \phi^{(1)}(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^x xy^2 dy = x + \frac{1}{15}x^3 \quad \phi^{(2)}(x) = x + \frac{1}{5} \int_0^x xy(y + \frac{1}{15}y^3)dy =$$

$$x[1 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{2!}(\frac{1}{15}x^3)^2]$$

$$\dots \phi^{(n)}(x) = x[1 + (\frac{1}{15}x^3) + \frac{1}{2!}(\frac{1}{15}x^3)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\frac{1}{15}x^3)^n]$$

Par suite :

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(x) = x \exp(\frac{x^3}{15})$$

5.8 Résolution des équations intégrales de deuxième espèce par la méthode d'Adomian

Soit d'une manière générale, une équation non linéaire d'inconnue u :

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t, u(t)) dt + f(x) \quad (5.31)$$

Cette équation peut être une équation de **Volterra** ou à une équation de **Fredholm**. Nous remarquons ici que les équations intégrales de 2eme espèce sont sous la **forme canonique**. Et donc on peut appliquer directement la méthode d'**Adomian** pour leur résolution. En effet l'équation (5.31) peut s'écrire en terme d'opérateur :

$$u = Nu + f \quad (5.32)$$

avec

$$Nu = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t, u(t)) dt \quad (5.33)$$

Ici on peut se contenter des polynômes d'**Adomian** associés à la fonction scalaire

$$u \longrightarrow K(., ., u). \quad (5.34)$$

Et nous pouvons calculer chaque termes de la série d'**Adomian** par le schéma récursif suivant :

$$\begin{cases} u_0(x) & = f(x) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ u_{n+1}(x) & = \int_{a(x)}^{b(x)} A_n\{u \longrightarrow K(x, t, u(t))\}dt \end{cases} \quad (5.35)$$

Cas Linéaire où $k(x, t, u(t)) = K(x, t)u(t)$

Soit l'équation linéaire générale

$$u(x) = \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)u(t)dt + f(x) \quad (5.36)$$

L'algorithme d'**Adomian** sera :

$$\begin{cases} u_0(x) & = f(x) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ u_{n+1}(x) & = \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)u_n(t)dt \end{cases} \quad (5.37)$$

On peut montrer que la série solution de (5.37) calculée par la méthode décompositionnelle se réduit à la série de **Neumann**(5.26). La convergence de cette série dépend de l'espace dans lequel nous cherchons la solution du problème considéré. Dans l'espace $C[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme, la condition de convergence est :

$$|\lambda| < \frac{1}{\max \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)dt} \quad (5.38)$$

Dans L^2 , une condition suffisante de convergence est :

$$|\lambda| < \frac{1}{\left[\int_{a(x)}^{b(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} |K(x,t)|^2 dx dt \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.39)$$

En effet : Soit l'équation linéaire générale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)\varphi(t)dt + f(x) \quad (5.40)$$

où K et f sont continues et $\varphi(x)$ l'inconnue à déterminer. Alors on a le théorème suivant :

Théorème 4 [1]

La série solution $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ de l'équation (5.40) donnée par la méthode décompositionnelle coïncide avec la série classique de Neumann.

Preuve

En appliquant la méthode d'**Adomian** à la forme canonique (5.36), les termes de la série d'**Adomian** solution de l'équation (5.40) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= f(x) \\ \varphi_1 &= K\varphi_0 = \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)f(t)dt = \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K_1(x,t)f(t)dt \dots \\ \varphi_n &= K u_{n-1} = \lambda^n \int_{a(x)}^{b(x)} \dots \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t_1) \dots K(t_{n-1},t)f(t)dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt \\ &= \lambda^n \int_{a(x)}^{b(x)} K_n(x,t)f(t)dt \text{ où } K_n(x,t) = \int_{a(x)}^{b(x)} \dots \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t_1)K(t_1,t_2) \dots K(t_{n-1},t)dt_1 \dots dt_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi donc nous retrouvons la résolvante classique de la formule de **Neumann**

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t)$$

et les noyaux itérés $K_n(x, t)$. Nous allons appliquer la méthode d'**Adomian** à la résolution de quelques équations intégrales de 2e espèce.

Exemple 3 : Considérons l'équation linéaire suivante :

$$u(x) = \frac{2x}{3} + \int_0^1 xtu(t)dt \quad (5.41)$$

En appliquant le schéma de la méthode d'**Adomian**, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{2x}{3} \\ u_1(x) = \frac{2x}{(3)^2} \\ u_2(x) = \frac{2x}{(3)^3} \\ \dots \\ u_n(x) = \frac{2x}{(3)^{n+1}} \end{array} \right. \quad (5.42)$$

d'où la solution de l'équation : $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{(3)^{n+1}} = x$

Exemple 4 : Considérons l'équation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2} dt \quad (5.43)$$

qui peut encore s'écrire

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt + \varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} \varphi^2(t) dt \quad (5.44)$$

Avec la méthode d'Adomian, on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) = \text{Arctg}(x) + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \sum_{i=0}^{\infty} A_i dt \quad (5.45)$$

où les φ_i sont calculés par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \text{Arctg}(x) \\ \varphi_1(x) &= \frac{(\text{Arctg}x)^3}{3} \\ \varphi_2(x) &= \frac{2(\text{Arctg}x)^5}{15} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad (5.46)$$

il est facile de montrer que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) = \text{tg}(\text{Arctg}x) = x \quad (5.47)$$

Exemple 5

Considérons l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t+\varphi(t)} dt \quad (5.48)$$

En résolvant cette équation avec la méthode décompositionnelle, nous trouvons :

$$\varphi_n(x) = 0; \forall n \quad (5.49)$$

et donc :

$$\varphi(x) = 0 \text{ est solution de l'équation (5.48)}$$

Remarque

Avec la méthode des approximations successives, le choix de $\varphi_0(x) = 0$, donne la même solution exacte, mais si l'on choisit $\varphi_0(x) \neq 0$, la méthode donne un résultat faux.

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différentes équations intégrales et nous avons indiqué quelques méthodes numériques de résolution. Nous venons aussi de constater à travers des exemples, l'efficacité de la méthode d'**Adomian** appliquée aux équations intégrales de 2e espèce. Dans le prochain chapitre, nous aborderons la résolution des équations intégrales de première espèce par la méthode d'**Adomian**.

Chapitre 6

ETUDE DES EQUATIONS INTEGRALES DE PREMIERE ESPECE PAR LA METHODE DECOMPOSITIONNELLE.

Les équations intégrales de première espèce sont les plus utilisées dans la modélisation des phénomènes réels. On peut en citer : la localisation de tumeurs par tomographie, la détermination de profils atmosphériques de températures à partir des données télémétriques, la prospection sismique... etc.

La méthode d'**Adomian** s'applique bien aux équations de 2^{eme} espèce qui sont déjà sous la forme canonique[1][18]. **Cependant une grande difficulté demeure au niveau des équations de 1^{ere} espèce qui ne sont pas sous la forme canonique.** Par exemple pour les équations de type

$$\int_a^{b(x)} k(x, t)g(u(t))dt = f(x). \quad (6.1)$$

Les travaux existants ont montré que la méthode décompositionnelle d'**Adomian** ne s'applique que lorsque le noyau k est de classe C^n avec

$$\partial^n k(x, x) \neq 0 \quad (6.2)$$

etc. Cet handicap est lié à la forme canonique classique de la méthode utilisée par les auteurs [54][55].

De plus, pour les équations de type **Fredholm** (qui appartiennent à la classe des équations dites mal posés), la méthode d'**Adomian** n'a pu être appliquée qu'après transformation des dites équations à des équations approchées en utilisant la technique de régularisation.

Dans ce chapitre qui constitue l'essentiel du travail de la troisième partie de cette thèse, nous rappelons des résultats déjà obtenus [55] avant de présenter de nouveaux résultats qui constituent notre apport personnel. Il s'agira de ramener ces équations sous la **forme canonique** (et donc en équations de 2^{ème} espèce) pour rendre possible l'application de la méthode décompositionnelle. A cet effet, nous utiliserons dans un premier temps une **méthode de substitution** pour obtenir des **formes canoniques**. Nous en donnerons aussi une forme de la **décomposition asymptotique**. Nous montrerons ensuite par une technique basée sur la **relation de Chasles** comment transformer des équations de type **Fredholm** en équations de type **Volterra** où on en déduira **deux nouvelles formes canoniques**. Puis enfin nous finirons par des applications biologiques.

6.1 Résultats déjà obtenus.

Les techniques qui ont permis l'obtention des formes canoniques diffèrent selon qu'il s'agisse d'équations de type **Volterra** ou d'équations de type **Fredholm**.

6.1.1 Equation de type Fredholm

Dans le cas des équations de 1ère espèce de type **Fredholm**, la forme canonique est obtenue en utilisant la technique classique de régularisation dite de **TIKHONOV**[54][51].

Pour la suite, on pourra restreindre l'étude au cas d'équations linéaires et envisager la généralisation aux équations non linéaires.

Considérons les équations intégrales linéaires de la forme

$$\int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (6.3)$$

où K et f sont des fonctions continues connues, $u(x)$ la fonction inconnue à déterminer.

L'équation (6.3) n'est pas sous la forme canonique et il n'est pas possible d'appliquer la méthode d'**Adomian**.

On note que ce type d'équation (6.3) appartient à la classe des **problèmes mal posés**, au sens de **Hadamard**.

Mais nous notons aussi qu'aujourd'hui bon nombres de problèmes scientifiques s'expriment à l'aide de problèmes ne répondant pas au critère de **Hadamard**. Et les équations de type (6.3) modélisent beaucoup de problèmes physiques réels.

Pour pouvoir appliquer la méthode décompositionnelle à l'équation (6.3), on utilise l'équation régularisée [54].

$$\varepsilon u_\varepsilon(x) + \int_a^b K(x, t)u_\varepsilon(t)dt = f(x) \quad (6.4)$$

qui est une équation approchée de l'équation (6.3).

On voit bien que l'équation (6.4) est sous une forme canonique et donc il est possible de lui appliquer la méthode décompositionnelle.

Sous certaines hypothèses, on pourra montrer à travers le Lemme qui suit, que la solution u_ε de l'équation (6.4) converge (quand $\varepsilon \rightarrow 0$) vers la solution u de l'équation (6.3).

Lemme [54]

Si on suppose que l'opérateur intégral de l'équation (6.4) est continu, coercitif dans l'espace de Hilbert où sont définies f, u et u_ε alors

(i) $\|u_\varepsilon\|$ est uniformément bornée (bornée indépendamment de ε)

(ii) $\|u_\varepsilon - u\|$ tend vers 0 quand ε tend vers 0

Preuve :

(i) De l'équation (6.4) on peut déduire

$$\varepsilon \|u_\varepsilon\| = \left\| f - \int_a^b K u_\varepsilon dt \right\| \geq -\|f\| + \left\| \int_a^b K u_\varepsilon dt \right\| \quad (6.5)$$

De la coercivité de l'opérateur intégral on a :

$$\left\| \int_a^b K u_\varepsilon dt \right\| \geq \alpha \|u_\varepsilon\| \quad (6.6)$$

où α est la constante de coercivité.

De (6.5) et (6.6) on tire :

$$\varepsilon \|u_\varepsilon\| \geq \alpha \|u_\varepsilon\| - \|f\|$$

par suite

$$(\alpha - \varepsilon) \|u_\varepsilon\| \leq \|f\|$$

ce qui établit (i).

(ii) Pour prouver (ii), on a d'après (6.3) et (6.4) :

$$\varepsilon(u_\varepsilon(x) - u(x)) = \int_a^b K(x, t)[u_\varepsilon(t) - u(t)]dt - \varepsilon u(x) \quad (6.7)$$

En réarrangeant (6.7) on obtient :

$$\int_a^b K(x, t)[u_\varepsilon(t) - u(t)]dt = -\varepsilon(u_\varepsilon(x) - u(x)) - \varepsilon u(x)$$

on en déduit :

$$\alpha \|u_\varepsilon - u\| \leq \|\varepsilon(u_\varepsilon - u) + \varepsilon u\| \leq \varepsilon \|u_\varepsilon - u\| + \varepsilon \|u\|$$

en suite

$$(\alpha - \varepsilon) \|u_\varepsilon - u\| \leq \varepsilon \|u\|$$

par suite

$$\|u_\varepsilon - u\| \rightarrow 0$$

quand

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad (\alpha \gg \varepsilon)$$

■

Solution de l'équation régularisée (6.4) :

On cherche donc la solution sous la forme

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^\varepsilon(x) \quad (6.8)$$

où les u_n^ε sont les termes de la série d'**Adomian** déterminés par le schéma récursif suivant :

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(x) &= \frac{f(x)}{\varepsilon} \\ u_{n+1}^\varepsilon(x) &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_a^b K(x,t)u_n^\varepsilon(t)dt \end{cases} \quad (6.9)$$

Cas non linéaire

Soit l'équation

$$\int_a^b K(x,t)g(u(t))dt = f(x) \quad (6.10)$$

où f, K, g sont connues et g est une fonction non linéaire en u (inconnue à déterminer).

L'équation régularisée de (6.10) sera :

$$\varepsilon u_\varepsilon(x) + \int_a^b K(x,t)g(u_\varepsilon(t))dt = f(x) \quad (6.11)$$

Le raisonnement est analogue au cas linéaire[54]. L'équation (6.11) étant sous la forme canonique, la méthode d'**Adomian** est applicable. De (6.11) on peut déduire l'algorithme d'**Adomian** :

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(x) &= \frac{f(x)}{\varepsilon} \\ u_{n+1}^\varepsilon(x) &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_a^b K(x,t)A_n\{g(u_\varepsilon(t))\}dt \end{cases} \quad (6.12)$$

6.1.2 Equation de type Volterra

Dans la suite, on traitera séparément le cas linéaire et le cas non linéaire.

Forme canonique dans le cas linéaire :

Soit l'équation linéaire

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq x \leq T, \quad T < +\infty \quad (6.13)$$

Pour notre étude numérique nous supposons que les conditions d'existence (et d'unicité) de solution sont remplies. En dérivant (6.13) par rapport à x , on obtient par la formule généralisée de **Leibnitz**.

$$K(x,x)u(x) + \int_0^x K_x(x,t)u(t)dt = f'(x), \quad (6.14)$$

Si $K(x,x) \neq 0$, on peut écrire (6.14) sous la forme suivante :

$$u(x) + \int_0^x \frac{K_x(x,t)}{K(x,x)}u(t)dt = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \quad (6.15)$$

En posant

$$N(u) = - \int_0^x \frac{K_x(x,t)}{K(x,x)}u(t)dt \quad (6.16)$$

$$g(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} \quad (6.17)$$

Alors (6.15) peut encore s'écrire

$$u = Nu + g \quad (6.18)$$

qui est la forme canonique classique d'**Adomian**.

L'application de la méthode d'**Adomian** à la forme canonique (6.15) permet d'obtenir le schéma récursif suivant :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{f'(x)}{K(x, x)} \\ u_{n+1} = - \int_0^x \frac{K_x(x, t)}{K(x, x)} u_n(t) dt, n \in N \end{cases} \quad (6.19)$$

L'algorithme (6.19) provient d'une équation linéaire de 2ème espèce. Sur $C([0, T], \|\cdot\|_\infty)$, la condition de convergence s'écrit :

$$\sup_{x \in [0, T]} \left| \int_0^x \frac{K_x(x, t)}{K(x, x)} dt \right| < 1 \quad (6.20)$$

Remarque :

1) Si

$$K(x, x) = 0$$

on peut continuer la dérivation jusqu'à obtenir

$$K_x^{(n)}(x, x) \neq 0, \quad n \geq 1$$

où

$$K_x^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} K(x, t)$$

2) La formule (6.14) peut être obtenue en effectuant une intégration par parties [55][29].

Forme canonique dans le cas non linéaire

Soit l'équation non linéaire :

$$\int_0^x K(x, t)g(u(t))dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq x \leq T \quad (6.21)$$

En utilisant la formule généralisée de **Leibnitz** comme précédemment, et par dérivation de (6.21) par rapport à x on obtient :

$$K(x, x)gu(x) + \int_0^x K_x(x, t)g(u(t))dt = f'(x) \quad (6.22)$$

Si on effectue un changement de variable en posant

$$v(x) = g(u(x)) \quad (6.23)$$

on retrouve l'équation linéaire suivante

$$K(x, x)v(x) + \int_0^x K_x(x, t)v(x)dt = f'(x) \quad (6.24)$$

qui est une équation équivalente à l'équation non linéaire (6.22). On peut alors déduire de (6.24) une forme canonique de type (6.15).

Une fois que la solution $v(x)$ de l'équation (6.24) est trouvée en utilisant l'algorithme d'**Adomian** (6.19) , si g est facilement inversible d'inverse g^{-1} alors on déduit :

$$u(x) = g^{-1}(v(x)) \quad (6.25)$$

qui est la solution de l'équation (6.21).

Exemple 1 Considérons l'équation :

$$\int_0^x (1 - x^2 + t^2)u^3(t)dt = \frac{x^2}{2} \quad (6.26)$$

avec $0 \leq x \leq T < +\infty$, $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

En posant :

$$v(t) = u^3(t) \quad (6.27)$$

l'équation(6.26) devient :

$$\int_0^x (1 - x^2 + t^2)v(t)dt = \frac{x^2}{2} \quad (6.28)$$

avec la technique de dérivation, on obtient l'algorithme d'**Adomian** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = x \\ v_{n+1} = 2x \int_0^x v_n(t) dt \end{array} \right. \quad (6.29)$$

et les termes de la série d'**Adomian**

$$v_0(x) = x$$

$$v_1(x) = x^3$$

$$v_2(x) = \frac{x^5}{2}$$

$$v_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

ce qui permet d'avoir :

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = x \exp(x^2) \quad (6.30)$$

On en déduit la solution du problème (6.26) par :

$$u(x) = x^{\frac{1}{3}} \exp\left(\frac{x^2}{3}\right) \quad (6.31)$$

qui est une solution exacte.

Quelques Observations :

a) L'opérateur linéaire défini par (6.25) n'a généralement pas d'inverse g^{-1} continue de sorte qu'il est difficile de trouver une solution numérique précise par les méthodes de discrétisation

classique.

b) De plus la méthode proposée par **V.Seng** ne marche pas dans les cas suivants :

1)

$$K_x^{(n)}(x, x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

2) $K_x^{(n)}(x, t)$ et/ou $f^{(n)}(x)$ n'existent pas

3) $K_x^{(n)}(x, t)$ et/ou $f^{(n)}(x)$ sont infinis

Pour surmonter toutes les difficultés, nous allons dans le paragraphe suivant proposer de **nouvelles formes canoniques**[45]. Celles-ci sont plus faciles à obtenir et surtout permettent de résoudre des équations où le **noyau présente des singularités**. De plus elles permettent aussi de résoudre directement des équations de type **Fredholm** sans passer par une équation approchée.

6.2 Nouveaux résultats[45].

Dans cette partie, nous allons donner une technique qui permet d'obtenir de nouvelles formes canoniques. Cette technique sera utilisable aussi bien pour une équation de type **Volterra** que pour une équation de type **Fredholm**. Elle s'applique au cas des équations singulières et s'adapte bien aux équations à noyau non régulier. De plus, nous montrerons comment passer d'une équation de type **Fredholm** à une équation de type **Volterra** et en déduire d'autres formes canoniques.

Nous distinguerons le cas d'équations linéaires des équations non linéaires.

6.2.1 Recherche de la forme canonique dans le cas linéaire

Considérons l'équation linéaire générale suivante :

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad a(x) \leq t \leq b(x) \leq T \quad (6.32)$$

où $f(x)$ et $K(x, t)$ sont des fonctions connues et on cherche à déterminer la fonction inconnue $u(x)$ en utilisant la méthode d'**Adomian**.

L'équation (6.32) peut bien être une équation de **Volterra** ou une équation de **Fredholm**.

La **technique** consiste à écrire :

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)u(t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[u(t) - u(x)]dt + u(x) \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)dt \quad (6.33)$$

Si on pose

$$h(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)dt \quad (6.34)$$

qui est fonction connue car K est une fonction donnée.

Alors en injectant les relations (6.34) et (6.33) dans (6.32) , on obtient :

$$h(x)u(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[u(t) - u(x)]dt = f(x) \quad (6.35)$$

qui est une équation intégrale de 3ème espèce.

Si

$$h(x) \neq 0$$

on a l'expression équivalente à (6.35) suivante :

$$u(x) = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)[u(t) - u(x)]dt + \frac{f(x)}{h(x)} \quad (6.36)$$

qui est une équation intégrale linéaire de 2e espèce.

L'équation (6.36) est sous la **forme canonique d'Adomian**. Il suffit en effet de poser en terme d'opérateur :

$$Nu = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)[u(t) - u(x)]dt \quad (6.37)$$

et

$$g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \quad (6.38)$$

pour avoir

$$u = Nu + g \quad (6.39)$$

La relation (6.36) permet d'écrire l'algorithme d'Adomian suivant :

$$\begin{cases} u_0(x) &= \frac{f(x)}{h(x)} \\ u_{n+1}(x) &= -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)[u_n(t) - u_n(x)]dt \end{cases} \quad (6.40)$$

Soit l'expression équivalente :

$$\begin{cases} u_0(x) &= \frac{f(x)}{h(x)} \\ u_{n+1}(x) &= -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)u_n(t)dt + u_n(x) \end{cases} \quad (6.41)$$

Remarque

1) Dans la nouvelle forme canonique (6.36), même si $K(x, x)$ devait être infini, alors le facteur $u(t) - u(x)$ s'annule pour $t = x$. Et donc le produit $K(x, t)[u(t) - u(x)]$ s'annulerait au point $t = x$. Il faut aussi noter que parfois la singularité du noyau peut être si forte que l'intégrale peut ne pas exister [51]

2) On n'a pas besoin d'une dérivée quelconque dans cette nouvelle forme canonique. La dérivée des fonctions dans l'équation nécessite de plus des hypothèses de régularité. Ce qui pourrait restreindre le champ d'application.

Exemple 2

Trouver $u(x)$ la solution de l'équation :

$$\int_0^x (x-t)u(t)dt = \frac{x^3}{6} \quad (6.42)$$

L'algorithme (6.41) permet d'écrire :

$$\begin{cases} u_0(x) &= \frac{x}{3} \\ u_{n+1}(x) &= \frac{-2}{x^2} \int_0^x (x-t)u_n(t)dt + u_n(x) \end{cases} \quad (6.43)$$

et les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont calculés de manière récursive comme suit :

$$u_1 = \frac{-2}{x^2} \int_0^x (x-t)u_0(t)dt + u_0(x) = \frac{2}{3}u_0$$

$$u_2 = \frac{-2}{x^2} \int_0^x (x-t)u_1(t)dt + u_1(x) = \frac{2}{3}u_1$$

.

.

.

$$u_n = \frac{2}{3}u_{n-1}$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = N \rightarrow +\infty \lim \sum_{n=0}^N u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_0(x) \frac{1 - (\frac{2}{3})^{N+1}}{1 - \frac{2}{3}} = x$$

qui est la solution exacte du Problème(6.42).

Exemple 3

Trouver $u(x)$ la solution de l'équation

$$\int_0^x \cos(x-t)u(t)dt = \sin x \quad (6.44)$$

l'algorithme(6.40) donne :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 \\ u_{n+1}(x) = \frac{-1}{\sin x} \int_0^x \cos(x-t)[u_n(t) - u_n(x)]dt \end{cases} \quad (6.45)$$

$$u_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Une seule itération conduit à :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0(x) = 1, \text{ qui est la solution exacte du problème(6.44).}$$

6.2.2 Cas non Linéaire

On considère l'équation

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)g(u(t))dt = f(x) \quad (6.46)$$

où u est à calculer et g une fonction non linéaire en u .

On écrira :

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)g(u(t))dt = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[g(u(t)) - g(u(x))]dt + g(u(x)) \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)dt \quad (6.47)$$

En posant

$$h(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)dt$$

Alors (6.47) peut se réécrire comme suit :

$$h(x)g(u(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[g(u(t)) - g(u(x))]dt = f(x) \quad (6.48)$$

En effectuant un changement de variable :

$$v(x) = g(u(x))$$

l'équation (6.48) dévient

$$h(x)v(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[v(t) - v(x)]dt = f(x) \quad (6.49)$$

(6.49) est une équation linéaire de 3e espèce . La résolution se fait exactement comme dans le cas linéaire.

Si g est facilement inversible avec g^{-1} comme inverse alors la solution $u(x)$ de l'équation

(6.46) se déduit de celle de l'équation (6.49) par la relation

$$u(x) = g^{-1}(v(x))$$

Exemple 4

Trouver $u(x)$ solution de l'équation

$$\int_0^x (x-t)u^2(t)dt = \frac{x^4}{12} \quad (6.50)$$

avec $0 \leq x \leq T < +\infty$

En appliquant la méthode de substitution développée dans cette thèse, on obtient l'algorithme d'**Adomian** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(x) = \frac{x^2}{6} \\ v_{n+1}(x) = \frac{-2}{x^2} \int_0^x (x-t)v_n(t)dt + v_n(x) \end{array} \right.$$

Cela nous permet de calculer les différents termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ comme suit :

$$v_1 = \frac{-2}{x^2} \int_0^x (x-t)v_0(t)dt + v_0(x) = \frac{5}{6}v_0$$

$$v_2(x) = \frac{-2}{x^2} \int_0^x (x-t)v_1(t)dt + v_1(x) = \frac{5}{6}v_1(x)$$

...

...

...

$$v_n = \frac{5}{6}v_{n-1}$$

$$v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N v_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} v_0(x) \frac{1 - (\frac{5}{6})^{N+1}}{1 - \frac{5}{6}} = x^2$$

On peut maintenant déduire la solution du problème(6.50) par :

$$u(x) = g^{-1}(v(x)) = x$$

qui est la **solution exacte**.

Exemple 5

Trouver $u(x)$ solution de l'équation définie sur $[0, T]$

$$\int_0^x (x-t) \log(u(t)) dt = \frac{x^4}{12} \quad (6.51)$$

avec $0 \leq x \leq T < +\infty$

En utilisant la nouvelle forme canonique obtenue par substitution , on a :

$$\int_0^x (x-t) \log(u(t)) dt = \int_0^x (x-t)v(t) dt = \frac{x^4}{12} \quad (6.52)$$

en posant

$$v(t) = \log(u(t)) \quad (6.53)$$

La nouvelle forme canonique sera alors :

$$v(x) = \frac{-1}{h(x)} \int_0^x (x-t)[v(t) - v(x)]dt + \frac{f(x)}{h(x)} \quad (6.54)$$

avec

$$h(x) = \int_0^x (x-t)dt = \frac{x^2}{2} \quad (6.55)$$

et

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2}{6}$$

Puis l'algorithme d'**Adomian** y afférent :

$$\begin{cases} v_0 &= \frac{x^2}{6} \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{h(x)} \int_0^x (x-t)[v_n(t) - v_n(x)]dt, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

On obtient les différents termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ par :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \frac{x^2}{6} \\ v_1(x) &= \frac{5x^2}{36} \\ v_2(x) &= \frac{5}{6} \frac{5}{36} x^2 \end{aligned}$$

Par récurrence on a :

$$v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$$

Soit

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = x^2$$

Et on en déduit :

$$u(x) = \exp(x^2)$$

qui est **la solution exacte** du problème(6.51).

6.3 Décomposition Asymptotique

La notion de la décomposition asymptotique a été utilisée pour la première fois dans la théorie de la méthode décompositionnelle par **K.Abbaoui** [1]. L'auteur s'est servi de cette technique pour la recherche des solutions particulières des équations fonctionnelles admettant plusieurs solutions. Cette technique a été utilisée après par **V.Seng** [55] relativement aux formes canoniques qu'elle a obtenues. Nous allons à présent adapter cette idée à notre **nouvelle forme canonique**, obtenue par **substitution**.

Considérons à nouveau l'équation non linéaire

$$\int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)g(u(t))dt = f(x) \quad (6.56)$$

par la **méthode de substitution** vue précédemment, nous obtenons :

$$h(x)g(u(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)[g(u(t)) - g(u(x))]dt = f(x) \quad (6.57)$$

avec

$$h(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)dt \quad (6.58)$$

Nous avons plus haut indiqué que pour résoudre ce type d'équation (6.57) , on procède par un changement de variable en posant $v(x) = g(u(x))$ et on résout l'équation linéaire

$$h(x)v(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} K(x,t)[v(t) - v(x)]dt = f(x) \quad (6.59)$$

avant d'en déduire comme précédemment la solution $u(x)$ (si g est inversible) par

$$u(x) = g^{-1}(v(x)). \quad (6.60)$$

Soit encore

$$u(x) = g^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\right) \quad (6.61)$$

Mais il est également possible d'obtenir la solution $u(x)$ sans avoir à calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x). \quad (6.62)$$

De l'équation (6.57) on peut déduire :

$$g(u(x)) = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[g(u(t)) - g(u(x))]dt + \frac{f(x)}{h(x)}, (h(x) \neq 0) \quad (6.63)$$

Mais nous savons que les polynômes d'**Adomian** sont construits pour les non linéarités comme suit :

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(g(u)) \quad (6.64)$$

avec

$$A_n = A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (6.65)$$

En reportant (6.64) dans (6.63) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n\{g(u(t))\} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n\{g(u(x))\} \right] dt + \frac{f(x)}{h(x)} \quad (6.66)$$

Pour réaliser l'identité fonctionnelle, les A_n peuvent être déterminés de façon unique[18] par le schéma récursif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(u_0) = \frac{f(x)}{h(x)} \\ A_1(u_0, u_1) = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[A_0(u_0(t)) - A_0(u_0(x))]dt \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n+1}(u_0, \dots, u_{n+1}) = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)[A_n\{g(u(t))\} - A_n\{g(u(x))\}]dt \end{array} \right. \quad (*)$$

D'autre part on sait que

$$A_0(u_0) = g(u_0)$$

$$A_1(u_0, u_1) = u_1(x)g'(u_0(x))$$

$$A_2(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1^2(x)}{2!}g''(u_0(x)) + u_2(x)g'(u_0(x))$$

·

·

·

$$A_n(u_0, \dots, u_n) = A_n = \sum_{p_1+2p_2+\dots+np_n=n} N^{(p_1+\dots+p_n)}(u_0) \frac{u_1^{p_1} \dots u_n^{p_n}}{p_1! \dots p_n!}$$

Donc de l'algorithme ci-dessus, nous pouvons de proche en proche déterminer tous les termes de la série solution $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

En effet si g est inversible, de la relation

$$A(u_0) = g(u_0) = \frac{f(x)}{h(x)} \quad (6.67)$$

on déduit

$$u_0 = g^{-1}\left(\frac{f(x)}{h(x)}\right) \quad (6.68)$$

puis de

$$A_1(u_0, u_1) = u_1 g'(u_0) = -\frac{1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) [A_0\{u_0(t)\} - A_0\{u_0(x)\}] dt \quad (6.69)$$

on tire

$$u_1 = \frac{1}{g'(u_0)} \left\{ \frac{-1}{h(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) [A_0\{u_0(t)\} - A_0\{u_0(x)\}] dt \right\} \quad (6.70)$$

Ainsi de suite , on pourra calculer les autres termes de la serie.

Exemple 6

Soit à résoudre le problème non linéaire suivant :

$$3 \int_0^x x t u^3(t) dt = x^3 \quad (6.71)$$

La solution théorique est : $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,8735804646$

En posant $g(u) = u^3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\{g(u(x))\}$, $f(x) = x^3$ et $h(x) = 3 \int_0^x x t dt = \frac{3x^3}{2}$

alors de l'algorithme(*), on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(u_0) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{2}{3} \\ A_1(u_0, u_1) = -\frac{2}{3x^3} \int_0^x x t [A_0(u_0(t)) - A_0(u_0(x))] dt \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n+1}(u_0, \dots, u_{n+1}) = -\frac{2}{3x^3} \int_0^x x t [A_n\{g(u(t))\} - A_n\{g(u(x))\}] dt \end{array} \right.$$

On a alors :

$$A_0(u_0) = g(u_0) = u_0^3 = \frac{2}{3}$$

$$\text{on en déduit que } u_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

et $A_n = 0 \forall n \geq 1$. Il en résulte de même $u_n = 0 \forall n \geq 1$

Une seule itération conduit à :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ qui est la solution exacte du problème(6.71).}$$

Notons que ce même problème a été résolu dans [55] où sont obtenues des solutions approchées très voisines de la solution exacte selon le degré de troncature de la série d'**Adomian** comme suit :

n	$\sum_{k=0}^n u_k$	$g^{-1}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$	$u - \sum_{k=0}^n u_k$	$u - g^{-1}\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$
1	0.833333333	0.7937005260	0.04024713144	0.07987993874
2	0.888888889	0.9085602963	0.01530842416	0.0349783156
3	0.8672839506	0.8549879735	0.00629651413	0.01859249124

où $\sum_{k=0}^n u_k$ est la solution obtenue par la décomposition asymptotique relativement à la forme canonique trouvée dans[55].

6.4 Transformation d'Equations de Type Fredholm en Equations de Type Volterra[45].

Ici, nous utilisons la relation de **Chasles** pour transformer des équations de type **Fredholm** en équations de type **Volterra**. Cette transformation nous permet d'obtenir deux nouvelles formes canoniques d'**Adomian**.

Nous allons nous limiter au cas linéaire et envisager la généralisation au cas non linéaire par le même procédé que précédemment.

Soit alors l'équation linéaire :

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \quad (6.72)$$

Les résultats obtenus peuvent être généralisés aux équations non linéaires du type :

$$\int_a^b K(x,t)g(u(t))dt = f(x) \quad (6.73)$$

En effectuant un changement de variable :

$$v(t) = g(u(t)) \quad (6.74)$$

on obtient l'équation linéaire

$$\int_a^b K(x,t)v(t)dt = f(x) \quad (6.75)$$

où a et b sont des constantes connues ; K et f des fonctions données.

Par la **relation de chasles** on peut écrire :

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = \int_a^x K(x,t)u(t)dt + \int_x^b K(x,t)u(t)dt \quad (6.76)$$

avec $a \leq x \leq b$ donc l'équation (6.72) peut se réécrire

$$\int_a^x K(x,t)u(t)dt + \int_x^b K(x,t)u(t)dt = f(x) \quad (6.77)$$

2^{eme} cas :

Cette fois-ci on considère :

$$\int_x^b K(x,t)u_n(t)dt = \int_x^b K(x,t)[u(t) - u(x)]dt + h_2(x)u(x) \quad (6.82)$$

où

$$h_2(x) = \int_x^b K(x,t)u(t)dt \quad (6.83)$$

En réinjectant (6.82) dans (6.77) on a :

$$h_2(x)u(x) + \int_x^b K(x,t)[u(t) - u(x)]dt + \int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x) \quad (6.84)$$

Ce qui permet d'obtenir la forme canonique (pour $h_2(x) \neq 0$)

$$u(x) = \frac{f(x)}{h_2(x)} - \frac{1}{h_2(x)} \int_x^b K(x,t)[u(t) - u(x)]dt - \frac{1}{h_2(x)} \int_a^x K(x,t)u(t)dt \quad (6.85)$$

et l'algorithme d'Adomian :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \frac{f(x)}{h_2(x)} \\ \dots \dots \dots \\ u_{n+1}(x) = -\frac{1}{h_2(x)} \int_x^b K(x,t)[u_n(t) - u_n(x)]dt - \frac{1}{h_2(x)} \int_x^b K(x,t)u_n(t)dt \end{array} \right. \quad (6.86)$$

Dans les deux cas, les formes canoniques diffèrent au niveau des bornes de l'intégrale. Il en est de même pour les fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$.

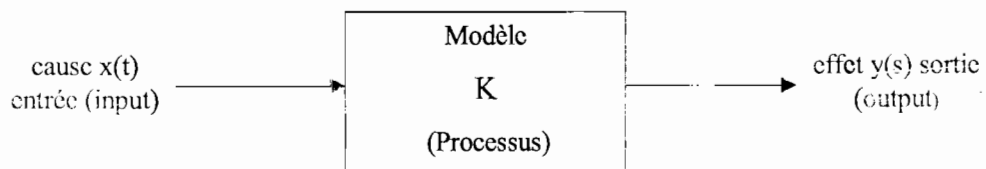
6.5 Applications Biologiques

6.5.1 Phénomènes de "CAUSE A EFFET" [18]

La modélisation des phénomènes de <<Cause à Effet >> conduit généralement, de façon directe, à des équations intégrales.

Dans la réalité, si on a une cause $x(t)$ alors l'effet qui suit cette cause, noté $y = y(s)$, va résulter d'un processus déterministe K . On notera $y = K(x)$

D'un point de vue schématique, de tels processus peuvent être représentés par :



où la cause x est souvent appelée l'**entrée du système** (ou input en anglais) et l'effet y est encore **appelé sortie** (ou output)

Le rectangle est encore appelé "**boite noire**".

En général, l'opérateur K décrivant le modèle n'est pas connu. On sait seulement mesurer des couples <<d'entrée-sortie>> de la forme :

$$(x_i(t), y_i(s)), \quad t \in [0, T], \quad s \in [0, T], \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.87)$$

En faisant des hypothèses sur l'opérateur K , il va devenir possible de préciser sa structure.

Supposons K linéaire :

$$K(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1K(x_1) + c_2K(x_2) \quad (6.88)$$

De plus on fait l'hypothèse que l'effet $y(t)$ à l'instant t , résulte d'une combinaison linéaire de l'instant 0 à l'instant t , alors on peut écrire :

$$y(t) = \sum_i \alpha_i K(t, s_i) x(s_i) \quad \text{où } 0 \leq s_i \leq T \quad (6.89)$$

et où les $\alpha_i K(t, s_i) = K_i$ sont les coefficients de la combinaison linéaire.

Or on sait que les formules d'intégration (classique) approchées sont de la forme

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(t_i) \quad (6.90)$$

où les λ_i sont les poids de la méthode d'intégration considérée et les t_i les points d'intégration de l'intervalle $[a, b]$ qui dépendent aussi de la méthode choisie.

L'expression (6.90) peut alors être considérée comme une formule approchée de l'intégrale

$$y(t) = \int_0^T K(t, s) x(s) ds \quad (6.91)$$

Cette équation qui relie l'entrée à la sortie est une équation intégrale linéaire de Fredholm de 1ère espèce.

Dans la pratique, il sera toujours question de déterminer $x(s)$ lorsque l'on connaît $y(t)$. Ce qui nécessite des méthodes spécifiques [51].

avec

$$h(t) = \int_0^t K(t,s)ds, 0 \leq t \leq T \quad (6.96)$$

Et la solution exacte $x(t)$ sera donnée par :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \quad (6.97)$$

soit une solution approchée

$$x(t) = \sum_{n=0}^N x_n(t) \quad (6.98)$$

6.6 Conclusion

La difficulté de l'application de la méthode décompositionnelle aux équations intégrales de première espèce est essentiellement liée à la recherche de bonnes formes canoniques. **V.Seng** avait donné [55] un début de solution à la problématique. Ce travail vient en complément en fournissant de nouvelles formes canoniques à travers des résultats originaux.

Les formes canoniques proposées dans ce travail sont plus simples et peuvent être appliquées à tout type d'équations intégrales de 1^{ère} espèce. L'efficacité de nos résultats a été vérifiée sur des exemples simples dont les solutions théoriques sont connues. Désormais ces résultats peuvent être appliqués aux modèles biologiques compliqués.

Chapitre 7

Conclusion générale

CONCLUSION GENERALE

Au terme de notre travail, nous pouvons dire que la méthode décompositionnelle décrite dans la première partie de ce document, est dotée d'une base théorique suffisante[1][18][55]etc. Elle peut être présentée comme une théorie générale de résolution explicite des systèmes dynamiques.

Telle que nous l'avons constaté tout au long de ce travail, la méthode d'**Adomian** permet d'**appréhender de nombreux problèmes linéaires ou non avec simplicité et efficacité sans linéarisation ou discrétisation** .

La méthode d'**Adomian** permet d'éviter des approximations grossières généralement rencontrées dans les méthodes de linéarisation. L'utilisation des schémas classiques de différences finies nécessite la connaissance de tous les coefficients intervenant dans la formulation. A ce niveau, l'avantage et l'originalité de la méthode d'**Adomian** sont dus au fait qu'elle peut fournir une approximation analytique de la solution même lorsque les valeurs de certains paramètres sont inconnues. Cela ouvre la voie à de nombreuses et utiles applications : **identification, optimisation, contrôle** etc. Donc la méthode présente un intérêt certain par rapport aux méthodes classiques de contrôle optimal car l'utilisation préalable de la méthode d'**Adomian** permet de se ramener à un problème d'optimisation classique sur lequel on peut greffer la méthode d'optimisation globale **Alienor**[20].

D'autre part, nous savons que la convergence d'un algorithme vers la solution exacte de

l'équation fonctionnelle à résoudre est bien évidemment ce que l'on attend de toute méthode. Cette préoccupation est bien satisfaite à travers certains exemples concrets traités dans ce document.

Dans notre travail, nous avons abordé deux grands types d'équations fonctionnelles complémentaires : des **équations de diffusion** régies par des EDP et des **équations intégrales**. Nous avons apporté quelques réponses à certaines interrogations soulevées quant aux difficultés d'application de la méthode décompositionnelle d'**Adomian**.

Au niveau des EDP, plus précisément des équations de diffusion-réaction de la forme $u_t = \alpha \Delta u + F(u)$, nous avons pu définir une condition suffisante de convergence de la méthode d'**Adomian**, facile à vérifier sur des exemples concrets. De plus, nous savons que le schéma classique de la méthode d'**Adomian** ne se prête fort bien qu'à la résolution des problèmes de **Cauchy** où seules les conditions initiales apparaissent. Ce qui n'est pas le cas pour d'autres types d'EDP. Ici, l'originalité de notre travail a consisté à trouver une **technique pour pouvoir appliquer directement la méthode d'Adomian aux équations paraboliques avec des conditions initiales et des conditions aux limites**. Nous ne pouvons affirmer que l'on peut résoudre n'importe quelle EDP avec cette nouvelle technique. Mais déjà ce travail est un pas important dans la recherche de la prise en compte des contraintes imposées à une EDP par la méthode d'**Adomian** et peut donc ouvrir le champ à la résolution de cet épineux problème resté partiellement ouvert[18].

Quant aux équations intégrales, nous savons que **la forme canonique est une condition sine qua non** d'application de la méthode décompositionnelle d'**Adomian**. Nous avons dans ce travail donné des résultats originaux pour l'obtention de la **forme canonique des équations intégrales de première espèce** qui ne sont pas d'emblée sous une **forme canonique**. Nous avons d'abord procédé par une **technique basée sur la substitution** pour obtenir une forme canonique de tout type d'**équation intégrale de première espèce**(**Volterra** ou **Fredholm**). Par suite, nous avons montré comment transformer une équation de type **Fredholm** en une équation de type **Volterra** en utilisant la **relation de Chasles**. De cette transformation

Pour nos études, nous avons restreint le domaine de travail à une dimension, mais il y a la possibilité de généraliser à une dimension n quelconque en utilisant les formules des polynômes d'**Adomian** en dimension n [55][56].

Jusqu'à ce jour, nous ne prétendons pas encore savoir résoudre tous les problèmes(surtout non linéaires)avec la méthode d'**Adomian**. Les recherches sont loin d'être terminées. Mais nous espérons que l'amélioration de la méthode d'**Adomian** permettra de résoudre dans le futur des systèmes fonctionnels de plus en plus complexes, pour la satisfaction des utilisateurs.

En définitive, malgré cet apport à la méthode d'**Adomian**, beaucoup de problèmes demeurent ouverts[18]. Nous sommes donc invités à continuer de travailler sur ce sujet bien passionnant qui repose sur les importants travaux du Pr **Cherruault** et de son équipe au Laboratoire **Medimat** de l'Université Pierre et Marie Curie(Paris VI).

Bibliographie

- [1] **K.Abbaoui** - Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution des équations issues de la biologie et de la médecine. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI. Octobre 1995.
- [2] **K.Abbaoui and Y.Cherruault** - The decomposition method applied to the Cauchy problem. *Kybernetes*, (28,1), pp 68-74(1999).
- [3] **K.Abbaoui et Y.Cherruault**- Convergence of Adomian method applied to non-linear equations. *Mathematical and Computer Modelling* 20(9), pp60-73. 1994.
- [4] **K.Abbaoui et Y.Cherruault**- convergence of Adomian method applied to differential equations. *Mathematical and Computer Modelling* 28(5), pp 103-109. 1994.
- [5] **G.Adomian**- Nonlinear Stochastic systems theory and applications to physics. Kluwer Acad.Pub. 1989.
- [6] **G.Adomian**- Solving frontier problems of physics : the decomposition method. *Kluwer Acad.Pub. 1994*.
- [7] **G.Adomian**- A reviews of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations.*Math Computer Modelling*. 13(7), 17-43, 1990.
- [8] **H.Ammar et Y Cherruault**- Approximations of several variables function by a one variable function and application to global optimisation. *Math Computer Modelling*. 18(2), 17-21, 1993.
- [9] **H.Ammar** - La méthode d'optimisation globale multidimensionnelle. Solution Analytique d'un Modèle de Diffusion de la Streptavidine et de la DTPA-Biotine en Immunoscintigraphie Cardiaque en deux Etapes.Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI. Octobre 1995.

- [10] **A.Bellagoun, Meulemans and Cherruault**- Diffusion From Gel in Brain : Modelisation and Identification. Int J. Biomed Comput, 30(1992), 125-135.
- [11] **A.Bellagoun** - La diffusion dans le tissu cérébral : Modélisation et Identification.Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI. 1993.
- [12] **O.Bendiab** - Deux nouvelles Méthodes d'Optimisation Globale : Applications à des Problèmes Biologiques.Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI. Octobre 1995.
- [13] **C.Berger** - Principes de Combinatoire. Dunod, 1998.
- [14] **H.Brezis** - Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications. Masson, Paris, 1983.
- [15] **H.Brezis et M. Sibony** - Méthode d'Approximation et d'Itération pour les opérateurs Monotones. Archives for Rational Mechanics and Analysis, Vol 41 N°4, 1979.
- [16] **K.J.Brown** - Nontrivial Solutions of predator-prey system with small diffusion. Nonlinear analyses. Theory Methods and Application, Vol 11, N°6, 685-689(1987).
- [17] **H.Cartan** - Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann, 1985.
- [18] **Y. Cherruault** - *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant. Presses Universitaires de France, Paris (1998).*
- [19] **Y. Cherruault**. *que sais-je? Presses universitaires, France (1983).*
- [20] **Y. Cherruault** - Optimisation : Méthodes locales et globales. *Presses Universitaires de France, Paris(1999).*
- [21] **Y. Cherruault** - Convergence of Adomian method. *Kybernetes*, 18(2), 31-38, 1989.
- [22] **Y. Cherruault et A.Guillez** - Une méthode pour la recherche du minimum global d'une fonctionnelle. *CRAS, Paris t 296 série I, pp 175-178(1983).*
- [23] **J.A.Dixon**- A nonlinear weakly singular Volterra integro-differential equation arising from a reaction-diffusion study of a small cell. *J.Comput. Appl Math*, Vol 18, pp 289-305(1987).
- [24] **D.Euvrard** - Résolution numérique des EDP de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. Masson, Paris-Milan-Barcelone, 1994.
- [25] **A. Friedman** - *Partial differential equations of parabolic type.Prentice-hill. Inc. Englewood Cliffs, N.J (1964)*

- [26] **L.Gabet** - Modélisation de la Diffusion de Médicaments à travers les Capillaires et dans les Tissus à la suite d'une Injection et Esquisse d'une Théorie Décompositionnelle- Application aux Equations aux Dérivées Partielles. Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI(1992).
- [27] **S.Guellal and Y.Cherruault**- Pratical formulae for calculation of Adomian's polynomials and application to the convergence of the decomposition method. IJBC, Vol 36, pp 223-228(1994).
- [28] **S.Guellal ,Y.Cherruault, M.J.Pujol, P.Grimalt** - Decomposition Method applied to hydrology, kybernetes, 29(4), 2000.
- [29] **M.Hadizadeh and K.Madeknejd**- On the decomposition method to heat equation with non-linear and non-local boundary conditions. Kybernetes, Vol 27, N°4, pp 426-434(1998).
- [30] **H.Himoun, K.Abbaoui and Y.Cherruault** - News results of Adomian method. Kybernetes. 28(4), 423-429, 1999.
- [31] **Linz** - Analytical and Numerical Methods for Volterra Integral Equations, SIMA(1985)
- [32] **J.L.Lions** - Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles(1966).
- [33] **Alfonso Lopez** - etude de l'inhibition de la NO-Synthase dans le Cortex du Rat après Application de Nitroarginine. Modélisation et Résolution par la Méthode d'Adomian.Thèse d'Etat de l'Université d'Alicante (Spain),29 septembre 2000.
- [34] **T.Mavoungou and YCherruault** - Numerical Study of Fisher's Equation by Adomian's methode. Math Comput Modelling, Vol 19, N°1, pp 89-95, 1994.
- [35] **T.Mavoungou and YCherruault** - Convergence of Adomian's methode and applications ton nonlinear partial differential equations, Kybernetes 21(6), 13-25, 1992.
- [36] **T.Mavoungou** - Méthodes décompositionnelles et problèmes d'évolution paraboliques. 1er Colloque International du RAMAD, juillet 2000 à Ouagadougou(Burkina Faso).
- [37] **A.Meulmans, Paychaf, Hannounp and Valpillatm** - Measurement and clinical and pharmacokinetic. Implications of diffusion coefficient of antibiotics in tissues. Antimicrobial agents and chemotherapy. Aug 1989, Vol 33 N°8, pp1286-1290.

- [38] **A.Meulmans, D.Henzel, Brun-Pacaud, J.Mohler, Vicartp and P.Tran Ba Huy** - On line pharmacokinetics of chlororamphenicol in rat cortex by viro electrochemical detection. *J chemotherapy* 30 : 353-357(1984).
- [39] **A.Meulmans, Vicartp, D.Henzel, J.Mohler and Valpilatm** - Cefsulod... penetration into rat brain : extracellular versus total concentration. *Chemotherapy*, 32 : 393-398(1986).
- [40] **G.Mora and Y.Cherruault** - Characterization and generation of α -dense curves. *Computers Math. Applic*, 33(9), 19-32(1997) .
- [41] **G.Mora and Y.Cherruault** - The theoretic calculation times associated to α -dense curves. *Kybernetes*, 27(8), 919-937(1998).
- [42] **Murray. J. D** - *Mathematical biology-biomathematics texts-* Springer-Verlag. New York, NY(1989) .
- [43] **M.Ndour** - Etude de Modèle de Compétition entre Souches Différentes et de la Diffusion de Germes dans l'eau : Application de la méthode décompositionnelle.Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI. Octobre 1995.
- [44] **N.Ngarhasta, B.Some, K.Abbaoui.and Y.Cherruault-** News numerical study of Adonian Method Applied to a diffusion Model, *Kybernetes*, Vol 31, N°1, pp 61-75(2002).
- [45] **N.Ngarhasta, B.Some** - Quelques nouvelles formes canoniques de la méthode décompositionnelle applicables aux équations intégrales de première espèce. *Africa Matematica*, série3, Volume 13.pp 53-73(2002).
- [46] **N.Ngarhasta** - Résolution numérique de quelques problèmes d'évolution par la méthode d'Adomian. Mémoire DEA. Université de Ouagadougou, 10 janvier, 2000.
- [47] **C.V.Pao** - Positive solutions of a nonlinear boundary value problem of parabolic type. *Journal of differential equations*, 22, 145-163, 1976.
- [48] **C.V.Pao** - Asymptotic behavior and non existence of global solution for a class of nonlinear boundary value problems of parabolic type. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 65, 616-637,(1983).
- [49] **W.Pogorzelski** - *Integra Equations and their Applications* Pergamm Press(1966).
- [50] **L.Reinhard** - *Introduction aux équations aux dérivées partielles.* Edition Dunod 1973.

- [51] **F.Robert Churchhouse** - Numerical Methods. Handbook of Applicable Mathematics, Vol III(1981.)
- [52] **J.Rozier** - *The one-dimensional equation. Addison-wesly Publishing Company. MeuloPark California*(1984).
- [53] **G.Saccomandi, YCherruault et B.Some** - New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations. Math Comput Modelling, 16(2), 85-93, 1992.
- [54] **V.Seng and Y.Cherruault** - The resolution of non-linear integral equation of the first kind using the decompositional method of Adomian. kybernetes, Vol 26, n°2, pp198-206,1997.
- [55] **V.Seng** - Recherche de Formes canoniques d'Adomian pour la résolution d'équations fonctionnelles non linéaires par la méthode décompositionnelle. Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI. Octobre 1997.
- [56] **V.Seng ,K.Abbaoui and Y.Cherruault** - Adomian polynomials for nonlinear operators. Mathematical and computer modelling, 24(1), 59-65(1996).
- [57] **B. Some**- Some recent numerical methods for solving non linear Hammerstein integral equations, Math-Comput. Model. 18 n°9 pp 55-62 (1993).
- [58] **M.Sibony** - Méthodes d'approximation pour les équations et inéquations nonlinéaires de type monotones J of Math Anal and Appl, 34, pp 502-564(1971).
- [59] **M.Sibony** - Itérations et approximations. Analyse Numérique III, Hermann, Paris(19888).
- [60] **Tang and Weber, R.O** - Numerical Study of Fisher's equation by the Australian Mathematical Society B, Vol 33, 27-38(1992).
- [61] **Tikhonov and Samarski** - Equations of Mathematical Physics. Pergamon Press. Oxford-London-New York. Paris(1963).
- [62] **J.Vigne** - Etude et mise en oeuvre d'algorithmes de recherche d'une fonction de plusieurs variables. Thèse de Doctorat d'Etat. Fac des Sc de Paris(1969).

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la méthode décompositionnelle d'**Adomian** pour la résolution numérique de deux grandes classes d'équations fonctionnelles : des **équations aux dérivées partielles (EDP) de type diffusion réaction et des équations intégrales**.

Cette thèse est composée de six chapitres regroupés en trois parties.

La première partie est une présentation générale de la méthode d'**Adomian** avec les principaux résultats de convergence et de calcul des polynômes d'**Adomian**

La deuxième partie concerne les EDP de type diffusion réaction :

- D'abord, nous rappelons des généralités sur les équations aux dérivées partielles associées aux phénomènes de diffusion. Nous retenons deux exemples de modèles de diffusion que nous traiterons par la suite : « la diffusion d'une souche de bactérie dans l'eau » et « la diffusion de médicaments dans le cerveau ».
- Ensuite, nous procédons à la résolution effective des problèmes de diffusion réaction avec des résultats originaux. La forme canonique d'**Adomian** associée à des EDP avec conditions initiales et aux limites est difficile à trouver. Nous proposons des approches originales pour y parvenir par adjonction de fonctions dans le premier terme de la série d'**Adomian**. Nous avons testé l'efficacité de nos idées sur des exemples concrets et montré un résultat de convergence théorique de l'algorithme d'**Adomian** appliqué aux problèmes de diffusion réaction.
- Enfin, nous abordons un problème de contrôle optimal associé à la diffusion de médicaments dans le cerveau pour une thérapeutique optimale dans le traitement de cancer. Pour cela nous avons fait un couplage de la méthode d'optimisation globale **Alienor** avec la méthode d'**Adomian**, ce qui nous a permis de ramener le problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation classique sans contrainte.

Dans la troisième partie, nous traitons des **équations intégrales** :

- Nous rappelons d'abord les différents types d'équations intégrales et les méthodes classiques de leur résolution numérique.
- Ensuite, nous abordons « **l'étude des équations intégrales de première espèce par la méthode d'Adomian** ». La méthode d'**Adomian** s'applique sans difficulté aux équations intégrales de deuxième espèce et celles de troisième espèce. Cependant une difficulté majeure résidait au niveau des équations de première espèce qui ne sont pas sous la **forme canonique d'Adomian**. Nous montrons par des techniques originales comment construire des formes canoniques appropriées des équations de première espèce afin de rendre possible leur résolution par la méthode décompositionnelle.

SUMMARY

In this thesis we investigate the Adomian decomposition method for solving two classes of functional equations: diffusion-reaction based partial differential equations (PDE's) and integral equations.

This thesis is structured around six chapters divided in three parts

In the first part we give a general presentation of the Adomian method including the main results regarding convergence and Adomian polynomial calculus.

The second part is devoted to diffusion-reaction based PDE's:

We first present general results on diffusion based PDE's and illustrate them on two examples.

We then describe an efficient method for solving diffusion based PDE's. Our method is based on the idea of adding a number of functions to the first term of the Adomian series. We have tested the efficiency of our ideas on concrete examples and obtained theoretical results of significant importance.

Finally we were also able to solve a control problem using a global optimisation method combined with the Adomian method.

In the third part we focus on integral equations:

- We first give general results on integral equations.
- We then describe a number of techniques which we have developed in order to solve integral equations of first kind using the Adomian method.